



INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

Carlos Lisboa Duarte

Sistemas Dinâmicos Autônomos e algumas Aplicações

Cajazeiras-PB
Abril de 2019

Sistemas Dinâmicos Autônomos e algumas Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Me. Patrício Luiz de Andrade

Cajazeiras-PB
Abril de 2019

Carlos Lisboa Duarte

Sistemas Dinâmicos Autônomos e algumas Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Aprovado em: 25/04/2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Patrício Luiz de Andrade
Instituto Federal da Paraíba - (IFPB)

Prof. Me. Ramon Formiga Figueira
Instituto Federal da Paraíba - (IFPB)

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva
Universidade Federal de Campina Grande - (UFCG)

Cajazeiras-PB
Abril de 2019

Dedico aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus primeiramente, por toda a força, amor e proteção que mesmo perante tantas adversidades, sempre me manteve de pé e de cabeça erguida.

Aos meus pais por todo o carinho e atenção.

Aos meus irmãos, familiares e amigos que me apoiaram nessa jornada.

Ao meu orientador Me. Patrício Luiz de Andrade por todo apoio na construção deste trabalho.

Aos professores Me. Ramon Formiga Figueira e Dr. Severino Horácio da Silva por fazerem parte da banca avaliadora deste trabalho.

Resumo

O presente trabalho versa sobre a teoria dos sistemas dinâmicos, com um olhar voltado para a sua aplicação em problemas envolvendo modelagem matemática. Dessa forma, no transcorrer da referida pesquisa, será apresentado um resumo teórico sobre esses sistemas, mais especificamente os casos de sistemas dinâmicos autônomos lineares ou não-lineares, de modo a descrever alguns pontos pertinentes à resolução dos mesmos, bem como tecer alguns comentários acerca da análise qualitativa de sistemas bidimensionais. Além disso, serão apresentados três casos de aplicações de sistemas dinâmicos autônomos, que são: problema de mistura, modelo presa-predador de Lokta-Volterra e pêndulo livre com amortecimento. Portanto, esse estudo busca apresentar algumas aplicações de sistemas dinâmicos autônomos de uma maneira mais detalhada, descrevendo o passo a passo da sua resolução.

Palavras-Chave: Sistemas Dinâmicos. Problema de Mistura. Modelo Presa-Predador de Lokta-Volterra. Pêndulo Livre com Amortecimento.

Abstract

The present work deals with the theory of dynamical systems, with a view aimed at its application in problems involving mathematical modeling. Thus, in the course of this research, a theoretical summary will be presented on these systems, more specifically the cases of linear or non-linear autonomous dynamic systems, in order to describe some points pertinent to their resolution, as well as to make some comments about qualitative analysis of two-dimensional systems. In addition, three cases of autonomous dynamic systems applications will be presented, which are: mixing problem, Model Prey-Predator of Lokta-Volterra and free pendulum with damping. Therefore, this study seeks to present some applications of autonomous dynamic systems in a more detailed way, describing the step by step of its resolution.

Keywords: Dynamic Systems. Mixing problem. Model Prey-Predator of Lokta-Volterra. Free Pendulum with Damping.

Lista de Figuras

1.1	Retrato de fase de um <i>nó atrator</i> assintoticamente estável.	24
1.2	Retrato de fase de um <i>repulsor</i> instável.	24
1.3	Retrato de fase de um <i>ponto de sela</i> instável.	24
1.4	Retrato de fase de um <i>espiral</i> assintoticamente estável.	25
1.5	Retrato de fase de um <i>centro</i> estável.	25
1.6	Retrato de fase de um <i>nó impróprio</i> com $\lambda > 0$	26
1.7	Retrato de fase de um <i>nó impróprio</i> com $\lambda < 0$	27
2.1	Tanque Misturador Bifásico	30
2.2	Gráfico que expressa a evolução da concentração de sal no tanque bifásico em função do tempo.	33
2.3	Tanque Misturador Trifásico	34
2.4	Gráfico que expressa a evolução da concentração de sal no tanque trifásico em função do tempo.	38
2.5	Retrato de fase que representa o ciclo ecológico para as populações de zebra e leões a partir da solução (2.26).	43
2.6	Interações entre as populações de zebras e leões a partir das soluções (2.31).	45
2.7	Pêndulo Livre com Amortecimento.	46
2.8	Gráfico que representa as variações do ângulo e da velocidade angular do pêndulo livre com amortecimento a partir das soluções (2.43).	51
2.9	Gráfico que representa as variações do ângulo e da velocidade angular do pêndulo livre com amortecimento a partir das soluções (2.44).	52

Siglas e Notações

EDO - Equação Diferencial Ordinária.

EDOs - Equações Diferenciais Ordinárias.

I - Intervalo numérico.

λ_i - Autovalor.

\mathbf{V}_i - Autovetor.

\mathbf{v}_i - Autovetor generalizado.

\mathbf{X}_i - Solução de um sistema linear de EDOs.

$\mathbf{X}(t)$ - Solução geral de um sistema linear de EDOs.

$\Phi(t)$ - Matriz fundamental de soluções de um sistema linear de EDOs.

$\Psi(t)$ - Matriz especial de soluções de um sistema linear de EDOs.

L.I - Linearmente independente.

$e^{\mathbf{A}t}$ - Exponencial de uma matriz.

\mathbf{C} - Vetor constante.

c_i - Constante arbitrária.

k - Número inteiro positivo.

n - Número natural.

κ - Multiplicidade algébrica.

η - Multiplicidade geométrica.

t - Tempo.

lb - Libras.

Sumário

Introdução	11
Objetivos	11
Metodologia	12
1 Teoria Básica dos Sistemas Dinâmicos Autônomos	14
1.1 Sistemas Dinâmicos Autônomos Lineares	14
1.1.1 Autovalores Complexos	17
1.1.2 Autovalores com Multiplicidade Algébrica maior que 1	18
1.2 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Autônomos Lineares	21
1.2.1 Caso dos Autovalores Distintos	23
1.2.2 Caso dos Autovalores Complexos	25
1.2.3 Caso dos Autovalores com Multiplicidade Algébrica maior que 1	26
1.3 Sistemas Dinâmicos Autônomos Não-Lineares	27
2 Aplicações de Sistema Dinâmicos Autônomos	29
2.1 Problema de Mistura	29
2.2 Modelo Presa-Predador de Lokta-Volterra	38
2.3 Pêndulo Livre com Amortecimento	46
3 Considerações Finais	53
Referências Bibliográficas	55

Introdução

O presente trabalho abordará a temática dos Sistemas Dinâmicos Autônomos, tendo como foco principal apresentar algumas aplicações dessa teoria na resolução de problemas que envolvem Equações Diferenciais. Dessa forma, para que possamos compreender como aplicar essa teoria em problemas, nos ateremos neste trabalho a descrever de forma sistemática os procedimentos necessários à resolução das seguintes aplicações: problemas de mistura, modelo presa-predador de Lotka-Volterra e pêndulo livre com amortecimento.

De modo geral, define-se sistemas dinâmicos como sendo aqueles caracterizados por estados que variam ao longo do tempo. Esses sistemas são representados matematicamente por funções que dependem da variável tempo (t), quer seja implícita ou explicitamente, assim, podemos mencionar que os mais usuais são os sistemas de equações diferenciais. Os sistemas dinâmicos podem ser caracterizados a partir dos seguintes aspectos: lineares ou não-lineares, autônomos ou não-autônomos, conservativos ou dissipativos, determinísticos ou probabilísticos, com retardo ou sem retardo. Tais sistemas são compostos pelas combinações dessas características, e os mesmos podem ser empregados nos mais variados problemas envolvendo modelagem matemática (AGUIAR, 2015).

Todavia, neste estudo abordaremos apenas os casos de sistemas dinâmicos autônomos lineares ou não-lineares. Dessa forma, quando estivermos tratando de casos de sistemas autônomos não-lineares perceberemos que tais sistemas, na maioria das vezes, não possuem solução ou a mesma poderá ser de difícil obtenção. No entanto, veremos que, por meio de uma análise qualitativa e utilizando um procedimento de linearização, é possível determinar o comportamento de sistemas desse tipo.

Objetivos

Objetivo Geral

- Resolver alguns problemas cuja modelagem matemática resulta num sistema dinâmico autônomo.

Objetivos Específicos

- Descrever de forma resumida a teoria básica que rege os sistemas dinâmicos autônomos lineares e não-lineares;
- Apresentar exemplos de aplicações de sistemas dinâmicos de maneira detalhada;
- Observar o comportamento dessas aplicações de acordo com a evolução do tempo.

Metodologia

No tocante aos procedimentos metodológicos empregados na construção desta pesquisa, vale ressaltar que a mesma foi fruto de uma revisão bibliográfica fundamentada a partir de estudos de especialistas no campo das equações diferenciais ordinárias. Por possuir um caráter qualitativo, a referida pesquisa primou pela seleção de informações que viessem a corroborar de maneira concisa com aquilo que estava sendo tratado.

Para isso, o estudo teve como aporte teórico as contribuições de autores como: Bassanezi (1988); Boyce e DiPrima (2012); Figueiredo e Neves (2015); Nagle, Saff e Snider (2012); Sotomayor (2011) entre outros. Vale ressaltar que, as aplicações trabalhadas nesta pesquisa, foram adaptadas dos livros: Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem (ZILL, 2011) e Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma Abordagem Prática com Maxima (VILLATE, 2007), de modo que as mesmas foram selecionadas de maneira conveniente à temática abordada.

No que tange à parte do estudo dedicada à descrição da teoria básica sobre sistemas dinâmicos autônomos lineares e não-lineares, a mesma construída a partir de uma análise minuciosa desta teoria, buscou evidenciar aquilo de mais importante apresentado nos livros utilizados acerca dessa temática de uma maneira mais detalhada e simplificada. Já nos casos das aplicações abordadas no decorrer da pesquisa, o intuito foi o de mostrar algumas situações nas quais essa teoria pode ser aplicada, bem como descrever o percurso da resolução ou da análise qualitativa das mesmas. Por fim, procuramos analisar ao final de cada aplicação o comportamento desses sistemas, por meio da observação dos gráficos e retratos de fase construídos a partir das soluções dos sistemas.

Assim sendo, o referido trabalho encontra-se esquematizado da seguinte forma: No primeiro momento, será apresentada a parte teórica que descreve os sistemas dinâmicos

autônomos lineares e não-lineares, além de alguns resultados acerca da análise qualitativa de sistemas dinâmicos bidimensionais; No segundo momento, serão apresentadas algumas aplicações desses sistemas, buscando detalhar o máximo possível os procedimentos empregados na resolução e interpretação das mesmas, e por fim teceremos algumas considerações acerca do estudo desenvolvido.

1. Teoria Básica dos Sistemas Dinâmicos Autônomos

Neste capítulo iremos apresentar um resumo da teoria que envolve os *sistemas dinâmicos autônomos*, dando maior destaque aos casos dos *sistemas lineares*. Dessa forma, vejamos a seguir algumas definições e teoremas pertinentes a temática em questão, onde as demonstrações ou sugestões para provar os mesmos podem ser encontradas nos livros: Equações Diferenciais Elementares e problemas de valores de contorno (BOYCE e DIPRIMA, 2012), Equações Diferenciais (NAGLE; SAFF e SNIDER, 2012), Equações Diferenciais Ordinárias com Aplicações (BASSANEZI; FERREIRA, 1988), Resolução de Sistemas Lineares de EDOs de Primeira Ordem por meio de Autovalores e Autovetores (DUARTE, 2017) e Equações Diferenciais Aplicadas (FIGUEIREDO; NEVES, 2015).

Vale evidenciar que como o foco principal do trabalho é apresentar aplicações da teoria dos sistemas dinâmicos, deixaremos a cargo do leitor a verificação das demonstrações dos teoremas aqui elencados.

1.1. Sistemas Dinâmicos Autônomos Lineares

Consideremos o seguinte sistema formado por n -equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

onde a_{ij} são coeficientes constantes e $g(t)$ as funções independentes. Observe que podemos reescrevê-lo em termos matriciais, da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Logo, temos que (1.2) pode ser escrito como

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{g}(t). \quad (1.3)$$

Definição 1.1. Um sistema de EDOs lineares de primeira ordem é denominado *dinâmico autônomo*, quando as funções $a_{ij}(t)$ e $g(t)$ não dependem explicitamente da variável (tempo) t .

Contudo, neste trabalho iremos tratar somente dos casos em que as funções independentes $g(t)$ do sistema (1.2) são identicamente nulas, isto é, o caso de *sistemas homogêneos*. Assim, temos a seguinte notação para tais sistemas

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}. \quad (1.4)$$

Segundo Zill e Cullen (2001, p. 66) a forma básica de uma solução \mathbf{X}_i de um sistema linear de EDOs de primeira ordem é

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{V}e^{\lambda t}, \quad (1.5)$$

onde \mathbf{V} é um autovetor composto por constantes $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ associado a um autovalor λ , proveniente da equação característica do sistema (1.4).

Para ver isso, suponha que (1.5) seja uma solução do sistema (1.4). Então temos que

$$\mathbf{X}' = \mathbf{V}\lambda e^{\lambda t} \quad (1.6)$$

e substituindo (1.5) e (1.6) no sistema (1.4), teremos

$$\mathbf{V}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{V}e^{\lambda t}$$

donde

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V} \quad (1.7)$$

resultando em

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{V} = 0. \quad (1.8)$$

Logo, temos que para obtermos soluções não-triviais de (1.8), é necessário que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (1.9)$$

Calculando o determinante de (1.9), obtemos uma equação na variável λ , chamada de *equação característica*, cujas soluções $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ são os chamados autovalores da matriz \mathbf{A} . Assim sendo, $\mathbf{X} = \mathbf{V}e^{\lambda t}$ será uma solução de (1.4) se, e somente se, λ for um autovalor de \mathbf{A} e \mathbf{V} um autovetor de \mathbf{A} associado a λ .

Definição 1.2. Denomina-se *conjunto fundamental de soluções*, o conjunto formado pelas soluções linearmente independentes $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n\}$ com $n \in \mathbb{N}$, de um sistema dinâmico linear de EDOs de primeira ordem da forma (1.4).

Teorema 1.1. *Seja $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ um conjunto formado por n autovalores reais distintos da matriz de coeficientes $\mathbf{A}_{n \times n}$ de um sistema dinâmico, e seja*

$$\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n\}$$

o conjunto de autovetores correspondentes. Então, uma solução geral para o sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$ será da forma

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{V}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{V}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \mathbf{V}_n e^{\lambda_n t}.$$

Demonstração. Ver (BOYCE; DIPRIMA, 2012). ■

Definição 1.3. Sejam $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n\}$ soluções L.I do sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ formado por n -equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Podemos construir uma *matriz fundamental de soluções*, na qual cada coluna da matriz corresponderá a uma solução do sistema. Dessa maneira, uma matriz fundamental é uma solução geral que irá satisfazer um dado sistema em um intervalo I .

Teorema 1.2. *Seja $\Phi(t)$ uma matriz fundamental de um sistema dinâmico linear em um intervalo I . Então $\Phi^{-1}(t)$ existe para todo valor de t no intervalo I .*

Demonstração. Ver (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012). ■

Observação 1.1. Denomina-se *matriz especial*, denotada por $\Psi(t)$, a matriz fundamental formada pelas soluções de um sistema de valores iniciais t_0 em um intervalo I .

1.1.1. Autovalores Complexos

Um ponto a ser mencionado de modo especial, no que diz respeito à resolução de sistemas lineares nos quais os coeficientes da matriz que os representa são constantes reais, é o fato de podermos obter soluções complexas a partir dessa matriz, isto é *autovalores complexos*.

Quando resolvemos problemas envolvendo autovalores complexos, naturalmente podemos esperar que os autovetores associados a esses autovalores possuam valores complexos. Porém, como na maioria dos casos estamos interessados em obter soluções reais, existe um método através do qual é possível obter uma solução real a partir de uma solução complexa de um sistema dinâmico linear, fazendo para isso o uso da *fórmula de Euler*. Então, para uma solução \mathbf{X}_i complexa, temos o seguinte

$$\mathbf{X}_i = (a + bi)e^{(p+qi)t} = (a + bi)e^{pt}e^{qit},$$

onde $(a + bi)$ é um autovetor complexo associado ao autovalor complexo $(p + qi)$, com $a, b, p, q \in \mathbb{R}$.

Assim, pela fórmula de Euler

$$e^{iqt} = \cos qt + i \operatorname{sen} qt,$$

temos que

$$\mathbf{X}_i = (a + bi)e^{pt}(\cos qt + i \operatorname{sen} qt) = (a \cos qt - b \operatorname{sen} qt)e^{pt} + i(b \cos qt + a \operatorname{sen} qt)e^{pt}$$

$$\mathbf{X}_i = u(t) + iv(t),$$

onde $u(t)$ e $v(t)$ serão vetores que representam soluções reais de um sistema dinâmico linear, ou seja, para cada solução complexa \mathbf{X}_i de um sistema, é possível encontrar duas soluções reais a partir da parte real e imaginária de uma solução complexa, respectivamente.

Vale ressaltar que, como as soluções complexas sempre apresentam-se em pares conjugados, basta utilizar apenas uma das soluções complexas para se encontrar as duas soluções reais do sistema.

1.1.2. Autovalores com Multiplicidade Algébrica maior que 1

Como podemos notar, até o presente momento nos atentamos de modo especial na resolução de sistemas dinâmicos lineares de EDOs de primeira ordem, nos quais estamos interessados em obter uma solução geral formada por autovetores linearmente independentes (L.I) associados aos autovalores. No entanto, existem casos de sistemas em que não é possível obter essa solução de modo direto, devido ao tipo de relação existente entre as multiplicidades dos autovalores e autovetores de um dado sistema.

Definição 1.4. Definimos por multiplicidade *algébrica* κ , a quantidade de vezes que um autovalor apresenta-se de forma repetida. Já a multiplicidade *geométrica* η , está ligada ao número de autovetores linearmente independentes que podemos obter a partir de um dado autovalor múltiplo.

A expressão que representa a relação existente entre as multiplicidades algébrica e geométrica de um autovalor é a seguinte

$$1 \leq \eta \leq \kappa.$$

Assim sendo, quando lidamos com problemas em que os autovalores apresentam multiplicidade da forma $\kappa > \eta$, isto é, o número de autovetores L.I é menor que a multiplicidade algébrica do autovalor, nos deparamos com uma situação em que teremos a tarefa de encontrar uma solução geral L.I a partir de autovalores múltiplos.

Logo, com casos de sistemas que apresentam essa particularidade, podemos fazer o uso do conceito de *exponencial de matrizes* para, assim, encontrarmos uma solução que satisfaça o sistema.

Dessa forma, supondo que \mathbf{A} seja uma matriz $n \times n$ formada por coeficientes constantes, é possível definir a sua exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ por meio de uma expansão da *série de Maclaurin*, que apresenta a seguinte forma

$$e^{\mathbf{A}t} := \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^n \frac{t^n}{n!} + \cdots . \quad (1.10)$$

Observação 1.2. Os resultados que garantem a convergência da série (1.10) podem ser vistos em (FIGUEIREDO; NEVES, 2015).

Teorema 1.3. *Se \mathbf{A} é uma matriz constante $n \times n$, então as colunas da matriz $e^{\mathbf{A}t}$, formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Portanto, $e^{\mathbf{A}t}$ é uma matriz fundamental para o sistema, e a solução geral pode ser escrita como $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}$.*

Demonstração. Ver (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012). ■

No entanto, vale ressaltar que o cálculo para a obtenção da exponencial de uma matriz, é um método aplicado para se obter a solução de um dado sistema na forma de uma matriz fundamental, independentemente se ele possui autovalores múltiplos ou não, uma vez que esse método pode ser aplicado nos casos de autovalores distintos e complexos.

Teorema 1.4. *Considere que $\Phi(t)$ e $\Theta(t)$ sejam duas matrizes fundamentais para o mesmo sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Então, existe uma matriz constante \mathbf{C} tal que $\Phi(t) = \Theta(t)\mathbf{C}$ para todo t . Em particular, podemos obter a exponencial de uma matriz a partir de uma matriz fundamental da seguinte forma*

$$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}.$$

Demonstração. Ver (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012). ■

O caso mais simples de realizar o cálculo da exponencial de uma matriz, é quando a mesma é diagonal. Nessa situação o cálculo é feito de modo direto, isto é, sendo \mathbf{A} uma matriz diagonal $n \times n$ formada por $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ autovalores em sua diagonal principal, $e^{\mathbf{A}t}$ será uma matriz fundamental de soluções onde $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$ irão compor a sua diagonal principal.

Outra situação ocorre quando a matriz \mathbf{A} é *nilpotente*, isto é, $\mathbf{A}^k = 0$, onde k é um número inteiro positivo. Assim sendo, teremos que $e^{\mathbf{A}t}$ apresentará uma quantidade finita de termos, pois a partir de um certo índice de nilpotência os termos da série irão ser iguais a zero, logo $e^{\mathbf{A}t}$ será igual a

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \dots + \mathbf{A}^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + 0 + \dots.$$

Todavia, estamos interessados em estabelecer um método para resolver casos de sistemas que apresentam autovalores múltiplos. Então, como consequência do teorema Cayley-Hamilton, nos casos em que o polinômio característico da matriz \mathbf{A} for igual a $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^k$, teremos que $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^k = 0$. Logo, quando λ_i for o único autovalor múltiplo de \mathbf{A} , $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ será nilpotente. Assim, temos que a exponencial da matriz \mathbf{A} terá a seguinte forma

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_i \mathbf{I}t} e^{(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})t} = e^{\lambda_i t} \left[\mathbf{I} + (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})t + \cdots + (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right]. \quad (1.11)$$

Entretanto, existe uma outra maneira para encontrarmos as soluções associadas a um autovalor múltiplo. Esse método recebe o nome de *método dos autovetores generalizados*, que é definido como se segue.

Definição 1.5. Supondo que \mathbf{A} seja uma matriz $n \times n$, podemos escolher um vetor \mathbf{v} tal que

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k \mathbf{v} = 0,$$

para algum autovalor λ de \mathbf{A} e um certo k inteiro positivo. Nesses termos dizemos que \mathbf{v} é um autovetor generalizado associado a λ . Assim, somos capazes de listar n vetores, associados a matriz \mathbf{A} , linearmente independentes, da seguinte maneira

$$\{ \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \dots, \mathbf{V}_n \} = \{ \mathbf{v}, (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}, (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v}, \dots, (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-1} \mathbf{v} \}.$$

Estes vetores são chamados de *autovetores generalizados* da matriz \mathbf{A} , associados ao autovalor λ . Além disso, o último vetor desta lista, $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-1} \mathbf{v}$, é chamado de *autovetor regular*.

Com isso, teremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}_i \\ e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}_i &= e^{\lambda t} e^{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})t} \mathbf{v}_i \\ e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}_i &= e^{\lambda t} \left[\mathbf{I} \mathbf{v}_i + t(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_i + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-1} \mathbf{v}_i + \frac{t^k}{k!} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k \mathbf{v}_i + \cdots \right] \\ e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}_i &= e^{\lambda t} \left[\mathbf{v}_i + t(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_i + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-1} \mathbf{v}_i + 0 + \cdots \right]. \end{aligned}$$

Portanto, teremos que as soluções $\mathbf{X}_i = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}_i$, serão linearmente independentes, e formarão um conjunto fundamental de soluções para um dado sistema. Desta forma, podemos escrever as soluções \mathbf{X}_i na forma de uma matriz fundamental de soluções, a partir dos autovetores generalizados, que irá satisfazer o sistema.

Observação 1.3. Uma outra matriz fundamental de soluções pode ser obtida, simplesmente calculando $e^{\mathbf{A}t}$.

1.2. Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Autônomos Lineares

No que diz respeito à análise da estabilidade de sistemas dinâmicos lineares de EDOs de primeira ordem, iremos aqui levantar alguns resultados a partir do estudo de sistemas bidimensionais, ou seja, sistemas da forma

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (1.12)$$

onde os a_{ij} são coeficientes constantes provindos de uma matriz $A_{2 \times 2}$, com o $\det A \neq 0$. Assim, temos que o sistema (1.12) pode ser reescrito como

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}. \quad (1.13)$$

Observe que cada solução $(x_1(t), x_2(t))$ de um sistema dinâmico autônomo linear, é na verdade uma curva parametrizada no plano x_1x_2 , conhecida como *órbita*, que é simplesmente um conjunto de pontos $\{(x_1(t), x_2(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$, dotado de uma orientação dada pelo sentido do percurso com t crescente, desde $(-\infty)$ até $(+\infty)$. Ao representar uma solução no plano x_1x_2 é comum indicar com *setas* o sentido desse percurso.

Esboçando algumas órbitas no plano x_1x_2 , obtemos o *retrato de fase* do sistema dinâmico autônomo linear, cujo objetivo é ter uma ideia do comportamento global das soluções do sistema, com diferentes condições iniciais. O plano x_1x_2 é comumente chamado de *plano de fase*.

Definição 1.6. Os pontos para os quais $\mathbf{X}' = 0$, ou seja, $\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$, correspondem às soluções de equilíbrio para o sistema (1.13). Essas soluções constantes $(x_1(t), x_2(t)) = (c_1, c_2)$, são denominadas *pontos de equilíbrio* ou *pontos singulares* (também chamados de *singularidades*), nomenclaturas estas inspiradas em seus significados físicos e geométricos, respectivamente. Os pontos não singulares são chamados de *pontos regulares*.

Contudo, o comportamento de um conjunto de curvas esboçadas em um plano de fase em relação a um ponto de equilíbrio, é determinado de modo direto pelos autovalores provenientes do cálculo do polinômio característico do sistema dinâmico em questão. A

natureza desses autovalores quanto aos seus sinais, é um dos fatores que irão determinar que tipo de singularidade um sistema irá descrever.

Definição 1.7. Dado um sistema dinâmico autônomo da forma $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, dizemos que ele é *hiperbólico* quando todos os autovalores obtidos por meio do polinômio característico do sistema, tiverem parte real diferente de zero. Além disso, chamamos de *índice de estabilidade*, o número de autovalores de um sistema, independente de sua natureza, que possuem parte real negativa.

Observação 1.4. Os autovalores ou valores próprios, como também são conhecidos, podem apresentar-se basicamente das seguintes maneiras:

1. Autovalores reais distintos de mesmo sinal ou de sinais diferentes;
2. Autovalores complexos puros, ou seja, com a parte real nula, e complexos com parte real variando de sinal;
3. Autovalores com multiplicidade maior que 1.

Dessa forma, a partir da observação dos autovalores somos capazes de ter uma noção do tipo de estabilidade que um dado sistema apresenta.

Definição 1.8. Um ponto de equilíbrio (c_1, c_2) é *estável* se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para qualquer curva de solução $(x_1(t), x_2(t))$ com

$$\text{dist} (x_1(0), x_2(0), (c_1, c_2)) < \delta,$$

tenhamos

$$\text{dist} (x_1(t), x_2(t), (c_1, c_2)) < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

Definição 1.9. Um ponto de equilíbrio (c_1, c_2) é *assintoticamente estável* se ele for *estável*, e se existir $\eta > 0$, tal que toda curva de solução $(x_1(t), x_2(t))$ com

$$\text{dist} (x_1(0), x_2(0), (c_1, c_2)) < \eta,$$

então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (c_1, c_2).$$

Assim sendo, a partir das Definições 1.8 e 1.9, temos que de maneira simplificada as curvas de solução que iniciam-se numa vizinhança do ponto de equilíbrio (c_1, c_2) permanecem nessa vizinhança, e irão convergir para esse ponto. Desta forma, quando um ponto de equilíbrio não for *estável*, o mesmo será considerado *instável*.

1.2.1. Caso dos Autovalores Distintos

Suponha que o polinômio característico de uma matriz \mathbf{A} tenha duas raízes reais distintas λ_1 e λ_2 , e sejam \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 os autovetores associados a esses autovalores. Denotaremos por r_1 e r_2 as retas geradas pelos autovetores \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 , respectivamente.

Neste caso, sabemos que a solução geral do sistema bidimensional $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, pode ser escrita na forma

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{V}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{V}_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (1.14)$$

Daí, temos as seguintes situações de comportamentos e estabilidades:

I. Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$.

A partir da expressão da solução (1.14), segue que independentemente da condição inicial (não nula), toda trajetória tende à origem do plano $x_1 x_2$, quando $t \rightarrow +\infty$, e ambas as coordenadas da solução $\mathbf{X}(t)$ tendem a ∞ , quando $t \rightarrow -\infty$. Neste caso, diremos que a origem é um *nó atrator* assintoticamente estável;

II. Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$.

Neste caso, ambos positivos, teremos um retrato de fase com o comportamento similar a (I), fazendo apenas a substituição do t por $-t$ e, conseqüentemente, alterando o sentidos das setas. Desta forma, dizemos que a origem é um *repulsor* ou (*fonte*) instável;

III. Se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ou $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Nesta situação, teremos que a partir da expressão da solução (1.14), com a condição inicial $\mathbf{X}(0) = (c_1, 0)$, todas as trajetórias que passam por pontos situados em r_1 permanecem nesta reta e tendem a $\pm\infty$ com $t \rightarrow -\infty$, e tende a origem do plano com $t \rightarrow +\infty$. De forma similar, quando a condição inicial $\mathbf{X}(0) = (0, c_2)$, todas as trajetórias que passam por pontos situados em r_2 permanecem nesta reta e tendem a $\pm\infty$ com $t \rightarrow +\infty$, e tende à origem do plano com $t \rightarrow -\infty$. Além disso, se $(c_1, c_2) \neq 0$, as demais soluções irão tender para $\pm\infty$, quando $t \rightarrow \pm\infty$. Neste caso, diremos que temos um *ponto de sela* instável.

Veamos alguns exemplos de retratos de fase para o caso de autovalores distintos.

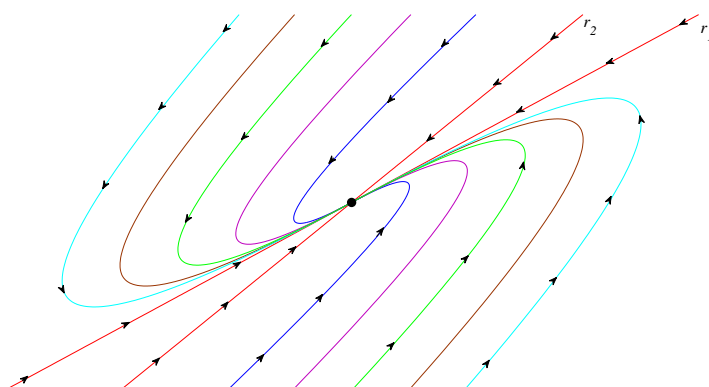


Figura 1.1: Retrato de fase de um *nó atrator* assintoticamente estável.

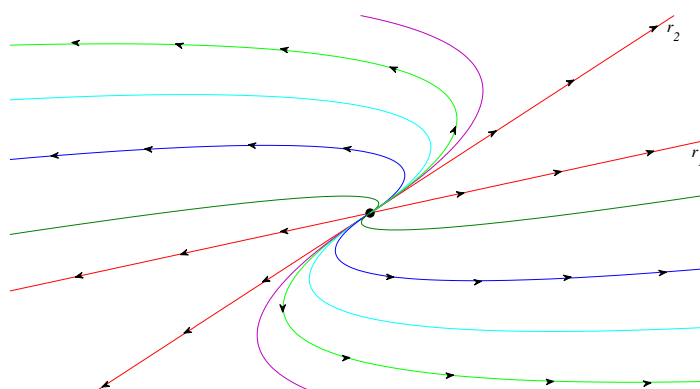


Figura 1.2: Retrato de fase de um *repulsor* instável.

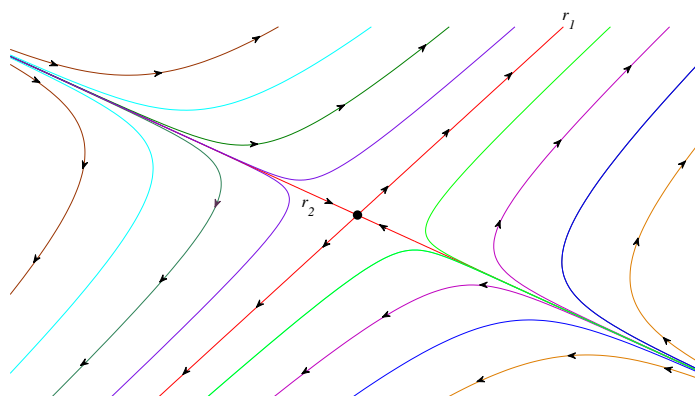


Figura 1.3: Retrato de fase de um *ponto de sela* instável.

1.2.2. Caso dos Autovalores Complexos

Já para os sistemas que apresentam autovalores complexos, teremos os seguintes casos de comportamentos e estabilidade:

- I. Se $\lambda_i = \alpha \pm \beta i$ com $\alpha > 0$, então obteremos um *espiral* ou (*foco*) instável;
- II. Se $\lambda_i = \alpha \pm \beta i$ com $\alpha < 0$, então teremos um *espiral* ou (*foco atrator*) assintoticamente estável;
- III. Se $\lambda_i = \pm \beta i$ com $\alpha = 0$, então teremos um *centro* estável.

Observemos a seguir dois retratos de fase para o caso de autovalores complexos.

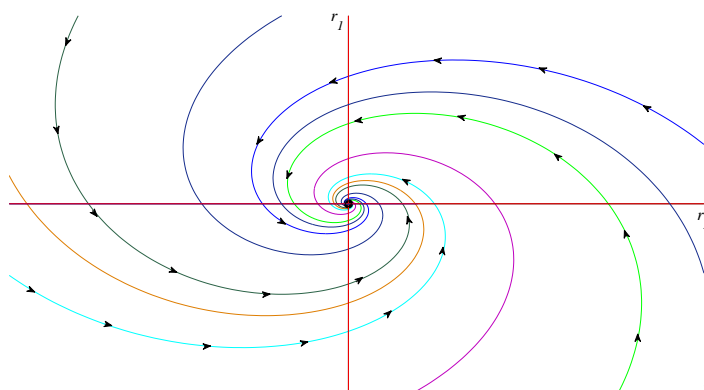


Figura 1.4: Retrato de fase de um *espiral* assintoticamente estável.

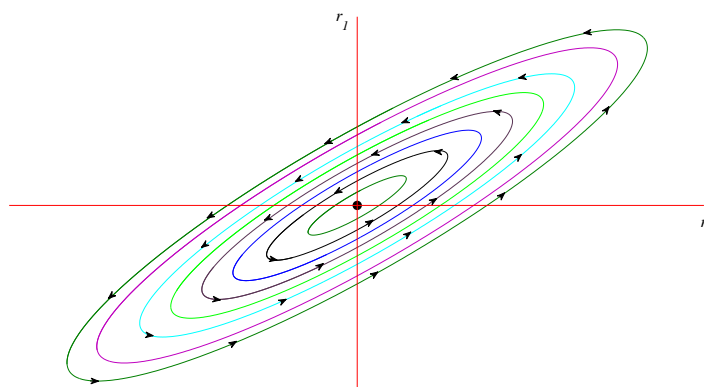


Figura 1.5: Retrato de fase de um *centro* estável.

1.2.3. Caso dos Autovalores com Multiplicidade Algébrica maior que 1

Por fim, temos os casos em que os autovalores apresentam multiplicidade, nessa situação temos os seguintes comportamentos e estabilidade:

- I. Quando é possível se obter *dois autovetores* $L.I$, a partir de um autovalor com multiplicidade algébrica igual a 2, e se $\lambda > 0$, então teremos um *nó próprio* ou (*ponto estrelado*) instável, no caso em que $\lambda < 0$ teremos um *nó próprio* ou (*ponto estrelado*) assintoticamente estável;
- II. No caso em que só conseguimos obter apenas *um autovetor* $L.I$ de modo direto, a partir de um autovalor duplo, e se $\lambda > 0$, então teremos nessa situação um *nó impróprio* ou (*degenerado*) instável, no caso em que $\lambda < 0$ teremos um *nó impróprio* ou (*degenerado*) assintoticamente estável.

Observação 1.5. Quando o autovalor múltiplo for negativo ou positivo, ele obedecerá os comportamentos descritos acima acerca da forma geométrica e estabilidade. Assim, o seu sinal irá determinar apenas o sentido das setas, ou seja, quando $\lambda < 0$ toda trajetória tenderá para a origem do plano, e quando $\lambda > 0$ toda trajetória tenderá para $\pm\infty$.

Por fim, teremos os seguintes exemplos de retratos de fase para o caso de autovalores com multiplicidade algébrica igual 2.

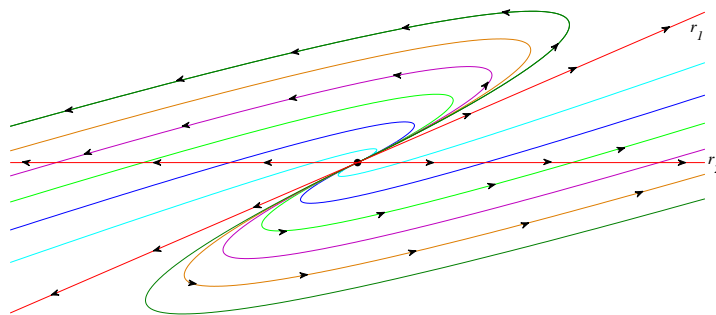


Figura 1.6: Retrato de fase de um *nó impróprio* com $\lambda > 0$.

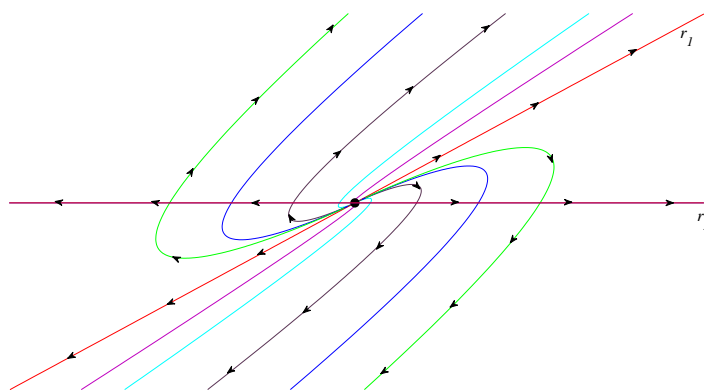


Figura 1.7: Retrato de fase de um *nó impróprio* com $\lambda > 0$.

1.3. Sistemas Dinâmicos Autônomos Não-Lineares

Como fora mencionado na introdução deste trabalho, podemos nos deparar com casos de sistemas dinâmicos autônomos não-lineares, e em situações dessa natureza nem sempre conseguiremos obter uma solução de um dado problema. No entanto, podemos realizar uma análise qualitativa das soluções de equilíbrio desses sistemas a partir da linearização dos mesmos.

Então, teremos que um sistema dinâmico autônomo não-linear poderá ser da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + G(x, y) \end{cases} \quad (1.15)$$

Quando consideramos um sistema da forma (1.15), onde a origem do plano é um ponto de equilíbrio, então podemos representar um sistema não-linear como

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \vartheta(\mathbf{X})$$

onde $\mathbf{A}_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0})$ e $\vartheta(\mathbf{X})$ é uma denominação genérica para as funções contínuas definidas em uma vizinhança da origem, e que são de ordem de nulidade inferior a \mathbf{X} , ou seja,

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow 0 \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\vartheta(\mathbf{X})}{\|\mathbf{X}\|} = 0. \quad (1.16)$$

Daí, quando estamos tratando de sistemas dinâmicos autônomos não-lineares, fazemos o uso do Teorema da Linearização de Lyapunov-Poincaré para que possamos analisar a estabilidade desses sistemas, como podemos ver a seguir.

Teorema 1.5. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo continuamente diferenciável em uma vizinhança da origem onde podemos escrever*

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \vartheta(\mathbf{X})$$

com ϑ satisfazendo (1.16). Assim, teremos os seguintes casos de estabilidade

- I. Se a matriz \mathbf{A} tiver todos os seus autovalores λ tal que $Re \lambda < 0$ (parte real negativa), então o sistema será assintoticamente estável para o campo $f(\mathbf{X})$;*
- II. Se a matriz \mathbf{A} tiver um de seus autovalores λ tal que $Re \lambda > 0$ (parte real positiva) então o sistema será instável;*
- III. Se todos os autovalores λ de \mathbf{A} forem tais que $Re \lambda > 0$, o ponto crítico é repulsor, isto é, existe uma vizinhança da origem V tal que se $\mathbf{X}(t)$ for uma órbita não nula, existirá t_0 , e para $t > t_0$ temos que $\mathbf{X}(t) \notin V$.*

Demonstração. Ver (BASSANEZI, 1988). ■

Ante o exposto, podemos observar que nesse capítulo buscamos realizar um breve apanhado da teoria básica que norteia os sistemas dinâmicos autônomos lineares e não-lineares, com o objetivo de analisar qualitativamente esses sistemas a partir de suas soluções, além de apresentar os caminhos a percorrer até a solução geral de sistemas lineares, para em seguida, a partir da mesma, construir o seu retrato fase. Desta forma, no próximo capítulo iremos tratar algumas aplicações desses sistemas, buscando descrever o passo a passo da resolução das mesmas.

2. Aplicações de Sistema Dinâmicos Autônomos

A seguir apresentaremos algumas informações e aplicações acerca de sistemas dinâmicos autônomos, de modo que as mesmas foram adaptadas dos livros: Equações Diferenciais Ordinárias com Aplicações (BASSANEZI, 1988), Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma Abordagem Prática com Maxima (VILLATE, 2007) e Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem (ZILL, 2011).

2.1. Problema de Mistura

Definimos genericamente *Problema de Mistura*, como sendo o processo pelo qual substâncias, solutos e solventes, interagem entre si em um sistema de transferências, resultando em uma mistura denominada de *solução*. A partir das taxas de transferências ocorridas no decorrer do processo de mistura, tomando como base os valores iniciais da concentração das substâncias, podemos determinar por meio de uma modelagem a quantidade de uma certa substância presente no processo em um determinado instante t .

Desta forma, para que possamos determinar as concentrações das substâncias presentes no processo, iremos construir um sistema dinâmico. Para isso igualaremos a *taxa de entrada da substância* em cada etapa do processo, com a *taxa líquida de saída* pela qual a substância é transferida. Dessa forma, as equações que irão compor o sistema obedecerão a seguinte regra de formação

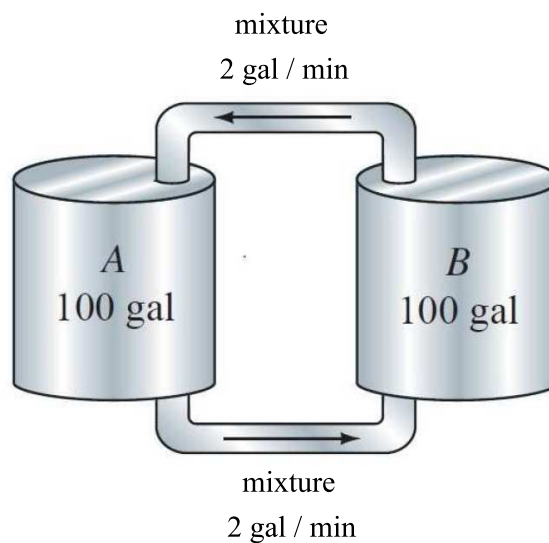
$$\frac{dx_i}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída} \quad (2.1)$$

onde x_i são as variáveis do sistema com $i \in \mathbb{N}$.

Observação 2.1. Vale ressaltar que, em problemas de mistura os sistemas dinâmicos obtidos podem ser do tipo *autônomo* ou *não-autônomo*. No entanto, neste trabalho iremos abordar apenas os casos de sistemas *autônomos*.

Problema 2.1.1. Dois tanques muito grandes, A e B , estão preenchidos com 100 galões de salmoura cada um. Inicialmente, 100 lb de sal são dissolvidas na solução do tanque A e 50 lb de sal na solução do tanque B . O sistema é fechado e, depois de bem misturado, o líquido é bombeado somente entre os tanques, como mostra a Figura 2.1

Figura 2.1: Tanque Misturador Bifásico



Fonte: Zill (2011, p. 115).

A partir do exposto no problema iremos inicialmente construir um modelo matemático, de modo a estimar a quantidade de libras de sal $x(t)$ e $y(t)$ no instante t presente nos tanques A e B , respectivamente, e em seguida aplicando a condição inicial, buscaremos determinar a quantidade de sal presente nos tanques A e B no instante $t = 30$ min.

Solução:

Analisando o esquema dos tanques da figura (2.1), e obedecendo a regra de construção (2.1), teremos:

Para o tanque A

$$\frac{dx}{dt} = (2 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{y}{100} \text{ lb/gal}\right) - (2 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{x}{100} \text{ lb/gal}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2y}{100} - \frac{2x}{100} . \quad (2.2)$$

onde a concentração de sal no tanque A é $\frac{x(t)}{100}$ lb/gal, e perceba que o cano inferior transfere a mistura do tanque A para o B a uma taxa de $\frac{2x}{100}$ lb/min e o cano superior transfere de B para A a taxa de $\frac{2y}{100}$ lb/min.

Para o tanque B

$$\frac{dy}{dt} = (2 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{x}{100} \text{ lb/gal}\right) - (2 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{y}{100} \text{ lb/gal}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2x}{100} - \frac{2y}{100} . \quad (2.3)$$

De modo análogo, o tanque B possui uma concentração de sal $\frac{y(t)}{100}$ lb/gal, com uma taxa de transferência de $\frac{2y}{100}$ lb/min do tanque B para A pelo cano superior e recebe do tanque A a mistura a taxa $\frac{2x}{100}$ lb/min pelo cano inferior.

Dessa maneira, a partir da equações (2.2) e (2.3) podemos construir o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2y}{100} - \frac{2x}{100} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2x}{100} - \frac{2y}{100} \end{cases}$$

resultando em

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{50} + \frac{y}{50} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{50} - \frac{y}{50} \end{cases}. \quad (2.4)$$

Note que obtemos um sistema dinâmico de EDOs lineares de primeira ordem. Dessa forma, podemos aplicar o método dos autovalores e autovetores para sistemas lineares de EDOs, para assim encontrarmos uma solução geral que irá representar o modelo matemático que descreverá a quantidade de sal nos tanques A e B no instante t .

Temos que encontrar os autovalores λ e os autovetores \mathbf{V} que satisfazem a equação $(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{V} = 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{50} - \lambda\right) & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} & \left(-\frac{1}{50} - \lambda\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

onde a matriz \mathbf{C} é composta pelos coeficientes do sistema (2.4).

Calculando o determinante de $(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I})$, temos que:

$$\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{50} - \lambda\right) & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} & \left(-\frac{1}{50} - \lambda\right) \end{vmatrix}$$

$$\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 + \frac{\lambda}{25}.$$

Assim, a equação característica é $\lambda^2 + \frac{\lambda}{25} = 0$. A partir da mesma obtemos duas raízes que representam os autovalores que são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{25}$.

Para obtermos os autovetores iremos substituir os autovalores encontrados em (2.5), teremos:

Para $\lambda_1 = 0$

$$(\mathbf{C} - 0\mathbf{I})\mathbf{V}_1 = 0.$$

Daí, temos que $v_1 = v_2$. Tomando $v_2 = 1$, obtemos que $v_1 = 1$. Assim, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$ é

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = -\frac{1}{25}$

$$(\mathbf{C} + \frac{1}{25}\mathbf{I})\mathbf{V}_2 = 0$$

que resulta em $v_1 = -v_2$. Tomando $v_2 = 1$, temos que $v_1 = -1$. Assim, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -\frac{1}{25}$ é

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos a seguinte solução geral

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\frac{1}{25}t}.$$

que resulta em

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0,04t}.$$

Agora aplicando a condição inicial $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix}$, teremos

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Daí, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 100 \\ c_1 + c_2 = 50 \end{cases}.$$

Logo, temos que $c_1 = 75$ e $c_2 = -25$.

Portanto, a solução para o problema de mistura dado é

$$\mathbf{X}(t) = 75 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 25 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0,04t}. \quad (2.6)$$

A solução (2.6) pode ser também escrita da forma

$$\begin{aligned} x(t) &= 75 + 25e^{-0,04t} \\ y(t) &= 75 - 25e^{-0,04t} \end{aligned}$$

Por fim, substituindo $t = 30$ min, teremos que quantidade de sal nos tanques A e B será

$$\begin{aligned} x(30) &= 75 + 25e^{-0,04 \times 30} \\ y(30) &= 75 - 25e^{-0,04 \times 30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(30) &\approx 82,5299 \text{ lb} \\ y(30) &\approx 64,4701 \text{ lb} \end{aligned}$$

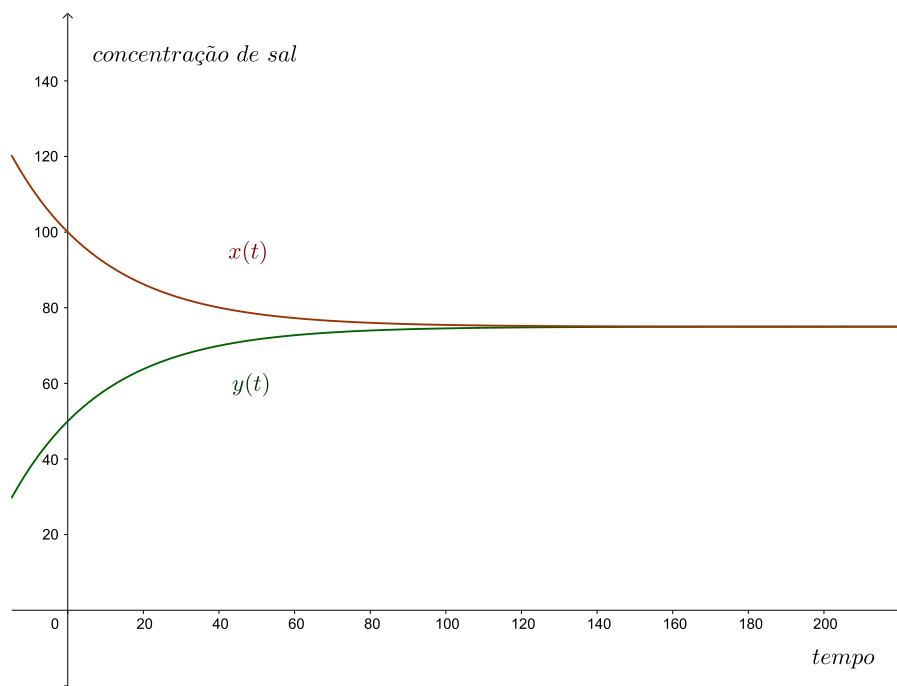


Figura 2.2: Gráfico que expressa a evolução da concentração de sal no tanque bifásico em função do tempo.

Perceba que, à medida que o tempo evolui as concentrações de sal nos tanques A e B representadas, respectivamente, por $x(t)$ e $y(t)$, tendem a igualar-se, uma vez que nesse caso de tanque misturador não existe saída de solução para fora do sistema.

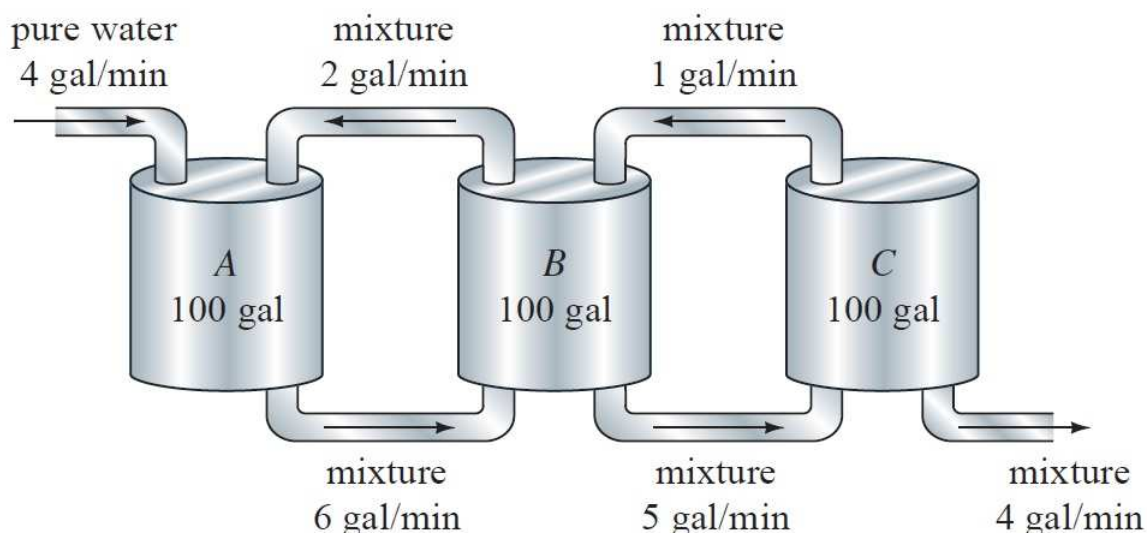
□

Problema 2.1.2. Analisando as informações apresentadas na Figura 2.3, iremos construir um modelo matemático que seja capaz de determinar a quantidade de libras de sal $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ no instante t presente nos tanques A , B e C , respectivamente, e em seguida aplicando a condição inicial

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix},$$

buscaremos estimar as quantidades de sal presentes nos tanques A , B e C no instante $t = 40$ min.

Figura 2.3: Tanque Misturador Trifásico



Fonte: Zill (2011, p. 115).

Solução:

Analogamente aos procedimentos realizados no problema 1, iremos primeiramente construir as equações que irão compor o sistema, igualando a *taxa de mudança de sal* de cada tanque com a *taxa líquida* em que o sal é transferido entre eles. Assim analisando o esquema dos tanques da Figura 2.3, teremos:

Para o tanque A

$$\frac{dx}{dt} = (4 \text{ gal/min}) \cdot (0 \text{ lb/gal}) + (2 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{y}{100} \text{ lb/gal}\right) - (6 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{x}{100} \text{ lb/gal}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2y}{100} - \frac{6x}{100} . \quad (2.7)$$

onde a concentração de sal no tanque A é $\frac{x(t)}{100}$ lb/gal, e percebe que o cano inferior esquerdo transfere a mistura do tanque A para o B a uma taxa de $\frac{6x}{100}$ lb/min, e o cano superior esquerdo transfere do tanque B para o A a uma taxa de $\frac{2y}{100}$ lb/min.

Para o tanque B

$$\frac{dy}{dt} = (6 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{x}{100} \text{ lb/gal}\right) + (1 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{z}{100} \text{ lb/gal}\right) - (7 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{y}{100} \text{ lb/gal}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6x}{100} + \frac{z}{100} - \frac{7y}{100} . \quad (2.8)$$

De modo análogo o tanque B possui uma concentração de sal $\frac{y(t)}{100}$ lb/gal, com uma taxa de transferência de $\frac{2y}{100}$ lb/min de B para A pelo cano superior esquerdo e $\frac{5y}{100}$ lb/min de B para C pelo cano inferior direito, além de receber a mistura do tanque A pelo cano inferior esquerdo a taxa de $\frac{6x}{100}$ lb/min e pelo cano superior direito recebe de C a taxa de $\frac{z}{100}$ lb/min.

Para o tanque C

$$\frac{dz}{dt} = (5 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{y}{100} \text{ lb/gal}\right) - (5 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{z}{100} \text{ lb/gal}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{5y}{100} - \frac{5z}{100} . \quad (2.9)$$

Já o tanque C possui uma concentração de sal $\frac{z(t)}{100}$ lb/gal, com uma taxa de transferência de $\frac{z}{100}$ lb/min de C para B pelo cano superior esquerdo e $\frac{4z}{100}$ lb/min de C para fora do sistema pelo cano inferior direito, além de receber a mistura do tanque B pelo cano inferior esquerdo a taxa de $\frac{5y}{100}$ lb/min .

Dessa maneira, a partir da equações (2.7), (2.8) e (2.9) podemos construir o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{3x}{50} + \frac{y}{50} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{3x}{50} - \frac{7y}{100} + \frac{z}{100} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{y}{20} - \frac{z}{20} \end{cases} . \quad (2.10)$$

Agora a partir do sistema dinâmico formado iremos aplicar o método dos autovalores e autovetores, como visto anteriormente, para assim encontrarmos uma solução geral que representará o modelo matemático que irá determinar a quantidade de sal nos tanques A , B e C no instante t .

Temos que encontrar os autovalores λ e os autovetores \mathbf{V} que satisfazem a equação $(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{V} = 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{3}{50} - \lambda\right) & \frac{1}{50} & 0 \\ \frac{3}{50} & \left(-\frac{7}{100} - \lambda\right) & \frac{1}{100} \\ 0 & \frac{1}{20} & \left(-\frac{1}{20} - \lambda\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

onde a matriz \mathbf{D} é composta pelos coeficientes do sistema (2.10).

Calculando o determinante de $(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})$, temos que:

$$\det(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} \left(-\frac{3}{50} - \lambda\right) & \frac{1}{50} & 0 \\ \frac{3}{50} & \left(-\frac{7}{100} - \lambda\right) & \frac{1}{100} \\ 0 & \frac{1}{20} & \left(-\frac{1}{20} - \lambda\right) \end{vmatrix}$$

$$\det(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 - \frac{18\lambda^2}{100} - \frac{9\lambda}{1000} - \frac{12}{100000}.$$

Assim, a equação característica é $-\lambda^3 - \frac{18\lambda^2}{100} - \frac{9\lambda}{1000} - \frac{12}{100000} = 0$. A partir da mesma obtemos três raízes que representam os autovalores que são $\lambda_1 \approx -0,1054$, $\lambda_2 \approx -0,0531$ e $\lambda_3 \approx -0,0214$.

A partir dos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 , obtemos os seguintes autovetores, respectivamente

$$\begin{bmatrix} -0,3107 \\ 0,7058 \\ 0,6366 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -0,1810 \\ -0,0619 \\ 0,9815 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0,2491 \\ 0,4807 \\ 0,8407 \end{bmatrix}.$$

Assim, teremos a seguinte solução geral

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -0,3107 \\ 0,7058 \\ 0,6366 \end{bmatrix} e^{-0,1054t} + c_2 \begin{bmatrix} -0,1810 \\ -0,0619 \\ 0,9815 \end{bmatrix} e^{-0,0531t} + c_3 \begin{bmatrix} 0,2491 \\ 0,4807 \\ 0,8407 \end{bmatrix} e^{-0,0214t}.$$

$$\text{Tomando a condição inicial } \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix},$$

teremos que

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,3107c_1 - 0,1810c_2 + 0,2491c_3 \\ 0,7058c_1 - 0,0619c_2 + 0,4807c_3 \\ 0,6366c_1 + 0,9815c_2 + 0,8407c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix}.$$

Então, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -0,3107c_1 - 0,1810c_2 + 0,2491c_3 = 100 \\ 0,7058c_1 - 0,0619c_2 + 0,4807c_3 = 50 \\ 0,6366c_1 + 0,9815c_2 + 0,8407c_3 = 70 \end{cases}.$$

Logo, temos que $c_1 = -94,4569$, $c_2 = -67,8222$ e $c_3 = 233,9702$ e a solução para o problema de mistura em questão é

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) = & -94,4569 \begin{bmatrix} -0,3107 \\ 0,7058 \\ 0,6366 \end{bmatrix} e^{-0,1054t} - 67,8222 \begin{bmatrix} -0,1810 \\ -0,0619 \\ 0,9815 \end{bmatrix} e^{-0,0531t} \\ & + 233,9702 \begin{bmatrix} 0,2491 \\ 0,4807 \\ 0,8407 \end{bmatrix} e^{-0,0214t}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

A solução (2.12) pode ser também escrita da forma

$$\begin{aligned} x(t) &= 29,3478e^{-0,1054t} + 12,2758e^{-0,0531t} + 58,2820e^{-0,0214t} \\ y(t) &= -66,6677e^{-0,1054t} + 4,1982e^{-0,0531t} + 112,4695e^{-0,0214t} \\ z(t) &= -60,1313e^{-0,1054t} - 66,5675e^{-0,0531t} + 196,6987e^{-0,0214t} \end{aligned}.$$

Portanto, substituindo $t = 40$ min, teremos as seguintes quantidades de sal nos tanques

$$\begin{aligned} x(40) &= 29,3478e^{-0,1054 \times 40} + 12,2758e^{-0,0531 \times 40} + 58,2820e^{-0,0214 \times 40} \\ y(40) &= -66,6677e^{-0,1054 \times 40} + 4,1982e^{-0,0531 \times 40} + 112,4695e^{-0,0214 \times 40} \\ z(40) &= -60,1313e^{-0,1054 \times 40} - 66,5675e^{-0,0531 \times 40} + 196,6987e^{-0,0214 \times 40} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(40) &\approx 26,6623 \text{ lb} \\ y(40) &\approx 47,3016 \text{ lb} \\ z(40) &\approx 74,7233 \text{ lb} \end{aligned}$$

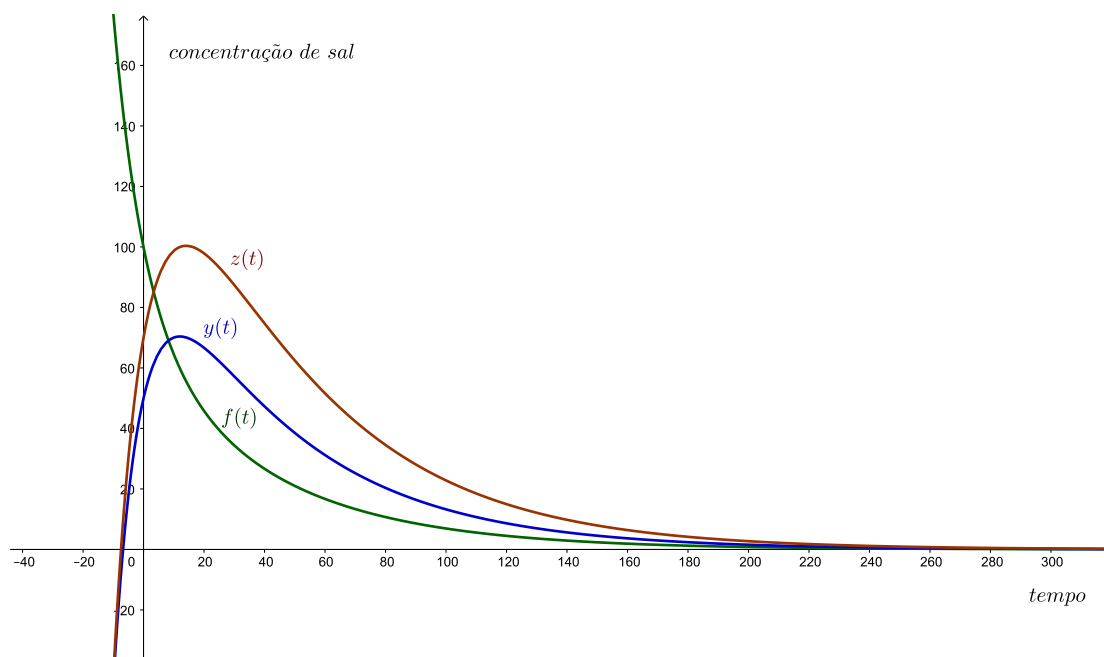


Figura 2.4: Gráfico que expressa a evolução da concentração de sal no tanque trifásico em função do tempo.

Note que, nessa aplicação tratada, as concentrações de sal nos tanques A , B e C representadas, respectivamente, por $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ tendem a zero a partir de um determinado instante de tempo, pois no sistema em questão existe a saída de solução.

□

2.2. Modelo Presa-Predador de Lokta-Volterra

Dá-se o nome de *Modelo Presa-Predador de Lokta-Volterra*, ao modelo matemático desenvolvido por Alfred J. Lotka e Vito Volterra por volta do ano de 1925, construído a partir da descrição das interações que ocorrem entre duas espécies de animais em um determinado meio. Dessa forma, denotando por $x(t)$ a população de *presas* e $y(t)$ a população de *predadores*, esse modelo se baseia na hipótese de que os indivíduos pertencentes ao grupo das presas dispõem de alimento em abundância, enquanto, que os predadores alimentam-se das presas.

Então, o modelo apresentado pode ser descrito pelo seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - cxy = x(a - cy) = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -by + dxy = y(-b + dx) = G(x, y) \end{cases} \quad (2.13)$$

os pontos de equilíbrio de (2.13) são dados por

$$\begin{cases} x(a - cy) = 0 \\ y(-b + dx) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$. Além disso, temos que a é a taxa de natalidade das presas, b a taxa de mortalidade dos predadores, (c, d) as medidas de interação entre as duas espécies e xy é um fator de proporcionalidade relativo a presença das populações de predadores e presas.

Este modelo representado por um sistema dinâmico autônomo não-linear pode, como ocorre com a maioria dos sistemas não-lineares de EDOs, não ter solução ou a mesma ser de difícil obtenção, no entanto, podemos realizar uma análise qualitativa desses sistemas, para assim, observar como ocorrerá a evolução dessas espécies num determinado intervalo de tempo. Essa análise é realizada a partir das órbitas do sistema no seu plano de fase, tomando como referência as soluções de equilíbrio, de acordo com a Definição 1.6. Teremos que o sistema (2.13) terá como pontos de equilíbrio $(0, 0)$ e $(\frac{b}{d}, \frac{a}{c})$, provenientes das soluções do sistema (2.14).

Desta forma, para analisarmos qualitativamente o sistema (2.13), teremos que observar o comportamento dos dois sistemas linearizados obtidos a partir dos pontos de equilíbrios considerados para o sistema não-linear (2.13). Quando consideramos o ponto de equilíbrio $(0, 0)$, temos o seguinte sistema linearizado

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = -by \end{cases} \quad (2.15)$$

pois, próximo à origem os termos não-lineares podem ser descartados.

Já para analisar o comportamento do sistema não-linear na vizinhança do ponto $(\frac{b}{d}, \frac{a}{c})$, podemos utilizar a matriz jacobina. Então, calculando a jacobiana de (2.13), teremos

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} F_x(x, y) & F_y(x, y) \\ G_x(x, y) & G_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - cy & -cx \\ dy & -b + dx \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Agora calculando \mathbf{J} no ponto $(\frac{b}{d}, \frac{a}{c})$, obtemos o sistema linearizado

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{bc}{d}v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{ad}{c}u \end{cases} \quad (2.17)$$

de modo que $x = \frac{b}{d} + u$ e $y = \frac{a}{c} + v$, que implica $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$ e $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$.

Sendo assim, resolvendo os sistemas (2.15) e (2.17) pelo método dos autovalores e autovetores, iremos obter duas soluções para o sistema não-linear (2.13), que nos permitirá analisar o comportamento das populações de presas e predadores a partir das condições iniciais consideradas para o sistema nos equilíbrios $(0, 0)$ e $(\frac{b}{d}, \frac{a}{c})$. Todavia, é por meio da análise realizada em torno do ponto de equilíbrio $(\frac{b}{d}, \frac{a}{c})$, que obtemos aproximações satisfatórias para as variações cíclicas das populações envolvidas.

Problema 2.2.1. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0,2x - 0,025xy \\ \frac{dy}{dt} = -0,1y + 0,02xy \end{cases} \quad (2.18)$$

que descreve um modelo Presa-Predador, onde $x(t)$ representa a população de zebras (presas) e $y(t)$ a população de leões (predadores), de modo que essas populações são medidas em centenas. Assim sendo, a partir dos valores iniciais $x(0) = 4$ e $y(0) = 2$, iremos por meio das informações apresentadas analisar como ocorrem as interações entre essas duas espécies por meio do modelo de Lokta-Volterra.

Solução:

Primeiramente, observamos que existem dois pontos de equilíbrio para o sistema (2.18) que são $\left\{ (0, 0), \left(\frac{0,1}{0,02}, \frac{0,2}{0,025} \right) \right\}$ ou $\{(0, 0), (5, 8)\}$, obtidos a partir das soluções do sistema (2.19).

$$\begin{cases} x(0,2 - 0,025y) = 0 \\ y(-0,1 + 0,02x) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Agora iremos analisar o comportamento de cada sistema linearizado obtido por meio dos pontos de equilíbrio.

Para o ponto $(0, 0)$

Observando o sistema (2.18), e tomando como referência o ponto $(0, 0)$, obtemos o seguinte sistema linearizado

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0,2x \\ \frac{dy}{dt} = -0,1y \end{cases} \quad (2.20)$$

pois, quando estamos analisando o comportamento do sistema não-linear próximo da origem, podemos desconsiderar os termos não lineares.

Aplicando os procedimento de resolução de sistemas dinâmicos lineares, utilizados no Problema 2.1.1 da seção anterior, teremos o polinômio característico $\lambda^2 - 0,1\lambda - 0,02$. E a partir do mesmo, obtemos os autovalores $\lambda_1 = 0,2$ e $\lambda_2 = -0,1$. Logo, concluímos que o sistema linearizado (2.20), trata-se de um *ponto de sela instável*. De acordo com o Teorema 1.5 (Lyapunov-Poincaré), e observando os autovalores obtidos, teremos que o sistema não-linear (2.18) apresentará a mesma estabilidade do sistema (2.20) em torno do ponto $(0, 0)$.

Nesse caso, a partir dos autovalores $\lambda_1 = 0,2$ e $\lambda_2 = -0,1$, obtemos, respectivamente, os autovetores

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, teremos a seguinte solução geral para o sistema (2.20)

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{0,2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0,1t}.$$

Para o ponto $(5, 8)$

No caso do ponto dado, iremos aplicar uma mudança de variáveis $x = 5 + u$ e $y = 8 + v$ no sistema (2.18), para assim, analisar o comportamento desse sistema não-linear em relação ao ponto observado. Assim, teremos

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0,2(5 + u) - [0,025(5 + u)(8 + v)] \\ \frac{dv}{dt} = -0,1(8 + v) - [0,02(5 + u)(8 + v)] \end{cases},$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -0,125v - 0,025uv \\ \frac{dv}{dt} = 0,16u + 0,02uv \end{cases}. \quad (2.21)$$

Note que, a partir do sistema não-linear (2.21), obtemos o sistema linearizado

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -0,125v \\ \frac{dv}{dt} = 0,16u \end{cases} . \quad (2.22)$$

Daí, por meio do sistema (2.22), obtemos o polinômio característico $\lambda^2 + 0,02 = 0$. E os autovalores obtidos dele serão $\lambda_1 = \sqrt{0,02}i$ e $\lambda_2 = -\sqrt{0,02}i$, ou seja, autovalores complexos. Dessa forma, analisando o comportamento das curvas de solução e a estabilidade do sistema linearizado (2.22), o mesmo apresenta como ponto de equilíbrio um *centro estável*.

Podemos observar que

$$\frac{dv}{du} = -\frac{0,16u}{0,125v} \quad (2.23)$$

a equação (2.23) é separável. Dessa forma, temos que as curvas de solução serão dadas por

$$\frac{v^2}{0,16} + \frac{u^2}{0,125} = c_3 \quad (2.24)$$

onde c_3 é uma constante positiva para as órbitas da elipse (2.24) no plano de fase.

Todavia, analisando o que é apresentado no Teorema 1.5, quando temos casos em que os autovalores do sistema linearizado são imaginários puros, não é possível determinar a estabilidade do sistema não-linear (2.18) próximo ao ponto (5, 8). Entretanto, no caso do modelo presa-predador de Lokta-Volterra, de modo específico, esse problema pode ser contornado, já que a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-0,1 + 0,02x)}{x(0,2 - 0,025y)} \quad (2.25)$$

é separável.

Agora integrando implicitamente membro a membro a equação (2.25), teremos as seguintes curvas de soluções

$$\begin{aligned} 0,2 \ln y - 0,025y + c_2 &= -0,1 \ln x + 0,02x + c_1 \\ 0,2 \ln y - 0,025y &= -0,1 \ln x + 0,02x + c_3 . \end{aligned} \quad (2.26)$$

Aplicando a condição inicial $x(0) = 4$ e $y(0) = 2$ em (2.26),

$$\begin{aligned} 0,2 \ln 2 - 0,025 \times 2 &= -0,1 \ln 4 + 0,02 \times 4 + c_3 \\ c_3 &\approx 0,1472 . \end{aligned}$$

Então, obtemos a seguinte solução implícita para o problema de valor inicial

$$0,2 \ln y - 0,025y + 0,1 \ln x - 0,02x = 0,1472 . \quad (2.27)$$

Daí, quando observamos pequenas variações em torno do ponto de equilíbrio (5, 8), teremos que as curvas de soluções do sistema não-linear (2.18) serão a família de curvas com a forma semelhante à elipses, de modo que as mesmas podem ser determinadas a partir das condições iniciais dadas.

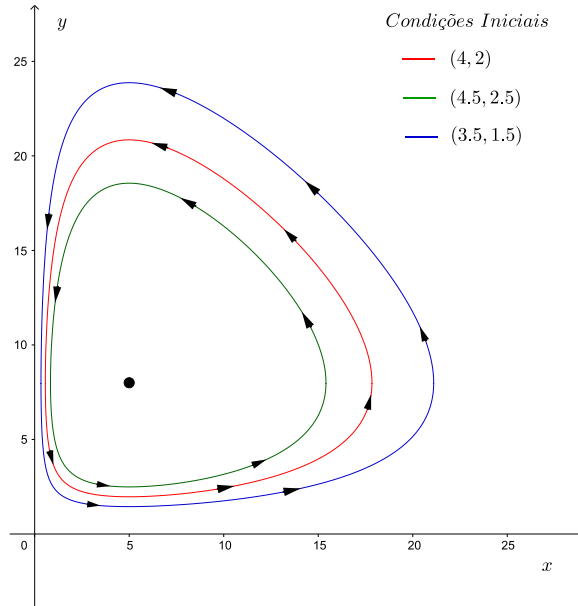


Figura 2.5: Retrato de fase que representa o ciclo ecológico para as populações de zebra e leões a partir da solução (2.26).

Retomando o sistema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -0,125v \\ \frac{dv}{dt} = 0,16u \end{cases} \quad (2.28)$$

iremos agora determinar a sua solução por meio do método dos autovalores e autovetores. Assim, substituindo os autovalores $\lambda_1 = \sqrt{0,02}i$ e $\lambda_2 = -\sqrt{0,02}i$, obtidos a partir do polinômio característico do sistema (2.28), em $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{V}$, onde \mathbf{B} é a matriz dos coeficientes do sistema (2.28), obteremos os seguintes autovetores associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 6,25\sqrt{0,02}i \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} -6,25\sqrt{0,02}i \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Daí, teremos o seguinte conjunto fundamental de soluções

$$\left\{ \left[\begin{array}{c} 6, 25\sqrt{0,02}i \\ -1 \end{array} \right] e^{(\sqrt{0,02}i)t}, \left[\begin{array}{c} -6, 25\sqrt{0,02}i \\ -1 \end{array} \right] e^{(-\sqrt{0,02}i)t} \right\}. \quad (2.29)$$

Perceba que, se utilizarmos o conjunto (2.29) da forma como se encontra, iremos obter uma solução geral complexa. Dessa forma, para contornar essa situação, vamos tomar uma dessas soluções complexas e aplicar a fórmula de Euler, apresentada no capítulo anterior, de modo a obter duas soluções reais. Então, tomando a solução

$$\mathbf{X}_2 = \left[\begin{array}{c} -6, 25\sqrt{0,02}i \\ -1 \end{array} \right] e^{(-\sqrt{0,02}i)t}$$

obtemos

$$\mathbf{X}_2 = \left[\begin{array}{c} 6, 25\sqrt{0,02} \operatorname{sen}\sqrt{0,02}t \\ -\cos\sqrt{0,02}t \end{array} \right] + i \left[\begin{array}{c} -6, 25\sqrt{0,02} \cos\sqrt{0,02}t \\ -\operatorname{sen}\sqrt{0,02}t \end{array} \right]$$

onde

$$\mathbf{m}(t) = \left[\begin{array}{c} 6, 25\sqrt{0,02} \operatorname{sen}\sqrt{0,02}t \\ -\cos\sqrt{0,02}t \end{array} \right], \quad \mathbf{n}(t) = \left[\begin{array}{c} -6, 25\sqrt{0,02} \cos\sqrt{0,02}t \\ -\operatorname{sen}\sqrt{0,02}t \end{array} \right].$$

são duas soluções reais obtidas a partir da solução complexa \mathbf{X}_2 . Então, teremos as seguintes soluções

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 (6, 25\sqrt{0,02} \operatorname{sen}\sqrt{0,02}t) - c_2 (6, 25\sqrt{0,02} \cos\sqrt{0,02}t) \\ v(t) &= -c_1 (\cos\sqrt{0,02}t) - c_2 (\operatorname{sen}\sqrt{0,02}t) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Lembrando que $x = 5 + u$ e $y = 8 + v$, obteremos as seguintes soluções para o sistema (2.18)

$$\begin{aligned} x(t) &= 5 + c_1 (6, 25\sqrt{0,02} \operatorname{sen}\sqrt{0,02}t) - c_2 (6, 25\sqrt{0,02} \cos\sqrt{0,02}t) \\ y(t) &= 8 - c_1 (\cos\sqrt{0,02}t) - c_2 (\operatorname{sen}\sqrt{0,02}t) \end{aligned}$$

Por fim, aplicando-se as condições iniciais $x(0) = 4$ e $y(0) = 2$, teremos

$$\begin{aligned} x(t) &= 5 + 37,5\sqrt{0,02} \operatorname{sen}\sqrt{0,02}t - \cos\sqrt{0,02}t \\ y(t) &= 8 - 6 \cos\sqrt{0,02}t - \frac{\sqrt{0,02}}{0,125} \operatorname{sen}\sqrt{0,02}t \end{aligned} \quad (2.31)$$

As soluções obtidas em (2.31), descrevem aproximações satisfatórias para as curvas

do sistema não-linear (2.18) na vizinhança do ponto de equilíbrio (5, 8). Além disso, a partir das mesmas, é possível levantar alguns resultados acerca do comportamento das variações cíclicas das populações investigadas, tais como

- I. As variações das populações de presas e predadores do sistema (2.18) apresentam variações cíclicas com período igual a

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{0,02}} \approx 0,1414$$

de modo que o período independe das condições iniciais;

- II. A amplitude das variações cíclicas para as presas é descrita por

$$A_1 = \sqrt{(c_1 6,25\sqrt{0,02})^2 + (-c_2 6,25\sqrt{0,02})^2} = \sqrt{(37,5\sqrt{0,02})^2 + (-1)^2}$$

$$A_1 \approx 5,3968$$

e para a população de predadores por

$$A_2 = \sqrt{(-c_1)^2 + (-c_2)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-\frac{\sqrt{0,02}}{0,125})^2}$$

$$A_2 \approx 6,1057$$

de modo que as mesmas dependem das condições iniciais e dos parâmetros do problema.

Vejamos a seguir na Figura 2.6, o comportamento das populações durante a evolução do tempo.

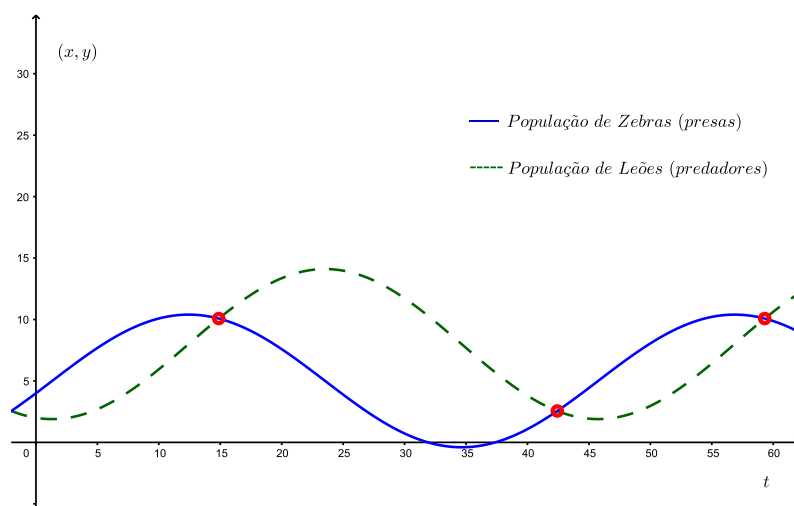


Figura 2.6: Interações entre as populações de zebras e leões a partir das soluções (2.31).

Analisando as trajetórias que descrevem as populações de zebras e leões na Figura 2.6, podemos notar que a população de zebras começa a ter um declínio mais significativo a partir do instante em que as populações se igualam, e no momento que as presas deixam de existir no ambiente a população de leões tenderá a desaparecer. Dessa forma, quando as presas retornam ao ambiente a população de predadores consegue salvar-se da extinção. Perceba que esse comportamento apresenta-se de forma periódica como foi mencionado anteriormente.

Contudo, sabemos que na natureza podem ocorrer alterações que modifiquem esse comportamento apresentado, por isso o modelo presa-predador de Lotka-Volterra, busca apenas estudar as interações que podem ocorrer entre duas espécies em um meio, no qual os efeitos causados por fatores externos não venham a causar mudanças no crescimento ou decréscimo das populações. Vale lembrar que existem outros modelos matemáticos que descrevem o comportamento entre duas espécies, e à análise dos mesmos são diferentes entre si. São exemplos de modelos que levam em consideração os efeitos causados por fatores externos o modelo presa-predador com perturbação das populações médias, modelo geral presa-predador (Kolmogorov), modelos com competição entre outros.

□

2.3. Pêndulo Livre com Amortecimento

Define-se *Pêndulo Livre com Amortecimento* como sendo um modelo matemático que descreve as oscilações de uma partícula de massa m conectada a uma haste rígida de massa desprezível e de comprimento l conectada a um suporte rígido, como podemos observar na Figura 2.7. Desta forma, esse tipo de pêndulo pode se mover num plano vertical, de modo que designamos por θ o ângulo que a haste faz com a vertical no sentido anti-horário.

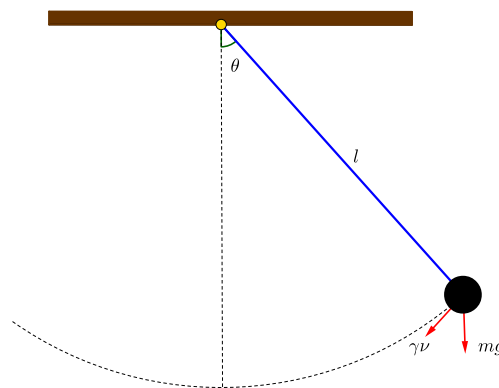


Figura 2.7: Pêndulo Livre com Amortecimento.

A amplitude de oscilação de um pêndulo livre com amortecimento decresce, principalmente, devido à resistência do ar. A força de atrito com o ar é contrária ao movimento e proporcional à velocidade angular, isto é, tem módulo $\gamma\nu$, onde γ é uma constante.

Daí, temos a seguinte equação diferencial de segunda ordem que descreve esse modelo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\gamma}{ml} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \text{sen}\theta = 0 \quad (2.32)$$

onde g é a aceleração gravitacional e γ uma constante.

Alem disso, temos que a velocidade angular é dada por $\theta' = \nu$. Então, podemos expressar a equação (2.32) como um sistema dinâmico da forma

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \nu \\ \frac{d\nu}{dt} = -\frac{g}{l} \text{sen}\theta - \frac{\gamma}{ml} \nu \end{cases} \quad (2.33)$$

Contudo, perceba que o sistema (2.33) é não-linear, então teremos que os pontos de equilíbrio serão $(K\pi, 0)$, com K pertencente aos inteiros. Dessa forma, iremos tratar aqui apenas o caso da origem, isto é, para $K = 0$, assim, teremos o ponto de equilíbrio $(0, 0)$. Assim, quando estamos analisando um sistema não-linear próximo à origem, podemos descartar os termos não-lineares. Daí, obteremos o sistema linear

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \nu \\ \frac{d\nu}{dt} = -\frac{g}{l} \theta - \frac{\gamma}{ml} \nu \end{cases} \quad (2.34)$$

Logo, teremos os seguintes casos de comportamento para os sistemas (2.33) e (2.34):

I. Se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

Teremos que o ponto de equilíbrio $(0, 0)$, será um *nó estável* tanto para o sistema (2.33), quanto para (2.34);

II. Se $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.

Nesse caso, temos que a origem será um *nó* para o sistema (2.33), e pode ser um *ponto espiral* ou um *nó* para (2.34);

III. Se $\lambda_i = -\alpha \pm \beta i$.

Nessa situação, temos que a origem é um *ponto espiral* para os sistemas (2.33) e (2.34).

Problema 2.3.1. Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \nu \\ \frac{d\nu}{dt} = -\frac{g}{l}\text{sen}\theta - \frac{\gamma}{ml}\nu \end{cases} \quad (2.35)$$

Utilizando os valores $m = 300$ g, $l = 50$ cm, $g = 9,81$ m/s² e $\gamma = 0,05$ N·s, iremos determinar as soluções do sistema para os seguintes casos:

I. O pêndulo parte do repouso com um ângulo inicial $\theta = 120^\circ$;

II. O pêndulo é lançado desde $\theta = 60^\circ$, com uma velocidade angular inicial $\nu = -9$ rad/s.

Solução:

Primeiramente notamos que o sistema (2.35) está na forma não-linear, então considerando como ponto de equilíbrio a origem, teremos o seguinte sistema linear para os valores considerados

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \nu \\ \frac{d\nu}{dt} = -\frac{9,81}{0,5}\theta - \frac{0,05}{0,3 \times 0,5}\nu \end{cases} \quad (2.36)$$

implicando em

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \nu \\ \frac{d\nu}{dt} = -19,62\theta - 0,33\nu \end{cases} \quad (2.37)$$

Agora iremos em busca dos autovalores λ e os autovetores \mathbf{V} que satisfazem a equação $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{V} = 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -19,62 & (-0,33 - \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

onde a matriz \mathbf{A} é composta pelos coeficientes do sistema (2.37).

Assim, resolvendo o determinante de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, temos que:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -19,62 & (-0,33 - \lambda) \end{vmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 + 0,33\lambda + 19,62.$$

Logo, a equação característica é $\lambda^2 + 0,33\lambda + 19,62 = 0$. Dessa forma, a partir da mesma obtemos duas raízes que representam os autovalores que são $\lambda_1 = -0,165 - 4,4263i$, $\lambda_2 = -0,165 + 4,4263i$. Então, teremos que a origem dos sistemas (2.35) e (2.37) será um *ponto espiral*.

Dessa forma, para obtermos os autovetores iremos substituir os autovalores encontrados em (2.38), então teremos:

Para $\lambda_1 = -0,165 - 4,4263i$

$$[\mathbf{A} + (0,165 + 4,4263i)\mathbf{I}]\mathbf{V}_1 = 0.$$

Temos que $v_2 = -(0,165 + 4,4263i)v_1$. Tomando $v_1 = 1$, implica que $v_2 = -0,165 - 4,4263i$. Assim, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -0,165 - 4,4263i$ é

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,165 - 4,4263i \end{bmatrix}.$$

Aplicando um raciocínio análogo para o autovalor $\lambda_2 = -0,165 + 4,4263i$, teremos o seguinte autovetor associado

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,165 + 4,4263i \end{bmatrix}.$$

Daí, temos que uma solução geral para o sistema (2.37) será

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -0,165 - 4,4263i \end{bmatrix} e^{(-0,165-4,4263i)t} \\ &+ c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -0,165 + 4,4263i \end{bmatrix} e^{(-0,165+4,4263i)t}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

No entanto, como estamos interessados em obter uma solução com valores reais, assim aplicaremos a fórmula de Euler para soluções complexas de sistemas de EDOs. Contudo, como \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 são soluções complexas conjugadas, podemos achar duas soluções reais utilizando a parte real e imaginária de apenas uma dessas soluções. Logo, usando \mathbf{V}_2 , temos

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,165 + 4,4263i \end{bmatrix} e^{(-0,165+4,4263i)t} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{V}_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -0,165 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 4,4263 \end{pmatrix} \right] e^{(-0,165+4,4263i)t} . \quad (2.41)$$

Agora aplicando a fórmula de Euler, teremos que (2.41) será da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(4,4263 t) \\ -0,165 \cos(4,4263 t) - 4,4263 \operatorname{sen}(4,4263 t) \end{bmatrix} e^{-0,165t} \\ &+ i \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(4,4263 t) \\ 4,4263 \cos(4,4263 t) - 0,165 \operatorname{sen}(4,4263 t) \end{bmatrix} e^{-0,165t} = u(t) + iv(t). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{bmatrix} \cos(4,4263 t) \\ -0,165 \cos(4,4263 t) - 4,4263 \operatorname{sen}(4,4263 t) \end{bmatrix} e^{-0,165t} \\ v(t) &= \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(4,4263 t) \\ 4,4263 \cos(4,4263 t) - 0,165 \operatorname{sen}(4,4263 t) \end{bmatrix} e^{-0,165t} \end{aligned}$$

são soluções reais para o sistema (2.37).

Assim, temos que uma solução geral para o sistema (2.37) com valores reais será

$$\begin{aligned} \theta(t) &= e^{-0,165t} [c_1 \cos(4,4263 t) + c_2 \operatorname{sen}(4,4263 t)] \\ \nu(t) &= e^{-0,165t} [c_1 (-0,165 \cos(4,4263 t) - 4,4263 \operatorname{sen}(4,4263 t)) \\ &\quad + c_2 (4,4263 \cos(4,4263 t) - 0,165 \operatorname{sen}(4,4263 t))] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Para a condição inicial I:

Agora substituindo as condições iniciais $\theta(0) = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ rad e $\nu(0) = 0$ em (2.42), teremos

$$\theta(0) = c_1 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\nu(0) = -0,165c_1 + 4,4263c_2 = 0$$

Assim,

$$\begin{aligned} c_1 &\approx 2,0944 \\ c_2 &\approx 0,0781 \end{aligned}$$

Logo, a solução geral para o problema de valor inicial **I**, será

$$\begin{aligned} \theta(t) &= e^{-0,165t} [2,0944 \cos(4,4263 t) + 0,0781 \operatorname{sen}(4,4263 t)] \\ \nu(t) &= e^{-0,165t} [0,0001 \cos(4,4263 t) - 9,2833 \operatorname{sen}(4,4263 t)] \end{aligned} \quad (2.43)$$

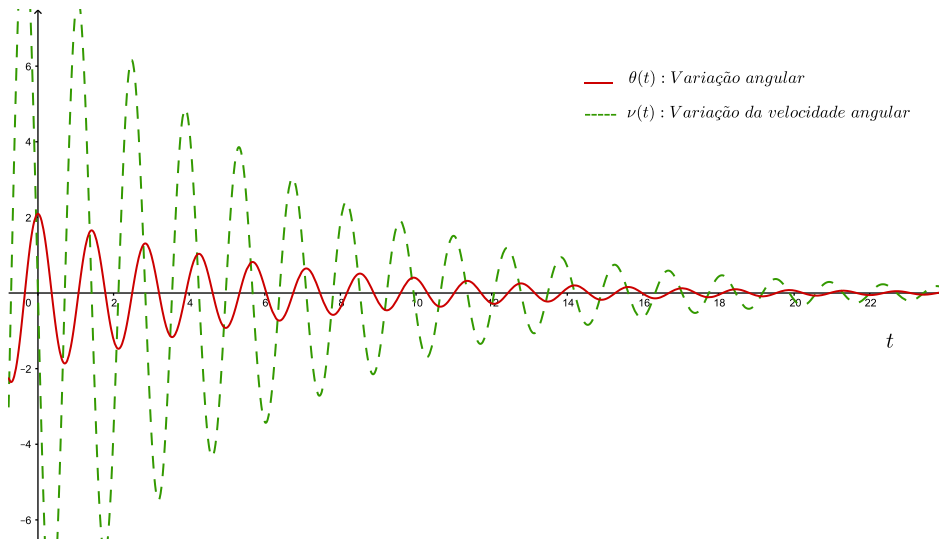


Figura 2.8: Gráfico que representa as variações do ângulo e da velocidade angular do pêndulo livre com amortecimento a partir das soluções (2.43).

Para a condição inicial **II**:

Tomando as condições iniciais $\theta(0) = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad e $\nu(0) = -9$ rad/s, e substituindo-as em (2.42), teremos

$$\theta(0) = c_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\nu(0) = -0,165c_1 + 4,4263c_2 = -9$$

Assim,

$$\begin{aligned} c_1 &\approx 1,0472 \\ c_2 &\approx -1,9943 \end{aligned}$$

Dessa forma, a solução geral para o problema de valor inicial **II**, será

$$\begin{aligned} \theta(t) &= e^{-0,165t} [1,0472 \cos(4,4263 t) - 1,9943 \operatorname{sen}(4,4263 t)] \\ \nu(t) &= e^{-0,165t} [-9,0002 \cos(4,4263 t) - 4,3061 \operatorname{sen}(4,4263 t)] \end{aligned} \quad (2.44)$$

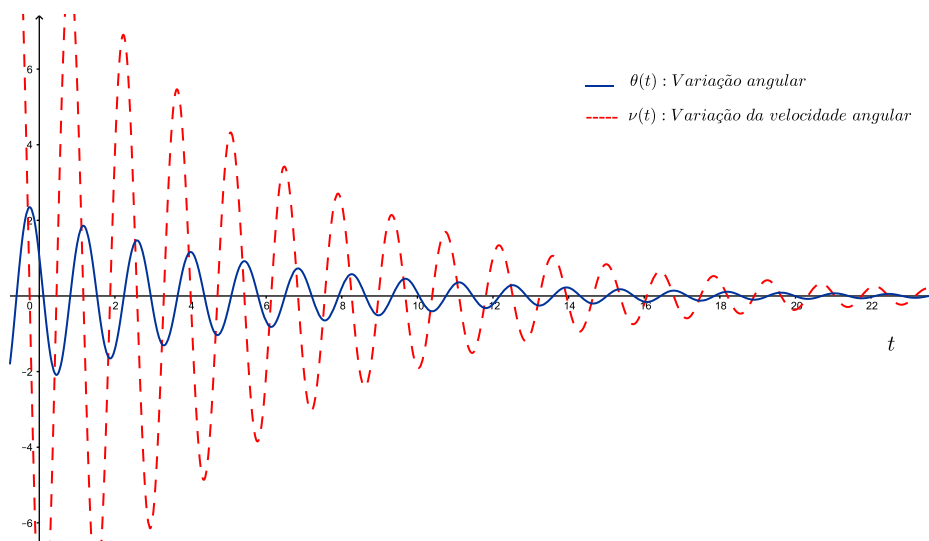


Figura 2.9: Gráfico que representa as variações do ângulo e da velocidade angular do pêndulo livre com amortecimento a partir das soluções (2.44).

□

Portanto, neste capítulo apresentamos alguns exemplos de aplicações de sistemas dinâmicos autônomos, tendo como objetivo principal, detalhar a construção da resolução de tais aplicações, além de analisar graficamente o comportamento desses sistemas por meio das soluções gerais obtidas.

3. Considerações Finais

Através do exposto nesta pesquisa, acerca dos sistemas dinâmicos autônomos, buscamos apresentar a teoria matemática que envolve esses sistemas de equações diferenciais ordinárias, além de resolver algumas aplicações dessa teoria de uma maneira mais simples e detalhada, do que a tratada na maioria dos livros. Um dos fatores que contribuíram para a construção deste trabalho, foi justamente a necessidade de se compreender essa teoria aplicada a problemas de modelagem matemática, de modo que no transcorrer do estudo podemos observar alguns casos de aplicações desses sistemas, além de analisar graficamente o comportamento dos mesmos em função do tempo.

A utilização de tais sistemas é muito frequente quando estamos trabalhando com sistemas de EDOs. Assim sendo, priorizamos descrever os procedimentos matemáticos que são necessários à resolução de problemas dessa natureza, enfatizando os principais teoremas e definições que regem essa teoria, buscando apresentar os caminhos que devem ser seguidos na resolução e análise qualitativa de algumas aplicações envolvendo sistemas dinâmicos autônomos lineares ou não-lineares.

Nos casos dos *problemas de mistura*, aqui tratados, foram descritos os procedimentos necessários à construção do sistema linear a partir de um dado problema, além de apresentado graficamente o comportamento de tais sistemas por meio de suas soluções gerais, fazendo para isso o uso do software matemático GeoGebra.

Já no *modelo Presa-Predador de Lotka-Volterra*, como o mesmo trata-se de um sistema não-linear, buscamos realizar uma análise qualitativa do seu comportamento localmente, a partir dos sistemas linearizados obtidos por meio dos pontos de equilíbrio do sistema não-linear. Para isso, foram empregadas algumas técnicas de linearização de sistemas dessa natureza, e em seguida foi construída a solução geral para o sistema não-linear na forma paramétrica, de modo que a partir da mesma construímos o gráfico que expressa as interações entre as populações de presas e predadores de acordo a evolução do tempo.

Por fim, tratamos um caso de pêndulo livre com amortecimento, de modo a explicitar as principais características desse modelo matemático descrito por um sistema não-linear de EDOs de primeira ordem. Além disso, apresentamos os seus possíveis com-

portamentos a partir da análise dos autovalores obtidos por meio do sistema linearizado construído tomando como referência a origem.

Portanto, o referido trabalho buscou contemplar de maneira integral os objetivos cunhados no início da pesquisa, primando sempre pelo detalhamento das informações apresentadas. Vale mencionar que, uma possível continuação deste estudo pode ser realizada fazendo-se uma análise acerca do comportamento de sistemas dinâmicos não-autônomos.

Referências Bibliográficas

- AGUIAR, M. A. M. *Sistemas Dinâmicos* - Unicamp, 2015. Disponível em: <<https://sites.ifi.unicamp.br/aguiar/files/2014/10/sistemas-dinamicos.pdf>>. Acesso em: 01 mar. 2019.
- BASSANEZI, R. C; FERREIRA JR, W. C. *Equações Diferenciais Ordinárias com Aplicações*. São Paulo: Harbra Ltda, 1988.
- BOYCE, W. E; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Tradução: IÓRIO, Valéria de Magalhães. 9ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- DUARTE, C. L. *Resolução de Sistemas Lineares de EDOs de Primeira Ordem por meio de Autovalores e Autovetores*. 2017. TCC (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras-PB.
- FIGUEIREDO, D. G; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 3ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- NAGLE, R. K; SAFF, E. B; SNIDER, A. D. *Equações Diferenciais*. Tradução: VIEIRA, Daniel. Revisão Técnica: BOTELHO, Marcos. A.NAGLE, R. K; SAFF 8ª Edição. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.
- SOTOMAYOR, J. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Coleção Textos Universitários do IME-USP. Volume 4. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- VILLATE, J. E. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma Abordagem Prática com Maxima*. ISBN: 972-99396-0-8. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2007. Disponível em: <<http://arquivoescolar.org/handle/arquivo-e/54>>. Acesso em: 14 mar. 2019.
- ZILL, D. G. *Equações Diferenciais: com Aplicações em Modelagem*. Tradução: FEDERICO, Heitor Honda; PATARRA, Cyro de Carvalho. Revisão Técnica: PEREIRA, Antônio Luiz; SILVA, Luiza Maria Oliveira da. São Paulo: Cengage Learning , 2011.
- ZILL, D. G; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. Volume 2. Tradução: FARIAS, Alfredo Alves de. Revisão Técnica: JÚNIOR, Antonio Pertence. 3ª Edição. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.