INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jackson Tavares de Andrade

Trigonometria: Da teoria às aplicações

Cajazeiras-PB
Março de 2019

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

A553t

Andrade, Jackson Tavares de

Trigonometria: da teoria às aplicações / Jackson Tavares de Andrade; orientador Leonardo Ferreira Soares.- Cajazeiras, 2019.-
76 f.: il.

Orientador: Leonardo Ferreira Soares.
TCC (Especialização em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2019.

1. Trigonometria I. Título

CDU 514.11(0.067)

Trigonometria: Da teoria às aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares

Cajazeiras-PB
Março de 2019

Jackson Tavares de Andrade

Trigonometria: Da teoria às aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Aprovado em: 20/03/2019.

BANCA EXAMINADORA

Leonardo Ferreira Soares

Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

Clebson Huan de Freitas

Prof. Me. Clebson Huan de Freitas
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

Antonio Edson Pereira da Silva Filho

Prof. Me. Antonio Edson Pereira da Silva Filho
Instituto Federal do Rio Grande do Norte -(IFRN)

Cajazeiras-PB
Março de 2019

Dedico este trabalho primordial a Deus, que sempre se faz presente em minha vida; a meus pais que me auxiliaram de todas as formas possíveis, nas minhas decisões, sonhos e metas; a minha irmã; a minha família de modo geral, pois estiveram a contribuir constantemente para que este e os demais sonhos que almejo se concretizassem. E a minha namorada que em todo o tempo esteve comigo corroborando e dando o suporte necessário para que conseguisse lograr êxito. Aos meus mestres que se prontificaram a ajudar-me durante esta jornada árdua, mas que chega ao final com um sentimento de nostalgia, pois todos os momentos pelos quais passei fizeram me crescer profissionalmente, mas satisfeito pelo feito.

"A persistência é o caminho do êxito".
Charles Chaplin

Agradecimentos

Agradeço primordial a Deus nosso Senhor que me permitiu mais está conquista em minha vida profissional. Somente ele poderia me dar o discernimento necessário, a força e a sabedoria para que conseguisse lutar com mais afinco para que pudesse lograr êxito em mais este sonho. Como também agradeço imensamente aos meus pais, Severino Andrade de Assis e a Josefa Tavares de Assis, pela dedicação com que me educaram, todo o empenho que sempre dedicaram para que nada me faltasse, o apoio afetivo e emocional. A minha irmã Jéssika Tavares de Andrade, pelo companheirismo e ajuda desprendida nos momentos oportunos. A minha namorada Juciene Barbosa da Costa, pela compreensão e colaboração na finalização deste sonho, por está sempre me apoiando, cotidianamente a me impulsionar a buscar sempre mais a acreditar no meu potencial. Aos colegas e amigos que obtive durante o curso, pelo aprendizado e coleguismo que sempre tivemos uns com os outros.

Especialmente agradeço ao Professor Me. Leonardo Ferreira Soares pela condução da coordenação da especialização em matemática, campus IFPB Cajazeiras-PB, permitindo assim aprimorar o conhecimento da matemática, e garantindo a nossa região melhores resultados para a matemática tanto nas escolas como também nos institutos federais. E como também, pela condução e orientação deste trabalho.

Por fim, a Professora Ma. Kissia Carvalho coordenadora do curso de matemática do IFPB campus Cajazeiras-PB, pela disponibilidade de tempo dispensado para que fosse feita a tradução do resumo, além de me auxiliar em outros aspectos estruturais deste trabalho.

Deixo aqui meu sincero muito obrigada a todos vocês que me permitiram tornar um sonho realidade.

Resumo

Este trabalho proporciona aos professores um material de cunho didático-pedagógico e preparatório para estudos futuros, abordando uma sequência lógica dos conteúdos sobre a trigonometria como aponta as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Possibilitando, assim, despertar o interesse do professor/aluno pelo estudo do conteúdo. Tendo em vista a grande aplicabilidade dos conceitos trigonométricos para a construção do conhecimento matemático, desenvolvemos o trabalho seguindo um encadeamento de ideias matemáticas, fazendo sentido o estudo da trigonometria, e ao mesmo tempo mostrando a veracidade dos fatos, como também despertando curiosidades sobre o conteúdo. Para o desenvolvimento do trabalho fizemos um estudo iniciando pela definição das razões trigonométricas, usando propriedades de semelhança de triângulos, até o estudo do comportamento das principais funções trigonométricas, utilizando para melhor compreensão desse comportamento o *software* Geogebra. Encerrando com aplicações trigonométricas, buscando assim apresentar a aplicabilidade e demostrar algumas curiosidades que a trigonometria proporciona.

Palavras-Chave: Trigonometria, Funções Trigonométricas, Aplicações.

Abstract

This work aims to offer teachers a didactic-pedagogical material that will help in future studies, developing a sequence in Trigonometry according to the National Curricular Guidelines for High School. In this way it arouses the interest of the teacher and the student for the study of the content. In order to demonstrate the great applicability of trigonometric concepts for the construction of mathematical knowledge, we developed the work following a sequence of mathematical ideas, which gives a logical sense for the study of trigonometry, and at the same time showing how things happen in everyday life. The work was started with definitions of the trigonometric ratios, using triangle similarity properties, and the study of the behavior of the main trigonometric functions using for a better understanding of this behavior the software Geogebra. And it was finished with trigonometric applications, trying to present and demonstrate some curious facts of Trigonometry.

KeyWords: Trigonometry, Trigonometric Functions, Applications.

Lista de Siglas

ENQ	Exame Nacional de Qualificação do profmat
IFAL	Instituto Federal de Alagoas
IFMS	Instituto Federal de Mato Grosso do Sul
IFRN	Instituto Federal de Rio Grande do Norte
ITA	Instituto Tecnológico de Aeronáutica
UFBA	Universidade Federal da Bahia
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
MA11	Disciplina do Profmat referente a números e conjuntos e funções elementares
MA13	Disciplina do Profmat referente a geometria I
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Sumário

Introdução

A trigonometria é um ramo importante da matemática, que possui uma complexa dinâmica de estudos, englobando diversas propriedades e leis trigonométricas. Na maioria das vezes, essa grande quantidade de modelos matemáticos apresentados sem uma sequência lógica, cuja memorização é incentivada pelos profissionais de educação, é responsável pelo desinteresse de boa parte dos estudantes, não fazendo sentido para os alunos estudarem tais conceitos. Isso pode ser, como aponta Carvalho (2018, p.1), “uma das causas das dificuldades dos alunos dos cursos superiores na área de Ciências Exatas em disciplinas como Cálculo e Física”. Desta forma, os professores devem embutir em seus planejamentos situações básicas demonstrando a importância da trigonometria. Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs apontam que

> A aprendizagem significativa depende de uma motivação intrínseca, isto é, o aluno precisa tomar para si a necessidade e a vontade de aprender [$\cdots$]. A disposição para a aprendizagem não depende exclusivamente do aluno, demanda que a prática didática garanta condições para que essa atitude favorável se manifeste e prevaleça. [$\cdots$] Se o professor espera uma atitude curiosa e investigativa, deve propor prioritariamente atividades que exijam essa postura, e não a passividade. (PCNs p. 64 e 65.)

Como retrata as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - OCN (OCN, p. 73 e 74) que as razões trigonométricas devem ser trabalhadas inicialmente com ângulos entre 0 e 90^o, ressaltando as propriedades de semelhança de triângulos, pois são eles que dão sentido ao estudo dessas razões. E a partir dessa abordagem chegar aos valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (30^o, 45^o e 60^o). Seguindo com a expansão do estudo das razões trigonométricas para os ângulos entre 90^o e 180^o, que permite o estudo das leis dos senos e cossenos, que nos auxiliam na resolução de diversas situações como o cálculo de distâncias inacessíveis, aplicação muito interessante da trigonometria. Também vale salientar outras fórmulas, que expande o cálculo de mais ângulos, como $\operatorname{sen}(A+B)$ e $\cos(A+B)$. Finalizando com as funções trigonométricas, as quais devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas, possibilitando aos alunos um momento de construção de gráficos, investigando que, quando escritas da forma $f(x) = \operatorname{sen} x$, habitualmente a variável x corresponde à medida de arco do ciclo tomada em radianos, desta forma, apresentando o comportamento cíclico das funções trigonométricas.

Nesse sentido, surge a seguinte indagação: como despertar o interesse pelo estudo da trigonometria?

Nessa perspetiva, o presente trabalho aborda uma sequência, que consideremos adequada, de estudos, que proporciona aos alunos melhor entendimento sobre o conteúdo, além de oferecer aos professores um material de cunho didático-pedagógico e preparatório para estudos futuros. Possibilitando, assim, despertar o interesse do professor/aluno pelo estudo da trigonometria.

Além disso, pensando na grande aplicabilidade dos conceitos trigonométricos para a construção do conhecimento matemático, desenvolvemos o trabalho de forma que professores da Educação Básica, estudantes do Ensino Médio e do Ensino Superior possam utilizá-lo como consulta.

Inicialmente, esse trabalho aborda os fundamentos básicos sobre seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, em seguida abrange esses conceitos para o ciclo trigonométrico, apresentando algumas leis e propriedades, bem como suas demonstrações. No capítulo seguinte apresentamos as funções trigonométricas e sua análise gráfica. Concluímos o trabalho com algumas aplicações da trigonometria, entre elas algumas questões de vestibulares, de provas dos concursos para professores dos institutos federais e do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, situações que envolvem conceitos trigonométricos em outras áreas de conhecimento, como também a utilização desses conceitos na demonstração da validade de modelos matemáticos e de fatos curiosos.

Objetivos

Objetivo geral: Escrever um material de cunho didático-pedagógico para auxiliar o entendimento no estudo da trigonometria.
Objetivos específicos:

- Fazer uma revisão das importantes definições da trigonometria.
- Expandir o conceito das razões trigonométricas para o ciclo trigonométrico desenvolvendo suas demonstrações.
- Analisar o comportamento das funções trigonométricas.
- Apresentar aplicações.

Metodologia

Este trabalho teve como norteamento uma abordagem qualitativa, tendo como natureza uma pesquisa aplicada, apresentando a trigonometria em um encadeamento de conhecimentos matemáticos sequenciado, permitindo que conteúdos trigonométricos sejam vistos com maior atratividade, como também proporcionar um material de cunho didático-pedagógico.

Para a elaboração do trabalho, foi feita uma pesquisa bibliográfica a partir do levantamento de referências teóricas em sites e livros adotados no Ensino Médio e Superior. Para os capítulos 1 e 2 foram realizadas leituras sistemáticas, para em seguida, digitalizarmos as definições das razões trigonométricas que surgem a partir da semelhança de triângulos e a expansão dessas razões para o ciclo trigonométrico. Já para o capítulo 3, tivemos além da leitura e digitalização, a atenção de construir os gráficos das funções trigonométricas no *software* Geogebra. No capítulo 4, foram selecionadas e resolvidas alguns exercícios, tendo como critérios: a preparação dos docentes para provas dos institutos federais e também para o mestrado profissional em matemática - PROFMAT, a abordagem da trigonometria em outras áreas do conhecimento, apresentando os conhecimentos trigonométricos em questões de vestibulares, como também na demonstração de algumas fórmulas matemáticas importantes.

1. Trigonometria no Triângulo Retângulo

Neste capítulo abordaremos as definições das razões trigonométricas a partir da semelhança de triângulos retângulos. Elas recebem o nome de razões por serem frações e por relacionarem as medidas dos lados e as medidas dos ângulos agudo do triângulo retângulo, formando um estudo conhecido como trigonometria.

1.1. Semelhança de Triângulos

Aproximadamente 600 A.C., foi que se teve a primeira aplicação da semelhança de triângulos. Com o famoso matemático Tales de Mileto (624 a.C. - 547 a.C.), considerado um dos sete sábios da antiguidade, quando estava em visita ao Egito, o faraó Amásis, conhecendo a sua fama como um excelente matemático, pediu a ele que medisse a altura da pirâmide de Quéops [14]. Para otimizar tal cálculo, Tales enterrou uma vara verticalmente no chão, marcou na areia seu comprimento, e aguardou até o momento em que a sombra ficasse igual ao seu comprimento. Quando o desejado aconteceu, Tales determinou, então, que nesse momento medisse a sombra da pirâmide e somasse com a metade da medida do lado de sua base. Pois essa soma era exatamente a altura da pirâmide.

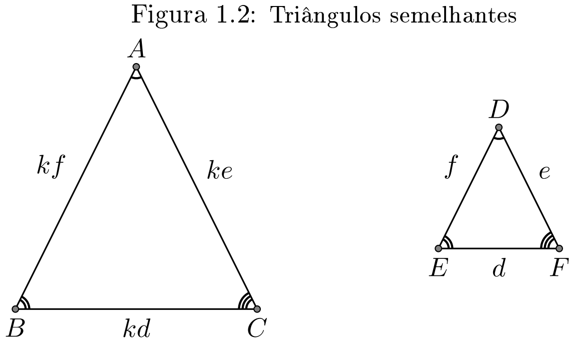
Figura 1.1: Situação histórica

Fonte: [15]

Definição 1.1. Dizemos que dois triângulos são **semelhantes** quando existir uma correspondência entre os ângulos homólogos, dos dois triângulos, por congruência e uma correspondência entre os lados correspondentes por proporcionalidade.

Veja que, na figura 1.2, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, são semelhantes.

Figura 1.2: Triângulos semelhantes



Com a seguinte correspondência de ângulos: $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ e $\widehat{C} = \widehat{F}$, e existe um número real positivo

k chamado de razão de semelhança tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k.$$

Quando dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, forem semelhantes usaremos a seguinte notação: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Para percebemos se dois triângulos são semelhantes não é necessário verificarmos todos os casos da definição. É possível determinar um conjunto de condições eficazes que garanta a semelhança entre os dois ou mais triângulos. Para isto, basta analisar alguns elementos específicos. Tais condições são conhecidas como **casos de semelhança de triângulos**, as quais são divididas em três propriedades cujas demonstrações podem ser encontradas em [1] e [22].

A proposição 1.2 é conhecida como o **caso A.A.** (ângulo, ângulo) de semelhança de triângulos.

Proposição 1.2. Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$, se $\widehat{A} = \widehat{E}$ e $\widehat{B} = \widehat{F}$, então os triângulos são semelhantes.

A proposição 1.3 é conhecida como o **caso L.A.L.** (Lado, ângulo, Lado) de semelhança.

Proposição 1.3. Se em dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ têm-se $\widehat{A} = \widehat{E}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, então os triângulos são semelhantes.

Por fim, a proposição 1.4 é conhecida como o **caso L.L.L.** (Lado, Lado, Lado) de semelhança.

Proposição 1.4. Se em dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ têm-se $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, então os triângulos são semelhantes.

A teoria sobre semelhança de triângulos é uma ferramenta muito eficiente no desenvolvimento de diversos conceitos. Uma dessas aplicações, de imediato, é a aquisição das relações métricas em triângulos retângulos. Assim, vejamos a seguinte proposição:

Proposição 1.5 (Relações métricas no triângulo retângulo)**.** Seja ABC um triângulo retângulo em A, com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{CH} = m$, $\overline{BH} = n$ e $\overline{AH} = h$, como a apresenta figura 1.3, temos:

(i) $ah = bc$.

(ii) $am = b^2$ e $an = c^2$.

(iii) $h^2 = mn$.

(iv) $a^2 = b^2 + c^2$. (Teorema de Pitágoras)

Figura 1.3: Relações métricas em um triângulo retângulo

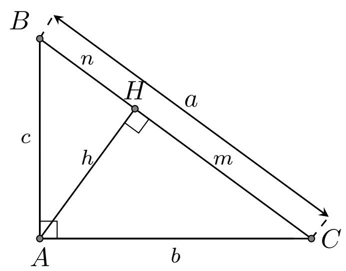
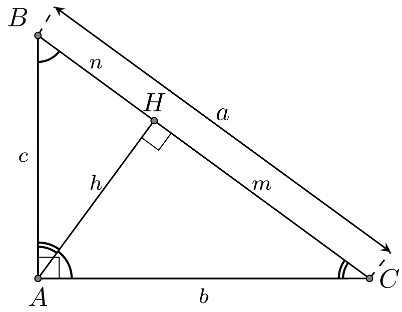


Figura 1.4: Demonstração das relações métricas em um triângulo retângulo



Demonstração:

Para a prova dessa proposição, consideraremos a figura 1.4. Assim, destacamos três triângulos retângulos, a saber, $\triangle ABC$, $\triangle HBA$ e $\triangle HCA$. Como $A\widehat{H}B = C\widehat{A}B$ e $A\widehat{B}H = C\widehat{B}A$, então $\triangle ABC \sim \triangle HBA$, pelo caso A.A.. Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HA}},$$

ou ainda,

$$\frac{c}{n} = \frac{a}{c} = \frac{b}{h}.$$

Segue da primeira igualdade que

$$an = c^2$$

e da segunda igualdade que

$$ah = bc.$$

A relação $am = b^2$ é demonstrada de modo análogo. Portanto, fica provado as afirmações (i) e (ii).

(iii) Multiplicando membro a membro as relações do item (ii), obtemos:

$$a^2mn = (bc)^2, \text{ isto é, } mn = \left(\frac{bc}{a}\right)^2.$$

Pelo item (i), $h = \dfrac{bc}{a}$. Logo, segue-se pelas duas últimas equações:

$$h^2 = mn.$$

(iv) Somando membro a membro as relações do item (ii), segue-se que:

$$am + an = a(m+n) = b^2 + c^2.$$

Mas, observe que $m + n = a$. Logo,

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= a \cdot a \\ &= a^2 \end{aligned}$$

■

1.2. Trigonometria no Triângulo Retângulo

Desde a antiguidade até os dias atuais, a humanidade sempre teve a necessidade de calcular distâncias inacessíveis. Procurando resolver problemas dessa natureza, os matemáticos estabeleceram importantes relações entre as medidas dos ângulos e as medidas dos lados de um triângulo. A área da matemática que estuda essas relações é chamada **Trigonometria**.

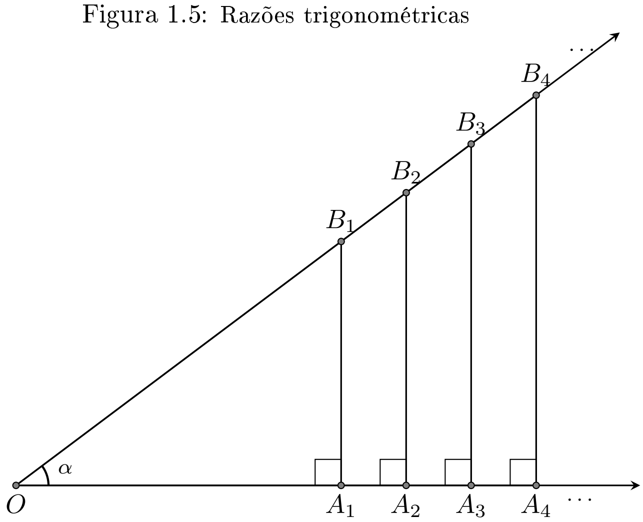
Segundo [6], a palavra trigonometria tem origem grega: TRI (três), GONO (ângulo) e METRIEN (medida). Etimologicamente, significa medida de triângulos. Embora não tenhamos informações precisas sobre a origem da trigonometria, há registros de sua aplicação, por volta do ano 140 a.C., com o grego Hiparco de Niceia (190 a.C. - 120 a.C.) que relacionou os lados e os ângulos de um triângulo retângulo e elaborou, o que equivale hoje, a tabela com valores trigonométricos dos ângulos de 0^o a 90^o.

Posteriormente, já no século da nossa era, o astrônomo e geógrafo grego Ptolomeu (85-165) - autor da mais importante obra da trigonometria da antiguidade, o **Almagesto** - concebeu novas proposições trigonométricas. Nesta obra, ele elaborou uma tabela de cordas correspondentes a ângulos de 0^o a 180^o, ordenados crescentemente. Com o passar do tempo os povos Hidus tiveram acesso ao Almagesto, e a trigonometria teve uma relevante ascensão, mas foi com o matemático alemão Johann Müller (1436-1476) que houve o primeiro tratado sistemático sobre o tema, em sua obra De triangulis (Tratado dos triângulos). Mas, segundo [18] acredita-se que parte do Almagesto do astrônomo Ptolomeu que chegou até nós é de autoria de Hipátia[1].

Nesta seção, abordaremos as principais razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, e definiremos suas relações inversas cossecante, secante e cotangente, respectivamente.

Consideremos a figura 1.5:

Figura 1.5: Razões trigonométricas



Percebemos que os triângulos retângulos $\triangle OA_1B_1$, $\triangle OA_2B_2$, $\triangle OA_3B_3$, $\triangle A_4OB_4$, $\cdots$, são todos semelhantes, pelo caso A.A., pois possuem o ângulo comum α e um ângulo reto.
Como $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2$, então

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB_2}}.$$

[1] Estima-se que ela nasceu em 355 e assassinada em 415, filha de Téon de Alexandria, matemático e astrônomo de renome e diretor do Mouseion. A vida e obra de Hipátia foram afuscadas por sua trágica morte. O pouco que se conhece sobre ela chegou pelos escritos de seus discípulos. [18]

De modo análogo ocorre com os triângulos $\triangle OA_1B_1$ e $\triangle OA_3B_3$, isto é,

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_3}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_3B_3}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB_3}}.$$

Considerando as duas proporções $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{OB_2}}$ e $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_3B_3}} = \dfrac{\overline{OB_1}}{\overline{OB_3}}$, temos que:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}}.$$

Generalizando,

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{OB_4}} = \cdots = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}.$$

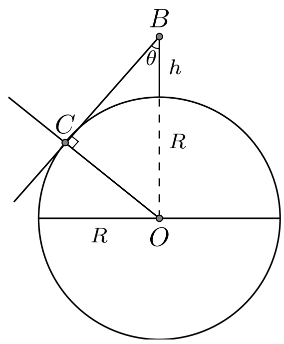
Portanto, em todos esses triângulos retângulos, a razão entre a medida do cateto oposto a α (C.O) e a medida da hipotenusa (H) é constante, ou seja, esta relação depende apenas da medida do ângulo α e não dos comprimentos envolvidos. Então, convém definir essa relação, a qual chamaremos de **seno do ângulo** α e a denotaremos por $\operatorname{sen}\alpha$. Isto é:

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{C.O}}{H}}$$

Situação histórica: O matemático grego Eratóstenes[2] bastante curioso e admirava tudo que via. Queria saber sobre o sol, os ventos, as estrelas e a Terra. Então, segundo [3], ele usou o seguinte processo para efetuar o cálculo do raio da Terra, distância de difícil medição direta.

Sabendo uma medida acessível, digamos uma torre de altura h, representando seu topo por um ponto B, agora consideremos um ponto C sobre a superfície da terra de modo que $\overline{BC}$ seja tangente a superfície e chamando de O o centro da terra. Assim, sem dificuldades, mede-se o ângulo $O\widehat{B}C = \theta$. Conforme ilustrado na figura 1.6.

Figura 1.6: Raio de Terra



Considerando que a Terra é perfeitamente esférica, então o ângulo $B\widehat{C}O$ é reto, pois $\overline{BC}$ é tangente a circunferência de centro O e raio R. Daí, pela definição da relação do seno, temos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{R}{R+h},$$

[2]Foi um matemático, geógrafo, astrônomo e filósofo pré-socrático. Sendo um dos principais cientistas e pensadores da Grécia Antiga. Nascido na cidade de Cirene, antiga colônia grega, em 276 a.C e morrendo na cidade de Alexandria em 194 a.C. [16]

donde $R\operatorname{sen}\theta + h\operatorname{sen}\theta = R$, ou seja, $R(1-\operatorname{sen}\theta) = h\operatorname{sen}\theta$, assim

$$R = \frac{h\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}.$$

Isto é, Eratóstenes concluiu que o comprimento do raio da Terra é igual a razão entre o produto da altura da torre e do seno do ângulo encontrado pela diferença entre 1 e o seno do ângulo.

De maneira semelhante ao que fizemos para a razão seno, temos:

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{OA_3}}{\overline{OB_3}} = \frac{\overline{OA_4}}{\overline{OB_4}} = \cdots = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}.$$

O cateto adjacente (C.A) é o lado do triângulo retângulo mais próximo ao ângulo considerado e ao ângulo reto. A essa razão constante chamamos de **cosseno do ângulo** α e indicaremos por $\cos\alpha$. Isto é,

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\text{C.A}}{H}}$$

Segue-se da mesma semelhança que:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{OA_4}} = \cdots = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}.$$

Já a essa razão constante chamaremos de **tangente do ângulo** α e denotaremos por $\operatorname{tg}\alpha$. Ou seja,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{C.O}}{C.A}}$$

Um fato interessante é que essas razões não são independentes. Vejamos duas relações que aparecem naturalmente:

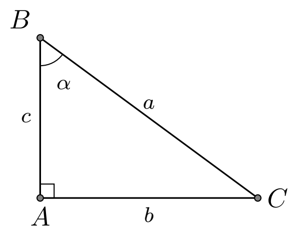
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{1.1}$$

Essa relação é conhecida como relação fundamental da trigonometria. E

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}. \tag{1.2}$$

De fato, seja o triângulo retângulo $\triangle ABC$ reto em A, com $A\widehat{B}C = \alpha$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, segundo a figura 1.7. Assim,

Figura 1.7: Demonstração da relação fundamental da trigonometria



$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos $a^2 = b^2 + c^2$. Logo,

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2} = 1,$$

e para a equação 1.2, obtemos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Observamos que também podemos definir, as seguintes razões derivadas das três anteriores, que chamaremos de **razões inversas**. Que são elas secante, cossecante e cotangente que as denotaremos, respectivamente, por $\sec\alpha$, $\operatorname{cossec}\alpha$ e $\operatorname{cotg}\alpha$. Assim,

$$\sec\alpha = \frac{H}{C.A} = \frac{1}{\frac{C.A}{H}} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{cossec}\alpha = \frac{H}{C.O} = \frac{1}{\frac{C.O}{H}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha},$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{C.A}{C.O} = \frac{1}{\frac{C.O}{C.A}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

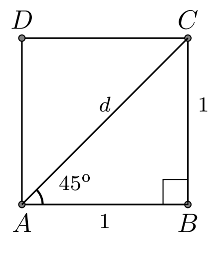
1.2.1. Ângulos Notáveis

Para simplificar nosso estudo notemos os valores das razões trigonométricas de alguns ângulos. Por se apresentarem com maior frequência nos cálculos e na geometria esses ângulos são chamados de **ângulos notáveis**.

Ângulo de 45º

Consideremos um quadrado $ABCD$, conforme a figura 1.8, de lado de medida 1, tracemos uma de suas diagonais (AC). Assim, pela propriedade da Geometria Plana temos que $C\widehat{A}B = 45^{\circ}$ e pelo Teorema de Pitágoras, obtemos que:

Figura 1.8: Ângulo de 45º



$$d^2 = 1^2 + 1^2 \qquad \Rightarrow \qquad d = \sqrt{2}.$$

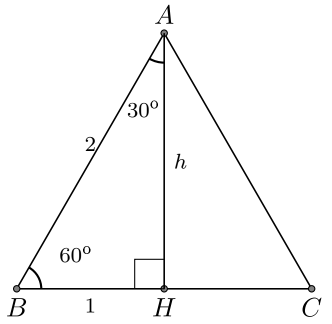
Logo, por definição concluímos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}45^{\circ} &= \frac{1}{\sqrt{2}} &\quad\Rightarrow\quad& \operatorname{sen}45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\cos 45^{\circ} &= \frac{1}{\sqrt{2}} &\quad\Rightarrow\quad& \cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\operatorname{tg}45^{\circ} &= \frac{1}{1} &\quad\Rightarrow\quad& \operatorname{tg}45^{\circ} = 1.
\end{aligned}$$

Ângulos de 30° e 60°

Consideremos um triângulo equilátero ABC, apresentado na figura 1.9, de lado de medida 2, tracemos uma de sua altura $(\overline{AH})$. Como a altura de um triângulo equilátero é também bissetriz e mediana, temos que $\overline{BH} = \frac{2}{2} = 1$ e $B\widehat{A}H = 30^o$, já que $B\widehat{A}C = 60^o$. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos que:

Figura 1.9: Ângulos de 30° e 60°



$$2^2 = h^2 + 1^2 \qquad \Rightarrow \qquad h = \sqrt{3}.$$

Segue-se, pelas definições, que:

$$\operatorname{sen} 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^o = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{tg} 60^o = \sqrt{3}.$$

E para o ângulo de 30^o, temos:

$$\operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \operatorname{tg} 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto, podemos resumir os ângulos notáveis na seguinte tabela 1.1:

Tabela 1.1: Valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis

		Ângulos		
		30°	45°	60°
Razões Trigonométricas	sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
	tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Observações:

i. Percebemos pela figura 1.9 que $\operatorname{sen} 60^o = \frac{h}{l} = \cos 30^o$, $\cos 60^o = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \operatorname{sen} 30^o$. Isto é, os ângulo de 30^o e 60^o são complementares, isso ocorre de modo geral. Assim, é fácil verificar que, se α e β são ângulos complementares, então

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \beta = \cos \alpha.$$

ii. Se um triângulo retângulo possui um ângulo de 30^o, então o lado oposto a este ângulo mede metade da hipotenusa e o outro lado mede $\sqrt{3}$ vezes o lado menor. De fato, seja um triângulo de acordo com a figura

1.7, então usando a definição do seno e tangente e seus respectivos valores da tabela 1.1, respectivamente, concluímos este resultado.

Logo, notamos que as definições das razões trigonométricas surgem a partir da semelhança de triângulos retângulos, com o intuito de resolver problemas de difícil medição direta. Desta forma, essas razões englobam apenas os ângulos agudos, daí vem a necessidade de abranger mais ângulos o que abordaremos no capítulo seguinte.

2. Trigonometria no Ciclo Trigonométrico

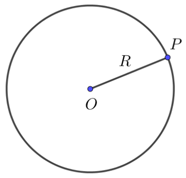
Observamos que no capítulo anterior, trabalhamos as relações trigonométricas apenas quando $0 < \alpha < 90^o$, pois esses são os valores que os ângulos de um triângulo retângulo podem assumir. No entanto, na Trigonometria, fazemos uma extensão desses conceitos, vistos até agora, para uma circunferência unitária, com o intuito de abranger todos as medidas de ângulos possíveis.

2.1. Medidas de Arcos de Circunferência

Antes de aprofundar o estudo na circunferência vejamos algumas informações preliminares necessárias para introduzirmos trigonometria no ciclo trigonométrico. Estas informações foram embasadas em [5].

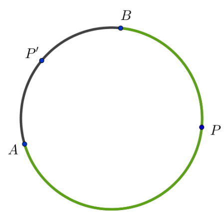
Definição 2.1. Seja O um ponto no plano e R um número real positivo. Chamaremos de **circunferência** o conjunto formado por todos os pontos P do plano, tal que $\overline{OP} = R$.

Figura 2.1: Definição de circunferência



Dados dois pontos, A e B, de uma circunferência, estes a dividem em duas partes. Cada uma dessas partes, incluindo esses pontos, é chamada de **arco da circunferência**. Na figura 2.2, temos:

Figura 2.2: Arcos de circunferência



- $\widehat{APB}$: arco de extremidade A e B, contendo P, que neste caso é o que chamaremos de arco maior.
- $\widehat{AP'B}$: arco de extremidade A e B, contendo P', que neste caso é o que chamaremos de arco menor.

Quando não mencionado qual arco está sendo considerado, usamos o arco de menor medida. Onde podemos obter essa medida de duas formas: comprimento e medida angular.

O **comprimento** de um arco é sua medida linear. Isto é, seja $\widehat{AB}$ um arco, se "endireitarmos" o arco "desenrolando-o", iremos obter um segmento, que pode ser medido em unidades de milímetros, centímetro, metro, etc.

Sempre que houver alusão à medida de um arco de circunferência estamos se referindo à sua **medida angular**, que pela Geometria Plana, tem medida igual ao ângulo central correspondente. Geralmente, as unidades utilizadas para medir um arco são o **grau** e o **radiano**.

Definição 2.2.

- **Grau** (simbolizado por ^{o}) é a medida angular, na qual um grau (1^o) corresponde a $\dfrac{1}{360}$ do comprimento de uma circunferência. [1]

- **Radiano** (simbolizado por rad) é a medida angular, na qual um radiano (1 rad) é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.

Lembrando que o comprimento de uma circunferência de raio R é $2\pi R$ e pela definição de radiano, temos:

Medida do arco (rad)		Comprimento do arco
1	$\longleftrightarrow$	R
x	$\longleftrightarrow$	$2\pi R$

Logo, $x = 2\pi$ rad. Ou seja, a medida de uma circunferência é $x = 2\pi$ rad. Então, 2π rad é equivalente a 360^o. Assim, como uma semicircunferência é um arco de 180^o. Podemos concluir que:

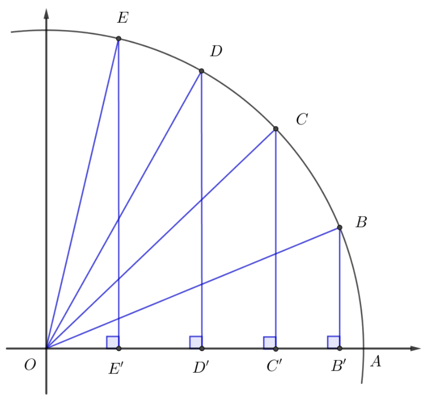
π rad é equivalente a 180^o.

Diante de observações realizadas em sala de aula, constatamos uma grande dificuldade que alguns alunos possuem de entender que momento o valor de π é 180^o ou aproximadamente 3,14, pois quando estamos estudando esses assuntos ocultamos a expressão rad devido o contexto.

2.2. Ciclo Trigonométrico

Podemos encontrar em [24], a seguinte ideia: Em um triângulo retângulo, as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo não dependem do tamanho do triângulo, mas da medida do ângulo. Por isso, na construção de uma tabela com essas razões para vários ângulos, podemos considerar triângulos retângulos que tenham hipotenusas de mesma medida e variar a medida do ângulo agudo. Assim, teremos tantos triângulos quantos quisermos. Na figura 2.3 estão representados alguns desses triângulos.

Figura 2.3: Triângulos retângulos em uma circunferência



Note que:

[1] Essa ideia de dividir uma circunferência em 360 partes surgiu na era antes de Cristo com os astrônomos babilônicos. Acredita-se que esses estudiosos escolheram essa medida por um ano conter aproximadamente 360 dias, pois se olharmos uma mesma estrela em dois dias consecutivos, no mesmo horário e do mesmo ponto da Terra, haverá um deslocamento aparente de 1^o entre suas posições, já que um dia corresponde aproximadamente $\dfrac{1}{360}$ do ano.

- os vértices B, C, D e E pertencem à mesma circunferência, cujo raio é a mesma medida da hipotenusa dos triângulos.

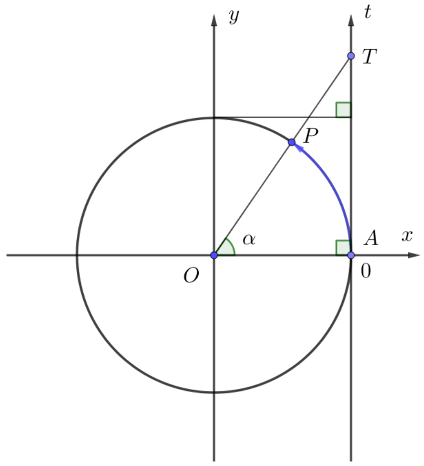
- se adotarmos a medida da hipotenusa como uma unidade, o seno e o cosseno de um ângulo agudo de vértice O, em cada um desses triângulos, serão, respectivamente, a medida do cateto oposto e medida do cateto adjacente a esse ângulo. Por exemplo, no triângulo retângulo $\triangle BOB'$, com $B\widehat{O}B' = \alpha$, com $0 < \alpha < 90^{\text{o}}$, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \frac{BB'}{OB} = \frac{BB'}{1} = BB' \\ \cos\alpha &= \frac{OB'}{OB} = \frac{OB'}{1} = OB'. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ou seja, o seno e cosseno de α são a medida do cateto oposto a α ($\overline{BB'}$) e a medida do cateto adjacente a α ($\overline{OB'}$), respectivamente, quando a hipotenusa é adotada como uma unidade.

De forma análoga, faremos para a tangente de um arco trigonométrico. Para isto, consideremos o arco trigonométrico $\overline{AP}$ de medida α, com $0 < \alpha < 90^{\text{o}}$, e o eixo real t de origem A, com a mesma direção e a mesma orientação do eixo y, como apresenta a figura 2.4. Para determinar a tangente do arco $\overline{AP}$, prolongamos o segmento $\overline{OP}$ até sua intersecção T com o eixo t.

Figura 2.4: Tangente de um arco trigonométrico



Assim, no triângulo retângulo $\triangle AOT$, obtemos:

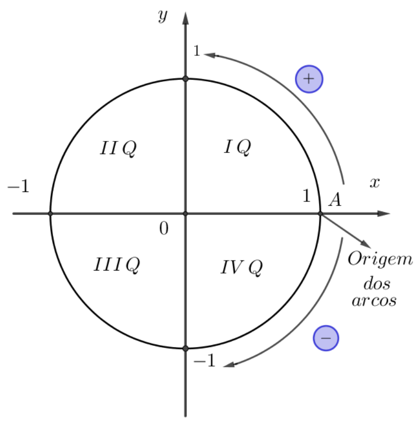
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}. \tag{2.2}$$

Desta forma, a tangente de α é a medida do segmento $\overline{AT}$ contido no eixo real t, que chamaremos de **eixo das tangentes**.

Essas ideias levaram os matemáticos a definir as razões trigonométricas em uma circunferência chamado **ciclo trigonométrico** ou **circunferência trigonométrica**, na qual os conceitos de seno, cosseno e tangente são estendidos também para ângulos não agudos. Assim, definimos ciclo trigonométrico como se segue:

Definição 2.3. Consideremos uma circunferência no sistema cartesiano ortogonal xOy, com centro na origem O e raio unitário ($R = 1$), conforme a figura 2.5. Vamos associar a cada número real um ponto sobre uma circunferência, onde fixemos um ponto A que será a origem dos arcos e a partir deste ponto vamos escolher o sentido anti-horário de percurso sobre a circunferência como sendo positivo para a representação dos arcos. Isto é, definimos a medida algébrica de um arco $\widehat{AB}$ desta circunferência como sendo o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido do percurso for anti-horário, e negativo se o sentido do percurso for horário.

Figura 2.5: Ciclo trigonométrico



Ou seja, segundo [24]

• O ponto $A = (1, 0)$ é a **origem dos arcos** a serem medidos na circunferência.

• Se um arco for medido no sentido horário, então ao valor absoluto dessa medida, será atribuído o sinal negativo (-).

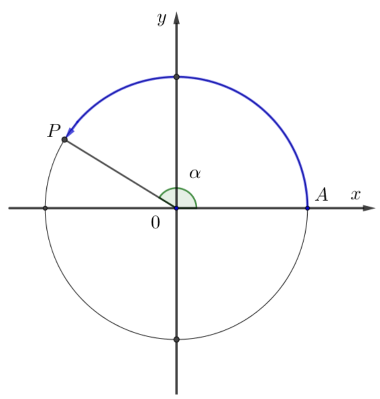
• Se um arco for medido no sentido anti-horário, então ao valor absoluto dessa medida, será atribuído o sinal positivo (+).

• Os eixos coordenadas dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamado **quadrantes (Q)**; esses quadrantes são numerados no sentido anti-horário, a partir do ponto A, como mostra a figura 2.5.

• Os pontos dos eixos coordenadas não pertencem a nenhum quadrante.

Como a circunferência trigonométrica tem raio unitário, então a medida de qualquer arco, em radianos, é numericamente igual ao seu comprimento. Isso significa dizer, que percorrer um arco de α rad no ciclo trigonométrico é fazer um percurso de comprimento α. Desta forma, cada arco trigonométrico tem extremidade em um único ponto na circunferência, assim usualmente indicamos o arco por esse ponto, isto é, a cada número real podemos associar um único ponto na circunferência. A este ponto denominamos **imagem** de α no ciclo, como mostra a figura 2.6.

Figura 2.6: Imagem de um ângulo



Analisando mais profundamente as igualdades (2.1), podemos depreender que $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto B. Portanto, ampliando esse conceito para qualquer arco trigonométrico, podemos mencionar ao eixo x como o eixo dos cossenos e o eixo y como o eixo dos senos. Averiguando a equação (2.2) e expandindo a mesma ideia para qualquer arco trigonométrico, concluímos que a $\operatorname{tg}\alpha$ é a ordenada do ponto T que é a intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com o eixo das tangentes. Observe que se o ponto P pertencer ao eixo y os prolongamentos de $\overline{OP}$ não interceptam o eixo das tangentes, por isso dizemos que não existe tangente de um arco trigonométrico cuja extremidade pertença ao eixo y.

Também percebemos que a maior ordenada do ciclo é a do ponto (0,1), igual a 1, e a menor ordenada é a do ponto (0,−1), igual a −1. Similarmente, a maior abscissa de um ponto do ciclo é a de (1,0), igual a 1, a menor abscissa é a do ponto (−1,0), igual a −1. Assim,

$$\begin{cases} -1 \leqslant \operatorname{sen}\alpha \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1 \end{cases}.$$

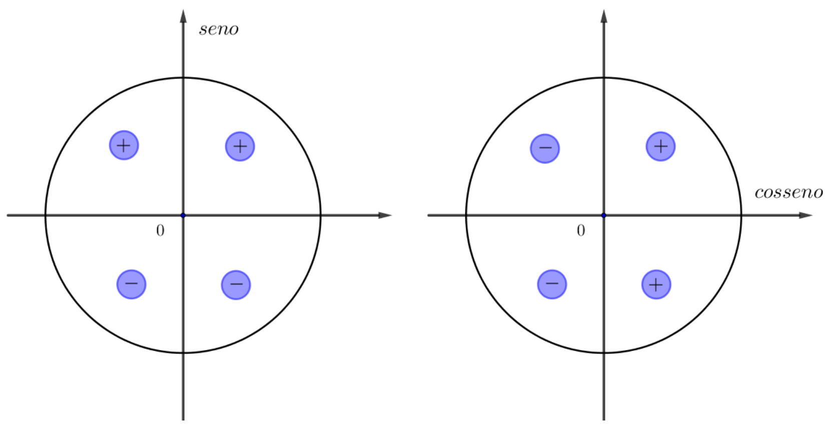
Definição 2.4. Arcos trigonométricos que possuem a mesma extremidade, onde se diferem apenas pelo número de voltas no ciclo trigonométrico são ditos **côngruos**, que usaremos a seguinte notação $\equiv$.

Se um arco mede α graus a expressão geral dos arcos côngruos a ele é: $\alpha + k\cdot 360^{\circ}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Já, se um arco mede α radianos, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é: $\alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Observe que, $k\cdot 360^{\circ}$ ou $2k\pi$ são responsáveis pelas várias imagens do ângulo α no ciclo. Além disso,

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \end{cases}.$$

Os valores do seno e cosseno sofrem algumas variações de sinal, decorrentes do plano cartesiano. Conforme ilustra na figura 2.7.

Figura 2.7: Variação do sinal do seno e cosseno

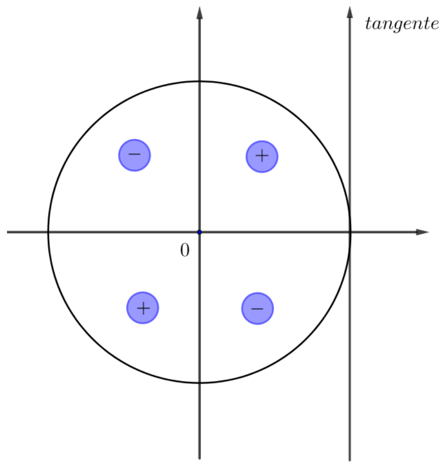


Este fato ocorre, pois como vimos o seno de um arco trigonométrico é a ordenada da imagem do ângulo. E como as ordenadas no primeiro e segundo quadrante são positivas e no terceiro e quarto as ordenadas são negativas, o valor do seno desses ângulos acompanham o sinal das ordenadas de cada quadrante. De modo análogo, ocorre para o cosseno.

Nota: A relação fundamental da trigonometria pode ser estendida para todo α real. Basta tomar a imagem de α no ciclo e usar a regra de distância de dois pontos, entre a imagem e a origem da circunferência.

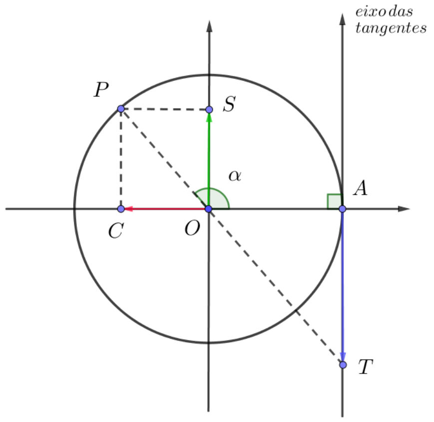
Os valores da tangente admite algumas variações de sinal, decorrentes do prologamento do raio que intercepta o eixo das tangentes em um certo ponto. Como apresenta a figura 2.8:

Figura 2.8: Variação do sinal da tangente



Nota: A relação $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ vale para todo α real, com $\cos\alpha \neq 0$. Observe a figura 2.9, com $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, note que os triângulos $\triangle AOT$ e $\triangle COP$ são semelhantes, pelo caso A.A..

Figura 2.9: Relação da tangente



Consequentemente,

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{OC}}.$$

Como $\overline{AT} = \operatorname{tg}\alpha$, $\overline{OA} = 1$, $\overline{OC} = \cos\alpha$ e $\overline{CP} = \overline{OS} = \operatorname{sen}\alpha$, então

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

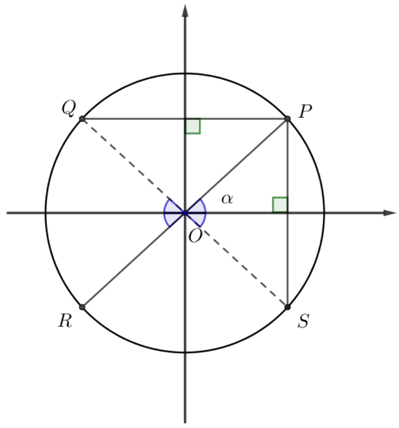
Os demais casos são inteiramente análogos.

2.3. Redução ao primeiro quadrante

Antes de explicarmos como se faz essa redução ao primeiro quadrante vejamos a definição de ângulos simétricos. Seja um ponto P do ciclo, associado a um ângulo α, no sentido positivo. Vale salientar que sempre que não mencionado qual o sentido do ângulo, estaremos considerando o sentido positivo. Pelo ponto P, tracemos três retas: a perpendicular ao eixo das ordenadas, a que passa pela origem do sistema e a perpendicular ao eixo das abscissa, como mostra a figura 2.10. Essas retas interceptam o ciclo nos pontos Q, R e S, respectivamente. Os pontos Q, R e S são chamados de **simétricos** do ponto

P. Para a elaboração desta seção foi baseado em [19] .

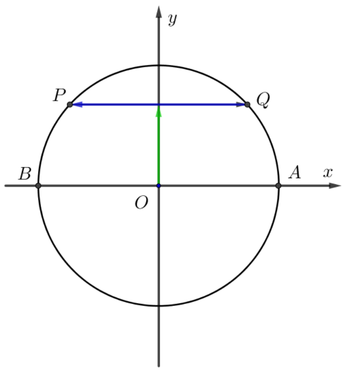
Figura 2.10: Ângulos simétricos



2.3.1. Redução do 2º ao 1º quadrante

Seja α um ângulo tal que $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, cuja imagem seja o ponto P, ou seja, $\widehat{AP} = \alpha$. Então, Q é seu simétrico em relação ao eixo y, como mostra a figura 2.11.

Figura 2.11: Redução do 2º ao 1º quadrante



Assim, $\widehat{AP} + \widehat{PB} = \pi$ (no sentido positivo), como $\widehat{AQ} = \widehat{PB}$ (por serem simétricos), resulta:

$$\widehat{AP} + \widehat{PB} = \widehat{AP} + \widehat{AQ} = \pi.$$

Daí, $\widehat{AQ} = \pi - \alpha$. E, consequentemente, temos:

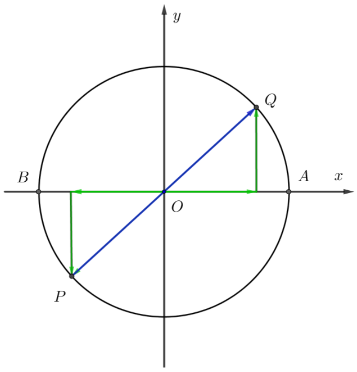
$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha), \quad \cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha) \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha).$$

Observe que o sinal de menos acompanham o cosseno e a tangente quando fazemos esta redução devido a variação do sinal, isto vale para todos os quadrantes.

2.3.2. Redução do 3º ao 1º quadrante

Seja α um ângulo tal que $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, cuja imagem seja o ponto P. Então, Q é seu simétrico em relação a origem do plano cartesiano, conforme ilustra a figura 2.12.

Figura 2.12: Redução do 3º ao 1º quadrante



Assim, $\widehat{AP} - \widehat{PB} = \pi$ (no sentido positivo), como $\widehat{AQ} = \widehat{PB}$ (por serem simétricos), logo vem:

$$\widehat{AP} - \widehat{AQ} = \pi.$$

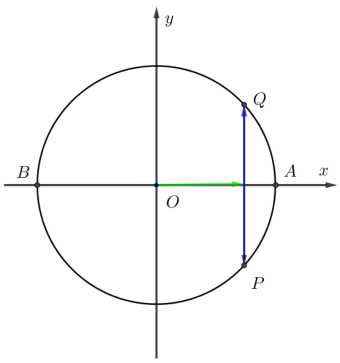
Daí, $\widehat{AQ} = \alpha - \pi$. Donde resulta de imediato:

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha - \pi), \quad \cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi) \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi).$$

2.3.3. Redução do 4º ao 1º quadrante

Seja α um ângulo tal que $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, cuja imagem seja o ponto P. Então, Q é seu simétrico em relação ao eixo x, como apresenta a figura 2.13.

Figura 2.13: Redução do 4º ao 1º quadrante



Assim, $\widehat{AP} + \widehat{PA} = 2\pi$ (no sentido positivo), como $\widehat{AQ} = \widehat{PA}$ (por serem simétricos), logo vem:

$$\widehat{AP} + \widehat{AQ} = 2\pi.$$

Daí, $\widehat{AQ} = 2\alpha - \pi$. Donde resulta de imediato:

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(2\pi - \alpha), \quad \cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha) \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(2\pi - \alpha).$$

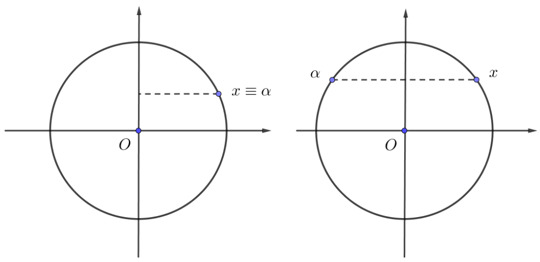
2.4. Equações Trigonométricas Fundamentais

Segundo [3], as equações fundamentais trigonométricas são: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha$, $\cos x = \cos \alpha$ e $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$. As quais possuem a incógnita x e podem ser resolvidas conforme as analises a seguir.

(a) Equações do tipo $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha$.

Para que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha$ é necessário e suficiente que as imagens dos ângulos x e α coincidam ou que sejam simétricos em relação ao eixo y (ver figura 2.14). Na primeira possibilidade, x será côngruo a α e, na segunda possibilidade, x será côngruo a $\pi - \alpha$. Portanto, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha$ equivale a $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

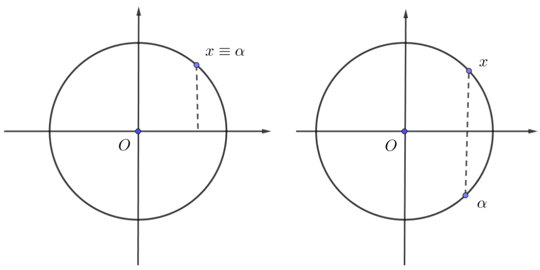
Figura 2.14: Equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha$



(b) Equações do tipo $\cos x = \cos \alpha$.

Para que $\cos x = \cos \alpha$ é necessário e suficiente que as imagens dos ângulos x e α coincidam ou que sejam simétricos em relação ao eixo x (ver figura 2.15). Assim, pela mesma analogia do caso anterior, temos que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

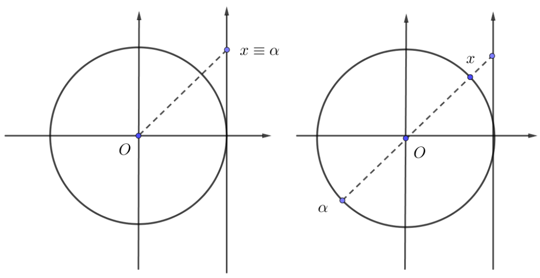
Figura 2.15: Equação $\cos x = \cos \alpha$



(c) Equações do tipo $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$.

Para que $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$, com $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, é necessário e suficiente que as imagens dos ângulos x e α coincidam ou que sejam simétricos em relação à origem do plano cartesiano, como apresenta a figura 2.16. Assim, teremos $x = \alpha + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Figura 2.16: Equação $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha$



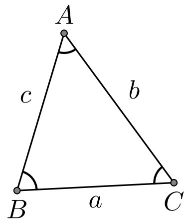
2.5. Trigonometria em um Triângulo Qualquer

Embora as razões trigonométricas sejam definidas apenas em triângulos retângulos, mas como são válidas para todo número real, é possível aplicá-las também em situações, nas quais não envolvam esses tipo de triângulos. Os teoremas, conforme podemos encontrar em [5], mostram como isto é feito.

Teorema 2.5 (Lei dos senos)**.** Em um triângulo qualquer, as medidas dos lados são diretamente proporcionais aos senos de seus respectivos ângulos opostos.

Em outros termos, seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, conforme a figura 2.17, então

Figura 2.17: Lei dos senos

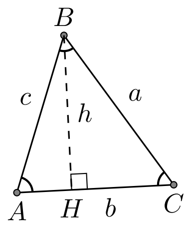


$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}.$$

Demonstração:
Antes de demonstrar a Lei dos senos, lembremos que a área de um triângulo $\triangle ABC$, que denotaremos por $A_{(ABC)}$, como o da figura 2.18, é dada por

$$A_{(ABC)} = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\widehat{A}}{2}.$$

Figura 2.18: Área de um triângulo



De fato, seja o triângulo $\triangle ABC$, tracemos a altura (h) relativa ao lado AC, então

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen}\widehat{A}. \qquad (i)$$

Lembremos que

$$A_{(ABC)} = \frac{b \cdot h}{2}. \qquad (ii)$$

Daí, de (i) e (ii), obtemos:

$$A_{(ABC)} = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}\widehat{A}}{2},$$

onde b e c são as medidas dos lados que formam o ângulo $\widehat{A}$. De modo análogo, ocorre para triângulos obtusângulos e retângulos.

Agora demonstraremos a Lei dos senos, para isto multipliquemos a equação $A_{(ABC)} = \dfrac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \widehat{A}}{2}$, por a, donde obtemos:

$$a \cdot A_{(ABC)} = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \widehat{A}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot A_{(ABC)}}.$$

Por raciocínio análogo, segue-se ainda para a área do triângulo $\triangle ABC$ as seguintes expressões:

$$A_{(ABC)} = \frac{a \cdot c \cdot \operatorname{sen} \widehat{B}}{2} \quad \text{e} \quad A_{(ABC)} = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}}{2},$$

o que implica,

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot A_{(ABC)}} \quad \text{e} \quad \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot A_{(ABC)}}.$$

Assim, em qualquer triângulo temos a seguinte relação

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot A_{(ABC)}}. \tag{2.3}$$

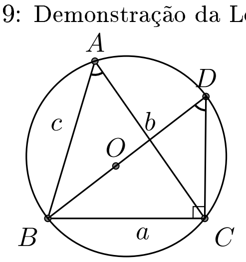
■

Corolário 2.6. Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ inscrito em uma circunferência de raio R, então

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2R. \tag{2.4}$$

Demonstração:
Seja o triângulo $\triangle ABC$ inscrito em uma circunferência de centro O e raio R, como apresenta a figura 2.19. Sendo $\overline{BD}$ um diâmetro dessa circunferência, o ângulo $B\widehat{C}D$ é reto, pois está inscrito numa semicircunferência.

Figura 2.19: Demonstração da Lei dos senos



Logo,

$$\operatorname{sen} \widehat{D} = \frac{a}{2R}.$$

Mas, os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ são congruentes, pois estão inscritos na mesma circunferência e determinam o mesmo arco. Assim, obtemos:

$$\operatorname{sen} \widehat{D} = \operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{a}{2R} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = 2R.$$

Portanto, pela teorema 2.5, concluímos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 2R.$$

■

Corolário 2.7. A área de um triângulo inscrito em uma circunferência é igual a razão do produto das medidas de seus lados pelo o quádruplo do raio dessa circunferência.

Demonstração:
Observamos que de (2.3) e (2.4), obtemos:

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot A_{(ABC)}} = 2R.$$

De onde concluímos que:

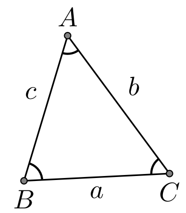
$$A_{(ABC)} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

■

Teorema 2.8 (Lei dos cossenos)**.** Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos o duplo produto destes pelo cosseno do ângulo formado por esses lados.

Em outros termos, seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, como mostra a figura 2.20, então

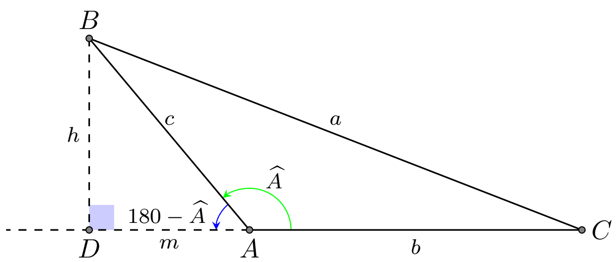
Figura 2.20: Lei dos cossenos



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \widehat{A} \quad \text{ou} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \widehat{B} \quad \text{ou} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \widehat{C}.$$

Demonstração:
Demonstraremos apenas para o caso em que $90^o < \widehat{A} < 180^o$, pois os demais casos são inteiramente análogos, neste caso usaremos $B\widehat{A}C = \widehat{A}$. Assim, consideremos um triângulo $\triangle ABC$ qualquer e altura $\overline{BD}$, relativa ao lado $\overline{AC}$, conforme a figura 2.21.

Figura 2.21: Demonstração da Lei dos cossenos



Segue-se pelo Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle BCD$ que:

$$a^2 = (b + m)^2 + h^2. \tag{2.5}$$

Já pelo triângulo $\triangle ABD$, temos:

$$h = c \cdot \operatorname{sen}(B\widehat{A}D) \qquad \text{e} \qquad m = c \cdot \cos(B\widehat{A}D).$$

Substituindo as duas últimas equações em (2.5), segue-se que:

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(b + c\cdot\cos(B\widehat{A}D)\right)^2 + \left(c\cdot \text{sen}\,(B\widehat{A}D)\right)^2 \\ &= b^2 + 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(B\widehat{A}D) + c^2\cdot\cos^2(B\widehat{A}D) + c^2\cdot\text{sen}^{\,2}(B\widehat{A}D) \\ &= b^2 + 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(B\widehat{A}D) + c^2\left(\cos^2(B\widehat{A}D) + \text{sen}^{\,2}(B\widehat{A}D)\right). \end{aligned}$$

Note que, $B\widehat{A}D = 180^{\text{o}} - \widehat{A}$ e lembrando que $\cos^2\alpha + \text{sen}^{\,2}\alpha = 1$ e $\cos(180^{\text{o}} - \alpha) = -\cos\alpha$. Concluímos,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 + 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(180^{\text{o}} - \widehat{A}) \\ &= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\widehat{A}. \end{aligned}$$

■

Observação: Observamos que nessas duas Leis, para serem utilizadas, é necessário ter informações sobre três elementos (desde que não sejam os três ângulos). Por isso, muitos alunos tem dificuldades em saber qual delas aplicar. Mas, note que não é difícil, pois a Lei dos senos é usada quando temos informação sobre a medida, de pelo menos, dois ângulos e dois lados e enquanto a Lei dos cossenos usamos quando temos a informação dos três lados e um ângulo.

2.6. Transformações

Nesta seção deduziremos algumas fórmulas, que nos auxiliarão encontrar o seno, o cosseno e a tangente de alguns ângulos, a partir das medidas de outros arcos já determinados. Os dois primeiros resultados que se seguem podem ser encontrados em [21].

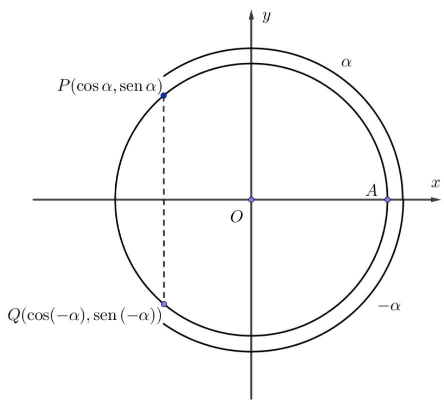
Proposição 2.9. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

(i) $\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$.

(ii) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Demonstração:
Sejam α e $-\alpha$ dois ângulos cujas as imagens são P e Q, respectivamente, conforme a figura 2.22. Consideremos o caso em que $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, já que os demais casos são inteiramente análogos.

Figura 2.22: Seno e cosseno de ângulos opostos



Note que, α e $-\alpha$ possuem mesmo comprimento, mas estão marcados em sentidos contrários, ou seja, um está no sentido anti-horário e o outro no sentido horário. Assim, temos que P e Q são simétricos em relação ao eixo x. Então eles possuem abscissas iguais e ordenadas opostas. Mas, como $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $Q(\cos(-\alpha), \operatorname{sen}(-\alpha))$, então $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ e $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(-\alpha)$, isto é, $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$. ■

Lema 2.10. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

(*i*) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$;

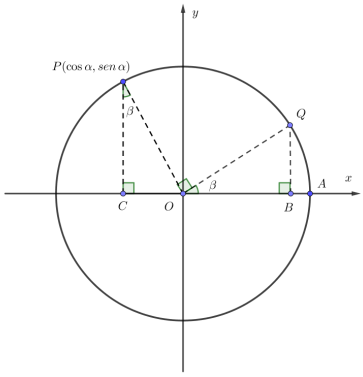
(*ii*) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$.

Demonstração:
Iremos mostrar o caso em que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, pois os demais casos são inteiramente análogos. Como $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, então devemos mostrar que

$$\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha \quad \text{e} \quad \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha.$$

Para isto, seja P a imagem do ângulo α no ciclo trigonométrico e Q a imagem do ângulo $\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, ou seja, $\widehat{AP} = \alpha$ e $\widehat{AQ} = \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, como mostra a figura 2.23.

Figura 2.23: Seno e cosseno de arcos complementares



Note que $P\widehat{O}Q = \alpha - \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, assim se $Q\widehat{O}B = \beta$, então $P\widehat{O}C = 90^o - \beta$. Daí, concluímos que $O\widehat{P}C = \beta$ e $B\widehat{Q}O = 90^o - \beta$. E como $\overline{OP} = \overline{OQ}$, pois são raios do ciclo, temos pelo caso A.L.A. que os triângulos OBQ e OPC são congruentes. Portanto, se $Q(x_0, y_0)$, então $P(-y_0, x_0)$. Mas, $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $Q\left(\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)$, então devemos ter

$$\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha \quad \text{e} \quad \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha.$$

■

Os teoremas 2.11, 2.13, 2.14 e o corolário 2.12, podem ser encontrados [19].

Teorema 2.11 (Fórmulas de Adição)**.** Para α e $\beta \in \mathbb{R}$ temos que:

(*i*) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$;

(*ii*) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$;

(*iii*) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$;

(*iv*) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$.

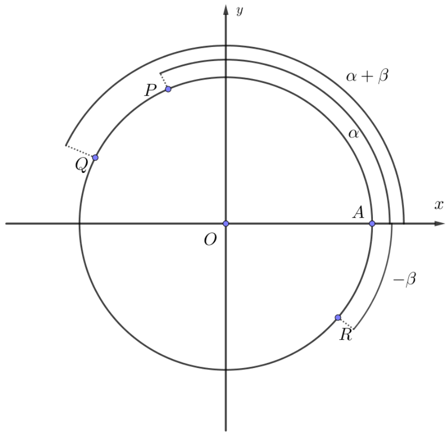
Além disso, se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $(\alpha \pm \beta) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ temos ainda

(v) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$;

(vi) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$.

Demonstração:
Sejam P, Q e R as imagens no ciclo associados aos números α, $\alpha+\beta$ e $-\beta$, respectivamente, conforme a figura 2.24. Em relação ao sistema cartesiano xOy, as coordenadas desses pontos são: $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $Q(\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$ e $R(\cos(-\beta), \operatorname{sen}(-\beta)) = (\cos\beta, -\operatorname{sen}\beta)$.

Figura 2.24: Demonstração da fórmula de adição



$$\begin{aligned} d_{AQ}^2 &= (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2 \\ &= [\cos(\alpha+\beta) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - 0]^2 \\ &= \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cdot\cos(\alpha+\beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha+\beta) \\ &= 2 - 2\cdot\cos(\alpha+\beta), \end{aligned}$$

e a distância entre os pontos R e P é:

$$\begin{aligned} d_{RP}^2 &= (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 \\ &= [\cos\alpha - \cos\beta]^2 + [\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta]^2 \\ &= \cos^2\alpha - 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha + +2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta \\ &= 2 - 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + 2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta. \end{aligned}$$

Os arcos $\widehat{AQ}$ e $\widehat{RP}$ (medidos no sentido anti-horário) têm medidas iguais a $\alpha+\beta$, portanto as cordas $\overline{AQ}$ e $\overline{PR}$ possuem mesmo comprimento. Aplicando, então, a fórmula da distância entre dois pontos, da Geometria Analítica, temos que a distância entre os pontos A e Q é:
Como $d_{AQ}^2 = d_{RP}^2$, então

$$2 - 2\cdot\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + 2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta,$$

o que implica

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.$$

Agora, fazendo $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ e usando o item que acabamos de provar, temos:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta)\\ &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot (-\operatorname{sen}\beta).\end{aligned}$$

Assim, pela proposição 2.9, concluímos:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta.$$

Para mostrar os itens (iii) e (iv), apliquemos a fórmula do item (ii) para os arcos $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ e β, isto é,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right]\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{sen}\beta.\end{aligned}$$

Lembremos que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$, então:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha.$$

E fazendo $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ e usando o item (iii), obtemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) &= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos(-\beta) + \operatorname{sen}(-\beta) \cdot \cos\alpha\\ &= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + (-\operatorname{sen}\beta) \cdot \cos\alpha\\ &= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha\end{aligned}$$

Para os itens (v) e (vi), use o fato de que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ no desenvolvimento das expressões $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ e $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ e fazendo as manipulações devidas e aplicando os itens (i), (ii), (iii) e (iv), chegamos no resultado almejado. ■

Corolário 2.12 (Fórmulas dos Arcos Duplos)**.** Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que:

(i) $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$,

(ii) $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$,

(iii) $\operatorname{tg}(2\alpha) = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Demonstração:
A demonstração é de forma imediata, basta escrever $2\alpha = \alpha + \alpha$ e usar o Teorema 2.11. ■

Se for conhecido o valor de alguma razão trigonométrica de α, podemos deduzir os valores das razões de $\dfrac{\alpha}{2}$ através do Teorema 2.13.

Teorema 2.13 (Fórmulas dos Arcos Metade)**.** Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que:

(i) $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$,

(ii) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$,

(iii) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$.

Demonstração:
Chamando $2x = \alpha$, logo $x = \dfrac{\alpha}{2}$. Assim, pelo Corolário 2.12, temos:

$$\cos\alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

pela relação fundamental da trigonometria, obtemos:

$$\cos\alpha = 2\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1,$$

o que implica

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

De maneira análoga ocorre para o item (ii). E para o item (iii) basta lembrar que $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ e usar os itens anteriores. ■

Teorema 2.14 (Transformação de Soma em Produto). Para todos $\gamma, \theta \in \mathbb{R}$ temos que:

(i) $\cos\gamma + \cos\theta = 2\cdot\cos\left(\dfrac{\gamma+\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\gamma-\theta}{2}\right)$,

(ii) $\cos\gamma - \cos\theta = -2\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{\gamma+\theta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{\gamma-\theta}{2}\right)$,

(iii) $\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\theta = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{\gamma+\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\gamma-\theta}{2}\right)$,

(iv) $\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\theta = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{\gamma-\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\gamma+\theta}{2}\right)$.

Além disso, se $\gamma \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ temos ainda

(v) $\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}(\gamma+\theta)}{\cos\gamma\cdot\cos\theta}$,

(v) $\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}(\gamma-\theta)}{\cos\gamma\cdot\cos\theta}$.

Demonstração:
Somando membro a membro os itens (i) e (ii) do Teorema 2.11, obtemos:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

E subtraindo membro a membro, temos:

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.$$

De maneira análoga, temos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha.$$

Escrevendo $\begin{cases}\alpha+\beta=\gamma\\ \alpha-\beta=\theta\end{cases}$, resolvendo o sistema, segue-se $\alpha = \dfrac{\gamma+\theta}{2}$ e $\beta = \dfrac{\gamma-\theta}{2}$. Logo, substituindo esses valores, de α e β, nas quatro últimas relações, concluímos a demonstração dos itens

(i), (ii), (iii) e (iv). Para mostrar os itens (v) e (vi) basta usar o fato de $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ e os demais itens e fazer as simplificações necessárias. $\blacksquare$

Vimos aqui o tanto que os conhecimentos trigonométricos são vastos quando são expandidos para a circunferência trigonométrica, fornecendo bastantes modelos matemáticos, permitindo assim, na resolução de diversos problemas, como serão apresentados no capítulo 4. Além disso, motiva o estudo das funções trigonométricas, as quais abordaremos no capítulo seguinte de forma dinâmica e investigativa.

3. Funções Trigonométricas

Diversos fenômenos naturais, físicos e sociais têm comportamentos **cíclicos**, ou **periódicos**, isto é, que se reproduzem a cada determinado período de tempo, e podem ser modelados por funções, algumas das quais chamaremos de **funções trigonométricas**. Isso quer dizer que essas funções são capazes de determinar, de modo aproximado, as oscilações desses fenômenos no decorrer de um intervalo de tempo. Para este capítulo se fundamentamos em [5], [19], [23] e [24]. Os gráficos desse capítulo foram feitos com o auxílio do *software* GeoGebra[1].

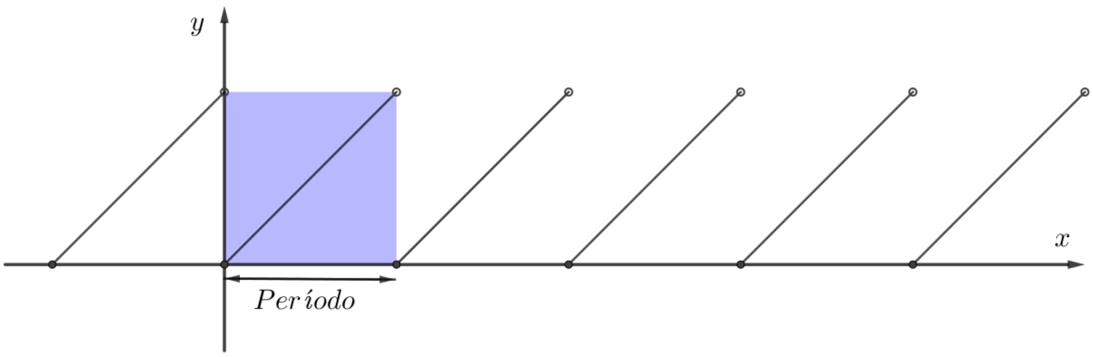
3.1. Funções Periódicas

Definição 3.1. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de **função periódica** quando existe um número real positivo T tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x+T).$$

O menor valor positivo de T que satisfaz a igualdade acima é chamado de **período**.

Figura 3.1: Período



A figura 3.1 apresenta o gráfico de uma função periódica que tem por principal característica apresentar um elemento de curva que se repete, ou seja, se quisermos desenhar toda a curva, como nesta figura , basta copiarmos onde esteja desenhado, que neste caso está em azul, tal elemento de curva e ir copiando sobre o eixo x. Este comprimento que copiamos, medido no eixo x, é denominado período.

3.1.1. Cálculo do Período de Somas e Produtos de Duas Funções Periódicas

Conforme apresenta em [23] podemos calcular o período de funções cuja sua composição sejam de funções periódicas. Como se segue:

Sejam f e g duas funções periódicas, definidas por $y = f(x)$ e $y = g(x)$, cujos períodos são, respectivamente, p_1 e p_2, com $p_1 \neq p_2$. Então, segue-se o seguinte teorema:

Teorema 3.2. Se $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{m}{n}$, onde m e n são inteiros positivos e primos entre si, então as funções definidas

[1] *Software* de matemática gratuito e dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. [7]

por $\varphi = f + g$ e $\lambda = f \cdot g$ são periódicas e seu período é

$$P = np_1 = mp_2.$$

Demonstração:
Sejam f e g duas funções periódicas de períodos p_1 e p_2, respectivamente. Então, podemos escrever essas funções como se apresenta a seguir:

$$f(x) = f(x + knp_1) \tag{3.1}$$

e

$$g(x) = g(x + kmp_2) \tag{3.2}$$

onde para $k \in \mathbb{Z}$ tem-se $kn \in \mathbb{Z}$ e $km \in \mathbb{Z}$, já que m, n são inteiros positivos. Assim, devemos mostrar que existe um número real T, tal que

$$f(x) + g(x) = f(x+T) + g(x+T) \quad \text{e} \quad f(x) \cdot g(x) = f(x+T) \cdot g(x+T),$$

isto é,

$$\varphi(x) = \varphi(x+T) \quad \text{e} \quad \lambda(x) = \lambda(x+T).$$

Para isto somemos membro a membro as equações (3.1) e (3.2), o que resulta:

$$f(x) + g(x) = f(x + knp_1) + g(x + kmp_2). \tag{3.3}$$

Multiplicando as equações (3.1) e (3.2), temos que:

$$f(x) \cdot g(x) = f(x + knp_1) \cdot g(x + kmp_2). \tag{3.4}$$

Por hipótese $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{m}{n}$, ou seja, $np_1 = mp_2$. Multiplicando por k esta última igualdade, obtemos $knp_1 = kmp_2 = T$, assim, segue-se das igualdades (3.3) e (3.4) que

$$f(x) + g(x) = f(x+T) + g(x+T) \quad \text{e} \quad f(x) \cdot g(x) = f(x+T) \cdot g(x+T).$$

Ou seja, $\varphi(x) = \varphi(x+T)$ e $\lambda(x) = \lambda(x+T)$, e logo como existe o real $T = knp_1 = kmp_2$ para a qual $\varphi(x) = \varphi(x+T)$ e $\lambda(x) = \lambda(x+T)$, as funções φ e λ são periódicas. E por definição, período é o menor T positivo, assim fazendo $k = 1$, obtemos o período de φ e λ:

$$P = np_1 = mp_2.$$

■

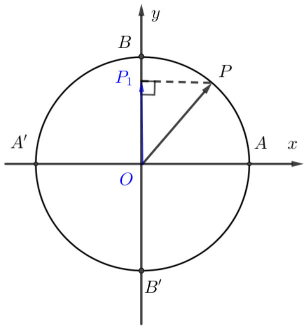
3.2. Funções Trigonométricas

Nesta secção estudaremos as três principais funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente, e seus respectivos gráficos.

Definição 3.3. Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicaremos $\operatorname{sen} x$) a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema xOy, como apresenta a figura 3.2. Assim, denominamos **função seno** a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_1} = \operatorname{sen} x$, isto é:

$$f(x) = \operatorname{sen} x.$$

Figura 3.2: Definição da função seno



Daí, podemos concluir que a função seno possui as seguintes propriedades:

(i) Se x pertencer ao primeiro ou segundo quadrante, então $\operatorname{sen} x$ é positivo. Caso x pertença ao terceiro ou quarto quadrante, $\operatorname{sen} x$ é negativo.

(ii) Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então a função $\operatorname{sen} x$ é crescente. Caso x percorra o segundo ou o terceiro quadrante a função $\operatorname{sen} x$ é decrescente.

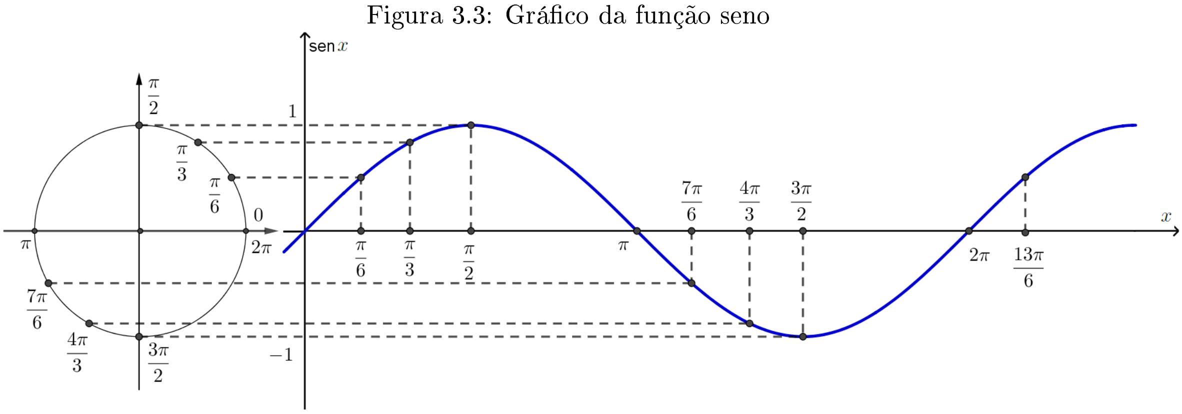
(iii) A imagem da função $\operatorname{sen} x$ é o intervalo $[-1, 1]$.

(iv) A função seno é periódica, cujo período é 2π. De fato, pois $\operatorname{sen}(x+T) = \operatorname{sen} x$, o que implica $x + T = x + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, isto é, $T = 2k\pi$. Como o período é o menor valor real T tal que $f(x) = f(x+T)$, então considerando $k = 1$ chegamos no resultado almejado.

Gráfico da Função Seno

Construiremos o gráfico da função seno, apresentado na figura 3.3, a partir da correspondência das imagens dos ângulos do ciclo com o eixo real x, a este gráfico chamaremos de senóide. Para isto, consideremos alguns valores da 1ª volta do ciclo trigonométrico, e vendo que a função seno é periódica, logo, obtemos que para os valores maiores que 2π ou menores que zero, o seno de x assume os mesmos valores do seno de arcos da 1ª volta, sendo assim o gráfico da função seno se expande por todo o eixo real x e apresenta a seguinte formato:

Figura 3.3: Gráfico da função seno



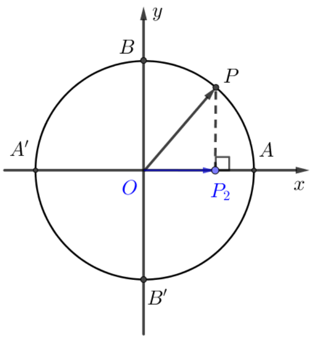
Notemos que, a metade da diferença entre as ordenadas máxima e mínima dos pontos do gráfico, é igual a 1, a essa medida chamaremos de **amplitude**.

Definição 3.4. Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicaremos $\cos x$) a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema xOy, de acordo com a figura 3.4.

Assim, denominamos **função cosseno** a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_2} = \cos x$, isto é:

$$f(x) = \cos x.$$

Figura 3.4: Definição da função cosseno



Logo, podemos depreender que a função cosseno possui as seguintes propriedades:

(i) Se x pertencer ao primeiro ou quarto quadrante, então $\cos x$ é positivo. Caso x pertença ao segundo ou terceiro quadrante, $\cos x$ é negativo.

(ii) Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então a função $\cos x$ é decrescente, no sentido anti-horário. Caso x percorra o terceiro ou o quarto quadrante a função $\cos x$ é crescente.

(iii) A imagem da função $\cos x$ é o intervalo $[-1, 1]$.

(iv) A função cosseno é periódica, cujo período é 2π. De fato, pois $\cos(x + T) = \cos x$, o que implica $x + T = x + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, isto é, $T = 2k\pi$. Como o período é o menor valor real T tal que $f(x) = f(x + T)$, então considerando $k = 1$ temos que $T = 2\pi$.

Gráfico da Função Cosseno

Esboçaremos o gráfico da função cosseno a partir de valores x, apresentados nas tabelas 3.1 e 3.2, a este gráfico denominaremos de cossenóide. Primeiramente, consideremos alguns valores da 1ª volta do ciclo trigonométrico, os quais já são conhecidos.

Tabela 3.1: Valores do cosseno na 1º volta

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

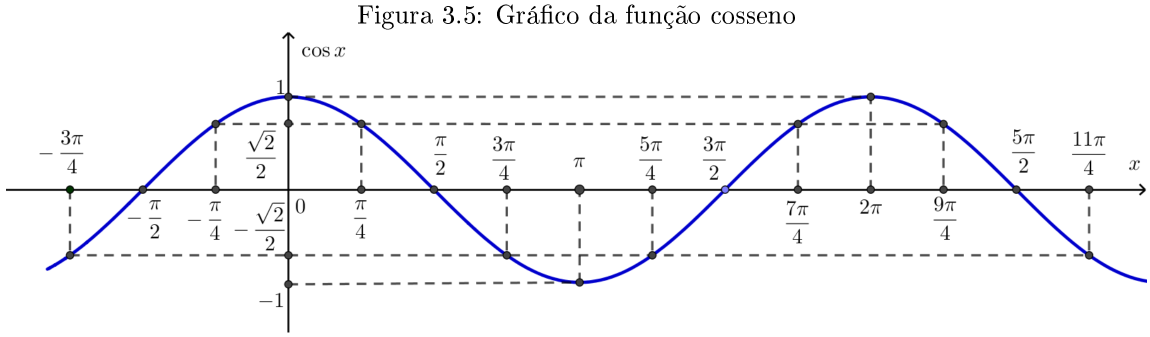
Como a função cosseno é periódica, então, temos que para os valores maiores que 2π ou menores que zero, o cosseno de x assume os mesmos valores do cosseno de arcos da 1ª volta. Ou seja:

Tabela 3.2: Valores do cosseno

x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Portanto, a curva obtida no intervalo $[0, 2\pi]$ repete-se para $x > 2\pi$ e $x < 0$. E, assim, o gráfico da função cosseno se expande por todo o eixo real x e apresenta a configuração esboçada pela figura 3.5:

Figura 3.5: Gráfico da função cosseno

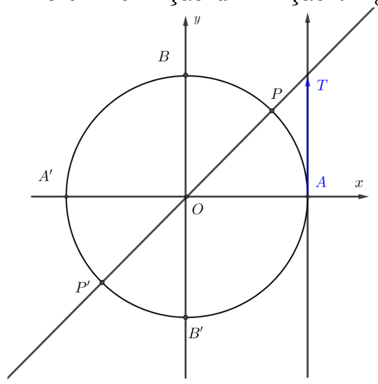


Tendo também amplitude igual a 1.

Definição 3.5. Dado um número real x, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x (e indicaremos $\operatorname{tg} x$) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$, como mostra a figura 3.6. Assim, denominamos **função tangente** a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, o real $\overline{AT} = \operatorname{tg} x$, isto é:

$$f(x) = \operatorname{tg} x.$$

Figura 3.6: Definição da função tangente



Observemos que, para $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, P está em B ou B' e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, então a $\operatorname{tg} x$ não é definida.
Então, daí, podemos inferir que a função tangente possui as seguintes propriedades:

(i) Se x pertencer aos quadrantes ímpares, então $\operatorname{tg} x$ é positiva. Caso x pertença aos quadrantes pares, $\operatorname{tg} x$ é negativa.

(ii) Se x percorre qualquer um dos quadrantes, então a função $\operatorname{tg} x$ é crescente, no sentido anti-horário.

(iii) O domínio da função tangente é $D = \left\{x \in \mathbb{R};\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ com } \in \mathbb{Z}\right\}$.

(iv) A imagem da função $\operatorname{tg} x$ é $\mathbb{R}$.

(v) A função tangente é periódica, cujo período é π. De fato, pois $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$, o que implica $x + T = x + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, isto é, $T = 2k\pi$. Como o período é o menor valor real T tal que $f(x) = f(x + T)$, então considerando $k = 1$ chegamos no resultado almejado.

Gráfico da Função Tangente

Esboçaremos o gráfico da função $f(x) = \operatorname{tg} x$ a partir, das tabelas 3.3 e 3.4, a este gráfico chamaremos de **tangentóide**. Inicialmente, consideremos alguns valores da 1ª volta do ciclo trigonométrico, os quais já conhecemos.

Tabela 3.3: Valores da tangente na 1º volta

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\operatorname{tg} x$	0	1	$\nexists$	-1	0	1	$\nexists$	-1	0

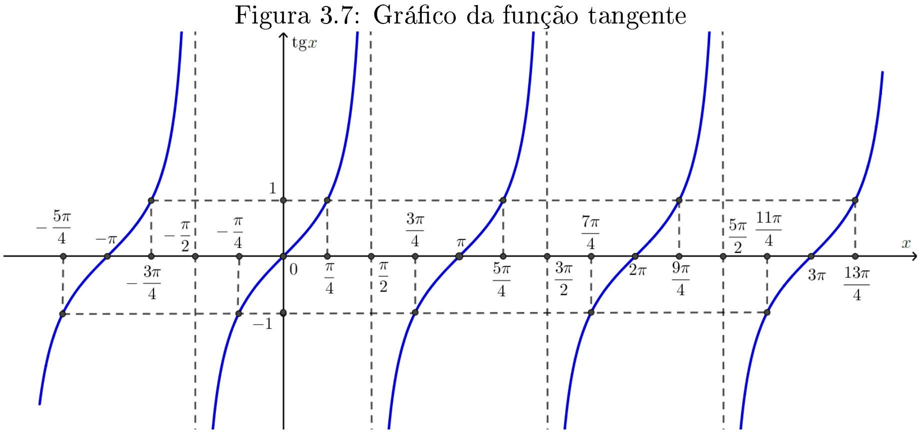
Note que na família dos arcos $\frac{\pi}{2}$ a tangente desse ângulo não está definida, pois $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e assim teríamos a indeterminação $\pm\frac{1}{0}$. Como a função tangente é periódica, então, temos que para os valores maiores que π ou menores que zero, a tangente de x assume os mesmos valores da tangente de arcos da 1ª meia-volta. Isto é:

Tabela 3.4: Valores da tangente

x	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	3π	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{4}$
$\operatorname{tg} x$	1	1	$\nexists$	-1	0	-1	$\nexists$	1	0	-1

Portanto, a curva obtida no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ repete-se para $x > \frac{\pi}{2}$ e $x < -\frac{\pi}{2}$ e assim o gráfico da função tangente se expande por todo o eixo real x e possui a forma como mostra a figura 3.7.

Figura 3.7: Gráfico da função tangente



Observamos que, diferente das funções seno e cosseno a função tangente é ilimitada, logo não possui amplitude. Além disso, as retas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são chamadas de **assíntotas** da curva que representa a função $f(x) = \operatorname{tg} x$; quando um ponto se desloca ao longo das proximidades dessa curva, a distância desse ponto à assintota se aproxima de zero.

3.3. Período e Imagem das Funções Seno, Cosseno e Tangente

O período (P) das funções do tipo $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(mx + q)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(mx + q)$, com $a, b, m, q \in \mathbb{R}$ e $b, m \neq 0$, é determinado por

$$P = \frac{2\pi}{|m|}.$$

De fato, pois conforme [24], para obter o período dessas funções fazemos a medida $(mx+q)$ assumir todos os valores reais associados a uma volta completa do ciclo trigonométrico. Assim, quando essa medida assume os valores de 0 a 2π, temos:

$$0 \leqslant mx + q \leqslant 2\pi \quad \Rightarrow \quad -q \leqslant mx \leqslant 2\pi - q.$$

Assim, temos dois casos possíveis: quando $m > 0$ ou $m < 0$.

(i) Se $m > 0$, então

$$-q \leqslant mx \leqslant 2\pi - q \quad \Rightarrow \quad -\frac{q}{m} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi - q}{m}.$$

Logo, o período P da função é a diferença entre o maior e menor valor obtido para x, nessa ordem, ou seja:

$$P = \frac{2\pi - q}{m} - \left(-\frac{q}{m}\right) \quad \Rightarrow \quad P = \frac{2\pi}{m}.$$

(ii) Se $m < 0$, então

$$-q \leqslant mx \leqslant 2\pi - q \quad \Rightarrow \quad -\frac{q}{m} \geqslant x \geqslant \frac{2\pi - q}{m}.$$

De maneira análoga, obtemos:

$$P = -\frac{q}{m} - \frac{2\pi - q}{m} \quad \Rightarrow \quad P = -\frac{2\pi}{m}.$$

Portanto de ***(i)*** e ***(ii)***, concluímos que $P = \dfrac{2\pi}{|m|}$. ■

Já o período das funções do tipo $f(x) = a + b \cdot \operatorname{tg}(mx + q)$ é dado por:

$$P = \frac{\pi}{|m|}$$

De fato, como o gráfico da função tangente é obtido no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e repete-se para $x > \frac{\pi}{2}$ e $x < -\frac{\pi}{2}$, temos que para obter o período dessa função devemos fazer a medida $(mx + q)$ assumir todos os valores reais a essa 1ª meia-volta do ciclo trigonométrico. Assim, quando essa medida está cada vez mais próximo de $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, temos:

$$-\frac{\pi}{2} < mx + q < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} - q < mx < \frac{\pi}{2} - q.$$

Então, temos dois casos:

(iii) Se $m > 0$, então

$$-\frac{\pi}{2} - q < mx < \frac{\pi}{2} - q \quad \Rightarrow \quad \frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m} < x < \frac{\frac{\pi}{2} - q}{m}.$$

Logo, o período P da função é a diferença entre o maior e menor valor obtido para x, nessa ordem, ou seja:

$$P = \frac{\frac{\pi}{2} - q}{m} - \left(\frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m} \right) \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\pi}{m}.$$

(iv) Se $m < 0$,

$$-\frac{\pi}{2} - q < mx < \frac{\pi}{2} - q \quad \Rightarrow \quad \frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m} > x > \frac{\frac{\pi}{2} - q}{m}.$$

Logo, o período P da função é a diferença entre o maior e menor valor obtido para x, nessa ordem, ou seja:

$$P = \frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m} - \left(\frac{\frac{\pi}{2} - q}{m} \right) \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\pi}{-m}.$$

Portanto de ***(iii)*** e ***(iv)***, concluímos que $P = \dfrac{\pi}{|m|}$. ■

Note que, o período das funções do tipo $f(x) = a \cdot \operatorname{sen}(mx) + b \cdot \cos(mx)$ são difíceis de identificar nessa forma, sem o auxílio de algum tipo de software, então para facilitar o cálculo do período dessas funções vejamos o seguinte processo.

Primeiro dividimos a função $f(x) = a \cdot \operatorname{sen}(mx) + b \cdot \cos(mx)$ por $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, que é diferente de zero. Então, a função toma a seguinte forma:

$$\frac{a}{r} \operatorname{sen}(mx) + \frac{b}{r} \cos(mx) = \frac{f(x)}{r}.$$

Perceba que, $\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{r}\right)^2 = 1$, então concluímos pela relação fundamental da trigonometria que existe um número real α tal que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{r}$ e $\cos\alpha = \dfrac{b}{r}$. Logo, teremos

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}(mx) + \cos\alpha \cdot \cos(mx) = \frac{f(x)}{r},$$

ou seja, $\cos(mx - \alpha) = \dfrac{f(x)}{r}$ o que implica $f(x) = r \cdot \cos(mx - \alpha)$, cujo período é de fácil identificação.

A imagem das funções do tipo $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(mx + q)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(mx + q)$, com $a, b, m, q \in \mathbb{R}$ e $b, m \neq 0$, é determinado pelo intervalo $[a - b, a + b]$. De fato, pois segundo [19] fazendo $mx + q$, quando x percorrer $\mathbb{R}$, pois a função afim $t = mx + q$ é sobrejetora e, em consequência, $\operatorname{sen} t$ percorre o intervalo $[-1, 1]$, $b \cdot \operatorname{sen} t$ percorre o intervalo $[-b, b]$ e $y = a + b \cdot \operatorname{sen} t$ percorre o intervalo $[a - b, a + b]$, que é a imagem de f. De forma semelhante ocorre para a função $g(x) = a + b \cdot \cos(mx + q)$.

3.4. Análise de Gráficos

Vimos na secção 3.2 os gráficos das três principais funções trigonométricas. Agora, analisaremos como esboçar o gráfico de outras funções, a partir, dos gráficos das funções fundamentais (cor azul), realizando certas transformações, obtendo como resultado o gráfico da função desejada.

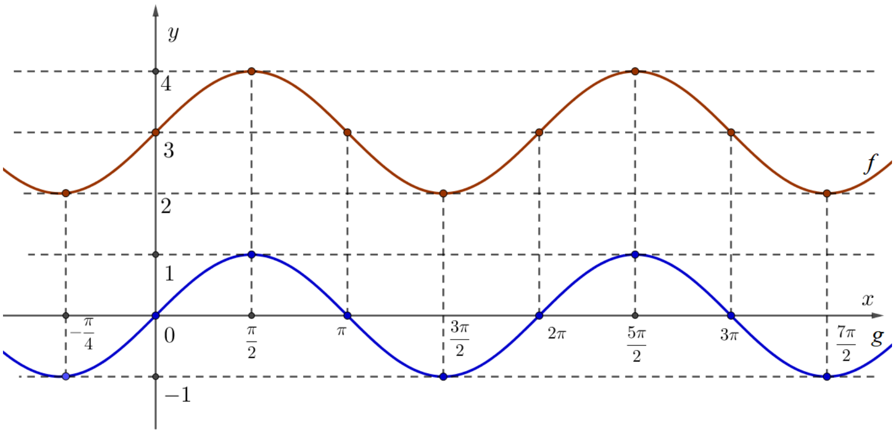
3.4.1. Translação

Analisaremos, aqui, alguns gráficos de funções que podem ser obtidos por meio de deslocamentos horizontais e verticais, em relação ao gráfico das funções trigonométricas fundamentais. Tal, efeito é dito que a função foi translada ou deslocada. Assim, averiguemos como se comporta o gráfico das funções com as seguintes estruturas $f(x) = a + \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos(x + q)$.

Exemplo 1. $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$.

Com o auxílio do software Geogebra, construímos os gráficos das funções $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$ no mesmo sistema ortogonal, para efeito comparativo.

Figura 3.8: Translação vertical



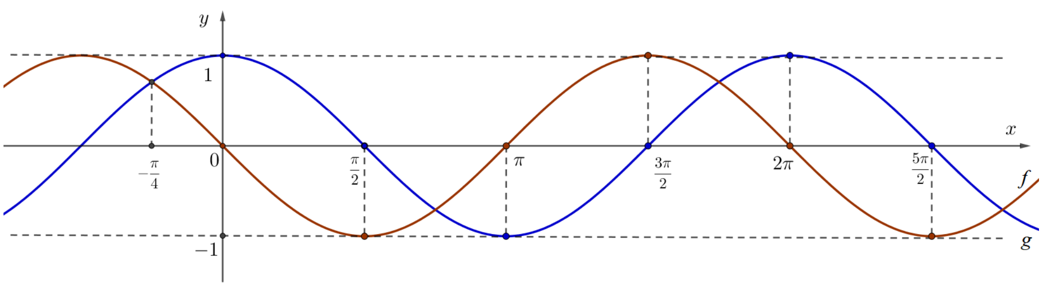
Assim, observamos pela figura 3.8 que o gráfico g foi deslocado, ponto a ponto, três unidades para cima, tendo como resultado o gráfico f. Logo, o gráfico passa a oscilar entre os valores mínimo 2 e máximo 4. Isto é, o conjunto imagem de f é $[2, 4]$. E não alterando o domínio, período e amplitude, em relação à função g. Logo:

> Os gráficos de funções trigonométricas do tipo $f(x) = a + \operatorname{sen} x$ são obtidos a partir de uma translação de $|a|$ unidades em relação ao gráfico $y = \operatorname{sen} x$ de tal modo que:
>
> - se $a > 0$, a translação é para cima.
> - se $a < 0$, a translação é para baixo.
>
> O mesmo vale para as funções dos tipos $f(x) = a + \cos x$ e $f(x) = a + \operatorname{tg} x$.

Exemplo 2. $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Esboçando os gráficos das funções $g(x) = \cos x$ e $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ no mesmo sistema de eixos, temos a representação como apresenta a figura 3.9:

Figura 3.9: Translação horizontal



Neste caso, percebemos que o gráfico de g sofreu uma translação de $\dfrac{\pi}{2}$ para a esquerda em comparação com f, mantendo o mesmo domínio, período, amplitude e conjunto imagem. Então:

Os gráficos de funções trigonométricas do tipo $f(x) = \cos(x+q)$ são obtidos a partir de uma translação de $|q|$ unidades em relação ao gráfico $y = \cos x$ da seguinte forma:

- se $q > 0$, a translação é para esquerda.
- se $q < 0$, a translação é para direita.

O mesmo vale para as funções dos tipos $f(x) = \text{sen}\,(x+q)$ e $f(x) = \text{tg}\,(x+q)$.

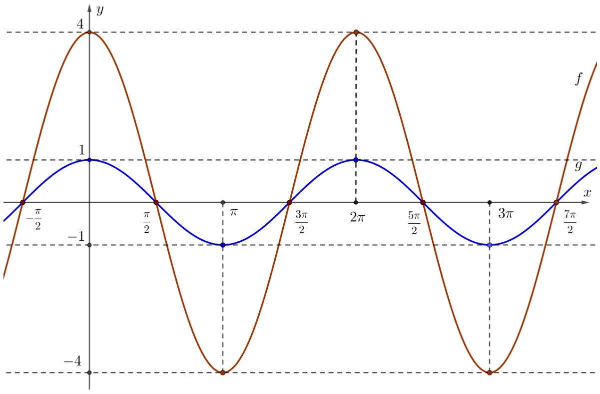
3.4.2. Alteração da Amplitude

Notemos, agora, que alguns gráficos podem ser "esticados" ou "achatados' verticalmente, comparados com os gráficos das funções fundamentais. Analisaremos, os exemplos.

Exemplo 3. $f(x) = 4 \cdot \cos x$.

Construindo os gráficos das funções $g(x) = \cos x$ e $f(x) = 4 \cdot \cos x$, chegamos na figura 3.10.

Figura 3.10: "Esticamento" da amplitude

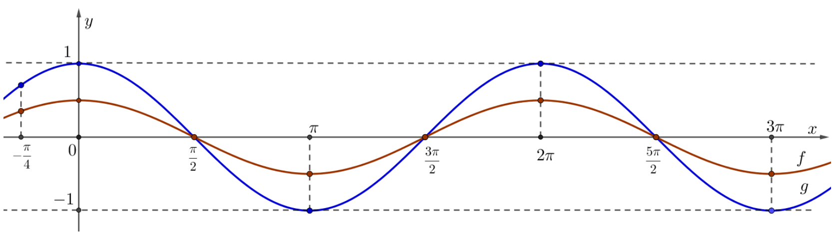


Observamos que, multiplicando $g(x) = \cos x$ por 4, o gráfico g foi "esticado" verticalmente, passando a oscilar entre -4 e 4. Isto é, sua amplitude converte para ser 4, o quádruplo da amplitude de g, tendo como conjunto imagem o intervalo $[-4, 4]$. E não alterando o domínio e o período.

Exemplo 4. $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \cos x$.

Fazendo os gráficos das funções $g(x) = \cos x$ e $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \cos x$, no Geogebra, temos a representação conforme a figura 3.11:

Figura 3.11: "Achatamento" da amplitude



Percebemos que, multiplicando $g(x) = \cos x$ por $\dfrac{1}{2}$, o gráfico g foi "achatado" verticalmente, passando

a oscilar entre $-\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{2}$. Ou seja, sua amplitude converte para ser $\dfrac{1}{2}$, metade da amplitude de g, tendo como conjunto imagem o intervalo $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. E não alterando o domínio e o período.
Assim,

Os gráficos de funções trigonométricas do tipo $f(x) = b \cdot \cos x$, com $b \neq 0$, têm amplitude $|b|$. Onde,

- se $|b| > 1$, o gráfico da função é "esticado".
- se $|b| < 1$, o gráfico da função é "achatado".

O mesmo vale para as funções do tipo $f(x) = b \cdot \operatorname{sen} x$.

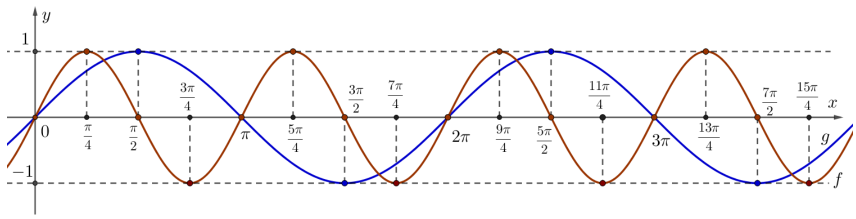
3.4.3. Alteração do Período

Agora, veremos que podemos obter gráficos "alongando" ou "estreitando" horizontalmente os gráficos das funções fundamentais. Vejamos os exemplos:

Exemplo 5. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$.

Esboçando os gráficos das funções $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, no mesmo sistema de coordenadas e comparando-as, ver figura 3.12:

Figura 3.12: "Alongamento" do período

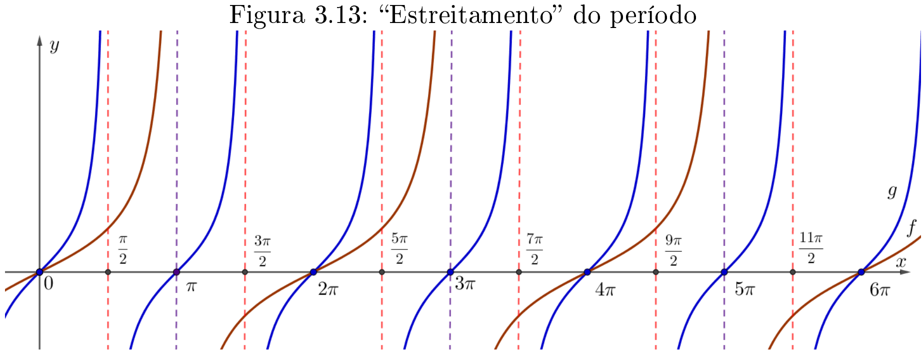


Observamos que, f apresenta o mesmo domínio, imagem e amplitude que g, porém seu período, agora, é π, isto é, metade do período de g.

Exemplo 6. $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

Construindo os gráficos das funções g e f dadas por $g(x) = \operatorname{tg} x$ e $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$ no mesmo sistema de eixos, chegamos na figura 3.13:

Figura 3.13: "Estreitamento" do período

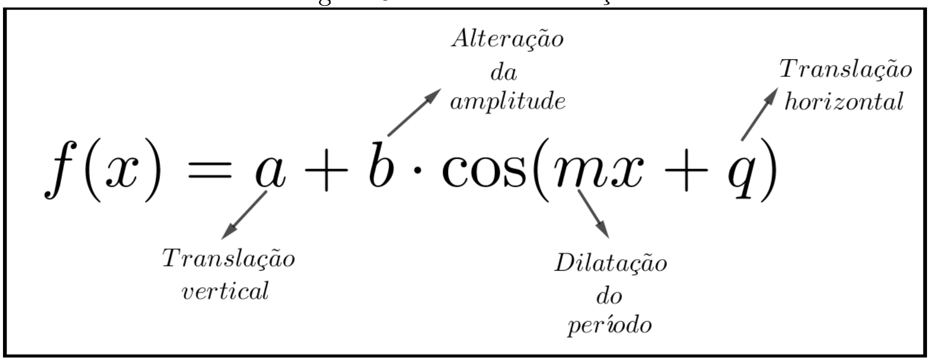


Observamos que, f não apresenta o mesmo domínio e período de g, pois seu domínio é o conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ x \neq \pi + 2k\pi\}$ e período 2π. Logo:

> Os gráficos de funções trigonométricas do tipo $f(x) = \operatorname{sen} mx$, com $m \neq 0$, são obtidos a partir de uma dilatação em relação ao gráfico $y = \operatorname{sen} x$ da seguinte forma:
>
> - se $|m| < 1$, o período se "alonga".
> - se $|m| > 1$, o período se "estreita".
>
> O mesmo vale para as funções dos tipos $f(x) = \cos mx$ e $f(x) = \operatorname{tg} mx$.

Da secção 3.3 temos que o período das funções seno e cosseno são calculados por $\dfrac{2\pi}{|m|}$ e da função tangente por $\dfrac{\pi}{|m|}$. Portanto, podemos resumir o estudo das análise de gráficos das funções trigonométricas de acordo como apresenta a figura 3.14:

Figura 3.14: Análise da função



O mesmo vale para as funções $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(mx + q)$ e $f(x) = a + b \cdot \operatorname{tg}(mx + q)$.

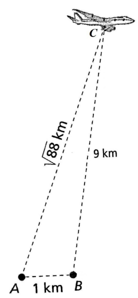
4. Aplicações

Neste capítulo abordaremos diversas aplicações e curiosidades da trigonometria e das funções trigonométricas cujo desenvolvimento dependerá apenas da utilização de uma ou mais das fundamentações teóricas vistas nos capítulos anteriores. Além disso, provaremos alguns resultados, usando os conhecimentos visto até aqui, que são úteis ao Ensino Básico e ao Ensino Superior.

As três primeiras aplicações rementem a questões que foram "cobradas" em vestibulares.

Aplicação 1 (UFBA 2003 - 2ª FASE)**.** A figura 4.1 mostra a posição de um avião observado a partir de dois pontos, A e B, localizados no solo e distantes 1 km um do outro. Sabe-se que, nesse instante, o avião dista, respectivamente, $\sqrt{88}$ km e 9 km, dos pontos A e B. Nessas condições, determine a altura do avião, em relação ao solo, no instante considerando.

Figura 4.1: Posição do avião

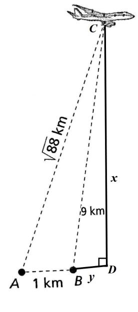


Solução: Notemos que, o triângulo não é um triângulo retângulo, então pela Lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned} 9^2 &= \left(\sqrt{88}\right)^2 + 1 - 2 \cdot \sqrt{88} \cdot \cos \widehat{A} \\ 81 &= 89 - 2 \cdot \sqrt{88} \cdot \cos \widehat{A} \\ \cos \widehat{A} &= \frac{81 - 89}{-2 \cdot \sqrt{88}} \\ &= \frac{-8}{-2 \cdot \sqrt{88}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{88}}. \end{aligned}$$

Traçando um segmento vertical do avião até o chão, temos a seguinte ilustração como apresenta a figura 4.2:

Figura 4.2: Resolução altura da avião



Daí

$$\cos \widehat{A} = \frac{1+y}{\sqrt{88}}$$

Segue-se das duas últimas equações acima que

$$\frac{4}{\sqrt{88}} = \frac{1+y}{\sqrt{88}} \Rightarrow 1+y=4 \Rightarrow y=3.$$

Logo, pelo Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle BDC$, concluímos que

$$9^2 = x^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 81 - 9 = 72 \Rightarrow x = 6\sqrt{2} \text{ km}.$$

$\square$

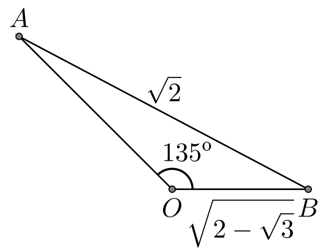
Aplicação 2 (ITA - 2011)**.** Num triângulo AOB o ângulo $A\widehat{O}B$ mede 135^o e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$ medem $\sqrt{2}$ cm e $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm, respectivamente. A circunferência de centro O e raio igual à medida de $\overline{OB}$ intersecta $\overline{AB}$ no ponto $C(\neq B)$:

(a) Mostre que $O\widehat{A}B$ mede 15^o.

(b) Calcule o comprimento de $\overline{AC}$.

Solução: (a) Seja o triângulo descrito no enunciado como o da figura 4.3. Logo, pela Lei dos senos,

Figura 4.3: Solução da aplicação 2



obtemos:

$$\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 135^o} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \widehat{A} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Note que, $2^2 - 3 = 1$ que é um quadrado perfeito, assim pela propriedade de radicais duplos que diz se temos $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, com $A^2 - B = C^2$, então $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, logo

$$\begin{aligned} \sqrt{2-\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \widehat{A} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \operatorname{sen} 45^o \cdot \cos 30^o - \operatorname{sen} 30^o \cdot \cos 45^o \\ &= \operatorname{sen} (45^o - 30^o) \\ &= \operatorname{sen} 15^o. \end{aligned}$$

Portanto, $O\widehat{A}B = 15^o$.

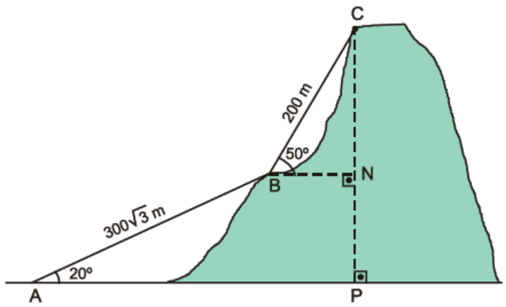
(b) Como $\overline{OC}$ é o raio da circunferência, temos que $\overline{AO} = \overline{AC} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$, então pela Lei dos senos, concluímos que:

$$\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 135^o} = \frac{\overline{AC} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\operatorname{sen} 30^o} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{2-\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

□

Aplicação 3 (UFPB - 2011)**.** Para explorar o potencial turístico de uma cidade, conhecida por suas belas paisagem montanhosas, o governo pretende construir um teleférico, ligando o terminal de transportes coletivos ao pico de um morro, conforme a figura 4.4.

Figura 4.4: Representação do teleférico



Fonte: [17]

Para a construção do teleférico, há duas possibilidades:

- o ponto de partida ficar localizado no terminal de transportes coletivos (ponto A), com uma parada intermediária (ponto B), e o ponto de chegada localizado no pico do morro (ponto C);
- o ponto de partida ficar localizado no ponto A e o de chegada localizado no ponto C, sem parada intermediária.

Supondo que $\overline{AB} = 300\sqrt{3}$ m, $\overline{BC} = 200$ m, $B\widehat{A}P = 20^o$ e $C\widehat{B}N = 50^o$, é correto afirmar que a distância entre os pontos A e C é de:

(a) 700 m.

(b) 702 m.

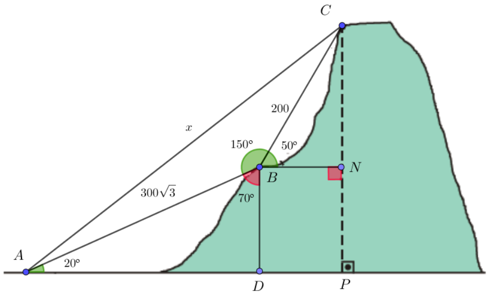
(c) 704 m.

(d) 706 m.

(e) 708 m.

Solução: Traçando uma reta paralela a $\overline{PN}$ passando por B e chamando de D o ponto de intersecção dessa paralela com o segmento $\overline{AP}$ temos o triângulo $\triangle ABD$, cuja medida do ângulo $A\widehat{B}D = 70^o$, como apresenta a figura 4.5.
Como $A\widehat{B}D = 70^o$, $D\widehat{B}N = 90^o$ e $C\widehat{B}N = 50^o$, então $A\widehat{B}C = 360^o - (70^o + 90^o + 50^o) = 150^o$.

Figura 4.5: Solução da representação do teleférico



Assim, pela Lei dos cossenos no triângulo $\triangle ABC$, obtemos:

$$\begin{aligned}
x^2 &= \left(300\sqrt{3}\right)^2 + 200^2 - 2\cdot 300\sqrt{3}\cdot 200\cdot \cos 150^{\text{o}}\\
&= 270000 + 40000 + 2\cdot 300\sqrt{3}\cdot 200\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= 310000 + 180000\\
x &= \sqrt{490000}\\
&= 700 \text{ m.}
\end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é o item (a). □

As aplicações que seguem foram extraídas de provas realizadas de concursos para docentes de alguns institutos federais.

Aplicação 4. (IFAL -2014) Suponha que, na cidade de Maceió, o horário do pôr do sol durante o ano de 2013 foi descrito pela função

$$f(t) = 18,8 - 5,2\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{730}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{730}\right)\cdot \cos\left(\frac{\pi t}{365}\right)$$

Onde t é o tempo em dias e $t = 0$ o dia 1º de janeiro. Com base nessas informações, julgue as afirmações:

(i) Foi no mês de outubro o dia em que o pôr do sol ocorreu mais tarde.

(ii) O horário em que o pôr do sol ocorreu mais tarde foi 20h10min.

(iii) O período da função acima é de 365 dias.

Assinale a alternativa correta:

(a) Somente a afirmativa i é verdadeira.

(b) Somente a afirmativa ii é verdadeira.

(c) Somente as afirmativas i e ii são verdadeiras.

(d) Somente as afirmativas i e iii são verdadeiras.

(e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

Solução: Lembremos que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{730}\right) = \cos\left(\frac{\pi t}{730}\right)$ e que $\operatorname{sen} 2x = 2\cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$, então

$$\begin{aligned} f(t) &= 18,8 - 2,6 \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{730}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{730}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{365}\right) \\ &= 18,8 - 1,3 \cdot 2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{730}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{365}\right) \\ &= 18,8 - 1,3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{365}\right). \end{aligned}$$

(i) o dia que o pôr do sol ocorre mais tarde é quando $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{365}\right) = -1$, pois o número que está multiplicando este seno é um número negativo, a saber $-1,3$. Considerando que $t \in [0, 2\pi]$, temos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{365}\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi t}{365} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 273,75.$$

Como 2013 não foi um ano bissexto, de janeiro à setembro, inclusive, temos 5 meses de 31 dias, 1 mês de 28 dias e 3 meses de 30 dias, o que nos fornece um total de 273 dia até o último dia de setembro, logo o dia que aconteceu o pôr do sol mais tarde foi no dia primeiro de outubro.
(ii) O horário mais tarde ocorre quando $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{365}\right) = -1$, assim como $f(t) = 18,8 - 1,3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{365}\right)$, então

$$f(t) = 18,8 - 1,3 \cdot (-1) = 20,10\text{h} = 20\text{h}06\text{min}.$$

(iii) Como o período de uma função trigonométrica do tipo $f(x) = \operatorname{sen} x$ é dado por $p = \frac{2\pi}{|m|}$, então

$$p = \frac{2\pi}{\left(\frac{2\pi}{365}\right)} = 365.$$

Portanto, as afirmativas verdadeiras são (i) e (iii), isto é, a alternativa correta C. □

Aplicação 5. (IFMS - 2016) Sabendo que α está no primeiro quadrante, determine as soluções da equação $\left(1 - \cos^2\alpha\right)^{\operatorname{sen}\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)} = 1$.

Solução: Note que, para satisfazer a igualdade, devemos ter os seguintes casos:

(1º) $1 - \cos^2\alpha = 1$ e $\operatorname{sen}\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ qualquer valor real.

Ou

(2º) $\operatorname{sen}\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ e $1 - \cos^2\alpha \neq 0$.

Logo, do 1º caso temos, $\cos\alpha = 0$, isto é, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. E do 2º caso, usando o teorema das Fórmulas de Adição, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \cos 2\alpha - \cos\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \\ &= \frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 2\alpha = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\operatorname{sen} 2\alpha = \sqrt{3}\cos 2\alpha$, implicando $\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{3}$, donde concluímos que $\alpha = \frac{\pi}{6}$, pois α está no primeiro quadrante. □

Aplicação 6 (IFRN - 2017)**.** Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(6x)}{\cos(4x) + 1},$$

determine:

(a) o domínio D de f;

(b) o período e a imagem de f.

Solução: (a) Como f é uma função de D em $\mathbb{R}$, devemos ter:

$$\cos(4x) + 1 \neq 0$$
$$\cos(4x) \neq -1.$$

Ou seja,

$$4x \neq \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$
$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Simplifiquemos $\dfrac{\text{sen}\,(2x) + \text{sen}\,(6x)}{\cos(4x) + 1}$ para melhor visualizarmos o conjunto imagem e o período de f. Para isto, perceba que

$$\frac{\text{sen}\,(2x) + \text{sen}\,(6x)}{\cos(4x) + 1} = \frac{\text{sen}\,(4x - 2x) + \text{sen}\,(4x + 2x)}{\cos(4x) + 1}$$

Aplicando as Fórmulas de Adição, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}\,(2x) + \text{sen}\,(6x)}{\cos(4x) + 1} &= \frac{\text{sen}\,(4x) \cdot \cos(2x) - \text{sen}\,(2x) \cdot \cos(4x) + \text{sen}\,(4x) \cdot \cos(2x) + \text{sen}\,(2x) \cdot \cos(4x)}{\cos(4x) + 1} \\ &= \frac{2 \cdot \text{sen}\,(4x) \cdot \cos(2x)}{\cos(4x) + 1}. \end{aligned}$$

Pela Fórmulas dos Arcos Duplos, temos $\text{sen}\,(4x) = 2 \cdot \text{sen}\,(2x) \cdot \cos(2x)$ e $\cos(4x) = \cos^2(2x) - \text{sen}^{\,2}(2x)$. Usando a relação fundamental da trigonometria, obtemos $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1$, logo $\cos(4x) + 1 = 2\cos^2(2x)$. Segue-se, então:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}\,(2x) + \text{sen}\,(6x)}{\cos(4x) + 1} &= \frac{2 \cdot 2 \cdot \text{sen}\,(2x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(2x)}{2\cos^2(2x)} \\ &= 2 \cdot \text{sen}\,(2x). \end{aligned}$$

Isto é, $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\,(2x)$. Como o período de uma função $\text{sen}\,(mx)$ é $\dfrac{2\pi}{|m|}$, então o período de f é π.

A função seno tem imagem $[-1, 1]$, logo

$$-1 \leqslant \text{sen}\,(2x) \leqslant 1$$
$$-2 \leqslant 2 \cdot \text{sen}\,(2x) \leqslant 2.$$

Como a função $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,(2x) + \text{sen}\,(6x)}{\cos(4x) + 1}$ não existe para $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, e o valor de $2 \cdot \text{sen}\,(2x)$ desta família é 2 ou -2, concluímos que

$$-2 < f(x) < 2.$$

Portanto, o conjunto imagem de f é $(-2, 2)$. $\square$

Aplicação 7 (IFAL - 2010)**.** Simplifique a expressão abaixo:

$$\sec 0^{\circ} \sec 1^{\circ} + \sec 1^{\circ} \sec 2^{\circ} + \cdots + \sec 88^{\circ} \sec 89^{\circ}.$$

Solução: Note que,

$$\begin{aligned}
\sec 0^{\circ} \sec 1^{\circ} + \cdots + \sec 88^{\circ} \sec 89^{\circ} &= \frac{1}{\cos 0^{\circ} \cos 1^{\circ}} + \frac{1}{\cos 1^{\circ} \cos 2^{\circ}} + \cdots + \frac{1}{\cos 88^{\circ} \cos 89^{\circ}} \\
&= \sum_{k=0}^{89} \frac{1}{\cos k^{\circ} \cos(k+1)^{\circ}}.
\end{aligned}$$

Pelo teorema Fórmulas de Adição, temos que:

$$\cos 1^{\circ} = \cos((k+1)^{\circ} - k^{\circ}) = \cos(k+1)^{\circ} \cos k^{\circ} + \operatorname{sen}(k+1)^{\circ} \operatorname{sen} k^{\circ}.$$

Dividindo a equação acima por $\cos k^{\circ} \cos(k+1)^{\circ}$, resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos 1^{\circ}}{\cos k^{\circ} \cos(k+1)^{\circ}} &= \frac{\cos(k+1)^{\circ} \cos k^{\circ} + \operatorname{sen}(k+1)^{\circ} \operatorname{sen} k^{\circ}}{\cos k^{\circ} \cos(k+1)^{\circ}} \\
&= 1 + \operatorname{tg}(k+1)^{\circ} \operatorname{tg} k^{\circ}.
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$, então $1 + \operatorname{tg}(k+1)^{\circ} \operatorname{tg} k^{\circ} = \dfrac{\operatorname{tg}(k+1)^{\circ} - \operatorname{tg} k^{\circ}}{\operatorname{tg}(k+1-k)^{\circ}} = \dfrac{\operatorname{tg}(k+1)^{\circ} - \operatorname{tg} k^{\circ}}{\operatorname{tg} 1^{\circ}}$. Logo,

$$\frac{\cos 1^{\circ}}{\cos k^{\circ} \cos(k+1)^{\circ}} = \frac{\operatorname{tg}(k+1)^{\circ} - \operatorname{tg} k^{\circ}}{\operatorname{tg} 1^{\circ}},$$

ou seja,

$$\frac{1}{\cos k^{\circ} \cos(k+1)^{\circ}} = \frac{1}{\operatorname{sen} 1^{\circ}} \left(\operatorname{tg}(k+1)^{\circ} - \operatorname{tg} k^{\circ}\right).$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{89} \frac{1}{\cos k^{\circ} \cos(k+1)^{\circ}} = \frac{1}{\operatorname{sen} 1^{\circ}} \sum_{k=0}^{89} (\operatorname{tg}(k+1)^{\circ} - \operatorname{tg} k^{\circ})$$

Como o último somatório é uma soma telescópica, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{89} \frac{1}{\cos k^{\circ} \cos(k+1)^{\circ}} &= \frac{1}{\operatorname{sen} 1^{\circ}} (\operatorname{tg} 89^{\circ} - \operatorname{tg} 0) \\
&= \operatorname{cossec} 1^{\circ} \operatorname{tg} 89^{\circ}.
\end{aligned}$$

□

Aplicação 8 (IFAL - 2011)**.** O período e o conjunto imagem da função

$$f(x) = \operatorname{sen} 2x + \sqrt{3} \cos 2x$$

valem respectivamente

(a) π e $[-1, 1]$.

(b) π e $[-2, 2]$.

(c) $\dfrac{\pi}{2}$ e $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

(d) $\frac{\pi}{2}$ e $[-2, 2]$.

(e) 2π e $[-2, 2]$.

Solução: Note que a função $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ é da forma $f(x) = a \cdot \operatorname{sen}(mx) + b \cdot \cos(mx)$, então podemos escreve-lá da seguinte forma $f(x) = r \cdot \cos(mx - \alpha)$, onde $\sqrt{a^2 + b^2}$. Assim, $r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.
Como $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$ e $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Logo,

$$f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Portanto, o período da função f é $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

Agora, lembremos que $-1 \leqslant \cos \beta \leqslant 1$, então

$$-1 \leqslant \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 1.$$

Multiplicando por 2 a inequação simultânea acima, concluímos que:

$$-2 \leqslant 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 2,$$

ou seja,

$$-2 \leqslant f(x) \leqslant 2.$$

Portanto, a assertiva (b) é a correta. □

Visando uma preparação para os docentes para o ingresso em um mestrado profissional em matemática, especialmente o PROFMAT, abordaremos agora algumas aplicações já cobradas em exames e provas realizadas pelo programa.

Aplicação 9 (PROFMAT-ENQ-2018.1-Adaptada)**.**

(a) Escreva $\cos(3x)$ em termos de $\cos(x)$.

(b) Use os itens acima para mostrar que $\cos(20)^o$ é um número irracional.

Solução: (a) Como $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$, $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$ e $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$, então:

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(x) \\
&= \cos(x)[\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)] - \operatorname{sen}(x)[2\operatorname{sen}(x)\cos(x)] \\
&= \cos^3(x) - \cos(x)\operatorname{sen}^2(x) - 2\cos(x)\operatorname{sen}^2(x).
\end{aligned}$$

Pela relação fundamental da trigonometria , temos que $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. Assim

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos^3(x) - \cos(x)[1 - \cos^2(x)] - 2\cos(x)[1 - \cos^2(x)] \\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).
\end{aligned}$$

(b) Perceba que $\cos(60^o) = \frac{1}{2}$ e $60^o = 3 \cdot 20^o$. Assim, pelo item (a), segue que:

$$\cos(60^o) = \cos(3 \cdot 20^o) = 4\cos^3(20^o) - 3\cos(20^o) = \frac{1}{2},$$

o que implica,

$$8\cos^3(20^o) - 6\cos(20^o) - 1 = 0.$$

Então $\cos(20^o)$ é raiz do polinômio $P(x) = 8x^3 - 6x - 1$ de coeficientes inteiros.
Logo, pelo teorema das raízes racionais de um polinômio de coeficientes inteiros, temos que as possíveis raízes racionais de $P(x)$ são $\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\}$. Calculando as imagens de cada um desses números, podemos representar segundo a tabela 4.1.

Tabela 4.1: Imagens das raízes de $P(x)$

x	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
$P(x)$	1	-3	-3	1	$-\frac{19}{8}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{111}{64}$	$-\frac{17}{64}$

Daí, concluímos que $\cos(20^o)$ não pode ser um número racional. E como o $\cos(x) \in \mathbb{R}$, então inferimos que $\cos(20^o)$ é um número irracional. $\square$

Aplicação 10 (PROFMAT-AV3-MA11-2015.1)**.** Determine, no conjunto dos reais, os valores máximo e mínimo da função $f(x) = 9\cos^4 x - 12\cos^3 x + 10\cos^2 x - 4\cos x + 1$.
Sugestão: Observe que $9a^4 - 12a^3 + 10a^2 - 4a + 1 = \left(3a^2 - 2a + 1\right)^2$.

Solução: Lembremos que, $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$. Então,

$$\begin{aligned}
f(x) &= 9\cos^4 x - 12\cos^3 x + 10\cos^2 x - 4\cos x + 1 \\
&= (3\cos^2 x)^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot \cos^2 x\cdot \cos x + 4\cos^2 x + 6\cos^2 x - 2\cdot 2\cos x + 1 \\
&= (3\cos^2 x)^2 - 2\cdot 3\cos^2 x\cdot 2\cos x + (2\cos x)^2 + 2\cdot 3\cos^2 x - 2\cdot 2\cos x + 1 \\
&= (3\cos^2 x)^2 + (2\cos x)^2 + 1 - 2\cdot 3\cos^2 x\cdot 2\cos x + 2\cdot 3\cos^2 x - 2\cdot 2\cos x + 1 \\
&= \left(3\cos^2 x - 2\cos x + 1\right)^2 \\
&= \left[\left(\sqrt{3}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 1\right]^2 \\
&= \left[3\left(\cos x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\right]^2.
\end{aligned}$$

Observe que, o valor mínimo de f ocorre quando $\cos x = \frac{1}{3}$, sendo assim, seja x_0 o ponto que torna essa igualdade verdadeira, logo

$$f(x_0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

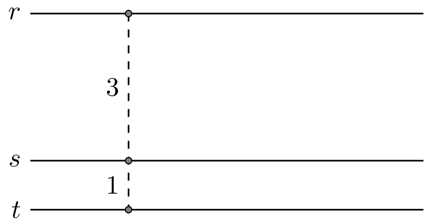
Já obtemos o valor máximo de f quando $\cos x = -1$, seja x_1 o ponto que torna essa igualdade verdadeira, então

$$f(x_1) = \left[3\left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\right]^2 = \left[3\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\right]^2 = \left[\frac{16}{3} + \frac{2}{3}\right]^2 = 36.$$

$\square$

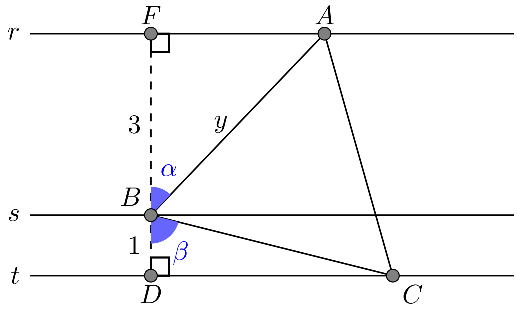
Aplicação 11 (PROFMAT-AV2-MA13-2013.2)**.** As retas r, s e t são paralelas, como mostra a figura 4.6 abaixo. A distância entre r e s é igual a 3 e a distância entre s e t é igual a 1. O triângulo equilátero ABC possui os vértices A, B e C sobre as retas r, s e t, respectivamente. Determine o lado do triângulo ABC.

Figura 4.6: Retas paralelas



Solução: Sejam D e F os pontos de encontro da reta perpendicular com as retas t e s, respectivamente. E chamando $A\widehat{B}F = \alpha$, $C\widehat{B}D = \beta$ e $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = y$, conforme a figura 4.7, obtemos que:

Figura 4.7: Demonstração das retas paralelas



$$\cos\alpha = \frac{3}{y} \quad \text{e} \quad \cos\beta = \frac{1}{y}.$$

Como $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, então $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2-9}}{y}$ e $\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\frac{1}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}$, respectivamente.

Note que, $\alpha + \beta + A\widehat{B}C = 180^{\text{o}}$, logo $\alpha + \beta = 120^{\text{o}}$. Assim, $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2}$.

Por outro lado, pelo teorema das Fórmulas de Adição, temos:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\
&= \frac{3}{y}\cdot\frac{1}{y} - \frac{\sqrt{y^2-9}}{y}\cdot\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}.
\end{aligned}$$

Segue-se,

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{3-\sqrt{(y^2-1)(y^2-9)}}{y^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\frac{3-\sqrt{(y^2-1)(y^2-9)}}{y^2} = -\frac{1}{2} \\
&\sqrt{(y^2-1)(y^2-9)} = \frac{y^2}{2} + 3 \\
&4y^4 - 40y^2 + 36 = y^4 + 12y^2 + 36 \\
&3y^4 - 52y^2 = 0.
\end{aligned}$$

Donde concluímos que $y = \sqrt{\frac{52}{3}} = \frac{2\sqrt{39}}{3}$. □

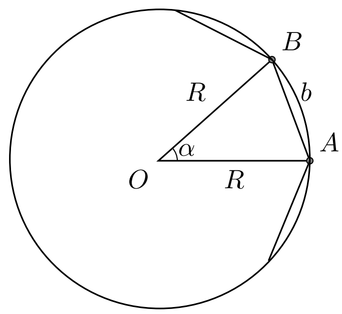
As aplicações apresentadas a seguir mostram a aplicabilidade dos conceitos trigonométricos na demonstração de algumas fórmulas matemáticas, que foram retiradas de [1] e [22].

Aplicação 12. Mostre que o perímetro de um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de raio R, é

$$p_n = 2Rn \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\text{o}}}{n}\right).$$

Solução: Consideremos uma circunferência de centro O e raio R. Ligando-se cada um dos vértices do polígono regular de n lados ao centro O da circunferência, formando assim n triângulos isósceles, cujos lados congruentes são raios, de medida R, ver figura 4.8, da circunferência, a base medindo b e o ângulo central medindo $\dfrac{360^{\text{o}}}{n}$. Agora, consideremos o triângulo $\triangle OAB$. Assim, pela Lei dos cossenos, temos:

Figura 4.8: Cálculo do perímetro de um polígono regular



$$\begin{aligned}
b^2 &= R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos\left(\frac{360^{\text{o}}}{n}\right)\\
&= 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos\left(\frac{360^{\text{o}}}{n}\right)\\
&= 2R^2\left[1 - \cos\left(\frac{360^{\text{o}}}{n}\right)\right]\\
b &= \sqrt{2R^2\left[1 - \cos\left(\frac{360^{\text{o}}}{n}\right)\right]}\\
&= \sqrt{4R^2\left[\frac{1 - \cos\left(\frac{360^{\text{o}}}{n}\right)}{2}\right]}\\
&= 2R\sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{360^{\text{o}}}{n}\right)}{2}}.
\end{aligned}$$

Pelo teorema das Fórmulas dos Arcos Metade, obtemos:

$$\begin{aligned}
b &= 2R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{360^{\text{o}}}{n} \cdot \frac{1}{2}\right)\\
&= 2R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\text{o}}}{n}\right).
\end{aligned}$$

Daí, concluímos que o perímetro é $n \cdot b$, isto é,

$$p_n = 2Rn \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\text{o}}}{n}\right).$$

□

Aplicação 13. Prove que, em um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, a sua área ($A_{(ABC)}$), é dada por

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (fórmula de Heron),}$$

onde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ e a, b e c são os comprimentos dos lados do triângulo.

Solução: Pela Fórmula de Arcos Metade e Lei dos cossenos, temos, respectivamente:

$$\operatorname{sen}\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\widehat{A}}{2}} \tag{4.1}$$

e

$$\cos\widehat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \tag{4.2}$$

Substituindo (4.2) em (4.1) obtemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{\widehat{A}}{2} &= \sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} \\
&= \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}}.
\end{aligned}$$

Como $a+b+c = 2p$, então $a+b = 2p-c$ e $a+c = 2p-b$, logo:

$$\operatorname{sen}\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(2p-2c)(2p-2b)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}}. \tag{4.3}$$

Agora, como $\cos\dfrac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\widehat{A}}{2}}$ e $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, então de maneira análoga, segue-se:

$$\cos\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}. \tag{4.4}$$

Como $\operatorname{sen}2\widehat{A} = 2\cdot\operatorname{sen}\widehat{A}\cdot\cos\widehat{A}$, então $\operatorname{sen}\widehat{A} = 2\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\widehat{A}}{2}\cdot\cos\dfrac{\widehat{A}}{2}$. E sabemos que $A_{(ABC)} = \dfrac{b\cdot c\cdot\operatorname{sen}\widehat{A}}{2}$. Logo, dessas duas últimas soluções equações, obtemos:

$$A_{(ABC)} = \frac{b\cdot c}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\widehat{A}}{2} = b\cdot c\cdot\operatorname{sen}\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\widehat{A}}{2}. \tag{4.5}$$

Substituindo (4.3) e (4.4) em (4.5), concluímos que:

$$\begin{aligned}
A_{(ABC)} &= bc\cdot\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\
&= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.
\end{aligned}$$

□

A aplicação a seguir é conhecida como **relação de Stewart**, a qual relaciona as medidas dos lados de um triângulo com a medida de uma ceviana, sendo aplicável a uma ceviana qualquer.

Aplicação 14. Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Se P é um ponto sobre o lado $\overline{BC}$, tal que $\overline{BP} = x$, $\overline{CP} = z$ e $\overline{AP} = z$, conforme a figura 4.9, então

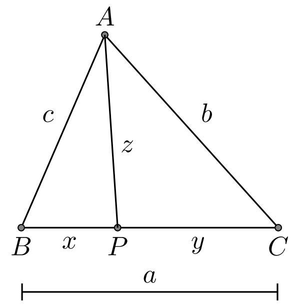
$$b^2x + c^2y = a\left(xy + z^2\right).$$

A partir dessa relação mostre que o comprimento da mediana (m_a) relativa ao lado BC é

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}}{2}.$$

Solução: Chamando $A\widehat{P}C = \beta$, então $A\widehat{P}B = 180^{\circ} - \beta$. Aplicando a Lei dos cossenos no triângulo $\triangle APC$ da figura 4.9, temos:

Figura 4.9: Relação de Stewart



$$b^2 = z^2 + y^2 - 2yz \cdot \cos\beta.$$

E ainda pela Lei dos cossenos no triângulo $\triangle APB$, obtemos

$$c^2 = z^2 + x^2 - 2zx \cdot \cos(180^{\circ} - \beta).$$

Mas, lembrando que $\cos(180^{\circ} - \beta) = -\cos\beta$, então

$$c^2 = z^2 + x^2 + 2zx \cdot \cos\beta.$$

Isolando $\cos\beta$ nas duas últimas equações acima e igualando os resultados, resulta em

$$\frac{z^2 + y^2 - b^2}{2yz} = \frac{c^2 - z^2 - x^2}{2xz},$$

ou seja,

$$x(z^2 + y^2 - b^2) = y(c^2 - z^2 - x^2),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} b^2x + c^2y &= xz^2 + yz^2 + xy^2 + x^2y \\ &= (x+y)z^2 + xy(x+y) \\ &= (x+y)(xy + z^2). \end{aligned}$$

Notemos que $x + y = a$, então $b^2x + c^2y = a\left(xy + z^2\right)$.

Agora, mostremos a medida do comprimento da mediana de um triângulo. Para isto, fazendo, na relação de Stewart, $z = m_a$ e $x = y = \dfrac{a}{2}$, obtemos

$$b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} = a\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2\right),$$

implicando

$$\frac{b^2+c^2}{2} = \frac{a^2}{4} + m_a^2,$$

isto é,

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}.$$

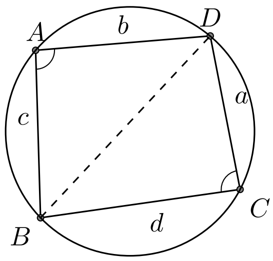
□

Aplicação 15. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível de lados $a,\ b,\ c,\ d$. Prove a **fórmula de Bramagupta**[1] para a área de $ABCD$:

$$A_{(ABCD)} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Solução: Note que a área do quadrilátero $ABCD$, denotada por $A_{(ABCD)}$, é igual a soma das áreas dos triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle BDC$.

Figura 4.10: Quadrilátero inscrito



Como $A_{(ADB)} = \dfrac{bc \cdot \text{sen}\,\widehat{A}}{2}$ $\quad e \quad$ $A_{(BDC)} = \dfrac{ad \cdot \text{sen}\,\widehat{C}}{2}$, então

$$A_{(ABCD)} = \frac{1}{2}(bc \cdot \text{sen}\,\widehat{A} + ad \cdot \text{sen}\,\widehat{C}).$$

Por outro lado, percebemos que $\widehat{A} + \widehat{C} = \pi$, pois o quadrilátero é inscritível, como apresenta a figura 4.10, logo $\widehat{A} = \pi - \widehat{C}$, daí

$$\text{sen}\,\widehat{A} = \text{sen}\,(\pi - \widehat{C}) = \text{sen}\,\widehat{C}.$$

Assim, $A_{(ABCD)} = \dfrac{1}{2}\text{sen}\,\widehat{A}(bc+ad)$, elevando ao quadrado temos $A^2_{(ABCD)} = \dfrac{1}{4}\text{sen}^2\widehat{A}(bc+ad)^2$, isto é,

$$\begin{aligned} 4A^2_{(ABCD)} &= (1-\cos^2\widehat{A})(bc+ad)^2 \\ &= (bc+ad)^2 - \cos^2\widehat{A}(bc+ad)^2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Aplicando a Lei dos cossenos nos triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle BDC$, temos, respectivamente:

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} \quad \text{e} \quad \overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\widehat{C}.$$

[1] Matemático e astrônomo indu do século VII d.C..

Destas duas últimas igualdades, obtemos:

$$b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\widehat{C}.$$

Como $\cos\widehat{A} = \cos(\pi - \widehat{C}) = -\cos\widehat{C}$, então $b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} = a^2 + d^2 + 2ad \cdot \cos\widehat{A}$, ou seja,

$$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 = 2\cos\widehat{A}(bc + ad) \tag{4.7}$$

Substituindo (4.7) em (4.6), temos:

$$4A^2_{(ABCD)} = (bc + ad)^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2}\right)^2,$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
16A^2_{(ABCD)} &= 4(bc + ad)^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2 - d^2\right)^2 \\
&= [2(bc + ad) + (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)] \cdot [2(bc + ad) - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)] \\
&= [(b + c)^2 - (a - d)^2] \cdot [(a + d)^2 - (b - c)^2] \\
&= (b + c + a - d)(b + c + d - a)(a + b + d - c)(a + c + d - b).
\end{aligned}$$

Como $2p = a + b + c + d$, então $b + c + a - d = 2p - 2d$, $b + c + d - a = 2p - 2a$, $a + b + d - c = 2p - 2c$ e $a + c + d - b = 2p - 2b$. Logo,

$$\begin{aligned}
16A^2_{(ABCD)} &= (2p - 2d)(2p - 2a)(2p - 2c)(2p - 2b) \\
&= 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d).
\end{aligned}$$

Portanto, $A_{(ABCD)} = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$. □

A aplicação a seguir remete ao cálculo do período de alguns funções que são originadas de outras funções periódicas. Segundo [23]:

Aplicação 16. Se uma função f, definida por $y = f(x)$, é periódica, de período p, então a função definida por $g(x) = m + n \cdot f(ax + b)$ é periódica e seu período é

$$P = \frac{p}{|a|}.$$

Solução: Para que g seja periódica, deve existir um número real T tal que $g(x) = g(x + T)$, ou seja, $m + n \cdot f(ax + b) = m + n \cdot f(a[x + T] + b)$. Como f é periódica de período p, então $f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) = \cdots$, isto é, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$f(x) = f(x + kp). \tag{4.8}$$

Multiplicando 4.8 por n $(n \neq 0)$ e somando m em seguida, resulta:

$$m + n \cdot f(x) = m + n \cdot f(x + kp). \tag{4.9}$$

Agora, substituindo x por $ax + b$ $(a \neq 0)$ em 4.9, obtemos:

$$\begin{aligned} m+n\cdot f(ax+b) &= m+n\cdot f(ax+b+kp) \\ &= m+n\cdot f\left(ax+b+a\cdot\frac{kp}{a}\right) \\ &= m+n\cdot f\left(a\left[x+\frac{kp}{a}\right]+b\right). \end{aligned}$$

Assim, fazendo $\dfrac{kp}{a}=T$, temos:

$$m+n\cdot f(ax+b)=m+n\cdot f(a[x+T]+b),$$

ou seja, $g(x)=g(x+T)$. Logo, existe um número real $T=\dfrac{kp}{a}$ para o qual $g(x)=g(x+T)$ e, portanto, a função g é periódica.

Como, por definição, período é o menor T positivo, então fazemos $k=1$ e, concluímos, que o período de g é

$$P=\frac{p}{|a|}.$$

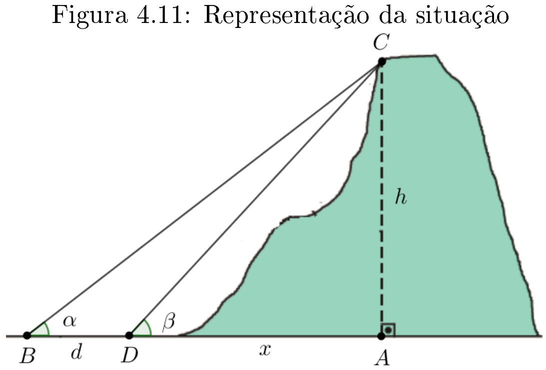
Como o período é um número positivo o $|a|$ surgiu na expressão acima, porque o valor de a pode ser um número positivo ou negativo. □

As seguintes aplicações mostram a aplicabilidade da trigonometria em outras áreas do conhecimento como na engenharia e física. As quais podem ser encontradas [3], [5] e [24].

Aplicação 17. Um observador em uma planície vê ao longe uma montanha segundo um ângulo α (ângulo no plano vertical formado por um ponto no topo da montanha, o observador e o plano horizontal). Após caminhar uma distância d em direção à montanha, ele passa a vê-la segundo um ângulo β. Determine a altura da montanha, em função de α, β e d.

Solução: Seja h a altura da montanha, então representemos a situação de acordo com a figura 4.11.

Figura 4.11: Representação da situação



Assim, pelos triângulos $\triangle ADC$ e $\triangle ABC$, respectivamente, temos:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{h}{x} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{d+x},$$

isto é,

$$x=\frac{h}{\operatorname{tg}\beta} \tag{4.10}$$

e

$$h=\operatorname{tg}\alpha(d+x). \tag{4.11}$$

Logo, substituindo (4.10) em (4.11), obtemos:

$$h = \operatorname{tg}\alpha\left(d + \frac{h}{\operatorname{tg}\beta}\right),$$

o que implica

$$h - h\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = d \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} h &= \frac{d \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}} \\ &= \frac{d \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}} \\ &= d \cdot \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}\right). \end{aligned}$$

□

Aplicação 18. Uma partícula se move sobre uma circunferência de centro O e raio 5 centímetros, no sentido anti-horário e com velocidade escalar constante, completando uma volta a cada 3 segundos. Um sistema cartesiano ortogonal de origem O é fixado no plano da trajetória dessa partícula, e a unidade adotada nos eixos é o centímetro. Considerando que no instante inicial ($t = 0$) a partícula passa pelo ponto (5,0).

(i) A função que expressa a abscissa da posição da partícula em cada instante t, em segundo, é:

(a) $f(t) = 3\cos\left(\frac{5\pi t}{3}\right)$.

(b) $f(t) = 5\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$.

(c) $f(t) = 3\cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$.

(d) $f(t) = 2\cos\left(\frac{5\pi t}{3}\right)$.

(e) $f(t) = 5\cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$.

(ii) A função que expressa a ordenada da posição da partícula em cada instante t, em segundo, é:

(a) $g(t) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi t}{3}\right)$.

(b) $g(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi t}{4}\right)$.

(c) $g(t) = \operatorname{sen} 2\pi t$.

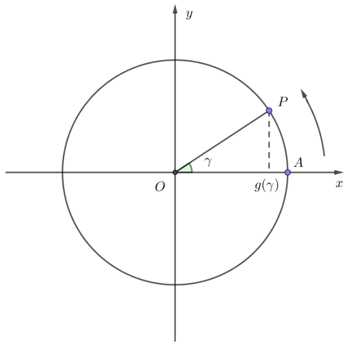
(d) $g(t) = 5\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$.

(e) $g(t) = 5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{3}\right)$.

Solução: (i) Sejam P a posição da partícula no instante t e γ a medida do arco $\widehat{AP}$ com $A(5,0)$. Assim, com o auxílio da figura 4.12, a função g que expressa a abscissa do ponto P para cada medida γ é:

$$g(\gamma) = 5\cos\gamma \tag{4.12}$$

Figura 4.12: Posição da partícula situação (i)



Percebemos que a medida de γ em radianos, pode ser determinado em função do tempo t, em segundos, isto é:

$$\begin{array}{ccc} \text{Deslocamento angular} & & \\ \text{da partícula (rad)} & & \text{Tempo (segundos)} \\ 2\pi & \longleftrightarrow & 3 \\ \gamma & \longleftrightarrow & t \end{array}$$

Portanto,

$$\gamma = \frac{2\pi t}{3} \tag{4.13}$$

Substituindo 4.13 em 4.12, temos:

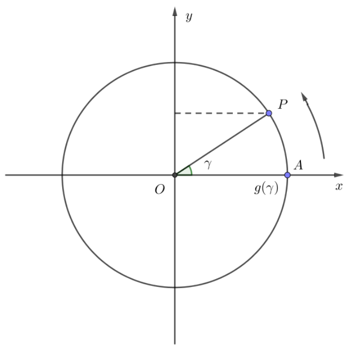
$$g\left(\frac{2\pi t}{3}\right) = 5\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right).$$

Assim, indicando essa função por $f(t)$, concluímos que $f(t) = 5\cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$, logo a alternativa correta é a assertiva (b).

(ii) De forma análoga ao item anterior temos que a função g que expressa a ordenada do ponto P para cada medida γ é:

$$g(\gamma) = 5\text{sen}\,\gamma \tag{4.14}$$

Figura 4.13: Posição da partícula situação *(ii)*



Percebemos que, com o auxílio da figura 4.13, a medida de γ em radianos, em função do tempo t, em segundos, é:

$$\gamma = \frac{2\pi t}{3} \tag{4.15}$$

Assim substituindo 4.15 em 4.14, obtemos:

$$g\left(\frac{2\pi t}{3}\right) = 5\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{3}\right).$$

Portanto, indicando essa função por $g(t)$, concluímos que $g(t) = 5\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{3}\right)$, que nos fornece como alternativa correta a assertiva (d). $\square$

Aplicação 19. O movimento das marés é um movimento periódico motivado pelas forças de atração gravitacional exercidas pelo Sol e pela Lua. Por ser movimento periódico, pode ser modelado aproximadamente pela função $h(t) = a + b \cdot \text{sen}\,(c \cdot t)$, em que $h(t)$ representa a altura da maré em metros no tempo t em horas e com valor médio a, amplitude b e período $\frac{2\pi}{|c|}$ (sendo a, b e c constantes reais positivas). Em certa manhã, um estudante abriu o jornal e observou as informações, de acordo com a tabela 4.2:

Tabela 4.2: Movimento da maré

Horário	Altura da maré
0h	1,0 m
3h	1,6 m
6h	1,0 m
9h	0,4 m
12h	1,0 m
15h	1,6 m
18h	1,0 m

Fonte: Dados fictícios.

Sabendo que ele irá à praia pela manhã após as 9h e que não entra na água se a maré estiver acima de 0,7 m. A que horas, no máximo, o estudante pode chegar à praia de tal maneira que ele possa entrar na água ainda pela manhã?

Solução: Pela tabela 4.2, temos que $h(0) = 1,0$, $h(3) = 1,6$, $h(6) = 1,0$ e $h(t) = a + b \cdot \text{sen}\,(c \cdot t)$, assim:

$$h(0) = a + b \cdot \text{sen}\,0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1,$$

$$h(3) = 1 + b \cdot \text{sen}\,(3c) = 1,6 \quad \Rightarrow \quad b \cdot \text{sen}\,(3c) = 0,6, \tag{4.16}$$

$$h(6) = 1 + b \cdot \text{sen}\,(6c) = 1,0 \quad \Rightarrow \quad b \cdot \text{sen}\,(6c) = 0. \tag{4.17}$$

De (4.17), concluímos que $6c = 0 + k\pi$, considerando $k = 1$, já que a, b e c são constantes reais positivas, então $c = \frac{\pi}{6}$. Assim, de (4.16), obtemos $b \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 0,6$, ou seja, $b = 0,6$.

Portanto, a função que modela a situação é $h(t) = 1 + 0,6 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right)$. Logo, o horário máximo que o estudante pode chegar na praia será quando $h(t) = 0,7$, isto é:

$$1 + 0,6 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0,7 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) = -\frac{0,3}{0,6} = -\frac{1}{2}.$$

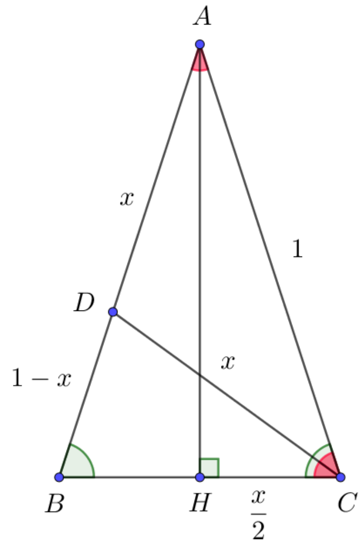
Daí, segue-se $\frac{\pi t}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi t}{6} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, considerando $k = 1$ temos, respectivamente, $t = 7$ ou $t = 11$. Mas, como o estudante irá chegar depois das 9h, ele deverá chegar na paria no máximo às 11h. $\square$

Finalizamos o capítulo com algumas aplicações que desperta a curiosidade acerca dos conceitos trigonométricos. A aplicação 20 pode ser encontrada em [3], como se segue:

Aplicação 20. Mostre que $\operatorname{sen} 18^{\circ} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Solução: Para isto, consideremos um triângulo isósceles $\triangle ABC$ de lados que medem 1 e base $\overline{BC}$, ou seja, $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ e $B\widehat{A}C = 36^{\circ}$, como apresenta a figura 4.14. Traçando a bissetriz $\overline{CD}$ de $A\widehat{C}B$,

Figura 4.14: Solução do seno de 18º



assim calculando todos os ângulos e analisando os dois triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle CDA$ concluímos que eles são isósceles, e fazendo $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = x$ e, como os triângulos $\triangle CDB$ e $\triangle ABC$ são semelhantes pelo caso $A.L.A$, pois..., temos:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}},$$

isto é,

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}.$$

Resolvendo a equação, concluímos que:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Traçando a altura AH do triângulo $\triangle ABC$ que também é mediana, temos:

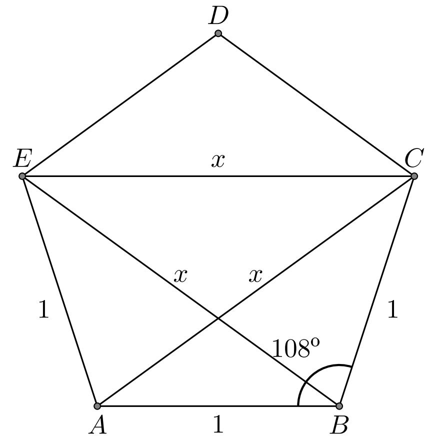
$$\operatorname{sen} 18^{\circ} = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

□

Aplicação 21. Mostre que o $\cos 108^{\circ} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Solução: Para isto, consideremos um pentágono regular $ABCDE$ de lado medindo 1. Tracemos, agora, as diagonais $\overline{EB}$, $\overline{EC}$ e $\overline{AC}$, conforme a figura 4.15. Veja que $\overline{EB} = \overline{EC} = \overline{AC} = x$ (as diagonais de um pentágono regular são congruentes), pois tratam-se das diagonais de um polígono regular. Como $ABCDE$ é regular, então ele é inscritível, consequentemente, o quadrilátero $ABCE$ também é inscritível.

Figura 4.15: Pentágono regular



Então, pelo teorema de Ptolomeu o produto das diagonais de um quadrilátero inscrito é igual a soma dos produtos dos lados opostos, tem-se:

$$\begin{gathered} \overline{EC} \cdot \overline{AB} + \overline{EA} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{EB} \\ x \cdot 1 + 1 \cdot 1 = x \cdot x \\ x^2 = x + 1. \end{gathered} \tag{4.18}$$

Resolvendo a equação do segundo grau, segue-se que

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Porém, $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ não satisfaz, uma vez que x deve ser positivo por se tratar de medida de comprimento. Logo,

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \tag{4.19}$$

Note que a medida do ângulo interno (a_i) de ABCDE, é:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n} \\ &= \frac{(5-2)\cdot 180^{\circ}}{5} = 108^{\circ}. \end{aligned}$$

Portanto, usando a Lei dos cossenos no triângulo $\triangle ABC$, obtemos

$$\begin{gathered} \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(A\widehat{B}C) \\ x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 108^{\circ} \\ \cos 108^{\circ} = \frac{x^2 - 2}{-2}. \end{gathered} \tag{4.20}$$

Substituindo (4.18) em (4.20), temos

$$\cos 108^{\circ} = \frac{x + 1 - 2}{-2} = \frac{1 - x}{2}.$$

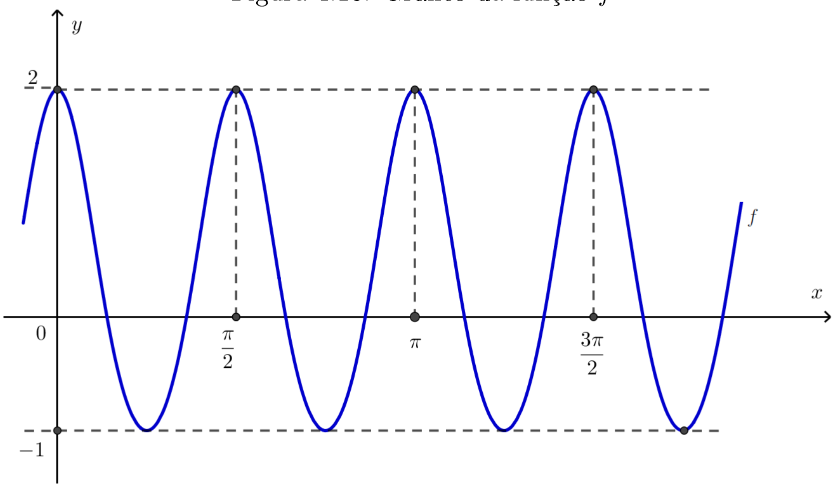
Assim, substituindo (4.19) na igualdade acima, concluímos que

$$\begin{aligned}\cos 108^{o} &= \frac{1-\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{2}\\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4}.\end{aligned}$$

□

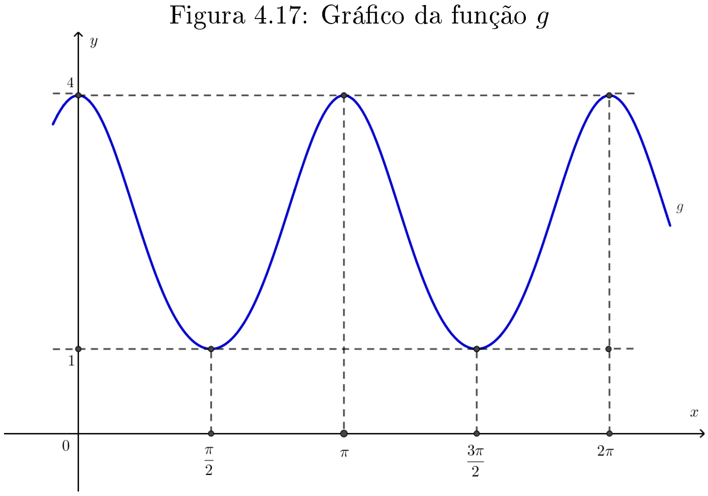
Aplicação 22. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = (\cos^2 x + 1)^2$. A figura 4.16 abaixo mostra o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na forma $f(x) = cg(ax - b) + d$, sendo a, b, c e d constantes reais. Determine a, b, c e d.

Figura 4.16: Gráfico da função f



Solução: O gráfico da função g tem o aspecto mostrado na figura 4.17. O gráfico da função f é dado pela aplicação de translações e dilatações no gráfico de g.

Figura 4.17: Gráfico da função g



Observemos que o ponto (0,4) de g foi transformado no ponto (0,2) de f, tendo assim, um deslocamento de 2 unidades para baixo, ou seja, $d = -2$. Note que, a amplitude de ambas as funções, f e g, é igual a $\frac{4-1}{2} = \frac{2-(-1)}{2} = \frac{3}{2}$, não havendo alteração da amplitude, sendo assim, $c = 1$.

Pelo gráfico de f e g, temos, respectivamente, que seus períodos são $\dfrac{\pi}{2}$ e π, então usando a aplicação 16, vem:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{|a|},$$

o que nos fornece

$$|a| = 2.$$

Observamos que o período sofreu um "estreitamento" de $\dfrac{\pi}{2}$ unidades, permanecendo o eixo de simetria vertical, sendo assim, não alterando o deslocamento horizontal, isto é, $b = 1$, já que o coeficiente responsável por essa translação de g também é 1.

Logo, $f(x) = \left(\cos^2(2x) + 1\right)^2 - 2$ ou $f(x) = \left(\cos^2(-2x) + 1\right)^2 - 2$. □

Aplicação 23. Seja $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ uma progressão aritmética de razão r. Prove que,

$$\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2 + \cdots + \operatorname{sen}\alpha_n = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2}\right).$$

Solução: Chamemos de S a soma da sequência de senos, ou seja,

$$S = \operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2 + \cdots + \operatorname{sen}\alpha_n.$$

Como $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ é uma PA de razão r, então $\alpha_2 = \alpha_1 + r$, $\alpha_3 = \alpha_1 + 2r$, $\cdots$, $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)r$. Logo,

$$S = \operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}(\alpha_1 + r) + \operatorname{sen}(\alpha_1 + 2r) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\alpha_1 + (n-1)\right).$$

Multipliquemos essa última equação por $2\operatorname{sen}\left(\dfrac{r}{2}\right)$, vem:

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) \cdot S &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\left[\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}(\alpha_1 + r) + \operatorname{sen}(\alpha_1 + 2r) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\alpha_1 + (n-1)\right)\right] \\
&= 2\operatorname{sen}\alpha_1 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) + 2\operatorname{sen}(\alpha_1 + r) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) + \cdots + 2\operatorname{sen}\left(\alpha_1 + (n-1)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right).
\end{aligned}$$

Lembremos que, $2\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$. Assim,

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen}\alpha_1 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) &= \cos\left(\alpha_1 - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\alpha_1 + \frac{r}{2}\right) \\
2\operatorname{sen}(\alpha_1 + r) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) &= \cos\left(\alpha_1 + \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\alpha_1 + \frac{3r}{2}\right) \\
2\operatorname{sen}(\alpha_1 + 2r) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) &= \cos\left(\alpha_1 + \frac{3r}{2}\right) - \cos\left(\alpha_1 + \frac{5r}{2}\right) \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
2\operatorname{sen}\left(\alpha_1 + (n-1)r\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) &= \cos\left(\alpha_1 + \left(n - \frac{3}{2}\right)r\right) - \cos\left(\alpha_1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)r\right).
\end{aligned}$$

Somando membro a membro as igualdades acima e usando o teorema da transformação em produto, obtemos:

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) \cdot S &= \cos(\alpha_1 - \frac{r}{2}) - \cos\left(\alpha_1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)r\right) \\
&= 2\operatorname{sen}\left[\frac{\alpha_1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)r + \alpha_1 - \frac{r}{2}}{2}\right]\operatorname{sen}\left[\frac{\alpha_1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)r - \left(\alpha_1 - \frac{r}{2}\right)}{2}\right] \\
&= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_1 + (\alpha_1 + (n-1)r)}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{nr}{2}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, segue-se o resultado. □

A aplicação, a seguir, referem-se a resultados da trigonometria em somas telescópicas.

Aplicação 24. Prove que $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 x} + \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^3 x} + \cdots + \dfrac{\operatorname{sen} nx}{\cos^n x} = \operatorname{cotg} x - \dfrac{\cos((n+1)x)}{\operatorname{sen} x \cdot \cos^n x}$, $\forall x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Solução: Escrevemos $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 x} + \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^3 x} + \cdots + \dfrac{\operatorname{sen} nx}{\cos^n x}$ em forma de somatório:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} kx}{\cos^k x} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} kx}{\cos^k x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} kx \cdot \operatorname{sen} x + \cos kx \cdot \cos x - \cos kx \cdot \cos x}{\cos^k x \cdot \operatorname{sen} x} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos kx \cdot \cos x - (\cos kx \cdot \cos x - \operatorname{sen} kx \cdot \operatorname{sen} x)}{\cos^k x \cdot \operatorname{sen} x} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\cos kx \cdot \cos x}{\cos^k x \cdot \operatorname{sen} x} - \frac{\cos kx \cdot \cos x - \operatorname{sen} kx \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^k x \cdot \operatorname{sen} x} \right).
\end{aligned}$$

Usando a propriedade de arco duplo, segue-se que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} kx}{\cos^k x} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\cos kx \cdot \cos x}{\cos^k x \cdot \operatorname{sen} x} - \frac{\cos(kx + x)}{\cos^k x \cdot \operatorname{sen} x} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\cos kx \cdot \cos x}{\cos^k x \cdot \operatorname{sen} x} - \frac{\cos((k+1)x)}{\cos^k x \cdot \operatorname{sen} x} \right) \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} - \frac{\cos 2x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} + \frac{\cos 2x \cdot \cos x}{\cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x} - \frac{\cos 3x \cdot \cos x}{\cos^3 x \cdot \operatorname{sen} x} + \cdots + \frac{\cos((n+1)x)}{\cos^n x \cdot \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos 2x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} + \frac{\cos 2x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} - \frac{\cos 3x}{\cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x} + \frac{\cos 3x}{\cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x} + \cdots \\
&+ \frac{\cos((n-1)x)}{\cos^{n-1} x \cdot \operatorname{sen} x} - \frac{\cos nx}{\cos^n x \cdot \operatorname{sen} x} + \frac{\cos nx}{\cos^n x \cdot \operatorname{sen} x} - \frac{\cos((n+1)x)}{\cos^n x \cdot \operatorname{sen} x}.
\end{aligned}$$

Note que quando somarmos as expressão acima, irá sobrar apenas o primeiro e último termo do somatório, logo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} kx}{\cos^k x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos((n+1)x)}{\cos^n x \cdot \operatorname{sen} x}.$$

Portanto, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 x} + \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^3 x} + \cdots + \dfrac{\operatorname{sen} nx}{\cos^n x} = \operatorname{cotg} x - \dfrac{\cos((n+1)x)}{\operatorname{sen} x \cdot \cos^n x}$, $\forall x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Portanto, percebemos o quanto a Trigonometria possui aplicabilidade não apenas na matemática, mas em outras atividades humana, como a astronomia, a Engenharia Civil etc. Como também os conhecimentos trigonométricos nos fornecem ferramentas que podem ser utilizados para a resolução de problemas que possuem utilidade no Ensino Básico e Superior.

5. Considerações

A Trigonometria é um dos mais importantes ramos da Matemática, seus conceitos tem por finalidade resolver problemas provenientes das necessidades humanas. Atualmente, eles são usados em várias situações práticas e teóricas envolvendo não somente problemas internos da matemática como calcular a altura de uma torre, mas também em outros campos de conhecimento que envolvem fenômenos cíclicos e medidas de difícil obtenção direta.

Desta forma, o ensino da Trigonometria deve ser tratado inicialmente com uma abordagem das razões trigonométricas no triângulo retângulo através da semelhança de triângulos, enfatizando que os valores das razões seno, cosseno e tangente dependem exclusivamente da medida do ângulo e não do comprimento dos lados do triângulo, pois as razões desses medidas dos lados são constantes. Assim, observamos que os ângulos variam entre 0 e 45^o. Então, surge a necessidade de expandir esses conceitos para uma quantidade maior de ângulos, para isto consideremos uma circunferência unitária e direcionada. Desse novo conceito aparecem algumas proposições e teoremas, as quais foram enunciadas e demonstradas detalhadamente.

As funções trigonométricas modelam diversos fenômenos periódicos. Uma maneira de visualizar e analisar o comportamento dessas funções é usando *software* matemáticos, um exemplo é o Geogebra, que possibilita verificar como as funções se comportam quando ocorre a alteração dos coeficientes que determinam o período, a amplitude e a translação (horizontal ou vertical). Com isso, finalizamos o trabalho apresentando a resolução de alguns exercícios, que estão divididos em blocos, abrangendo questões de vestibulares, provas de concursos para docentes de alguns institutos federais e do mestrado PROFMAT, como também aplicações dos conceitos trigonométricos na demonstração de algumas fórmulas matemáticas, curiosidades e em outras áreas do conhecimento.

Portanto, essa abordagem sequenciada dos conhecimentos trigonométricos visa facilitar o estudo deste conteúdo de uma forma mais sistematizada, facilitando a compreensão além de proporcionar mais atratividade, uma vez que, por meio das demonstrações em exercício que fazem parte do cotidiano dos estudantes, se perfaz uma visão nova sobre os conhecimentos trigonométricos e como eles estão presentes em nosso cotidiano.

Deixamos como sugestão para a extensão deste trabalho, a abordagem das funções trigonométricas inversas e hiperbólicas ou trabalhar os conceitos do capítulo 3 em forma de animação utilizando o Geogebra ou algum outro *software* educacional.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Linguagens, códigos e suas tecnologias**. Brasília, 2006. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>Acesso em 27 fev. 2019.

[3] CARMO, Manfredo Perdigão. **Trigonometria Números Complexos**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[4] CARVALHO, Kissia et al. **Uma análise das questões de trigonometria no ENEM considerando habilidades, competências e conteúdo**. CONEDU V - Campina Grande-PB - ANO 2018.

[5] LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática**. 3 ed. São Paulo: Moderna, 2016.

[6] http://anamixa.tripod.com/id9.html. Acesso em 03 de julho de 2018.

[7] http://geogebrante.blogspot.com/p/caracteristicas.html. Acesso em 29 de julho de 2018.

[8] http://portal.ifrn.edu.br/servidores/concursos/2016/edital-22-2016-concurso-publico-para-professor/provas-e-gabaritos/matematica/view. Acesso em 5 de dezembro de 2018.

[9] http://www.coperve.ufpb.br/pss2011/Provas/Prova2_Ingles.pdf. Acesso em 18 de novembro de 2018.

[10] http://www.profmat-sbm.org.br/. Acesso em 15 de novembro de 2018.

[11] http://www.vestibular.ita.br/provas/matematica_2011.pdf. Acesso em 18 de novembro de 2018.

[12] https://arquivo.pciconcursos.com.br/provas/25706805/e3f1f519636c/docente_matem_itica.pdf. Acesso em 5 de dezembro de 2018.

[13] https://concurso.ifal.edu.br/. Acesso em 30 de novembro de 2018.

[14] https://slideplayer.com.br/slide/3124180. Acesso em 30 de novembro de 2018.

[15] https://www.google.com.br/search?q=semelhan%C3%A7a+de+triangulo+queops&hl=pt-BR&gl=br&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwidpOu_4tbgAhUHGbkGHX4EDjAQ. Acesso em 25 de fevereiro de 2019.

[16] https://www.suapesquisa.com/quemfoi/eratostenes.htm. Acesso em 23 de março de 2019.

[17] https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=54571. Acesso em 22 de julho de 2018.

[18] https://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2019/02/mulher-semilendaria-hipatia-foi-a-primeira-matematica.shtml. Acesso em 24 de março de 2019.

[19] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Trigonometria. v. 3. 8 ed.. São Paulo: Atual Editora, 2004.

[20] LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. **Temas e Problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[21] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[22] NETO, Antonio de Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar**. v. 2. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[23] NETO, Aref Antar et al. **Trigonometria:** Noções de Matemática. v. 3. Fortaleza: Vestseller, 2009.

[24] PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**.3 ed. São Paulo: Moderna, 2015.