



**INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA**

WALISON ARRUDA FERREIRA

**CÁLCULO FRACIONÁRIO: NOÇÕES BÁSICAS E
APLICAÇÃO**

**CAJAZEIRAS
2024**

WALISON ARRUDA FERREIRA

CÁLCULO FRACIONÁRIO: NOÇÕES BÁSICAS E APLICAÇÃO

Monografia apresentada junto ao **Curso de Especialização em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Especialista em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. José Ivelton Siqueira Lustosa

Cajazeiras

2024

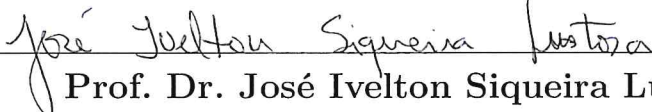
WALISON ARRUDA FERREIRA


CÁLCULO FRACIONÁRIO: NOÇÕES BÁSICAS E APLICAÇÃO

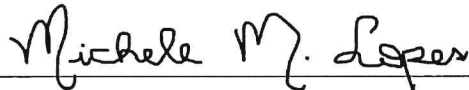
Monografia apresentada ao programa de **Curso de Especialização em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Especialista em Matemática**.

Data de aprovação: 27/03/2024

Banca Examinadora:


Prof. Dr. José Ivelton Siqueira Lustosa
Instituto Federal da Paraíba - IFPB


Prof. Me. José Doval Nunes Martins
Instituto Federal da Paraíba - IFPB


Profa. Dra. Michele Martins Lopes
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

F383c Ferreira, Walison Arruda.
Cálculo fracionário : noções básicas e aplicação / Walison Arruda
Ferreira.– 2024.
39f. : il.
Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) -
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba,
Cajazeiras, 2024.
Orientador(a): Prof. Dr. José Ivelton Siqueira Lustosa.
1. Cálculo. 2. Equação diferencial. 3. Cálculo fracionário. 4.
Função gama. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
da Paraíba. II. Título.

Ao meu querido amigo e irmão Lucas Barbosa (in memoriam), cuja partida prematura deixou saudades indescritíveis. Sua inspiração e amor pela vida foram constantes fontes de força para mim.

Ao meu orientador Dr. Ivelton Lustosa, obrigado por inspirar o meu crescimento pessoal e acadêmico. Sua dedicação é a luz que iluminou meu caminho e é com profundo respeito e emoção que expresso minha gratidão por cada ensinamento.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, professor Dr. José Ivelton Siqueira Lustosa, por todo o apoio, ajuda e por ser um farol que me guiou ao longo desse trabalho. Agradeço por todo o apoio e amizade construída ao longo da vida, todos seus ensinamentos foram cruciais para meu desenvolvimento pessoal e profissional. És um excelente ser humano!

Aos meus pais, Maria Iraide Arruda Alves e José Willys Alves Ferreira, por todo o cuidado e conselhos ao longo desses anos.

A meu irmão Waliff Arruda Ferreira, por sempre acreditar em mim na busca dos meus sonhos.

A minha namorada Jacielle, por ser um exemplo e uma inspiração. Por todo o apoio e companheirismo.

A meu amigo e irmão Lucas Barbosa (in memoriam), por todos os momentos de dedicação e amizade enquanto estava em vida.

Aos meus amigos e colegas de turma, que ousaram trilhar essa jornada comigo. Em especial a meus amigos da Matemática Danilo Morais e Antônio Freitas, por todas as conversas, ideias sugeridas por vocês, eu sou eternamente grato.

Ao Instituto Federal da Paraíba Campus Cajazeiras, seu corpo docente, coordenação e administração e a todos os integrantes dessa instituição.

A todos os professores da Especialização que possibilitaram a conclusão de mais uma etapa profissional em minha vida, em especial prof. MSc. Leonardo Ferreira, Prof. MSc. João Paulo, Prof. MSc. Geraldo Herbetet e Prof. Dr. Rodiney Marcelo.

*“Eu espero que quando a morte te encontrar,
ela te encontre vivo.”*

Provérbio Africano

RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem introdutória ao estudo do cálculo fracionário. Inicialmente, foram apresentadas importantes funções no estudo do cálculo fracionário, tais como: a função Gama e a de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, suas definições e algumas de suas propriedades. Foram exploradas, também, a transformada de Laplace na versão clássica e fracionária, objetivando a sua aplicabilidade na abordagem de uma classe de equações diferenciais fracionárias. Em seguida, foram apresentadas a solução clássica e proposta uma solução fracionária para a equação diferencial que modela a lei do resfriamento de Newton. Para a solução clássica, foi usada como ferramenta, a transformada de Laplace clássica e para a versão fracionária, foram usadas as funções de Mittag-Leffler e a versão fracionária da transformada de Laplace. Finalmente, foram apresentados algumas ilustrações gráficas, referentes a cada solução proposta.

Palavras-chave: Cálculo Fracionário, Lei do Resfriamento de Newton, Função Gama, Função de Mittag-Leffler, Transformada de Laplace.

ABSTRACT

This paper presents an introductory approach to the study of fractional calculus. Initially, important functions in the study of fractional calculus were presented, such as: the Gamma function and the Mittag-Leffler function of one and two parameters, their definitions and some of their properties. The Laplace transform in the classical and fractional versions were also explored, aiming at its applicability in the approach of a class of fractional differential equations. Then, the classical solution was presented and a fractional solution for the differential equation that models Newton's law of cooling were proposed. For the classical solution, the classical Laplace transform was used as a tool, and for the fractional version, the Mittag-Leffler functions and the fractional version of the Laplace transform were used. Finally, some graphic illustrations were presented, referring to each proposed solution.

Keywords: Fractional Calculus, Newton's Law of Cooling, Gamma Function , Mittag-Leffler Function, Laplace Transform.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Curva de Resfriamento Solução Clássica.	37
Figura 2.2 – Curvas de Resfriamento Solução Fracionária.	38
Figura 2.3 – Curvas de Resfriamento Solução Fracionária.	39

SUMÁRIO

Introdução	15
1 CONCEITOS BÁSICOS DE CÁLCULO FRACIONÁRIO . . .	19
1.1 Função Gama	19
1.1.1 Função Beta	22
1.2 Funções de Mittag-Leffler	23
1.3 Função de Mittag-Leffler de um Parâmetro	23
1.4 Função de Mittag-Leffler de dois Parâmetros	23
1.5 Transformada de Laplace	25
1.6 Algumas propriedades da Transformada de Laplace.	27
1.7 Derivada e Integral Fracionária	28
1.7.1 Integral de Riemann-Liouville	29
1.7.2 Derivada de Riemann-Liouville	29
1.7.3 Derivada de Caputo	29
2 LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON: SOLUÇÃO CLÁS-	
SICA E UMA VERSÃO FRACIONÁRIA	32
2.1 Solução Usando o Cálculo Usual	32
2.2 Solução Usando o Cálculo Fracionário	33
2.3 Análise Analítica e Gráfica de uma Situação Problema	36
CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
REFERÊNCIAS	41

INTRODUÇÃO

Desde que o ser humano começou a investigar os fenômenos naturais e a tentar compreender o meio em que está inserido, a modelagem matemática é uma das ferramentas de estudo usada na busca pela compreensão do universo por parte do homem. A ideia é desenvolver ferramentas para investigação do fenômeno analisado, de modo que possa ser possível estabelecer resultados capazes de analisar e descrever o estudo em pauta (TIEPPO; GRUZZO, 2018).

A modelagem matemática trata de técnicas matemáticas para retratar, antecipar ou compreender fenômenos que englobam todo o cosmo. É um método extensivamente presente em diversas áreas de estudo tais como: Física, Economia, Biologia, Engenharia e demais ciências (CHAVES; SANTO, 2008).

Vale destacar que o ser humano sempre valeu-se dos modelos matemáticos, tanto para inter-relacionar-se com seus semelhantes como para planejar uma ação. Desta forma, a modelagem, arte de moldar, é um método que ergue-se da própria razão e complementa nossa vida como aspecto de constituição e compreensão do conhecimento (BIEMBENGUT; HEIN, 2000).

Um modelo matemático, abrange inúmeras variáveis que necessitam ser quantificadas e qualificadas de forma que, por diagramas, desenhos, tabelas, gráficos, softwares ou equações, se tenha uma solução plausível que possibilite a compreensão da veracidade do estudo e a formação de conclusões e interpretações importantes. (RODRIGUES *et al.*, 2019).

A lei do resfriamento de Newton é um modelo clássico de equação diferencial ordinária voltado para resolver problemas referentes à variação de temperatura. O referido modelo baseia-se em um fenômeno físico e é utilizada para o estudo de fenômenos como a alteração de temperatura de uma elementar xícara de café no decorrer de seu resfriamento ou na dissolução de uma bola de sorvete, ou ainda no processo de resfriamento de um bolo, entre outros fenômenos (ALITOLEF, 2011).

Segundo Duarte (2019), baseado nos estudos de Silva (2014), um objeto com temperatura T que não possui nenhuma fonte de calor em seu interior, quando abandonado no meio ambiente, sua temperatura tende a convergir para a temperatura T_m das imediações a qual foi inserido.

Para descrever a equação diferencial que rege este problema deve-se tomar algumas

hipóteses que segundo Figueiredo e Neves (1979) são:

- A temperatura $T = T(t)$ dependente do tempo e de ser considerada a mesma em todos os pontos do objeto analisado;
- A temperatura T_m do meio ambiente é constante, se comportando ao decorrer do tempo da mesma forma em todas as imediações;
- O fluxo de calor por meio das paredes do objeto é proporcional à diferença entre as temperaturas do objeto e do meio ambiente.

Tomando como válidas tais hipóteses e fundamentado-se nas ideias de Zill e Cullen (2001) e Lustosa (2017), a lei do resfriamento de Newton pode ser enunciada como segue: a taxa de variação de temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo (T) e a temperatura ambiente T_m , isto é,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \quad (1)$$

em que k é uma constante de proporcionalidade. Percebe-se que $k < 0$, pois por hipótese, o corpo está resfriando.

O cálculo fracionário é uma das áreas da matemática que estuda os conceitos de derivada e integral de ordem arbitrária. Para Sant'anna (2009) baseado nos estudos de Oldham e Spanier (1974) e Miller e Ross (1993), por mais que seja um tema pouco abordado diariamente, esta área de estudo não é algo atual. Provavelmente, o marco primordial do cálculo fracionário remete o ano de 1695, (época do desenvolvimento das ideias fundamentais do cálculo, autonomamente, por Newton e Leibniz) com uma carta de L'Hospital para Leibniz, em que o mesmo era interrogado a respeito da expressão

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} f(x). \quad (2)$$

A explicação de Leibniz ao seu amigo, acrescentando à contribuição de diversos brilhantes matemáticos como Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Heaviside, Liouville, entre outros, trouxeram às primeiras noções de derivadas e integrais de ordem não inteiras, que ao fim do século XIX, devido inicialmente as definições dadas por Riemann-Liouville, Weyl, Grünwald-Letnikov, aparentavam estar completas (CAMARGO, 2009).

Para Sant'anna (2009), nos vigentes 200 anos, muitas notações de integrais e derivadas fracionárias foram elucidadas como conceitos importantes. Entre eles pode-se citar as definições de Fourier, Caputo, Riemann-Liouville, Weyl, Grünwald-Letnikov.

Nas últimas décadas, diversos pesquisadores apresentaram seus conceitos singulares para a expressão d^n/dx^n para n não necessariamente inteiro e positivo. Desta forma, temos diversas definições de derivada de ordem não inteira, assim, chamada em muitas literaturas como derivada de ordem fracionária, mesmo que a ordem n não seja um número racional. Evidentemente algumas notações apresentaram ser mais úteis do que outras em virtude de algumas propriedades (TIEPPO; GRUZZO, 2018).

Em suas pesquisas Camargo (2009) com base nas definições introduzidas por Caputo e Grünwald-Letnikov, e estudos desenvolvidos por inúmeros autores, percebe-se que a modelagem desenvolvida a partir do cálculo fracionário proporciona em certos casos uma descrição mais robusta de determinados fenômenos naturais, quando comparados a modelos clássicos. Isso se deve ao fato de o operador fracionário apresentar "efeito de memória". Tal efeito é carregado pelo parâmetro fracionário introduzido nos referidos operadores.

Em meio as inúmeras aplicações do cálculo fracionário, podemos salientar a inserção de memória em um modelo clássico, isto é, alterar um sistema dado por equações diferenciais ordinárias, com o propósito de aprimorar o mesmo. Introduzir memória em um sistema, significa tornar o mesmo com maior potencialidade para a interpretação de certos fenômenos naturais (LOPES, 2019).

Neste sentido, o trabalho objetiva abordar inicialmente alguns conceitos básicos do cálculo fracionário e, por fim, aplicá-los em um estudo referente a lei do resfriamento de Newton.

A partir disso, pautamos esse estudo em definir a função gama e as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, definir a Transformada de Laplace, citar algumas de suas propriedades e apresentar soluções para lei do resfriamento, usando cálculo clássico, como também o cálculo fracionário.

Assim, um dos pressupostos do trabalho é apresentar um modelo para a lei do resfriamento de Newton, utilizando conceitos de cálculo fracionário, visando mostrar uma possível solução analítica para tal modelo. E, em seguida, comparar as curvas de resfriamento obtidas no modelo fracionário com as respectivas curvas apresentadas pelo modelo clássico.

Para obter tal modelo, incorporou-se o parâmetro α à Equação (1), obtendo assim, a equação diferencial fracionária linear não homogênea de ordem α :

$$\frac{d^\alpha T}{dt^\alpha} = k(T - T_m), \quad (3)$$

com $0 < \alpha \leq 1$.

Para buscar a solução analítica do problema, é usada a derivada de Caputo e a condição de contorno $T(0) = T_0$ (LUSTOSA, 2022).

Vale salientar que será mantida a condição de contorno do problema clássico, visando não alterar sua natureza física. É deste fato que vem a escolha da derivada de Caputo (LUSTOSA, 2022).

1 CONCEITOS BÁSICOS DE CÁLCULO FRACIONÁRIO

Neste capítulo será abordado alguns conceitos básicos do cálculo fracionário, dando ênfase aos tópicos utilizados para obter uma possível solução para a Equação (3).

1.1 FUNÇÃO GAMA

Na literatura, a função gama é apresentada de várias formas. Gauss, por exemplo, apresentou por meio de um processo de limite. Carl Weierstrass o fez, empregando um produto infinito (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). Aqui, tal função será abordada com base em uma representação de integral imprópria, apresentada pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) em 1729, quando estudava movimentos harmônicos (MELO, 2021). Tal definição é dada como segue.

Definição 1.1. Seja $z \in \mathbb{C}$ com $Re(z) > 0$, a função gama, é definida, pela integral imprópria

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (4)$$

A notação Γ foi atribuída por Legendre (1752 – 1833) em 1811, e suas aplicações estão idealizadas na astronomia, dinâmica dos fluidos, física quântica, e até mesmo para determinar o tempo entre um terremoto e outro (MELO, 2021). Ela surge com propósito de generalizar a noção do fatorial de um número natural. Dessa maneira, definindo-se de forma adequada, é capaz de computar o fatorial de números complexos (OTTONI, 2018).

Diretamente da Definição (1.1), decorre as seguintes propriedades:

Propriedade 1.1. $\Gamma(1) = 1$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^j e^{-t} dt \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{e^t} \Big|_0^j \right] \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{e^j} + e^0 \right] = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

□

Propriedade 1.2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^{(z+1)-1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^j t^z e^{-t} dt \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(t^z (-e^{-t}) \Big|_0^j - \int_0^{\infty} -e^{-t} z t^{z-1} dt \right) \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} t^z (-e^{-t}) \Big|_0^j + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\
&= 0 + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned} \tag{6}$$

□

Propriedade 1.3. $\Gamma(z+1) = z!$

Demonstração. Do resultado obtido da Propriedade (1.2), tem-se que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{7}$$

De fato, podemos ver que se $z \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\
&= z(z-1)\Gamma(z-1) \\
&= [z(z-1)(z-2)\dots 1]\Gamma(1).
\end{aligned} \tag{8}$$

Disso conclui-se que, a função gama generaliza a função fatorial. □

Da Definição (1.1) também é possível mostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.
\end{aligned} \tag{9}$$

Fazendo a mudança de variável $t = u^2$ e $dt = 2udu$. Substituindo na Equação (9), tem-se:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \int_0^{\infty} (u^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-u^2} u du \\
&= 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du.
\end{aligned} \tag{10}$$

Tomando $h = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ na Equação (10) e elevando ao quadrado, tem-se

$$\begin{aligned} h^2 &= \left[2 \int_0^\infty e^{-u^2} du\right]^2 \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2} du \cdot e^{-u^2} du. \end{aligned} \quad (11)$$

Sem perda de generalidade, pode-se trocar u por k em qualquer uma das integrais, obtendo

$$h^2 = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2} du \cdot e^{-k^2} dk. \quad (12)$$

Daí, temos:

$$h^2 = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+k^2)} du dk. \quad (13)$$

Tomando $k = um \implies dk = u dm$. Daí substituindo em (13), vem

$$\begin{aligned} h^2 &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+u^2m^2)} u du dm \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2(1+m^2)} u du dm. \end{aligned} \quad (14)$$

Agora, tomando $v = u^2 \implies dv = 2u du \implies u du = \frac{dv}{2}$. Assim:

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{4}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-v(1+m^2)} dv dm \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{-1}{(1+m^2)} e^{-v(1+m^2)} \Big|_0^\infty dm \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{(1+m^2)} dm \implies h^2 = 2 \arctan(m) \Big|_0^\infty \\ &= 2 \frac{\pi}{2} \implies h^2 = \pi \implies h = \sqrt{\pi}. \end{aligned} \quad (15)$$

Por fim,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (16)$$

De tal resultado, pode-se determinar o valor da função gama para quaisquer valores fracionários que possuam denominadores 2. Segue alguns casos.

$$1) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad (17)$$

$$2) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}; \quad (18)$$

$$3) \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}; \quad (19)$$

$$4) \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2} + 1\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{15\sqrt{\pi}}{8} = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}. \quad (20)$$

Ainda da definição percebe-se que a função gama não está definida para $z = 0$. De fato, da Propriedade (1.2) tem-se $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Tomando $z = 0$, tem-se $\Gamma(0+1) = 0 \implies \Gamma(1) = 0$, contradizendo assim a Propriedade (1.1).

Ainda da propriedade 1.2, tem-se que $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$. Logo, para $z = -1$, tem-se $\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1}$, isto é, $\Gamma(-1)$ depende de $\Gamma(0)$ que não está definida. Seguindo este raciocínio, conclui-se que a função gama não está definida para $z \in \mathbb{C}$, com $z = m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq 0$.

Vale salientar, por exemplo, que para frações negativas com denominador 2, pode-se encontrar valores da função gama, a partir de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Observe alguns exemplos.

$$1) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}. \quad (21)$$

$$2) \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2} + 1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}. \quad (22)$$

Na verdade, a função gama está definida para todo complexo \mathbb{C} , excluindo, os elementos $z = m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq 0$.

1.1.1 Função Beta

A função beta, também chamada de integral de Euler de primeiro tipo ou função Euleriana, é uma função essencial na resolução de equações diferenciais fracionárias, pois ajuda na simplificação de determinadas soluções. Sua definição é dada como segue.

Definição 1.2. A integral de parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, definida por

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} dz. \quad (23)$$

Se $\alpha \geq 1$ e $\beta \geq 1$ a integral é própria, porém se $0 < \alpha < 1$ ou $0 < \beta < 1$ esta integral é imprópria convergente.

A função beta está associada com a função gama como segue

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \quad (24)$$

Demonstração. Ver (LOPES, 2019). □

1.2 FUNÇÕES DE MITTAG-LEFFLER

Há mais de um século Mittag-Leffler apresentou uma função, que atualmente recebe o nome de função de Mittag-Leffler, em sua homenagem. Seu principal objetivo com tal feito foi a generalização da função exponencial. Fato que se apresenta como aplicação direta para obtenção de soluções de equações diferenciais com ordem não inteira.

Será apresentado neste capítulo a função de Mittag-Leffler com parâmetros um e dois e algumas de suas propriedades.

1.3 FUNÇÃO DE MITTAG-LEFFLER DE UM PARÂMETRO

Definição 1.3. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um parâmetro tal que $Re(\alpha) > 0$. Define-se a função de Mittag-Leffler de um parâmetro por

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{z^w}{\Gamma(\alpha w + 1)}. \quad (25)$$

Note que $E_{\alpha}(z)$ é uma função complexa. Ela foi introduzida pelo matemático sueco Gösta Mittag-Leffler em 1903 (CONTHARTEZE, 2014).

É fácil perceber que para $\alpha = 1$,

$$E_1(z) = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{z^w}{\Gamma(w + 1)} = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{z^w}{w!}, \quad (26)$$

que é a expansão da função exponencial em uma série de potências.

1.4 FUNÇÃO DE MITTAG-LEFFLER DE DOIS PARÂMETROS

Por meados de 1905, Wiman estudando as funções de Mittag-Leffler, sugeriu uma generalização, que hoje é chamada de função de Mittag-Leffler de dois parâmetros (TEODORO, 2014). Sua definição é dada a seguir.

Definição 1.4. Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ com $Re(\alpha) > 0$ e $Re(\beta) > 0$. A função de Mittag-Leffler de parâmetros α e β é definida por

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{z^w}{\Gamma(\alpha w + \beta)}. \quad (27)$$

Note que essa função generaliza a função de Mittag-Leffler de um parâmetro, pois elas coincidem quando $\beta = 1$. Isto é, pela Equação (25), temos:

$$E_{\alpha, 1}(z) = E_{\alpha}(z). \quad (28)$$

Tomando $z = -\lambda t^\alpha$, com $t \in \mathbb{R}$ e $-\lambda \in \mathbb{C}$ nas equações (25) e (28), obtém-se

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^w}{\Gamma(\alpha w + 1)} \quad (29)$$

e

$$E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^\alpha) = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^w}{\Gamma(\alpha w + \beta)}. \quad (30)$$

São apresentadas a seguir algumas das propriedades das funções de Mittag-Leffler.

Propriedade 1.4. $E_\alpha(0) = 1$.

Demonstração. Expandindo (29), obtém-se:

$$\begin{aligned} E_\alpha(-\lambda t^\alpha) &= \frac{(-\lambda t^\alpha)^0}{\Gamma(0+1)} + \frac{(-\lambda t^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(-\lambda t^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{(-\lambda t^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \\ &= 1 + \frac{(-\lambda t^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(-\lambda t^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{(-\lambda t^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

como $t \in \mathbb{R}$, pode-se tomar $t = 0$ em (31) de onde obtém-se

$$E_\alpha(0) = 1. \quad (32)$$

□

Propriedade 1.5. *Seja z e α complexos, com $\text{Re}(\alpha) > 0$, então:*

$$zE_{\alpha,\alpha+1}(z) = E_\alpha(z) - 1$$

Demonstração. Da equação (27) com $\beta = \alpha + 1$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\alpha+1}(z) &= \sum_{w=0}^{\infty} \frac{z^w}{\Gamma(\alpha w + \alpha + 1)} = \frac{1}{z} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{z^{w+1}}{\Gamma(\alpha w + \alpha + 1)} \\ &= \frac{1}{z} \left[\frac{z}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{z^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{z} \left[-1 + \left(1 + \frac{z}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{z^3}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{z} \left[-1 + \sum_{w=0}^{\infty} \frac{z^w}{\Gamma(\alpha w + 1)} \right] = \frac{1}{z} [-1 + E_\alpha(z)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$E_{\alpha,\alpha+1}(z) = \frac{1}{z} [E_\alpha(z) - 1]. \quad (33)$$

□

1.5 TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace é uma das ferramentas fundamentais para a solução de equações diferenciais lineares. A denominação é uma homenagem ao matemático, astrônomo e físico Pierre Simon Marquis de Laplace (1749 – 1827), nascido na França, filho de Marie Anne Sochon e Pierre Laplace. Tal transformada é um operador integral sob uma função f que usualmente tem domínio variando no tempo. Desta forma pode-se definir como segue.

Definição 1.5. Seja $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A transformada de Laplace bilateral de f , é definida por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} dt, \quad (34)$$

em que $s \in \mathbb{C}$, isto é, $s = \alpha + i\rho$ com $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$ (BONI, 2017).

Definição 1.6. Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A transformada de Laplace unilateral de f é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (35)$$

para os valores de $s \geq 0$ nos quais a integral converge.

Deste modo, se a integral imprópria (35) converge, o resultado é uma função em s . Podemos definir $s \in \mathbb{R}$ ou $s \in \mathbb{C}$, dependendo da contextualização do problema em que será utilizado (LUSTOSA, 2017).

A transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$ de uma função f é uma função variável em s . Usamos a letra maiúscula para a transformada e a minúscula para a função. Daí: $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[h(t)] = H(s)$; $\mathcal{L}[w(t)] = W(s)$.

A integral imprópria (35), é equivalente a

$$F(s) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^j e^{-st} f(t) dt, \quad (36)$$

contanto que esse limite exista e seja finito.

A seguir serão apresentados alguns exemplos do cálculo da transformada de Laplace para funções básicas.

Exemplo 1. Seja $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s}$.

Demonstração.

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^j e^{-st} dt. \quad (37)$$

Tomando $u = -st \implies du = -sdt$. Fazendo a substituição na Equação (37) tem-se:

$$\mathcal{L}(1) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^j e^u \left[\frac{-du}{s} \right] = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{s} e^u \right] \Big|_0^j = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{s} e^{-sj} + \frac{1}{s} \right].$$

Como $s > 0$, conclui-se que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{s} e^{-sj} + \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{s}.$$

□

Exemplo 2. *Mostrar que $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$.*

Demonstração. Tem-se que

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^\infty t e^{-st} dt. \quad (38)$$

Tomando, $u = t$ e $dv = e^{-st} dt$, obtém-se $du = dt$ e $v = -\frac{1}{s} e^{-st}$. Substituindo na Equação (38), obtém-se

$$\mathcal{L}(t) = \frac{-t}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left[\frac{-1}{s} e^{-st} \right] dt = \frac{-t e^{-st}}{s} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = 0 + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

□

Exemplo 3. *Seja $\mathcal{L}[t^k] = \frac{k!}{s^{k+1}}$.*

Demonstração. Seja

$$F_k(s) = \mathcal{L}[t^k](s) = \int_0^\infty e^{-st} t^k dt = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^j e^{-st} t^k dt, \quad (39)$$

Tomando $u = t^k \implies du = k t^{k-1} dt$ e $dv = e^{-st} dt \implies v = -\frac{e^{-st}}{s}$. Substituindo na Equação (39), tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^j e^{-st} t^k dt &= \left[\left(\frac{-e^{-st}}{s} t^k \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{-e^{-st}}{s} \right) k t^{k-1} dt \right] \\ &= \left(\frac{-e^{-st}}{s} t^k \right) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \left(\frac{e^{-st}}{s} \right) k t^{k-1} dt \\ &= \frac{k}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{(k-1)} dt. \end{aligned} \quad (40)$$

Perceba que

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{(k-1)} dt = F_{k-1}(s), \quad (41)$$

é a transformada da função $f_{k-1}(t) = t^{k-1}$. Daí pode-se escrever

$$F_k(s) = \frac{k}{s} F_{k-1}(s). \quad (42)$$

Deste modo, tem-se por recorrência, que

$$F_k(s) = \frac{k}{s} F_{k-1}(s) = \frac{k}{s} \frac{k-1}{s} F_{k-2}(s) = \frac{k!}{s^k} F_0(s). \quad (43)$$

Porém, $F_0(s)$ é a transformada do caso $k = 0$, isto é, para o caso da função constante $f(t) = 1$, calculada no Exemplo (1). Assim, conclui-se que

$$F_k(s) = \frac{k!}{s^k} \frac{1}{s} = \frac{k!}{s^{k+1}}. \quad (44)$$

□

1.6 ALGUMAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

Propriedade 1.6. *A Transformada de Laplace é um operador linear.*

Demonstração. Sejam f e g funções definidas em $[0, \infty)$ e α_1, α_2 constantes reais. Da Definição (1.6) tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha_1 f(t) + \alpha_2 g(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} [\alpha_1 f(t) + \alpha_2 g(t)] dt \\ &= \alpha_1 \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + \alpha_2 \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= \alpha_1 \mathcal{L}[f(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[g(t)] \\ &= \alpha_1 F(s) + \alpha_2 G(s), \end{aligned}$$

o que prova o resultado. □

Propriedade 1.7. *Seja f uma função derivável. Então*

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \quad (45)$$

Demonstração. Por definição,

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt.$$

Tomando $u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st}$ e $dv = f'(t) \Rightarrow v = f(t)$. Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \left[e^{-st} f(t) \right] \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= -f(0) + s \mathcal{L}[f(t)] \\ &= sF(s) - f(0). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.6.1. (*Transformadas de derivadas - Caso Inteiro*). Sejam $f(t)$, $f'(t)$, ... $f^{n-1}(t)$ contínuas em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial. Sendo $f^{(n)}(t)$ contínua por parte em $[0, \infty)$, então

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{n-1}(0), \quad (46)$$

em que $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Demonstração. A demonstração será feita usando o princípio da indução finita (PIF). O caso $n = 1$ é mostrado na Propriedade (1.7).

Considere que a sentença seja verdadeira para $n = k \geq 1$, isto é

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k F(s) - s^{(k-1)} f(0) - s^{(k-2)} f'(0) - s^{(k-3)} f''(0) - \dots - f^{(k-1)}(0).$$

Para $n = k + 1$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(k+1)}(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f^{(k+1)}(t) dt \\ &= \left[e^{-st} f^{(k)}(t) \right] \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f^{(k)}(t) dt \\ &= -f^{(k)}(0) + s \mathcal{L}[f^{(k)}(t)] \\ &= s [s^k F(s) - s^{(k-1)} f(0) - s^{(k-2)} f'(0) - s^{(k-3)} f''(0) - \dots - f^{(k-1)}(0)] - f^{(k)}(0) \\ &= s^{(k+1)} F(s) - s^k f(0) - s^{(k-1)} f'(0) - s^{(k-2)} f''(0) - \dots - s f^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue. \square

Teorema 1.6.2. (*Transformada de Laplace Inversa*). Seja $s = \sigma + i\tau$ com $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, o parâmetro da transformada de Laplace. A representação integral para a transformada de Laplace inversa, denotada por $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, no plano complexo, é dada por

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} e^{sx} F(s) ds. \quad (47)$$

em que $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 0$ e todas as singularidades da função $F(s)$ estão a esquerda da linha reta $\operatorname{Re}(s) = \sigma$ no plano complexo (LUSTOSA, 2022).

Demonstração. Ver (DEBNATH; BHATTA, 2006). \square

1.7 DERIVADA E INTEGRAL FRACIONÁRIA

A derivada fracionária é facultada em termos da integral fracionária. Tendo em vista que existe um número crescente de formulações envolvendo a derivada fracionária, é pertinente um critério que um operador deve satisfazer para que esse possa ser chamado de derivada fracionária (TEODORO; OLIVEIRA, 2017).

Será definido inicialmente a integral fracionária de Riemann-Liouville e, em seguida, a derivada de Caputo.

1.7.1 Integral de Riemann-Liouville

Definição 1.7. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}(v) > 0$. A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem v , atuando numa função $f \in L^p[a, b]$, $1 \leq p < +\infty$, $-\infty < a < b < +\infty$, para $x \in [a, b]$ é definida por

$$J^v f(x) := \frac{1}{\Gamma(v)} \int_a^x (x - \xi)^{v-1} f(\xi) d\xi, \quad (48)$$

com $x > a$, $\Gamma(\cdot)$ uma função gama e $J^0 f(x) = f(x)$.

É significativo observar que a integral de Riemann-Liouville é determinada pela classe de funções nas quais o operador atua, bem como pelo respectivo intervalo de integração (LUSTOSA, 2022).

1.7.2 Derivada de Riemann-Liouville

Definição 1.8. Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $b > 0$ e $f \in L^1([0, b]) : \mathbb{R}^n$, com $f * g_{1-\alpha} \in W^{1,1}([0, b]) : \mathbb{R}^n$. A derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem α é definida por

$$D_t^\alpha = D_t^\alpha J_t^{1-\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \right). \quad (49)$$

Perceba que a derivada de Riemann-Liouville é uma derivada de ordem inteira de uma integral fracionária. Para mais detalhes ver (LOPES, 2019).

1.7.3 Derivada de Caputo

Será apresentado aqui, a derivada formulada por Caputo. Uma característica relevante da referida formulação reside no fato de que a derivada de Caputo de uma constante é zero, bem como a expressão para a derivada de ordem inteira é recuperada de forma natural (LUSTOSA, 2022). Sua definição é dada a seguir.

Definição 1.9. Sejam $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(v)$, $n = 1 + [\operatorname{Re}(v)]$ com $[\operatorname{Re}(v)]$ a parte inteira de $\operatorname{Re}(v)$, $n \in \mathbb{N}$ e $v \notin \mathbb{N}$. Seja $f(x) \in AC^n[a, b]$. A derivada de Caputo de ordem v , atuando na função $f(x)$ com $-\infty < a < b < +\infty$ para $x \in [a, b]$ é definida por

$$\begin{aligned} D^v f(x) &= J^{n-v} D^n f(x), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-v)} \int_a^x (x-\xi)^{n-v-1} D^n f(\xi) d\xi, \quad n \notin v, \\ &= D^n f(x), \quad n = v. \end{aligned} \quad (50)$$

Como se pode perceber da Definição (1.9), a derivada fracionária no sentido de Caputo é uma integral de ordem arbitrária de uma derivada de ordem inteira (TEODORO *et al.*, 2017).

Teorema 1.7.1. (*Transformada de Laplace da derivada de Caputo*). Sejam $\Re(\mu) > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 < \Re(\mu) \leq n$. A transformada de Laplace da derivada de Caputo é dada por

$$\mathcal{L}[D^\mu f(x)] = s^\mu \mathcal{L}[f(x)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\mu-1-k} f^{(k)}(0). \quad (51)$$

Em que s é um parâmetro da transformada de Laplace e

$$f^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} D^k f(x).$$

Exemplo 4. Mostre que $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+1} \right] = E_\alpha(-t^\alpha)$.

Solução: Usando o Teorema (1.6.2), pode se escrever:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(S)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} e^{st} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+1} \right] ds.$$

Dividindo o numerador e denominador de $\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+1} \right]$ por s^α , a transformada inversa fica com o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} e^{st} \frac{s^{-1}}{1 + \frac{1}{s^\alpha}} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\tau}^{\delta+i\tau} e^{st} \frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{1}{s^\alpha}} ds. \end{aligned}$$

Perceba que podemos escrever $\frac{1}{1 + \frac{1}{s^\alpha}}$, como uma série geométrica, cuja razão é $-\frac{1}{s^\alpha}$, que converge pois $\left| -\frac{1}{s^\alpha} \right| < 1$. Logo,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} \frac{e^{st}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \left(\frac{1}{s^{\alpha k}} \right) \right] ds. \quad (52)$$

Rearranjando os termos da Equação (51), obtém-se

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} \frac{1}{s} \frac{e^{st}}{s^{\alpha k}} ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} \frac{e^{st}}{s^{\alpha k+1}} ds. \end{aligned} \quad (53)$$

Percebe-se que

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} \frac{e^{st}}{s^{\alpha k+1}} ds \quad (54)$$

é, conforme o Teorema (1.6.2) a transformada de Laplace inversa de $\frac{1}{s^{\alpha k+1}}$. Daí, pode-se escrever

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha k+1}} \right]. \quad (55)$$

Multiplicando o denominador e numerador da fração da Equação (55) por $\Gamma(\alpha k + 1)$, que é correspondente a $(\alpha k)!$, desde que $(\alpha k) \in \mathbb{N}$, chega-se ao resultado obtido no Exemplo (3). Logo, usando o fato que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{s^{\alpha k+1}} \right] = t^{\alpha k}, \quad (56)$$

e sendo $\Gamma(\alpha k + 1)$ uma constante em relação a transformada de Laplace inversa, pode-se escrever

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{s^{\alpha k+1}} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{s^{\alpha k+1}} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} t^{\alpha k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \end{aligned} \quad (57)$$

No entanto, a última linha da Equação (57) é a expressão em série da função de Mittag-Leffler de um parâmetro para $z = -t^\alpha$. Portanto, conclui-se que $f(t) = E_\alpha(-t^\alpha)$.

Analogamente pode-se concluir que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + m} \right] = E_\alpha(-mt^\alpha) \quad (58)$$

e

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - m} \right] = E_\alpha(mt^\alpha). \quad (59)$$

2 LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON: SOLUÇÃO CLÁSSICA E UMA VERSÃO FRACIONÁRIA

A lei do resfriamento de Newton afirma que a taxa de resfriamento de um corpo é proporcional a diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente.

Para um corpo com temperatura inicial T_0 , que se encontra em um ambiente com temperatura T_m , a taxa de variação de sua temperatura é descrita pela Equação (1) (LUSTOSA, 2017).

2.1 SOLUÇÃO USANDO O CÁLCULO USUAL

Neste caso, será utilizada como ferramenta a transformada de Laplace, considerando que o equilíbrio térmico ocorra quando o corpo atinja a temperatura ambiente T_m , suposta constante. Daí, pode-se escrever

$$\frac{dT}{dt} - kT = -kT_m.$$

Aplicando a transformada de Laplace, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{dT}{dt}\right] - k\mathcal{L}[T] &= kT_m\mathcal{L}(1) \\ sT(s) - T(0) - kT(s) &= -kT_m\frac{1}{s} \\ T(s)(s - k) - T(0) &= -kT_m\frac{1}{s} \\ T(s)(s - k) &= -kT_m\frac{1}{s} + T(0). \end{aligned} \tag{60}$$

Tomando $T(0) = T_0$, vem

$$T(s) = \frac{-kT_m}{s(s - k)} + \frac{T_0}{s - k}. \tag{61}$$

O primeiro termo do segundo membro da Equação (61) pode ser escrito com segue

$$\frac{-kT_m}{s(s - k)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - k} = \frac{A(s - k) + Bs}{s(s - k)}. \tag{62}$$

Da Equação (62), obtém-se o sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -Ak = -T_mk \end{cases} \tag{63}$$

que resolvendo chega-se a $A = T_m$ e $B = -T_m$. Logo,

$$T(s) = \frac{T_m}{s} - \frac{T_m}{s - k} + \frac{T_0}{s - k}. \tag{64}$$

Aplicando a transformada inversa na Equação (64), obtém-se

$$T(t) = T_m - T_m e^{kt} + T_0 e^{kt} = T_m + (T_0 - T_m) e^{kt}, \quad (65)$$

que descreve a temperatura do corpo em um dado instante t .

2.2 SOLUÇÃO USANDO O CÁLCULO FRACIONÁRIO

Para isso vamos utilizar a transformada de derivadas fracionárias. Temos que para $m - 1 < \alpha \leq m$

$$\mathcal{L}[f^{(\alpha)}](t) = s^{(\alpha)} F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} [s^{(\alpha-1-k)} f^{(k)}(0)].$$

Da Equação (1), tem-se que

$$\frac{dT}{dt} = C(T - T_m).$$

Usando a derivada de ordem α com $0 < \alpha \leq 1$, obtém-se

$$\frac{d^\alpha T}{dt^\alpha} = C(T - T_m). \quad (66)$$

Aplicando a transformada de Laplace, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d^\alpha T}{dt^\alpha}\right] &= C\mathcal{L}[T - T_m] \\ s^\alpha T(s) - s^{\alpha-1} T(0) &= CT(s) - T_m C \frac{1}{s} \\ (s^\alpha - C)T(s) &= -CT_m \frac{1}{s} + T(0)s^{\alpha-1}. \end{aligned} \quad (67)$$

Definindo $T(0) = T_0$, temos

$$\begin{aligned} (s^\alpha - C)T(s) &= -CT_m \frac{1}{s} + T_0 s^{\alpha-1} \\ T(s) &= -CT_m \frac{1}{s(s^\alpha - C)} + T_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - C} \\ T(s) &= T_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - C} - \frac{CT_m}{s(s^\alpha - C)}. \end{aligned} \quad (68)$$

Aplicando a transformada inversa tem-se

$$T(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - C}\right] T_0 - T_m \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{s(s^\alpha - C)}\right]. \quad (69)$$

Para obter as transformadas inversas presentes na Equação (69), serão utilizadas as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros conforme (25) e (27).

Inicialmente tem-se da Equação (59) que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - C} \right] = E_\alpha(ct^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ct^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (70)$$

Agora, será apresentado o cálculo para

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C}{s(s^\alpha - C)} \right].$$

Perceba que

$$\begin{aligned} \frac{C}{s(s^\alpha - C)} &= \frac{C}{s} \cdot \frac{1}{s^\alpha - C} \\ &= \frac{C}{s} \cdot \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{1 - \frac{C}{s^\alpha}} \\ &= \frac{C}{s} \cdot \frac{1}{s^\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{C}{s^\alpha}} \\ &= \frac{C}{s^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{C}{s^\alpha}}. \end{aligned} \quad (71)$$

Considerando os casos em que $\left| \frac{C}{s^\alpha} \right| < 1$, tem-se

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{s^{\alpha k}} = 1 + \frac{C}{s^\alpha} + \frac{C^2}{s^{2\alpha}} + \frac{C^3}{s^{3\alpha}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{C}{s^\alpha}}. \quad (72)$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C}{s(s^\alpha - C)} \right] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{st} \frac{C}{s(s^\alpha - C)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{C e^{st}}{s^{\alpha+1}} \frac{1}{1 - \frac{C}{s^\alpha}} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{C e^{st}}{s^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{s^{\alpha k}} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} C^{k+1} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{e^{st}}{s^{\alpha(k+1)+1}} ds. \end{aligned} \quad (73)$$

Mas,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha(k+1)+1}} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{e^{st}}{s^{\alpha(k+1)+1}} ds. \quad (74)$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C}{s(s^\alpha - C)} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} C^{k+1} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha(k+1)+1}} \right]. \quad (75)$$

Multiplicando e dividindo por

$$\Gamma[\alpha(k+1)+1],$$

tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^\alpha - C)}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} C^{k+1} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\alpha(k+1)+1}}\right] \frac{\Gamma[\alpha(k+1)+1]}{\Gamma[\alpha(k+1)+1]} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} C^{k+1} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma[\alpha(k+1)+1]}{s^{\alpha(k+1)+1}}\right] \frac{1}{\Gamma[\alpha(k+1)+1]}.\end{aligned}\quad (76)$$

Mas do Exemplo 3,

$$\mathcal{L}(t^k) = \frac{k!}{s^{k+1}},$$

então

$$t^k = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k!}{s^{k+1}}\right]$$

Assim, para $\alpha(k+1) \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma[\alpha(k+1)+1]}{s^{\alpha(k+1)+1}}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha(k+1)!}{s^{\alpha(k+1)+1}}\right] = t^{\alpha(k+1)}.\quad (77)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^\alpha - C)}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} C^{k+1} \frac{t^{\alpha(k+1)}}{\Gamma[\alpha(k+1)+1]} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ct^\alpha)^{k+1}}{\Gamma[\alpha k + \alpha + 1]} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ct^\alpha)^{k+1}}{\Gamma[\alpha k + \alpha + 1]}\end{aligned}\quad (78)$$

Desenvolvendo a Equação (78), tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ct^\alpha)^{k+1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} &= \frac{Ct^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(Ct^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(Ct^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \\ &= -1 + 1 + \frac{Ct^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(Ct^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(Ct^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \\ &= -1 + \frac{(Ct^\alpha)^0}{\Gamma(0\alpha + 1)} + \frac{Ct^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(Ct^\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(Ct^\alpha)^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ct^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} - 1 = E_\alpha(Ct^\alpha) - 1.\end{aligned}\quad (79)$$

Portanto, substituindo as Equações (70) e (79) na Equação (69), pode-se escrever

$$\begin{aligned}T(t) &= E_\alpha(Ct^\alpha)T_0 - T_m[E_\alpha(Ct^\alpha) - 1] \\ T(t) &= T_m + (T_0 - T_m)E_\alpha(Ct^\alpha).\end{aligned}\quad (80)$$

Perceba que se $\alpha = 1$

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)E_1(Ct).\quad (81)$$

Mas,

$$E_1(CT) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(CT)^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(CT)^k}{k!} = e^{CT}. \quad (82)$$

Substituindo a Equação (82) na Equação (81) obtém-se

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{Ct}, \quad (83)$$

recuperando assim, a solução usual.

2.3 ANÁLISE ANALÍTICA E GRÁFICA DE UMA SITUAÇÃO PROBLEMA

Para representar graficamente as curvas de resfriamento tanto para a solução clássica como para a solução fracionária proposta, analisou-se a seguinte situação-problema:

Problema: Considere que um determinado corpo se encontre em um ambiente com temperatura inicial de 70° ¹. Em seguida, o corpo é colocado em um local, cuja temperatura ambiente é 30° . Vinte minutos após ser colocado em tal ambiente, verifica-se que sua temperatura passou a ser 60° . Explícite a solução clássica e fracionária do problema e represente graficamente as curvas de resfriamento do corpo, usando a solução clássica e a solução fracionária proposta.

Solução Clássica

Dos dados do problema tem-se que no instante $t_0 = 0$, a temperatura do corpo é $T = 70^\circ$. Passados $t = 20$ min, a temperatura chega a $T = 60^\circ$. Por outro lado, tem-se também que a temperatura ambiente $T_m = 30^\circ$. Usando os referidos dados, obtém-se

$$\begin{aligned} T(t) &= 30 + (70 - 30)e^{Ct} \\ T(t) &= 30 + 40 \cdot e^{Ct}. \end{aligned}$$

Usando o fato que $T(20) = 60^\circ$, pode-se chegar ao valor de C , como segue.

$$\begin{aligned} 60 &= 30 + 40 \cdot e^{20C} \Rightarrow 40 \cdot e^{20C} = 30 \\ \Rightarrow 20C &= \ln\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow C = \frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{20} \\ C &\cong -0,0143. \end{aligned}$$

Portanto,

$$T(t) = 30 + 40e^{-0,0143t}. \quad (84)$$

¹ o – Não foi adotado nem uma unidade padrão de medida para a grandeza da temperatura para não adentrarmos em conceitos físicos adotados pelo sistema internacional de medidas.

Plotando a Solução (84) no Matlab, obtém-se a curva dada no gráfico da Figura (2.1).

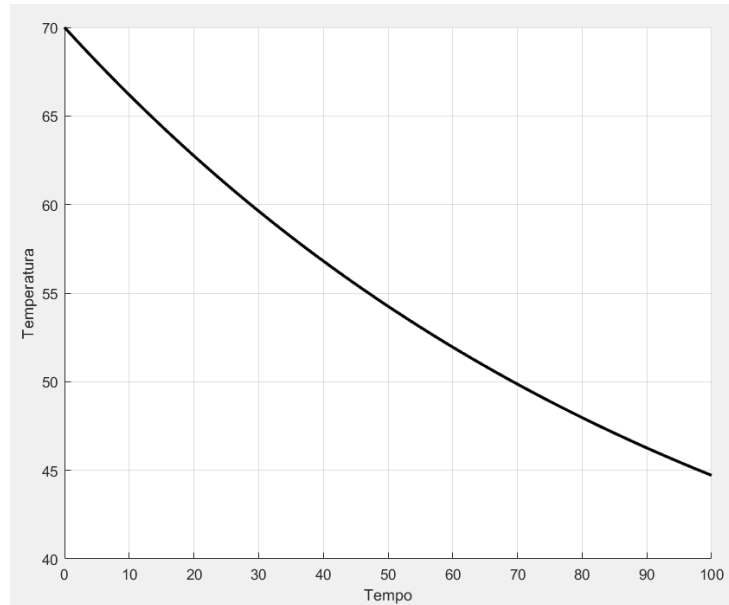


Figura 2.1 – Curva de Resfriamento Solução Clássica.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

Analisando o gráfico da Figura (2.1) é fácil perceber o decrescimento da temperatura do corpo ao decorrer do tempo. Inicialmente, tem-se uma variação brusca da temperatura, mas com o passar do tempo, tal variação vai diminuindo e a tendência é atingir o equilíbrio térmico, momento em que o corpo e o ambiente apresentam mesma temperatura.

Solução Fracionária

Usando os dados utilizado para determinar a solução clássica, obtém-se a solução fracionária como segue.

$$\begin{aligned} T(t) &= T_m + (T_0 - T_m)E_\alpha \cdot (Ct^\alpha) \\ T(t) &= 30 + 40E_\alpha(0,0143t^\alpha). \end{aligned} \tag{85}$$

Percebe-se que no caso fracionário, a solução depender do tempo t , depende também do parâmetro α .

Plotando a Solução (85) no Matlab e variando o parâmetro α , obtém-se as curvas dadas no gráfico da Figura (2.2).

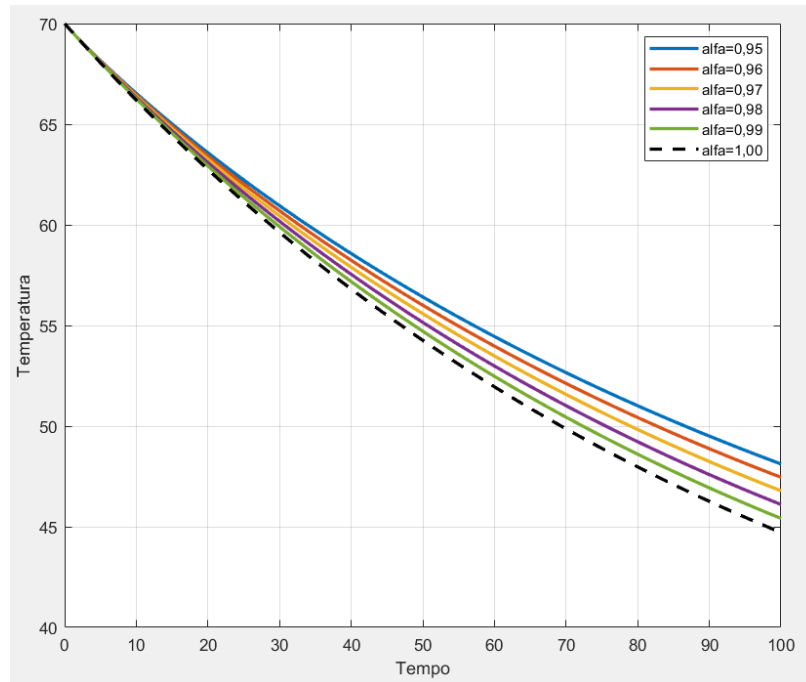


Figura 2.2 – Curvas de Resfriamento Solução Fracionária.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

No gráfico da Figura (2.2), foram representadas as curvas da solução fracionária para $\alpha = 0,95$, $\alpha = 0,96$, $\alpha = 0,97$, $\alpha = 0,98$, $\alpha = 0,99$ e $\alpha = 1,00$. Percebe-se que quando o parâmetro α tende ordem inteira, as correspondentes curvas descritas por cada parâmetro tendem a convergir para curva descrita pela ordem inteira. Tal fato é importante, pois é um dos requisitos exigidos para a validade da solução, desde que o cálculo fracionário deve generalizar o cálculo clássico. Vale destacar que quando α é tomado próximo da ordem inteira significa que o modelo apresenta pouco efeito de memória, caso abordado no gráfico da Figura (2.2). Para casos em que α é tomado bem mais próximo de zero do que da ordem inteira, significa um modelo com maior efeito de memória. Tal caso é representado pelo gráfico da Figura (2.3), onde são tomados $\alpha = 0,1$, $\alpha = 0,2$, $\alpha = 0,3$, $\alpha = 0,4$, $\alpha = 0,5$ e $\alpha = 0,6$.

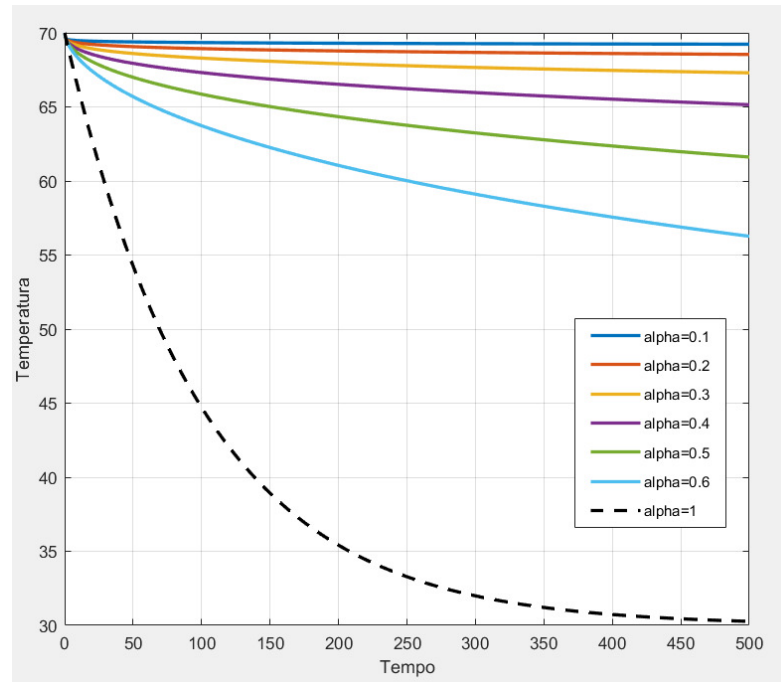


Figura 2.3 – Curvas de Resfriamento Solução Fracionária.

Fonte: Produzido pelo autor via *software* MATLAB.

No gráfico da Figura (2.3), a curva pontilhada representa a solução correspondente a ordem inteira. Algo que ainda poderia ser explorado seria o significado físico das referidas curvas, se é que existam. Tal fato não será explorado, ficando como proposta para futuros trabalhos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi introduzido conceitos básicos do cálculo fracionário, área da matemática que vem ganhando ênfase no estudo das ciências nos últimos anos. Dentre os conceitos abordados, pode-se destacar as funções Gama e de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, dando ênfase e apresentando mais detalhes e demonstrações sobre algumas de suas propriedades. Abordou-se também a transformada de Laplace clássica, suas propriedades e sua extensão fracionária, mais especificamente, a transformada de Laplace da derivada de Caputo.

Em um segundo momento, os conceitos e propriedades das funções de Mittag-Leffler, transformada de Laplace clássica e transformada de Laplace versão fracionária, foram utilizados para desenvolver uma solução clássica e também uma solução analítica para a versão fracionária da equação diferencial que modela a chamada lei do resfriamento de Newton.

Por fim, foi apresentada uma análise gráfica das soluções clássica e fracionária, foi possível perceber que no caso fracionário, quando é tomado o parâmetro $\alpha \rightarrow 1$ (ordem inteira), a solução fracionária converge para solução clássica, fato crucial para a validade da solução fracionária. A interpretação física para as curvas representativas da solução fracionária, caso realmente tenha algum significado físico, fica como proposta para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- ALITOLEF, S. d. S. Algumas aplicações das equações diferenciais. **Ji Paraná: UNIR**, 2011. Disponível em: <<https://docplayer.com.br/8795500-Algumas-aplicacoes-das-equacoes-diferenciais.html>>. Acesso em: 10 mar. 2023.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2000.
- BONI, M. D. T. M. **Cálculo fracionário aplicado às equações horárias do movimento e outras aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, 2017.
- CAMARGO, R. de F. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. Tese (Doutorado) — Unicamp, 2009.
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo fracionário**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- CHAVES, M. I. de A.; SANTO, A. O. do E. Modelagem matemática: uma concepção e várias possibilidades. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 30, p. 149–161, 2008. Disponível em: <<https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221878009.pdf>>. Acesso em: 15 mar. 2023.
- CONTHARTEZE, E. **Equações diferenciais fracionárias e as funções de Mittag-Leffler**. Tese (Doutorado) — Unicamp, 2014.
- DEBNATH, L.; BHATTA, D. **Integral transforms and their applications**. New York: (2nd ed.). Chapman and Hall/CRC, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1201/9781420010916>>.
- DUARTE, A. A. **Resolução de problemas modelados pela lei do resfriamento de Newton**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2019.
- FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas; Coleção Matemática Universitária, IMPA**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~rmiranda/wp-content/uploads/2023/12/djairo-book.pdf>>. Acesso em: 15 dez. 2023.
- LOPES, M. M. **Dinâmica da propagação de memes via sistemas com memória**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alfenas, 2019.
- LUSTOSA, J. I. S. **A transformada de Laplace e algumas aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, 2017.
- LUSTOSA, J. I. S. **Cálculo fracionário aplicado à avaliação de efeitos estruturais na deflexão de vigas biapoçadas**. Tese (Doutorado) — Unicamp, 2022.
- MELO, S. M. de. **Continuação Analítica das Funções Gama e Zeta de Riemann**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São João del-Rei, 2021.

MILLER, K.; ROSS, B. **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations**. Wiley, 1993. ISBN 9780471588849. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=MOp_QgAACAAJ>. Acesso em: 21 abr. 2023.

OLDHAM, K.; SPANIER, J. **The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order**. ACADEMIC PRESS New York and London: Elsevier, 1974.

OTTONI, J. E. Introdução ao cálculo fracionário com aplicações. **Revista de Matemática**, v. 5, n. 1, p. 50–77, 2018.

RODRIGUES, W. M. D.; FÜRKOTTER, M.; LOPES, M. D. M. Lei do resfriamento de newton: Modelagem matemática e ensino – aprendizagem. **Anais do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática – EPREM. Londrina**, p. 1–12, 2019. Disponível em: <http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1262/803>. Acesso em: 23 mar. 2023.

SANT'ANNA, D. A. **Derivadas Fracionárias, Funções Contínuas Não-Diferenciáveis e Dimensões**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, 2009.

SILVA, J. S. F. da. Sobre o problema da variação de temperatura de um corpo. **Connection Line-Revista Eletrônica do Univag**, n. 5, p. 44–55, 2014. Disponível em: <<https://www.periodicos.univag.com.br/index.php/CONNECTIONLINE/article/view/123/372>>. Acesso em: 20 abr. 2023.


TEODORO, G.; OLIVEIRA, D.; OLIVEIRA, E. Sobre derivadas fracionárias. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 40, 2017. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/rbef/a/nJX896V8qkcWGH3GZ4z48pJ/?format=pdf>>. Acesso em: 14 fev 2024.

TEODORO, G. S. **Cálculo fracionário e as funções de Mittag-Leffler**. Tese (Doutorado) — Unicamp, 2014.

TEODORO, G. S.; OLIVEIRA, E. C. de. Derivadas fracionárias: critérios para classificação. **CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 10, 2017. Disponível em: <<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v10a02ic-derivadas-fracionarias-criterios-para-classificacao.pdf>>. Acesso em: 14 fev 2024.

TIEPPO, S. M.; GRUZZO, S. M. Elementos do cálculo fracionário. **Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática (1s.)**, v. 2, n. 1, p. 45–79, 2018. Disponível em: <http://www.dma.uem.br/kit/jeepema-1/art2_1801.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2018.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais vol. 1**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
	Campus Cajazeiras - Código INEP: 25008978
	Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de trabalho de conclusão e postagem no repositório digital.

Assunto:	Entrega de trabalho de conclusão e postagem no repositório digital.
Assinado por:	Walison Ferreira
Tipo do Documento:	Projeto
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Walison Arruda Ferreira, DISCENTE (202212210009) DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 04/04/2024 19:19:12.

Este documento foi armazenado no SUAP em 04/04/2024. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1134271

Código de Autenticação: e8efb690e3

