



**INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA  
CAMPUS CAJAZEIRAS  
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**WELITON IRIS DE SOUSA**

**O USO DO GEOGEBRA COMO FERRAMENTA  
PEDAGÓGICA NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA:  
RETA E CIRCUNFERÊNCIA DO ENSINO MÉDIO**

**CAJAZEIRAS - PB**

**2023**

WELITON IRIS DE SOUSA

**O USO DO GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA NO  
ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA: RETA E CIRCUNFERÊNCIA DO  
ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC apresentado junto ao **Curso de Especialização em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito parcial à obtenção do título de **Especialista em Matemática**.

**Orientador(a):**

Prof. Me. Francisco Airton Alves de Sousa

**CAJAZEIRAS - PB**

**2023**

IFPB / Campus Cajazeiras  
Coordenação de Biblioteca  
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva  
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S725u Sousa, Weliton Iris de.  
O uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica no ensino de geometria analítica : reta e circunferência do ensino médio / Weliton Iris de Sousa. – 2023.  
  
62f. : il.  
  
Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2023.  
  
Orientador(a): Prof. Me. Francisco Airton Alves de Sousa.  
  
1. Ensino de matemática. 2. Geometria analítica. 3. Software GeoGebra. 4. Metodologias de ensino. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

**WELITON IRIS DE SOUSA**

**O USO DO GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PEDAGÓGICA NO  
ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA: RETA E CIRCUNFERÊNCIA DO  
ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC apresentado junto ao  
Curso de Especialização em Matemática do Instituto  
Federal da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do  
título de Especialista em Matemática.

**Orientador(a):**

Prof. Me. Francisco Airton Alves de Sousa

**Data de aprovação:** 20/06/2023

**Banca Examinadora:**

*Francisco Airton Alves de Sousa*

**Prof(a). Me. Francisco Airton Alves de Sousa**  
Secretaria de Educação - PB

*Geraldo Herbert de Lacerda*

**Prof(a). Me. Geraldo Herbert de Lacerda**  
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

*Stanley Borges de Oliveira*

**Prof(a). Me. Stanley Borges de Oliveira**  
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

*Dedico aos meus pais e ao meu professor orientador Francisco Airton Alves de Sousa.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre me dar força em todos os momentos da minha vida, aos meus pais Francisco Severino de Sousa e Rosa Maria de Sousa pelo apoio em todo o percurso desta especialização.

Agradeço de forma especial ao meu professor orientador, Francisco Airton Alves de Sousa e ao meu professor coorientador Jackson Tavares, por todos os incentivos e orientações, sou muito grato por tudo.

Agradeço aos meus professores da especialização. Stanley Borges de Oliveira, Geraldo Herbetet de Lacerda e Leonardo Ferreira Soares por todo apoio dado ao longo deste Período de curso.

Agradeço a todos os meus colegas de curso pelo companheirismo e pela amizade sólida que construímos neste período da pós-graduação.

*“A imaginação é mais importante que o conhecimento, porque o conhecimento é limitado, ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro.”*

**Albert Einstein**, Do livro Sobre Religião  
Cósmica e Outras Opiniões e Aforismos,  
1931.

## RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma proposta metodológica com o uso do software matemático GeoGebra no ensino de Geometria Analítica, mais precisamente no estudo da Reta e da Circunferência. Deste modo, essa pesquisa tem como objetivo principal contribuir no ensino introduzindo o software GeoGebra como uma ferramenta didática para o professor de matemática utilizar em sala de aula. Este trabalho está organizado em quatro seções, sendo que, na primeira destacamos a definição do problema da pesquisa, os objetivos geral e específicos e os aspectos metodológicos. Na segunda seção expomos toda fundamentação teórica do trabalho com embasamento na respectiva proposta. Na terceira seção abordamos aplicações matemáticas e em seguida a construção geométrica de cada uma delas, utilizando-se do GeoGebra. E na quarta seção apresentamos a conclusão do trabalho, nesta discutimos a importância da tecnologia no ensino de Matemática, com ênfase no software Geogebra para o ensino de Geometria Analítica. Em termos gerais, essa pesquisa enfatiza o ensino da reta e da circunferência de forma que os alunos possam comparar a resolução matemática de uma situação-problema com sua construção gráfica e obterem um entendimento mais preciso.

**Palavras-chave:** GeoGebra; Estudo da Reta; Estudo da Circunferência.



## ABSTRACT

In this work we present a methodological proposal with the use of mathematical software GeoGebra in the teaching of Analytical Geometry, more precisely in the study of the Line and the Circumference. Thus, this research has as its main objective to contribute to teaching by introducing the GeoGebra software as a didactic tool for the mathematics teacher to use in the classroom. This work is organized in four sections, and in the first one we highlight the definition of the research problem, the general and specific objectives and the methodological aspects. In the second section we expose all the theoretical basis of the work based on the respective proposal. In third section we discuss mathematical applications and then the geometric construction of each one of them, using GeoGebra. And in the fourth section we present the conclusion of the work, in this, we discuss the importance of technology in the teaching of Mathematics, with emphasis on the GeoGebra software for the teaching of Analytical Geometry. In general terms, this research emphasizes teaching the Line and Circumference so that students can compare the mathematical resolution of a problem situation with its graphical construction and obtain a more accurate understanding.

**Keywords:** GeoGebra; Study of the Line; Circumference Study.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Janela de inicialização do GeoGebra . . . . .	21
Figura 2.2 – Geogebra: Recurso Exibir . . . . .	22
Figura 2.3 – Geogebra: Barras de Ferramentas . . . . .	22
Figura 2.4 – Coordenadas Cartesianas . . . . .	23
Figura 2.5 – Distância entre dois pontos: $AB // Ox$ . . . . .	24
Figura 2.6 – Distância entre dois pontos: $AB // Oy$ . . . . .	25
Figura 2.7 – Distância entre dois pontos: $AB \nparallel Ox$ e $AB \nparallel Oy$ . . . . .	25
Figura 2.8 – Coordenadas do ponto médio . . . . .	26
Figura 2.9 – Condição para alinhamento de três pontos . . . . .	29
Figura 2.10–Inclinação de $r$ com $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . . . . .	30
Figura 2.11–Inclinação de $r$ com $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . . . . .	30
Figura 2.12–Inclinação de $r$ com $\alpha = 90^\circ$ . . . . .	31
Figura 2.13–Inclinação da reta $r$ : $\alpha = 90^\circ$ . . . . .	31
Figura 2.14–Inclinação de $r$ com $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . . . . .	32
Figura 2.15–Inclinação de $r$ com $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . . . . .	32
Figura 2.16–Equação da reta conhecendo um ponto e a inclinação . . . . .	35
Figura 2.17–Posições relativas entre duas retas: $r \times s$ são concorrentes . . . . .	36
Figura 2.18–Posições relativas entre duas retas: $r \cap s = \emptyset$ . . . . .	36
Figura 2.19–Posições relativas entre duas retas: $r = s$ . . . . .	36
Figura 2.20–Retas paralelas . . . . .	38
Figura 2.21–Ângulo entre retas: $tg\theta_1 = \frac{1}{m_r}$ . . . . .	39
Figura 2.22–Ângulo entre retas: $tg\theta_1 = -\frac{1}{m_r}$ . . . . .	39
Figura 2.23–Ângulo entre retas: $tg\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$ . . . . .	40
Figura 2.24–Ângulo entre retas: $tg\theta = -\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$ . . . . .	41
Figura 2.25–Distância da origem do plano cartesiano a uma reta $d_{O,r}$ . . . . .	42
Figura 2.26–Circunferência $\lambda$ . . . . .	43
Figura 2.27– $P$ é exterior a $\lambda$ : $d_{P,C} > r$ . . . . .	44
Figura 2.28– $P$ pertence a $\lambda$ : $d_{P,C} = r$ . . . . .	45
Figura 2.29– $P$ é exterior a $\lambda$ : $d_{P,C} < r$ . . . . .	45
Figura 2.30–Posições relativas entre as retas $r, t$ e $s$ em a circunferência $\lambda$ . . . . .	46
Figura 2.31–As circunferências $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são exteriores . . . . .	47
Figura 2.32–As circunferências $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são tangentes exteriores . . . . .	48
Figura 2.33–As circunferências $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são tangentes interiormente . . . . .	48
Figura 2.34–As circunferências $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são secantes . . . . .	48
Figura 2.35–A circunferência de menor raio é interior à outra . . . . .	49

Figura 2.36—As circunferências $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são concêntricas . . . . .	49
Figura 3.1 – Representação no plano cartesiano . . . . .	51
Figura 3.2 – Triângulo formado pelos pontos $A = (-3,1)$ , $B = (0,2)$ e $C = (4,5)$ . . .	52
Figura 3.3 – Plano . . . . .	53
Figura 3.4 – Construção dos elementos de acordo com as regras do jogo . . . . .	55
Figura 3.5 – Construção geométrica da intersecção entre a reta e a circunferência . .	57
Figura 3.6 – Representação geométrica da corda . . . . .	59
Figura 3.7 – Construção geométrica para visualização do encontro de $A$ e $B$ . . . .	60
Figura 3.8 – Trapézio inscrito em uma circunferência . . . . .	61
Figura 3.9 – Construção geométrica para o cálculo do raio da circunferência . . . .	62

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>16</b>
1.1	Definição do Problema . . . . .	17
1.2	Objetivo Geral . . . . .	17
1.3	Objetivos Específicos . . . . .	17
1.4	Aspectos Metodológicos . . . . .	18
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .</b>	<b>20</b>
2.1	Geometria Analítica - Parte Histórica . . . . .	20
2.2	GeoGebra . . . . .	20
2.2.1	Apresentação do GeoGebra . . . . .	21
2.2.2	Barra de menus . . . . .	21
2.2.3	Barra de ferramentas . . . . .	22
2.3	Coordenadas cartesianas no plano . . . . .	22
2.3.1	Distância entre dois Pontos . . . . .	24
2.3.2	Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta . . . . .	26
2.3.3	Condição para alinhamento de três pontos . . . . .	27
2.3.4	Área do triângulo . . . . .	30
2.4	Estudo da reta . . . . .	30
2.4.1	Inclinação de uma reta . . . . .	30
2.4.2	Coefficiente angular de uma reta . . . . .	31
2.4.3	Equação Geral da Reta . . . . .	32
2.4.4	Equação da reta quando são conhecidos um ponto $P$ e o coeficiente angular $m$ da reta . . . . .	34
2.4.5	Equação Reduzida da Reta . . . . .	34
2.4.6	Interseção de Duas Retas . . . . .	35
2.4.7	Posições relativas de duas retas no plano cartesiano . . . . .	35

2.4.8	Condição de paralelismo . . . . .	38
2.4.9	Ângulo formado por duas retas . . . . .	39
2.4.10	Distância entre ponto e reta . . . . .	41
<b>2.5</b>	<b>Estudo da Circunferência . . . . .</b>	<b>43</b>
2.5.1	Equação Reduzida da Circunferência . . . . .	43
2.5.2	Equação Normal da Circunferência . . . . .	44
2.5.3	Ponto e Circunferência . . . . .	44
2.5.4	Reta e Circunferência . . . . .	44
2.5.5	Posição Relativa de Reta e Circunferência . . . . .	45
2.5.6	Interseção de Duas Circunferências . . . . .	46
2.5.7	Posições Relativas de Duas Circunferências . . . . .	47
<b>3</b>	<b>APLICAÇÕES . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>63</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>64</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A Geometria Analítica desde de Euclides com seus postulados e axiomas primitivos já fazia parte do desenvolvimento intelectual do homem e ao longo do tempo vem contribuindo para a resolução de diversos problemas do cotidiano das pessoas. Está presente nas diversas áreas de conhecimentos humano a exemplo na construção civil, arquitetura, astronomia e até mesmo nos diferentes formatos dos elementos geométricos que se pode encontrar na natureza.

Nesse trabalho intitulado “O uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica no ensino de Geometria Analítica: Reta e Circunferência do Ensino Médio”, pretendemos mostrar práticas de ensino voltados à despertar a curiosidade do aprender por parte dos alunos do ensino médio utilizando do software matemático Geogebra como ferramenta pedagógica motivadora. A Base Nacional Comum Curricular em uma de suas competências gerais retrata que

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p.9).

Nessa perspectiva utilizaremos do software para representar a percepção gráfica de construções planas das aplicações da Geometria Analítica vivenciadas pelo alunado do ensino médio, como questões adaptadas do Enem, vestibulares, concursos, artigos e livros, assim como, analisar e refleti-las.

As tecnologias digitais têm passado por profundas evoluções na contemporaneidade, observamos uma sociedade a cada dia que passa mais introduzida nesse contexto. Para (NUNES, 2012) se faz necessário inserção das Tecnologias da Informação e Comunicação em meio neste meio, já que os discentes estão em contato contínuo com as mesmas. A escola como parte formadora de jovens da educação básica tem o papel de tornar facilitadoras no ensino aprendizagem inovando a partir de metodologias que saem dos padrões formais de ensino que são lousa e pincel, assim como para fazer com que os alunos não se restrinja ao decorar fórmulas, e passem a construir o conhecimento. Essa novas práticas pedagógicas contribuem com o desenvolvimento das habilidades dos discentes. Uma das competências específicas de matemática e suas tecnologias da BNCC é:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p.531).

Deste modo, essa pesquisa visa contribuir com o ensino da Geometria Analítica, mais precisamente o estudo da Reta e Circunferência introduzido o software matemático GeoGebra como uma ferramenta didática para o professor utilizar em sala de aula.

## 1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A Geometria Analítica é um ramo da matemática que se ocupa em estudar conceitos e suas propriedades, representações algébricas e geométricas, a exemplo de equações, bem como as suas respectivas análises gráficas. Assim, as figuras geométricas podem ser construídas e analisadas por ferramentas tecnológicas e uma das mais conhecidas no campo da Matemática é o GeoGebra (aplicativo com janelas de álgebra e geometria que permite construir e manipular objetos matemáticos de modo dinâmico e interativo). Nessa perspectiva propomos uma abordagem do uso da ferramenta tecnológica GeoGebra direcionada ao ensino da Geometria Analítica, mais especificamente na abordagem da reta e da circunferência de modo a contribuir aos alunos um maior entendimento do tema a partir do seguinte questionamento: De que maneira o uso da ferramenta GeoGebra no ensino da reta e circunferência pode contribuir, através da visualização gráfica, para uma melhor compreensão dos conceitos abordados e nas resoluções de problemas, tornando-o um potencializador do ensino aprendizagem?

## 1.2 OBJETIVO GERAL

Contribuir para o ensino da Geometria Analítica usando o GeoGebra para construção e análises gráficas de aplicações que envolve conceitos de reta e circunferência amenizando as dificuldades de compreensão de cálculos em diversos tipos de situações-problema nessa parte da geometria e desse modo buscar potencializar o rendimento no processo de ensino/aprendizagem dos discentes.

## 1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Propor uma abordagem metodológica para o ensino da reta e da circunferência partindo da análise de construções geométricas fazendo uso da tecnologia;
- Abordar o Estudo da reta e da circunferência no plano cartesiano;

- Despertar para o uso do software matemático GeoGebra no ensino de Geometria Analítica;
- Utilizar aplicações da Geometria Analítica fazendo uso do software GeoGebra para construir as representações geométricas;

#### 1.4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Quanto a natureza de exposição do conteúdo explorado nesta pesquisa, desenvolvemos este trabalho através de uma perspectiva com caráter básico atribuindo um método exploratório, enfatizando o estudo da Geometria Analítica com a proposta de utilizar o GeoGebra como uma ferramenta pedagógica. Quanto aos procedimentos técnicos, abordaremos um cunho predominantemente bibliográfico, onde pretende-se abordar um procedimento que contribua com os métodos a serem trabalhados. Prodanov e Freitas (2019) afirmam que algumas etapas são essenciais para o desenvolvimento e dinamismo da pesquisa bibliográfica, são elas:

1. Do ponto de vista da sua natureza, a pesquisa básica objetiva gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência sem aplicação prática prevista. Envolve verdades e interesses universais; 2. Do ponto de vista de seus objetivos, a pesquisa exploratória ocorre quando, na fase preliminar, tem como finalidade proporcionar mais informações sobre o assunto que vamos investigar, possibilitando sua definição e seu delineamento. 3. Do ponto de vista dos procedimentos técnicos a pesquisa bibliográfica é quando elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de: livros, revistas, publicações em periódicos e artigos científicos, jornais, boletins, monografias, dissertações, teses, material cartográfico, internet, com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa (PRODANOV e FREITAS, 2013, p.51,54).

A estrutura deste trabalho está organizada da seguinte forma:

- Introdução
- fundamentação teórica;
- Aplicações;
- Conclusão



- Referências

Na introdução apresentamos a problematização, os objetivos geral e específicos e os aspectos metodológicos. Na fundamentação teórica será apresentado todo embasamento necessário do estudo da reta e circunferência. Nas aplicações abordamos situações-problema sobre o conteúdo exposto na fundamentação teórica utilizando o GeoGebra para construir e analisar as representações gráficas das mesmas. Nas considerações finais retomamos a problematização, destacamos a importância do software no processo de construções e análise gráfica, a importância da visualização geométrica para uma melhor compreensão da resolução de cada situação e a limitação do trabalho sugerindo uma proposta de continuidade da pesquisa.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção apresentamos todo um pressuposto teórico necessário para a construção da discussão deste trabalho. Iniciamos com uma nota histórica dos matemáticos Pierre de Fermat e René Descartes, abrangemos o GeoGebra como ferramenta pedagógica e apresentamos algumas definições da Geometria Analítica do estudo da reta e da circunferência com uma abordagem baseada no Ensino Médio. Desde já, destacamos que todos os conceitos e definições deste capítulo foram extraídos de livros, revistas, sites e artigos neste trabalho referenciados.

### 2.1 GEOMETRIA ANALÍTICA - PARTE HISTÓRICA

Vamos destacar um pouco da história de dois matemáticos que deixaram um legado imenso para estudo da Geometria Analítica, René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1596-1650).

As apreciações precedentes sobre a geometria analítica parecem confundir o assunto com um ou mais de seus aspectos. Mas a essência real desse campo da matemática reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente. Antes de a geometria analítica poder desempenhar plenamente esse papel, teve de esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial do assunto. Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens à geometria analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados. (EVES, 2011, p.383)

No entanto, podemos dizer que com muita maestria esses matemáticos deixaram um imenso legado com grandes contribuições para a matemática, em especial para a Geometria Analítica possibilitando conhecermos como ela é muito utilizada nos dias de hoje.

### 2.2 GEOGEBRA

O GeoGebra é um dos softwares matemáticos mais conhecidos da atualidade, com acesso livre através do site <https://www.geogebra.org/> que pode ser baixado e utilizado por qualquer pessoa. Segundo Friske

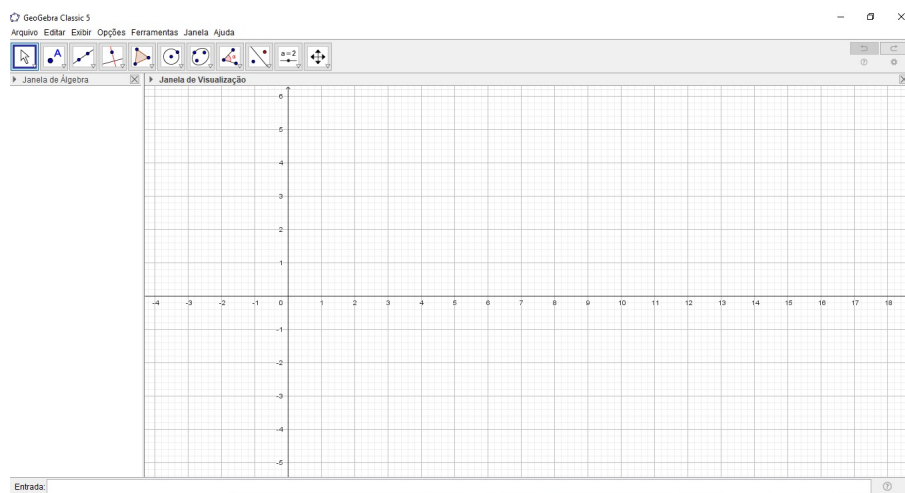
O software permite a construção de diversos objetos geométricos, como pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas; os quais podem ser modificados dinamicamente. Os valores e coordenadas podem ser introduzidas diretamente com o teclado, além da vantagem de podermos trabalhar utilizando variáveis vinculadas a números, vetores e pontos (FRISKE et al., 2016, p.5).

Desse modo o GeoGebra proporciona muitos recursos para ser utilizado dentro do campo da matemática. Mas neste trabalho optamos por explorar ferramentas que são úteis no estudo de Geometria Analítica.

### 2.2.1 Apresentação do GeoGebra

Ao inicializar a janela de entrada do GeoGebra conforme a Figura 2.1, podemos observar os seguintes recursos: A barra que contém as ferramentas, uma janela de apresentação da álgebra, uma janela de visualização, um campo de texto e o menu dos comandos e o menu dos símbolos. Vamos apresentar desses recursos citados os mais importantes para esta pesquisa.

**Figura 2.1 – Janela de inicialização do GeoGebra**



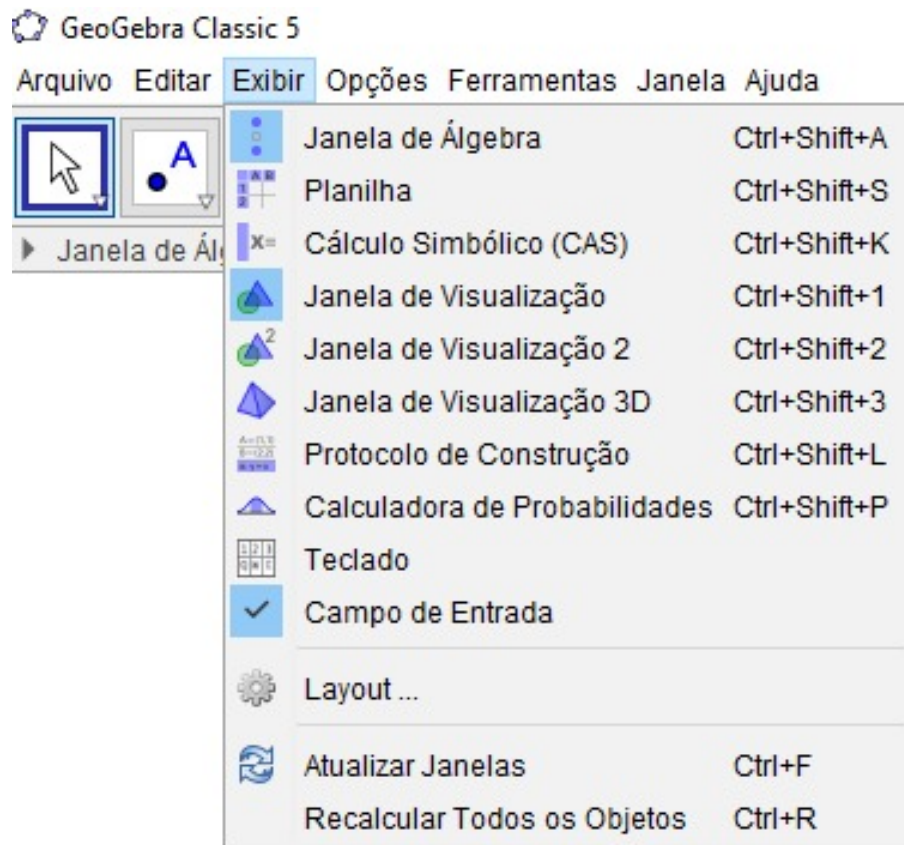
Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.2.2 Barra de menus

A barra de menus fica na parte superior do espaço gráfico, é composta pelos recursos: arquivo, editar, exibir, opções, ferramentas, janela e Ajuda.

Na barra de menus vamos destacar o recurso exibir, podemos a partir dele personalizar a interface do GeoGebra, podendo-se, por exemplo, exibir/esconder diferentes elementos da janela de visualização além conter várias outras ferramentas importantes para o programa, conforme a Figura 2.2 a seguir.

Figura 2.2 – Geogebra: Recurso Exibir



Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.2.3 Barra de ferramentas

Na barra de ferramentas apresentam 11 janelas conforme a Figura 2.3, na qual, cada uma delas possui várias ferramentas que facilitam na construção de diversos objetos matemáticos.

Figura 2.3 – Geogebra: Barras de Ferramentas



Fonte: Elaborada pelo autor

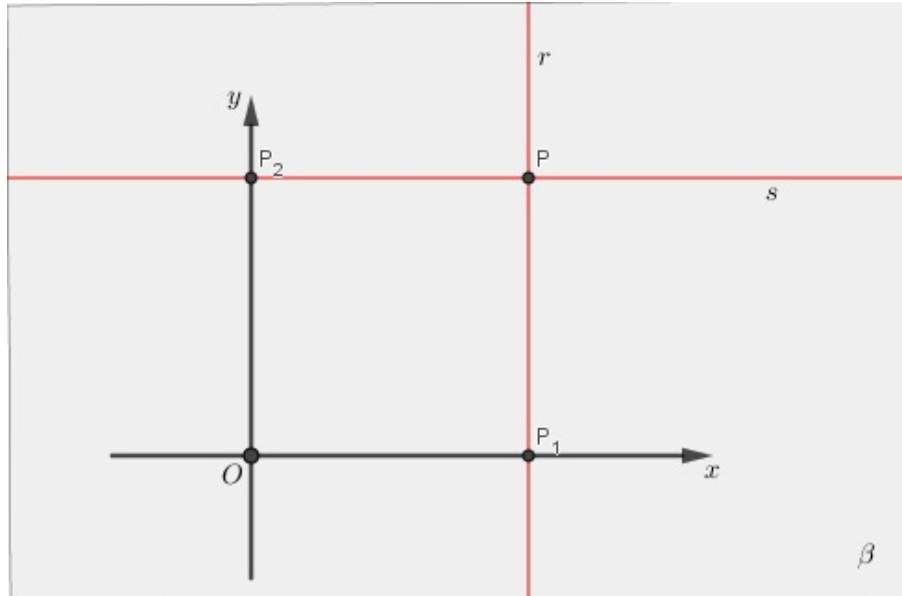
Vale salientar que esta abordagem do GeoGebra foi apenas uma amostra básica do software. Usaremos várias outras ferramentas não abordadas nesta seção.

## 2.3 COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO

Considerando dois eixos  $x$  e  $y$  perpendiculares em  $O$  que determinam o plano  $\beta$  e dado um ponto  $P$  qualquer, com  $P \in \beta$  conduzimos por ele duas retas:  $r // y$  e  $s // x$ :

Denominamos  $P_1$  a interseção de  $x$  com  $r$  e  $P_2$  a interseção de  $y$  com  $s$ . Nessas condições definimos:

**Figura 2.4 – Coordenadas Cartesianas**



Fonte: Elaborada pelo autor

- abscissa de  $P$  é o número real  $x_p = \overline{OP_1}$ .
- ordenada de  $P$  é o número real  $y_p = \overline{OP_2}$ .
- coordenadas de  $p$  são os números reais  $x_p$  e  $y_p$ , geralmente indicados na forma de um par ordenado  $(x_p, y_p)$ , em que  $x_p$  é o primeiro termo.
- eixo das abscissas é o eixo  $x$  ou  $Ox$ .
- eixo das ordenadas é o eixo  $y$  ou  $Oy$ .
- sistema de eixos cartesianos ortogonal ou retangular é o sistema  $xOy$ .
- origem do sistema é o ponto  $O(0,0)$ .
- plano  $\beta$  é o plano cartesiano.

**Teorema 2.3.1** *Entre o conjunto dos pontos  $P$  do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados  $(x_p, y_p)$  de números reais existe uma correspondência biunívoca.*

**Demonstração.**

1ª parte: Pelas coordenadas cartesianas apresentadas temos que a todo ponto  $P$ , com  $P \in \beta$  corresponde a um único par de pontos  $(P_1, P_2)$  sobre os eixos  $x$  e  $y$  respectivamente e, portanto um único par ordenado de números reais  $(x_p, y_p)$  tais que  $x_p = \overline{OP_1}$  e  $y_p = \overline{OP_2}$ .

Notação:  $P \implies (P_1, P_2) \implies (x_p, y_p)$

2ª parte: Dado o par ordenado de números reais  $(x_p, y_p)$ , existem  $P_1 \in x$  e  $P_2 \in y$  tais que  $\overline{OP_1} = x_p$  e  $\overline{OP_2} = y_p$ .

Considerando, por construção,  $r//x$  por  $P_2$  e  $s//y$  por  $P_1$ , Essas retas vão concorrer em  $P$ . Assim, para todo par  $(x_p, y_p)$  corresponde a um único ponto  $P$ , com  $P \in \beta$ .

Notação:  $(x_p, y_p) \implies (P_1, P_2) \implies P$  ■

### 2.3.1 Distância entre dois Pontos

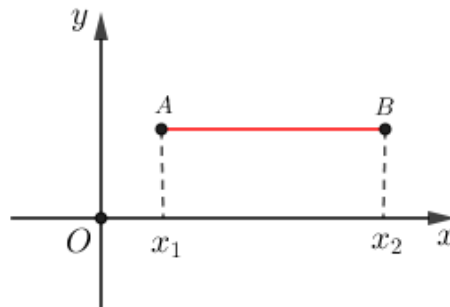
**Definição 2.3.1** Fixado uma unidade de comprimento a cada par  $A$  e  $B$  corresponde a um número real, denominado **distância** entre os pontos  $A$  e  $B$  ou **comprimento** do segmento  $AB$ .

Notação:  $d_{A,B}$

Dados dois pontos  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$  calculemos a distância  $d_{A,B}$  entre eles.

**1º caso:** Se  $AB//Ox$ , então  $d_{A,B} = |x_2 - x_1|$ . Geometricamente podemos observar na Figura 2.5

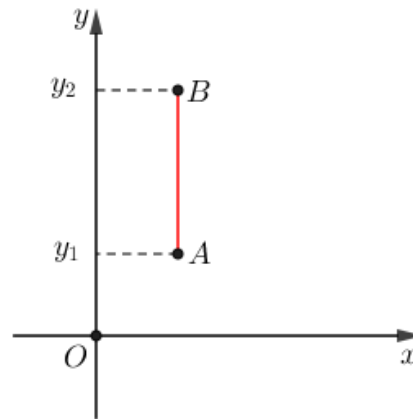
**Figura 2.5 – Distância entre dois pontos:  $AB//Ox$**



Fonte: Elaborada pelo autor

**2º caso:** Se  $AB \parallel Oy$ , então  $d_{A,B} = |y_2 - y_1|$ . Geometricamente podemos observar na Figura 2.6

**Figura 2.6 – Distância entre dois pontos:  $AB \parallel Oy$**



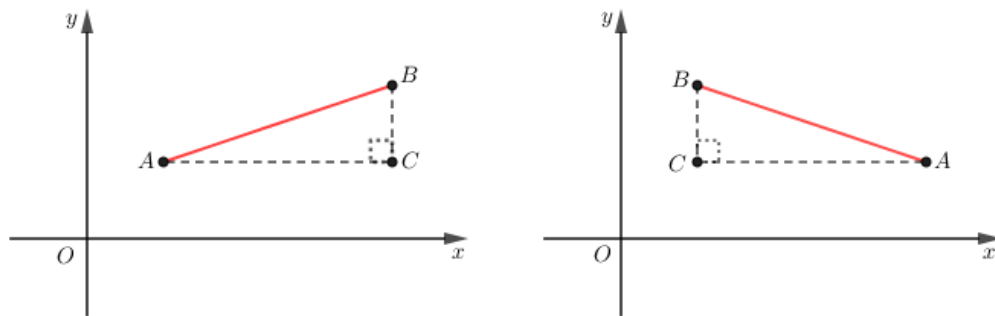
Fonte: Elaborada pelo autor

**3º caso:** Se  $AB \not\parallel Ox$  e  $AB \not\parallel Oy$  e  $C(x_3, y_3)$  um ponto tal que

$$\begin{cases} AC \parallel Ox \implies y_3 = y_1 \\ BC \parallel Oy \implies x_3 = x_2 \end{cases}$$

Geometricamente temos em 2.7

**Figura 2.7 – Distância entre dois pontos:  $AB \not\parallel Ox$  e  $AB \not\parallel Oy$**



Fonte: Elaborada pelo autor

De acordo com os casos iniciais, temos

$$d_{A,C} = |x_3 - x_1| = |x_2 - x_1|$$

$$d_{B,C} = |y_2 - y_3| = |y_2 - y_1|$$

Os segmentos de comprimentos  $d_{A,B}$ ,  $d_{B,C}$ , e  $d_{A,C}$  forma um triângulo retângulo, conforme 2.7. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo  $ABC$ , temos que a distância

entre os pontos  $A$  e  $B$  é dada por

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

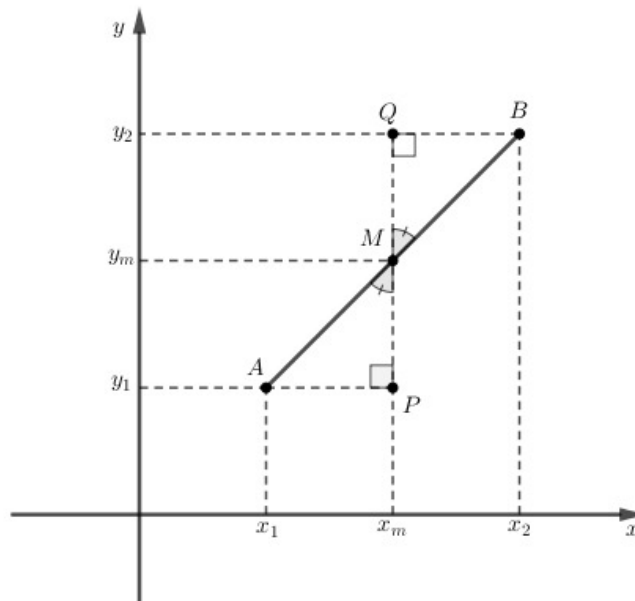
### 2.3.2 Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Dado um segmento de reta de comprimento  $AB$  tal que  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$  são pontos distintos no plano cartesiano, vamos determinar as coordenadas do ponto médio  $M$  de  $AB$ .

Considere:

- um segmento com extremidades nos pontos  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ .
- $M(x_m, y_m)$  o ponto médio do segmento  $AB$ .

Figura 2.8 – Coordenadas do ponto médio



Fonte: Elaborada pelo autor

Os triângulos  $APM$  e  $BQM$  são semelhantes pelo caso  $AAL$ . Sendo  $M(x_m, y_m)$  o ponto médio de  $AB$ . Por semelhança de triângulos, temos que

$$\begin{aligned} d_{A,P} &= d_{Q,B} \\ |x_m - x_1| &= |x_2 - x_m| \\ x_m &= \frac{x_1 + x_2}{2} \end{aligned}$$



Temos também que

$$\begin{aligned}d_{P,M} &= d_{M,Q} \\ |y_m - y_1| &= |y_2 - y_m| \\ y_m &= \frac{y_1 + y_2}{2}\end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que o ponto médio:

- é a média aritmética das abscissas das extremidades.
- é a média aritmética das ordenadas das extremidades.

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

### 2.3.3 Condição para alinhamento de três pontos

A condição de alinhamento de três pontos nos permite verificar a colinearidade deles. Assim, dizemos que os pontos são colineares se eles estão alinhados, isto é, existe uma reta que passa por esses três pontos.

Veja mais sobre "Condição de alinhamento de três pontos" em: <https://brasilecola.uol.com.br/n/alinhamento-tres-pontos-2.htm>

**Teorema 2.3.2** *Três pontos  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $C(x_3, y_3)$  são colineares se, e somente se, suas coordenadas verificam a igualdade:*

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$$

**Demonstração.**

**1ª parte:** Se  $A, B, C$  são colineares então  $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$

Temos três situações:

**Primeira situação:** dois pontos coincidem. Suponha ( $A = B$ ) Neste caso  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$  decorre que:

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) &= 0 \cdot (y_3 - y_2) = 0 \\ (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) &= (x_3 - x_2) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

**Segunda situação:** Três pontos distintos que pertencem a uma reta paralela a um dos eixos do plano cartesiano.

- Paralela ao eixo  $x$ . Isto é,  $y_1 = y_2 = y_3$

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_2 - x_1) \cdot 0 = 0$$

$$(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = (x_3 - x_2) \cdot 0 = 0$$

- Paralela ao eixo  $y$ . Isto é,  $x_1 = x_2 = x_3$

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0 \cdot (y_3 - y_2) = 0$$

$$(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = 0 \cdot (y_2 - y_1) = 0$$

**Terceira situação:** três pontos distintos pertencente a uma mesma reta não paralela aos eixos do plano cartesiano.

Nesta situação, seja  $r$  a razão  $\frac{AB}{BC}$ . Assim:

$$r = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \text{ e } r = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} \implies \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} \text{ que decorre em:}$$

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$$

**2ª parte:** Se  $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$  então  $A, B, C$  são colineares.

Temos três situações:

**Primeira situação:**  $x_3 - x_2 = 0 \implies x_2 = x_3$

Nesta situação, a hipótese passa a ser  $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0$  assim:

$$x_2 - x_1 = 0 \text{ ou } y_3 - y_2 = 0$$

Se  $x_2 - x_1 = 0$  temos que  $x_1 = x_2 = x_3$  daí  $A, B, C$  são colineares por pertencerem à mesma reta paralela ao eixo  $y$ .

Se  $y_3 - y_2 = 0$ , temos que  $y_2 = y_3$  e  $x_2 = x_3$  daí  $A, B, C$  são colineares pois  $B$  e  $C$  são coincidentes.

**Segunda situação:**  $y_2 - y_1 = 0 \implies y_1 = y_2$

Nesta situação, a hipótese passa a ser  $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = 0$  assim:

$$x_2 - x_1 = 0 \text{ ou } y_3 - y_2 = 0$$

Se  $x_2 - x_1 = 0$ , temos que  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$  daí  $A, B, C$  ficam colineares porque  $A$  e  $C$  coincidem.

Se  $y_3 - y_2 = 0$  temos que  $y_3 = y_2 = y_1$  daí  $A, B, C$  são colineares por pertencerem à mesma reta paralela ao eixo  $x$ .

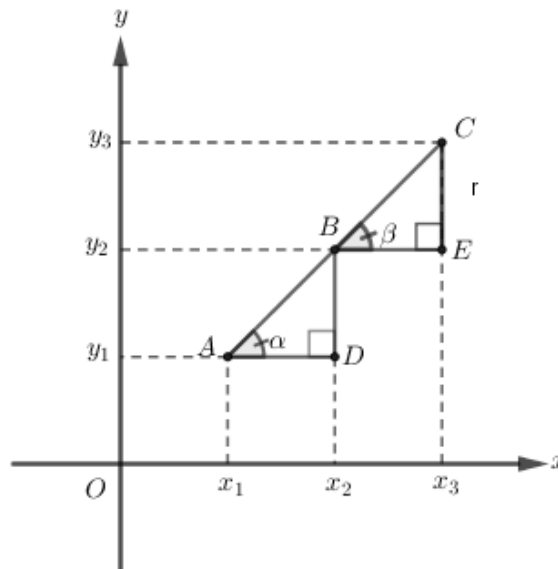
**Terceira situação:** se  $x_3 - x_2 \neq 0$  ou  $y_2 - y_1 \neq 0$ . Nesta hipótese passa a ser:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) \neq 0$$

Assim vem que:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

**Figura 2.9 – Condição para alinhamento de três pontos**



Fonte: Elaborada pelo autor

Da Figura 2.9 os triângulos  $ABD$  e  $BCE$  são retângulos e possui lados proporcionais, conseqüentemente são semelhantes. Desse modo temos que  $\alpha = \beta$  portanto os pontos  $A, B, C$  estão alinhados.

Note que

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$$

$$x_2y_3 - x_2y_2 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_3y_2 + x_3y_1 + x_2y_2 - x_2y_1 = 0$$

O que resulta em

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

■

### 2.3.4 Área do triângulo

Vejamos como calcular a área de um triângulo quando são conhecidas os seus vértices.

Sejam os pontos  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $C(x_3, y_3)$ , vértices de um triângulo, então a área dessa região triangular é dada por:

$$S = \frac{1}{2}|D|$$

em que

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Observe que este determinante é o mesmo que foi usado para calcular alinhamento entre três pontos.

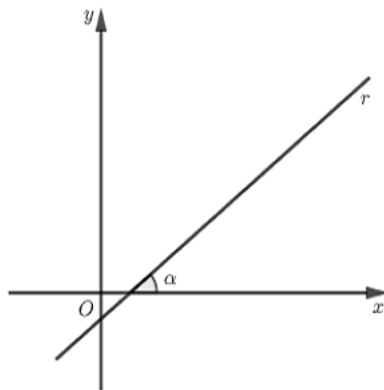
## 2.4 ESTUDO DA RETA

### 2.4.1 Inclinação de uma reta

Seja  $\alpha$  a medida do ângulo que a reta  $r$  forma com o eixo das abscissas. A medida  $\alpha$  do ângulo é considerada do eixo  $x$  para a reta  $r$ , no sentido anti-horário, e denomina-se inclinação da reta  $r$ .

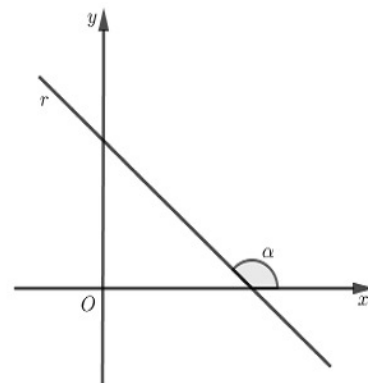
Quanto à inclinação de retas não paralelas ao eixo das abscissas, podemos ter:

**Figura 2.10 – Inclinação de  $r$  com**  
 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



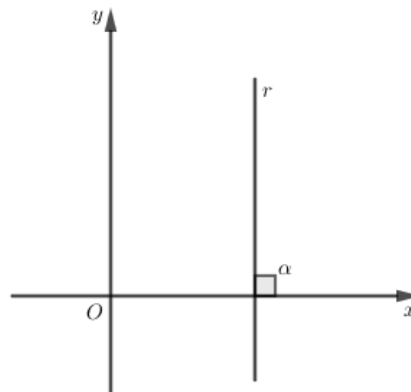
Fonte: Elaborada pelo autor

**Figura 2.11 – Inclinação de  $r$  com**  
 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

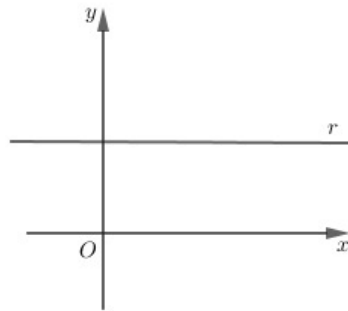


Fonte: Elaborada pelo autor

Se a reta  $r$  é paralela ao eixo  $x$ , dizemos que sua inclinação é zero, ou seja,  $\alpha = 0^\circ$ .

**Figura 2.12 – Inclinação de  $r$  com  $\alpha = 90^\circ$** 

Fonte: Elaborada pelo autor

**Figura 2.13 – Inclinação da reta  $r$ :  $\alpha = 90^\circ$** 

Fonte: Elaborada pelo autor

#### 2.4.2 Coeficiente angular de uma reta

Considerando uma reta  $r$  de inclinação  $\alpha$  em relação ao eixo das abscissas. O coeficiente angular ou a declividade dessa reta  $r$  é o número real  $m$  que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação  $\alpha$ , ou seja:

$$m = \operatorname{tg}\alpha$$

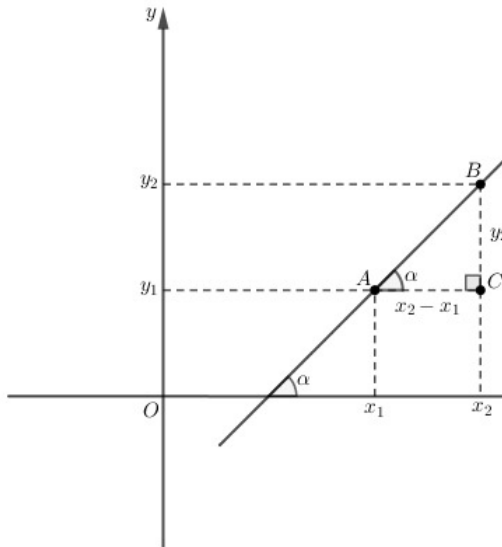
Considerando  $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ , temos que, com  $\alpha = 0$ , conforme Figura 2.13,  $m = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}0^\circ = 0$  e com  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , como mostrado na Figura 2.10, temos  $\operatorname{tg}\alpha > 0 \implies m > 0$ . Para  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , como mostra a Figura 2.11, temos que  $\operatorname{tg}\alpha < 0 \implies m < 0$  e ainda com  $\alpha = 90^\circ$ , a  $\operatorname{tg}\alpha$  não é definida. A Figura 2.12 mostra essa situação. Para Dante(2010), quando a reta é vertical, ela não têm declividade.

Analisaremos também que é possível calcular o coeficiente angular de uma reta conhecendo as coordenadas de dois de seus pontos.

Seja  $r$  uma reta determinada por  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ , seja também  $C(x_2, y_1)$ , um ponto tal que  $ABC$  forme um triângulo retângulo com ângulo reto em  $C$ . Na Figura

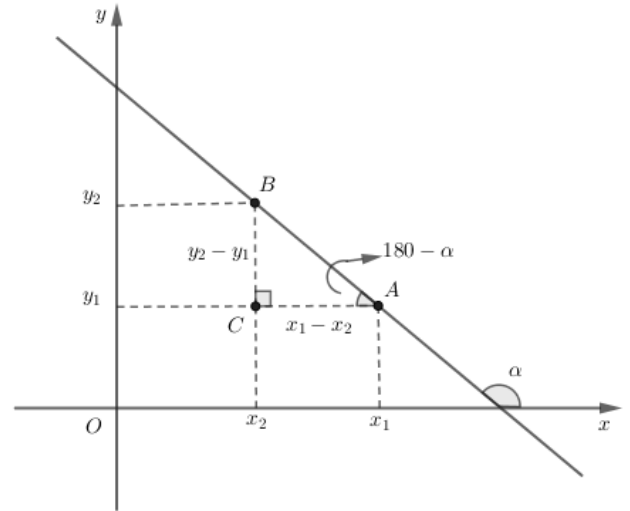
2.14 observamos o caso em que  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

**Figura 2.14 – Inclinação de  $r$  com**  
 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



Fonte: Elaborada pelo autor

**Figura 2.15 – Inclinação de  $r$  com**  
 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$



Fonte: Elaborada pelo autor

Daí

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Na Figura 2.15 observamos o caso em que  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  Daí

$$\begin{aligned} m &= \operatorname{tg}(180 - \alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \\ m &= -\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{-(x_1 - x_2)} \\ m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Temos então que  $x_1 \neq x_2$ , para que  $r$  não seja paralela ao eixo  $y$ , e assim o coeficiente angular pode ser definido. No caso em que  $r$  é paralela ao eixo  $x$ , temos que  $m = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$ . Já sendo  $r$  paralela ao eixo  $y$ , o coeficiente angular não é definido.

### 2.4.3 Equação Geral da Reta

**Teorema 2.4.1** *A toda reta  $r$  do plano cartesiano está associada ao menos uma equação da forma  $ax + by + c = 0$  em que  $a, b, c$  são números reais,  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ , e  $(x, y)$  representa um ponto genérico de  $r$ .*

**Demonstração.** Sejam dois pontos  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$  distintos do plano cartesiano, com  $x_1, y_1, x_2, y_2$ , números reais conhecidos.

Seja  $r$  a reta definida pelos pontos  $A$  e  $B$ . Se  $P(x, y)$  é um ponto que percorre  $r$ , então  $x$  e  $y$  são variáveis. Como  $A, B$  e  $P$  são colineares, temos necessariamente:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Pela regra de Laplace, temos:

$$x \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Tomando  $a = y_1 - y_2$ ,  $b = x_2 - x_1 = b$  e  $c = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ , sucede que para todo ponto  $P$  pertencente a  $r$  deve verificar a equação  $ax + by + c = 0$ .

Portanto, para qualquer reta, independente de sua posição no plano cartesiano possui equação geral. Observe que a mesma reta pode admitir infinitas equações gerais, basta considerar  $A'(x'_1, y'_2)$  e  $B'(x'_2, y'_2)$  para definimos  $r$ , com  $A' \neq A$  e  $B' \neq B$

■

**Teorema 2.4.2** *A toda equação da forma  $ax + by + c = 0$ , com  $a, b, c \in R$ ,  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ , está associada uma única reta  $r$  do plano cartesiano cujos pontos  $P(x, y)$  são soluções da equação dada.*

**Demonstração.** Dados três pontos  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  e  $P_3(x_3, y_3)$ , pontos distintos dois a dois de modo que satisfazem a equação dada. Assim temos:

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \implies ax_1 = -by_1 - c \implies x_1 = \frac{-by_1 - c}{a}$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0 \implies ax_2 = -by_2 - c \implies x_2 = \frac{-by_2 - c}{a}$$

$$ax_3 + by_3 + c = 0 \implies ax_3 = -by_3 - c \implies x_3 = \frac{-by_3 - c}{a}$$

Temos ainda:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = \frac{(-by_2 - c) - (-by_1 - c)}{a} \cdot (y_3 - y_2) = \frac{b(y_1 - y_2)(y_3 - y_2)}{a}$$

$$(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = \frac{(-by_3 - c) - (-by_2 - c)}{a} \cdot (y_2 - y_1) = \frac{b(y_2 - y_3)(y_2 - y_1)}{a}.$$

Logo  $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$ , portanto  $P_1, P_2, P_3$  são colineares.

Dados três pontos  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  e  $P_3(x_3, y_3)$  três pontos distintos dois a dois de modo que satisfazem a equação dada. Assim temos:

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \implies ax_1 = -by_1 - c \implies x_1 = \frac{-by_1 - c}{a}$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0 \implies ax_2 = -by_2 - c \implies x_2 = \frac{-by_2 - c}{a}$$

$$ax_3 + by_3 + c = 0 \implies ax_3 = -by_3 - c \implies x_3 = \frac{-by_3 - c}{a}$$

Temos ainda:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = \frac{(-by_2 - c) - (-by_1 - c)}{a} \cdot (y_3 - y_2) = \frac{b(y_1 - y_2)(y_3 - y_2)}{a}$$

$$(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = \frac{(-by_3 - c) - (-by_2 - c)}{a} \cdot (y_2 - y_1) = \frac{b(y_2 - y_3)(y_2 - y_1)}{a}.$$

Logo  $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)$ , portanto  $P_1, P_2, P_3$  são colineares.

Fica assim provado que para qualquer ponto  $P_3$  variável, que satisfaz a condição  $ax + by + c = 0$ , pertence necessariamente  $\overleftrightarrow{P_1P_2}$  que é única.

■

#### 2.4.4 Equação da reta quando são conhecidos um ponto $P$ e o coeficiente angular $m$ da reta

Já definimos que dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por esses dois pontos. Podemos também determinar o **coeficiente angular  $m$**  de uma reta  $r$  conhecendo um ponto  $P_0(x_0, y_0)$  e um ponto genérico  $P(x, y)$ , que será chamada equação da reta  $r$ .

Considerando um ponto  $P(x, y)$  qualquer pertencente a reta e  $tg\alpha = m$ , temos:

$$tg\alpha = \frac{d(C, P)}{d(P_0, C)} \implies m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \implies y - y_0 = m(x - x_0)$$

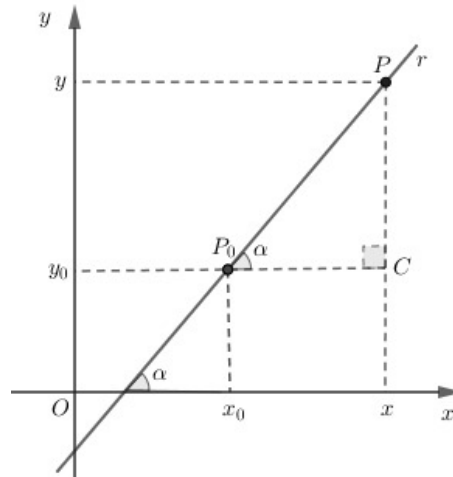
#### 2.4.5 Equação Reduzida da Reta

Já definimos que a equação da reta que passa por um ponto  $P(x_0, y_0)$  com coeficiente angular  $m$  é dado por:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



Figura 2.16 – Equação da reta conhecendo um ponto e a inclinação



Fonte: Elaborada pelo autor

Escolhendo um ponto particular  $P_1(0, n)$ , ou seja, o ponto que intersecta o eixo  $y$  em  $y = n$ , para ponto  $P_2(x_2, y_2)$ , pela equação anterior temos:

$$y - n = m(x - 0)$$

$$y - n = mx$$

$$y = mx + n$$

Temos ainda que o número real  $n$  que é a ordenada do ponto  $P_1(0, n)$  em que a reta intersecta o eixo  $y$ , é chamado **coeficiente linear** da reta que chamaremos de  $r$ .

#### 2.4.6 Interseção de Duas Retas

Todo ponto de interseção de duas retas tem que ser solução para ambas as retas. Portanto para verificar se o ponto  $P(x_0, y_0)$  é comum a duas retas, basta resolver o sistema formado por suas equações:

$$\begin{cases} r : a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0 \\ s : a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0 \end{cases}$$

#### 2.4.7 Posições relativas de duas retas no plano cartesiano

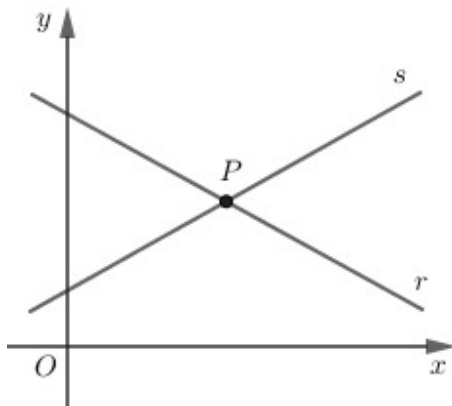
Sejam duas retas  $r$  e  $s$  que formam o sistema de equações.

$$\begin{cases} r : a_1x + b_1y = c_1 \\ s : a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

elas podem ocupar três posições relativas no plano cartesiano e podemos definir essas posições com base no número de pontos comuns às retas da seguinte forma:

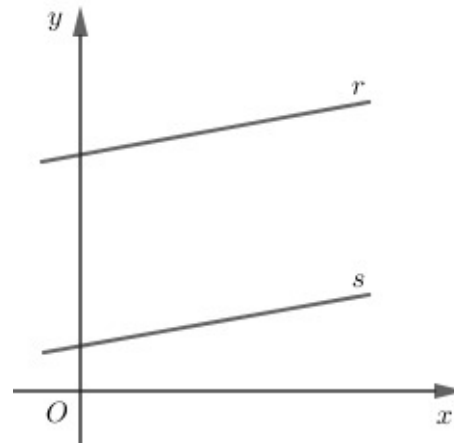
- $r$  e  $s$  são concorrentes se e somente se possuir um único ponto em comum (Figura 2.17).
- $r$  e  $s$  são paralelas e distintas se e somente se não tiver nenhum ponto em comum (Figura 2.18).
- $r$  e  $s$  são coincidentes se e somente se tiver infinitos pontos em comum (Figura 2.19).

**Figura 2.17 – Posições relativas entre duas retas:  $r \times s$  são concorrentes**



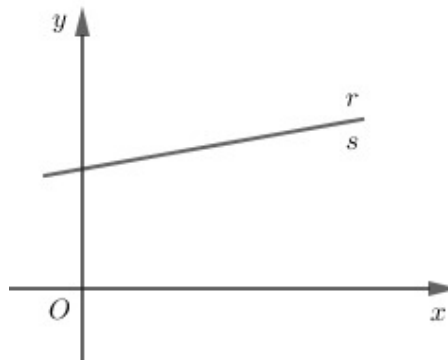
Fonte: Elaborada pelo autor

**Figura 2.18 – Posições relativas entre duas retas:  $r \cap s = \emptyset$**



Fonte: Elaborada pelo autor

**Figura 2.19 – Posições relativas entre duas retas:  $r = s$**



Fonte: Elaborada pelo autor

Com o símbolo  $r \times s$  indicaremos que  $r$  e  $s$  são concorrentes; com  $r \cap s = \emptyset$ , indicaremos que  $r$  e  $s$  são paralelas distintas;  $r = s$  indicaremos que  $r$  e  $s$  são paralelas coincidentes. Notemos que  $r \parallel s$  significa  $r \cap s = \emptyset$  ou  $r = s$ .

Todo ponto comum a  $r$  e  $s$  é solução do sistema de equação. Resolvendo pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

Da Equação 1, multiplicamos a primeira equação por  $b_2$  e a segunda por  $-b_1$  teremos:

$$\begin{cases} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ -a_2 b_1 x - b_1 b_2 y = -c_2 b_1 \end{cases}$$

resultando em

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)x = (c_1 b_2 - c_2 b_1)$$

Também da Equação 1, multiplicamos a primeira equação por  $-a_2$  e a segunda por  $a_1$  teremos:

$$\begin{cases} -a_1 a_2 x - b_1 a_2 y = -c_1 a_2 \\ a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2 \end{cases}$$

resultando em

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)y = (a_1 c_2 - a_2 c_1)$$

Onde teremos

$$\begin{aligned} a_1 b_2 - a_2 b_1 &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D \\ c_1 b_2 - c_2 b_1 &= \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_1 \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 &= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_2 \end{aligned}$$

O sistema que resolvemos fica reduzido a:

$$\begin{cases} D \cdot x = D_1 \\ D \cdot y = D_2 \end{cases}$$

com discussão imediata.

São possíveis três casos:

**1º caso:**  $D \neq 0 \iff$  o sistema tem uma única solução  $\iff r \times s$ .

**2º caso:**  $\begin{cases} D = 0 \\ D_1 \text{ ou } D_2 \neq 0 \end{cases} \iff$  o sistema não têm solução  $\iff r \cap s = \emptyset$ .

**3º caso:**  $\begin{cases} D = 0 \\ D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{cases} \iff$  o sistema têm infinitas soluções  $\iff r = s$ .

Quando  $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$  e  $c_2 \neq 0$ , temos:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \iff a_1 b_2 = a_2 b_1 \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \iff c_1 b_2 = c_2 b_1 \iff \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \iff a_1 c_2 = a_2 c_1 \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Em resumo temos:

$$r \times s \iff \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

$$r \cap s = \emptyset \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

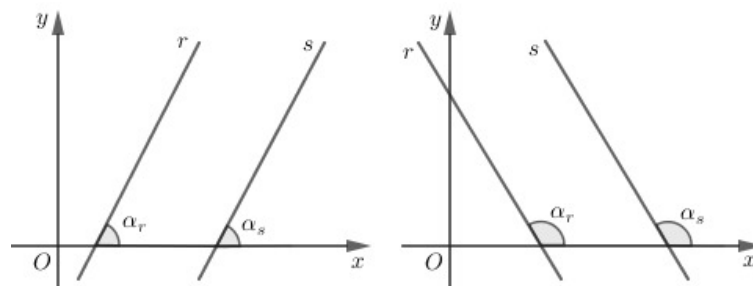
$$r = s \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

#### 2.4.8 Condição de paralelismo

**Teorema 2.4.3** *Duas retas  $r$  e  $s$ , não verticais, são paralelas entre si se, e somente se, seus coeficientes angulares  $m_r$  e  $m_s$  são iguais, isto é,  $r \parallel s \iff m_r = m_s$*

**Demonstração.** Observando a Figura 2.20 abaixo  $r \parallel s \iff \alpha_r = \alpha_s \iff tg\alpha_r = tg\alpha_s \iff m_r = m_s$

Figura 2.20 – Retas paralelas



Fonte: Elaborada pelo autor

Já definimos que duas retas  $r : a_1x + b_1y + c_1 = 0$  e  $s : a_2x + b_2y + c_2 = 0$  são paralelas distintas ou não se, e somente se,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Nos casos em que  $r$  e  $s$  não são verticais, vamos provar que as condições de paralelismo  $D = 0$  e  $m_r = m_s$  são equivalentes. Além disso devemos lembrar que  $b_1 \neq 0$  e  $b_2 \neq 0$ , temos:

$$D = 0 \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \iff a_1 b_2 = a_2 b_1 \iff \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \iff m_r = m_s \quad \blacksquare$$

Já nos casos em que  $r \parallel s \parallel Oy$  só existe a condição  $D = 0$  e portanto não existem os coeficientes angulares  $m_r$  e  $m_s$ .

#### 2.4.9 Ângulo formado por duas retas

Sejam duas retas  $r : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$  e  $s : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ , vamos calcular os ângulos que elas o determinam. Quando duas retas são concorrentes, elas determinam quatro ângulos, opostos pelo vértice dois a dois e congruentes.

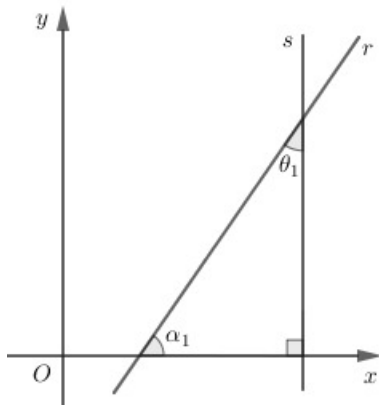
Calculemos  $\theta_1$ , ângulo formado por  $r$  e  $s$ . Temos dois casos:

**1º caso:** uma das retas é perpendicular ao eixo  $x$ .

Pela Figura 2.21 temos que  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$

Figura 2.21 – Ângulo entre retas:

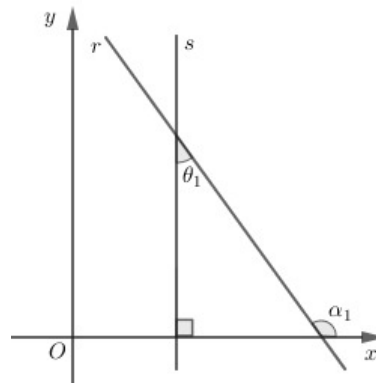
$$tg\theta_1 = \frac{1}{m_r}$$



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 2.22 – Ângulo entre retas:

$$tg\theta_1 = -\frac{1}{m_r}$$



Fonte: Elaborada pelo autor

dai

$$\begin{aligned} tg\theta_1 &= tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) \\ tg\theta_1 &= cotg\alpha_1 \\ tg\theta_1 &= \frac{1}{m_r} \end{aligned} \quad (2)$$

Conforme a Figura 2.22,  $\theta_1 = \alpha_1 - \frac{\pi}{2}$

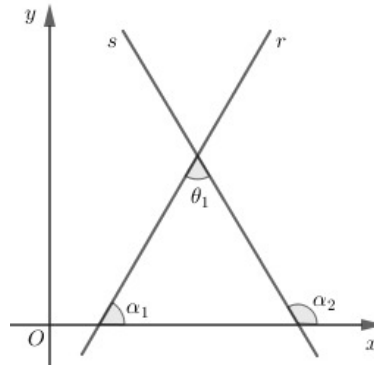
$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta_1 &= \operatorname{tg}\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{tg}\theta_1 &= -\operatorname{cotg}\alpha_1 \\ \operatorname{tg}\theta_1 &= -\frac{1}{m_r} \end{aligned} \quad (3)$$

Das equações 2 e 3 temos que  $\operatorname{tg}\theta_1 = \left|\frac{1}{m_r}\right|$

**2º caso:** Nenhuma das retas é perpendicular ao eixo  $x$

Observando a Figura 2.23 temos que  $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$ , logo

**Figura 2.23 – Ângulo entre retas:**  $\operatorname{tg}\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$



Fonte: Elaborada pelo autor

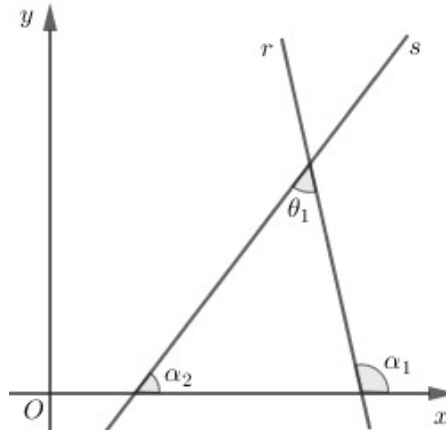
$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \end{aligned} \quad (4)$$

Já conforme a Figura 2.24,  $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} \\ \operatorname{tg}\theta &= -\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \end{aligned} \quad (5)$$

Das equações 4 e 5 temos que  $\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}\right|$

Figura 2.24 – Ângulo entre retas:  $\operatorname{tg}\theta = -\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$



Fonte: Elaborada pelo autor

#### 2.4.10 Distância entre ponto e reta

**Definição 2.4.1** Dados um ponto  $P$  e uma reta  $r$  no plano, já sabemos calcular a distância de  $P$  a cada ponto  $P' \in r$ . Definimos a distância,  $d(P,r)$ , do ponto  $P$  à reta  $r$  como a menor distância de  $P$  ao ponto  $P'$ .

**Teorema 2.4.4** Sejam  $r : ax + by + c = 0$  uma reta e  $P(x_0, y_0)$  um ponto no plano. Então

$$d_{P,r} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

**Demonstração.** Se  $P \in r$ , então as coordenadas de  $P$  satisfazem a equação de  $r$ , ou seja,  $ax_0 + by_0 + c = 0$ , e, portanto,

$$\begin{aligned} d_{P,r} &= \frac{0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ P,r &= 0 \end{aligned}$$

e o Teorema está provado neste caso.

Suponhamos agora que  $P \notin r$ . Vamos mostrar inicialmente um caso que se remete a encontrar a distância entre a origem  $O(0,0)$  do plano cartesiano e a reta  $r$  cuja equação geral é dada por

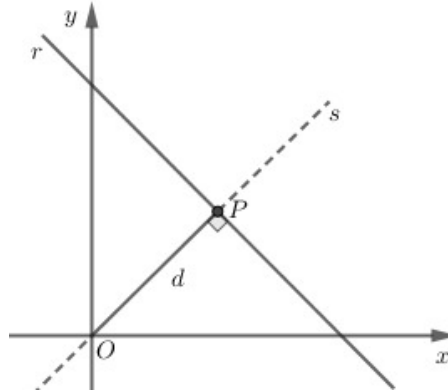
$$ax + by + c = 0 \quad (6)$$

Para garantirmos a menor distância entre a origem e a reta de equação 6 tomamos uma reta perpendicular a  $r$ , passando por  $O$  que chamamos de  $s$ . A reta  $s$ , tem equação geral:

$$by - ay = 0 \quad (7)$$

O ponto de intersecção entre as retas  $r$  e  $s$  é o ponto  $P'(x, y)$  e encontramos resolvendo o sistema formado por suas respectivas equações. A Figura 2.25 nos mostra geometricamente a distância  $d$  que queremos encontrar

**Figura 2.25 – Distância da origem do plano cartesiano a uma reta  $d_{O,r}$**



Fonte: Elaborada pelo autor

O que precisamos encontrar é a distância  $d_{O,r} = d = d_{O,P'} = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Organizando as equações 6 e 7, e elevando cada um de seus termos ao quadrado teremos:

$$\begin{cases} (ax + by)^2 = (-c)^2 \\ (bx - ay)^2 = 0^2 \end{cases}$$

e daí

$$\begin{aligned} (ax + by)^2 + (bx - ay)^2 &= c^2 \\ a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2 &= c^2 \\ a^2(x^2 + y^2) + b^2(x^2 + y^2) &= c^2 \\ (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) &= c^2 \end{aligned}$$

Como  $x^2 + y^2 = d^2$ , temos que  $d^2 = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$  e portanto

$$d_{O,P'} = d = d_{O,r} = \left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \quad (8)$$

e o teorema está provado neste caso.

Faremos agora a distância entre o ponto  $P$  e a reta  $r$  no caso geral com  $P \notin r$ . O argumento utilizado agora é transformar o ponto  $P$  em origem do plano cartesiano e aplicar o modelo matemático já deduzido. Para isso vamos transladar o sistema de origem  $xOy$  em um sistema com origem  $x'Py'$ . A equação da reta  $r : ax + by + c = 0$  no novo sistema fica

$$\begin{aligned} a(x' + x_0) + b(y' + y_0) + c &= 0 \\ ax' + ax_0 + by' + by_0 + c &= 0 \\ ax' + by' + ax_0 + by_0 + c &= 0 \end{aligned}$$



Sendo  $ax_0 + by_0 + c = c'$ . Da Equação 8, temos que  $d_{P,r} = \left| \frac{c'}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ , no que resulta em

$$d_{P,r} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

E assim fica provado o teorema. ■

Para encontrarmos a menor distância entre duas retas  $r$  e  $s$ , se ambas forem concorrentes ou paralelas coincidentes, a distância é zero. Caso sejam paralelas e não coincidentes possuem equações  $ax + by + c = 0$  e  $ax + by + c' = 0$ , respectivamente, e a distância entre elas é dada por

$$d_{r,s} = \left| \frac{c - c'}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

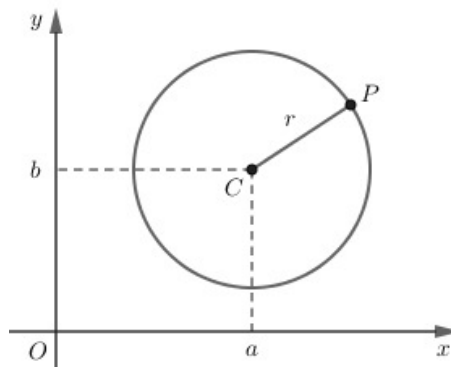
## 2.5 ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

**Definição 2.5.1** *Dado um ponto  $C$ , pertencente a um plano  $\alpha$ , e uma distância  $r$  não nula de  $C$ , chama-se circunferência  $\lambda$  o conjunto dos pontos de  $\alpha$  que estão a distância  $r$  do ponto  $C$ .*

### 2.5.1 Equação Reduzida da Circunferência

Consideramos a circunferência  $\lambda$  de centro  $C(a, b)$  e raio  $r$  conforme a Figura 2.26. Um ponto  $P(x, y)$  pertence a  $\lambda$  se, e somente se, a distância  $d_{P,C}$  é igual ao raio  $r$ , isto é,  $P \in \lambda \iff d_{P,C} = r$

Figura 2.26 – Circunferência  $\lambda$



Fonte: Elaborada pelo autor

Chamamos de equação da circunferência aquela que é satisfeita exclusivamente pelo conjunto de pontos  $P(x, y)$  pertencente à curva. Desse modo, é imediato que um ponto genérico  $P \in \lambda$  satisfazem a condição  $d_{P,C} = r$ . portanto, temos:

$$P \in \lambda \iff d_{P,C} = r \iff \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

No que resulta em

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (9)$$

### 2.5.2 Equação Normal da Circunferência

Desenvolvendo a equação reduzida 9 obtemos a equação normal dada por:

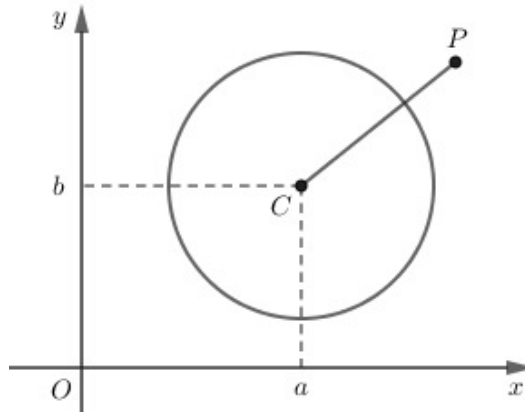
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

### 2.5.3 Ponto e Circunferência

Dado um ponto  $P$  de coordenadas  $(x_0, y_0)$  e uma circunferência  $\lambda$  de equação  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , para identificar a posição de  $P$  à  $\lambda$  basta calcular sua distância ao centro  $C$  e compararmos com o raio  $r$  e então encontramos três casos possíveis.

**1º caso:**  $P$  é exterior a  $\lambda$ . Isto ocorre se, e somente se,  $d_{P,C} > r$ , isto é,  $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2 \implies (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 > 0$ , conforme a Figura 2.27

**Figura 2.27** –  $P$  é exterior a  $\lambda$ :  $d_{P,C} > r$



Fonte: Elaborada pelo autor

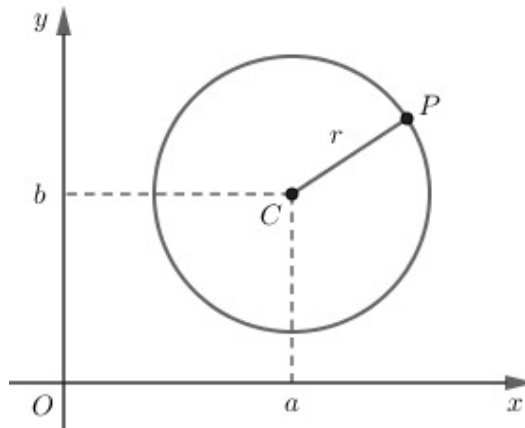
**2º caso:**  $P$  pertence a  $\lambda$ , isto ocorre se, e somente se,  $d_{P,C} = r$ , isto é,  $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2 \implies (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0$ . Ver na Figura 2.28

**3º caso:**  $P$  é interior a  $\lambda$  isto ocorre se, e somente se,  $d_{P,C} < r$ , isto é,  $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2 \implies (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 < 0$ . A Figura 2.29 mostra geometricamente essa situação.

### 2.5.4 Reta e Circunferência

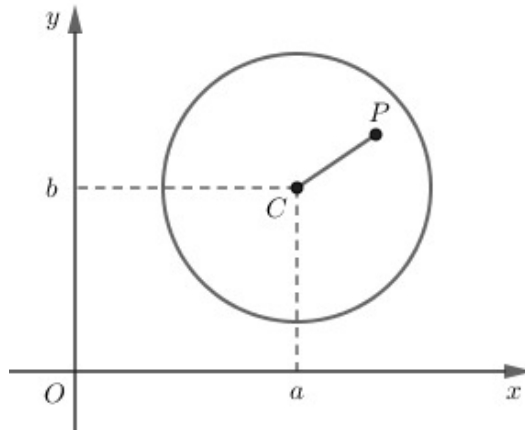
Dadas uma reta  $r : ax + by + c = 0$  e uma circunferência  $\lambda : (x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2$ , a interseção de  $r$  com  $\lambda$  é o conjunto de pontos  $P(x, y)$  que pertencem às duas curvas. É

**Figura 2.28** –  $P$  pertence a  $\lambda$ :  $d_{P,C} = r$



Fonte: Elaborada pelo autor

**Figura 2.29** –  $P$  é exterior a  $\lambda$ :  $d_{P,C} < r$



Fonte: Elaborada pelo autor

imediatamente que, se  $P \in r$  e  $P \in \lambda$ , então  $P$  satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Que pode ser resolvido pelo método da substituição, reduzindo assim, a equação da circunferência, em uma equação do segundo grau.

### 2.5.5 Posição Relativa de Reta e Circunferência

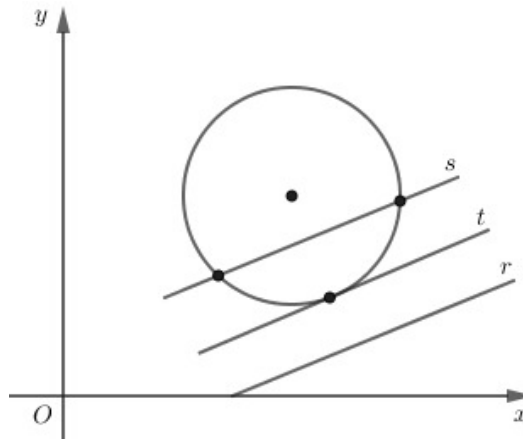
A posição relativa de uma reta  $r : ax + by + c = 0$  e uma circunferência  $\lambda : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  é determinada encontrando o número de soluções do sistema.

Veamos que ao reduzir a equação da circunferência a uma equação do segundo grau basta analisar o discriminante ( $\Delta$ ) desta equação em:

- $\Delta > 0 \iff r$  e  $\lambda$  são ditas secantes.
- $\Delta = 0 \iff r$  e  $\lambda$  são ditas tangentes.
- $\Delta < 0 \iff r$  e  $\lambda$  são ditas exteriores.

A Figura 2.30 nos mostra que as retas  $r$ ,  $t$  e  $s$  são exteriores, tangentes e secantes, respectivamente, a circunferência.

**Figura 2.30 – Posições relativas entre as retas  $r$ ,  $t$  e  $s$  em a circunferência  $\lambda$**



Fonte: Elaborada pelo autor

Também é possível determinar a posição relativa de uma reta e um circunferência encontrando a distância entre o centro da circunferência e a reta e comparando com o raio.

Dado uma reta  $r : a_0x + b_0y + c = 0$  e uma circunferência  $\lambda : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , para identificar a posição relativa de  $r$  em relação a  $\lambda$  basta calcular sua distância ao centro  $C$  de  $\lambda$  e compararmos com o raio  $r$ . No entanto, temos que:

- Se  $\left| \frac{a_0x + b_0y + c}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}} \right| < r$ , então  $r$  e  $\lambda$  são ditas secantes.
- Se  $\left| \frac{a_0x + b_0y + c}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}} \right| = r$ , então  $r$  e  $\lambda$  são ditas tangentes.
- Se  $\left| \frac{a_0x + b_0y + c}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}} \right| > r$ , então  $r$  e  $\lambda$  são ditas exteriores.

### 2.5.6 Interseção de Duas Circunferências

Sejam duas circunferências  $\lambda_1 : (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$  e  $\lambda_2 : (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$ , achar a interseção de  $\lambda_1$  com  $\lambda_2$  é determinar um conjunto de pontos  $P(x, y)$  que

satisfazem às duas curvas do sistema:

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2 \end{cases}$$

### 2.5.7 Posições Relativas de Duas Circunferências

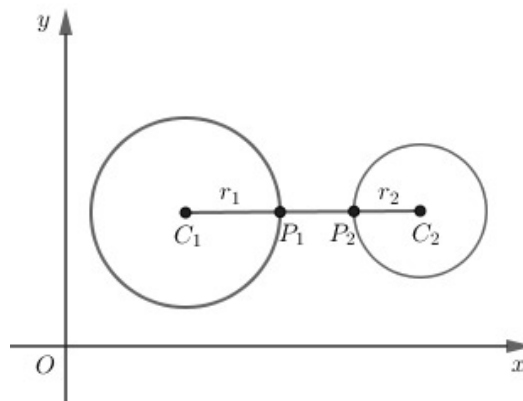
A posição relativa de duas circunferências  $\lambda_1 : (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$  com centro em  $C_1$  e  $\lambda_2 : (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$  com centro em  $C_2$ , é determinada comparando a distância  $d_{C_1, C_2}$  entre os centros com a soma  $r_1 + r_2$  ou com a diferença  $|r_1 - r_2|$  dos raios.

A distância entre os centros  $C_1$  e  $C_2$  é calculada por  $d_{C_1, C_2} = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$

Sejam  $P_1$  um ponto de  $\lambda_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  pontos de  $\lambda_2$  e ainda  $P$  um ponto de tangência de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , de modo que  $C_1$ ,  $C_2$  e qualquer um ou dois dos pontos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P$  estejam alinhados. Vamos determinar seis casos possíveis.

**1º caso:** Se  $d_{C_1, C_2} > r_1 + r_2$ , temos que  $d_{C_1, C_2} = d_{C_1, P_1} + d_{P_1, P_2} + d_{P_2, C_2} > r_1 + r_2$ , então as circunferências são exteriores.

**Figura 2.31** – As circunferências  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são exteriores



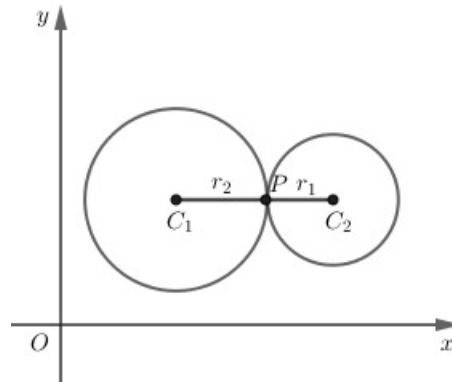
Fonte: Elaborada pelo autor

**2º caso:** Se  $d_{C_1, C_2} = r_1 + r_2$ , temos que  $d_{C_1, C_2} = d_{C_1, P} + d_{P, C_2}$ , então as circunferências são tangentes exteriormente.

**3º caso:** Se  $d_{C_1, C_2} = |r_1 - r_2|$ , temos que  $d_{C_1, C_2} = d_{C_1, P} - d_{P, C_2}$  então as circunferências são tangentes interiormente.

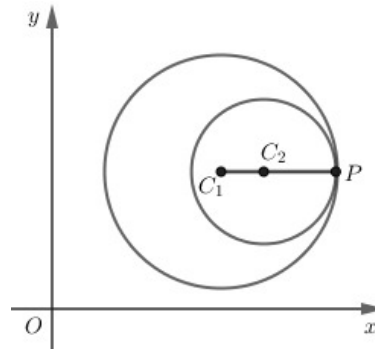
**4º caso:** Se  $\|r_1 - r_2\| < d_{C_1, C_2} < r_1 + r_2$ , temos que  $d_{C_1, C_2} = d_{C_1, P_1} + d_{C_2, P_2} - d_{P_1, P_2} < r_1 + r_2$  e  $d_{C_1, C_2} = d_{C_1, P_1} + d_{P_1, P_3} - d_{C_2, P_3} > \|r_1 - r_2\|$  então as circunferências são secantes.

Figura 2.32 – As circunferências  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são tangentes exteriores



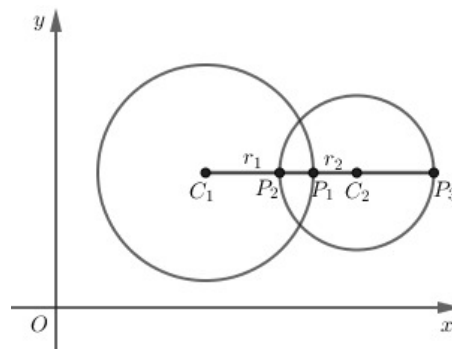
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 2.33 – As circunferências  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são tangentes interiormente



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 2.34 – As circunferências  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são secantes

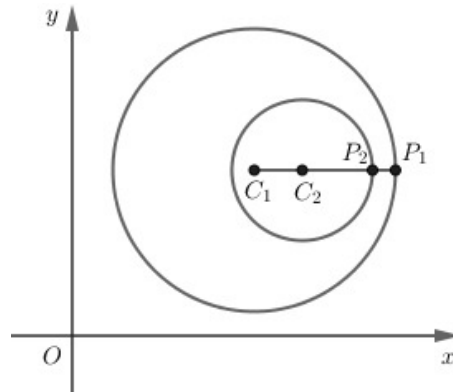


Fonte: Elaborada pelo autor

**5º caso:** Se  $0 \leq d_{C_1, C_2} < |r_1 - r_2|$ , temos que  $d_{C_1, C_2} = d_{C_1, P_1} - d_{C_2, P_2} - d_{P_1, P_2} < |r_1 - r_2|$  então a circunferência de menor raio é interior à outra.

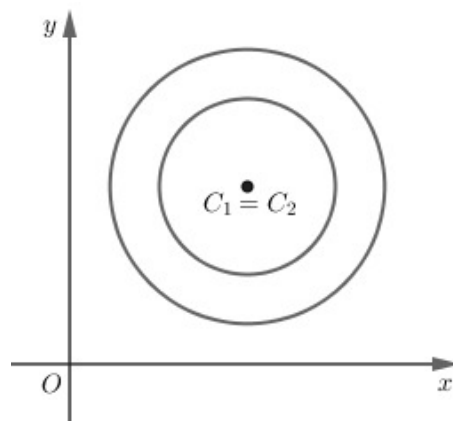
**6º caso:** Se  $d_{C_1, C_2} = 0$  então as circunferências são concêntricas, (caso particular do 5º).

Figura 2.35 – A circunferência de menor raio é interior à outra



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 2.36 – As circunferências  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são concêntricas



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3 APLICAÇÕES

O objetivo desta secção é fazer as resoluções das respectivas aplicações matemáticas e em seguida a construção geométrica de cada uma delas, utilizando-se do GeoGebra. Possibilitando assim que os alunos possam comparar a resolução matemática com sua construção gráfica e cheguem a uma conclusão mais precisa. Nosso foco é instigar os alunos para serem mais críticos e participativos com o entendimento de cada situação apresentada no ensino de Geometria Analítica (reta e circunferência), que muitas vezes se limitam na memorização das soluções dispensando a tal oportunidade.

**Aplicação 1** *Em uma partida de futebol entre Brasil e Argentina, aos 40 minutos do segundo tempo de jogo, durante um contra-ataque para Argentina, o jogador argentino Messi recebe a bola exatamente na lateral do campo sobre a linha que divide o gramado e no mesmo momento o zagueiro brasileiro Thiago Silva está no centro do campo. Messi corre com a bola dominada, em linha reta, em direção ao centro do gol e Thiago Silva corre em linha reta para tentar interceptar Messi e derrubá-lo. Sendo a velocidade de Thiago Silva igual a 0,85 da velocidade de Messi, o encontro dos dois acontecerá dentro ou fora da área? Considere que as dimensões do campo são de 96 metros de comprimento e por 72 metros de largura e que a grande área se estende por 16,5 metros a cada um dos lados do gol, e 16,5 à sua frente sendo o gol com 7,30 m.*

**Solução:**

**Resolução matemática:** Em um sistema de coordenadas cartesianas, posicionamos a linha de meio campo sobre o eixo  $x$  e a linha lateral sobre o eixo  $y$ . Propondo também que os jogadores Thiago Silva e Messi inicialmente estejam, respectivamente, nos pontos localizados no meio campo  $T(36,0)$  e no ponto de interseção da linha de meio campo com a linha lateral  $M(0,0)$ , e  $C(36,48)$ , a posição do centro do gol defendida pelo Brasil. Se ambos os jogadores se locomoverem em linha reta, a equação que representa a trajetória de Messi em direção ao gol é definida pela equação  $y = \frac{4x}{3}$  e o ponto  $P\left(x, \frac{4x}{3}\right)$  está sobre a trajetória que Thiago Silva deve tomar para interceptar Messi. Como a velocidade de Thiago Silva corresponde a 0,85 da velocidade de Messi, temos que

$$\begin{aligned} d_{T,P} &= 0,85d_{M,P} \\ \sqrt{(x-36)^2 + \left(\frac{4x}{3}\right)^2} &= 0,85\sqrt{x^2 + \left(\frac{4x}{3}\right)^2} \\ x' &= 24,37 \text{ e} \\ e \ x'' &= 69,06 \end{aligned}$$

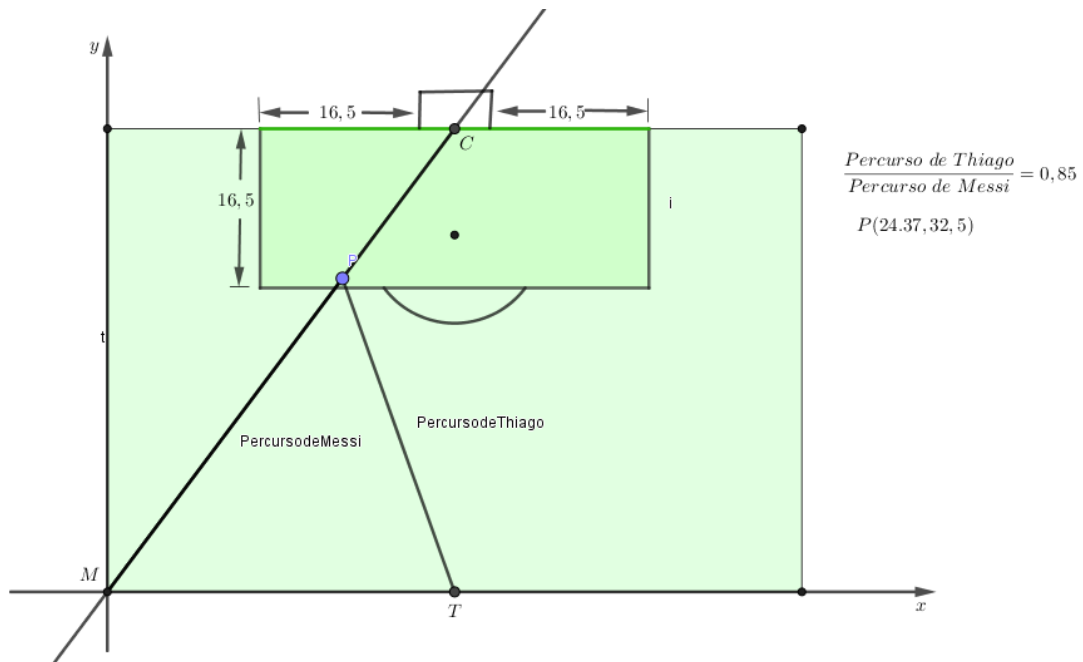


Substituindo em  $y = \frac{4x}{3}$ , temos  $y' = 32,5$  e  $y'' = 92,08$ . Considerando as dimensões do campo, a solução válida é com  $P(24,37,32,5)$  e assim Thiago Silva só consegue alcançar messi dentro da área.

### Construção no GeoGebra

A construção no GeoGebra se faz desenhando retângulo que representa metade do campo, a grande área com suas dimensões, as retas que representam os percursos de Thiago Silva e Messi e o ponto  $P$  em que irão se interceptar. Ao mover o ponto  $P$ , observamos que, de acordo com a rapidez de ambos os jogadores dita no enunciado, o encontro acontece quando teremos  $P(24,37,32,5)$  que, de acordo com as dimensões do campo, posiciona-se dentro da área.

Figura 3.1 – Representação no plano cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor

◇

**Aplicação 2** (Questão retirada do livro didático DANTE, 2012, P.57) Verifique se os pontos  $A = (-3,1)$ ,  $B = (0,2)$  e  $C = (4,5)$  estão alinhados.

### Resolução matemática

Se os pontos  $A, B$  e  $C$  estão alinhados então a área  $S$  de  $ABC$  é igual a zero, verificando temos:

$$S = \frac{1}{2}|D| = 0$$

Desenvolvendo o determinante  $D$  pela regra Laplace, da 1ª linha temos:

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$D = -3(2 \cdot 1 - 5 \cdot 1) - 1(0 \cdot 1 - 4 \cdot 1) + 1(0 \cdot 5 - 2 \cdot 4)$$

$$D = -3(-3) - 1(-4) + 1(-8)$$

$$D = 9 + 4 - 8$$

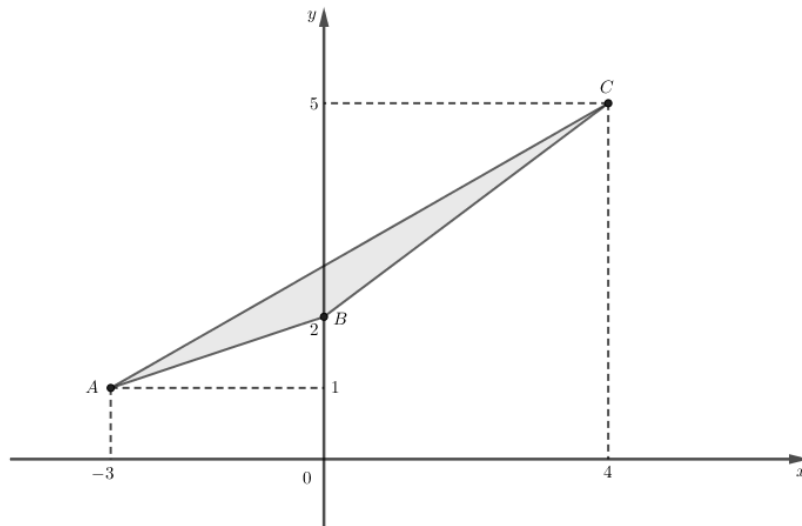
$$D = 5$$

Como a área do triângulo formado pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  é  $S = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,5$  u.a., e é diferente de zero, então os pontos  $A, B$  e  $C$  não estão alinhados, ou seja não são colineares.

### Construção no GeoGebra

A construção no GeoGebra nos permite visualizar a região delimitada por um polígono de vértices nos pontos dados e a existência dessa região justifica o não alinhamento dos pontos, ou seja, não são colineares. Na construção, desenhamos os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e o polígono com vértices nesses pontos formando assim um triângulo de área  $A = 2.5$ .

**Figura 3.2 – Triângulo formado pelos pontos  $A = (-3, 1)$ ,  $B = (0, 2)$  e  $C = (4, 5)$**

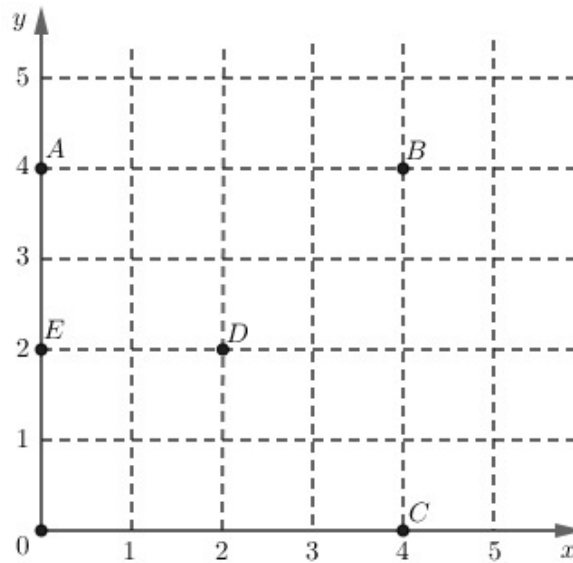


Fonte: Elaborada pelo autor

**Aplicação 3** (*Enem 2018*) *Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano*

dando “tiros”, seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados:  $A(0,4)$ ,  $B(4,4)$ ,  $C(4,0)$ ,  $D(2,2)$  e  $E(0,2)$ .

Figura 3.3 – Plano



Fonte: ENEM 2018

Passando pelo ponto  $A$ , qual equação forneceria a maior pontuação?

- a)  $x = 0$
- b)  $y = 0$
- c)  $x^2 + y^2 = 16$
- d)  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$
- e)  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

**Solução:** Usamos o aplicativo GeoGebra pode ser utilizado neste jogo.

### Resolução matemática

- a)  $x = 0$

Para  $x = 0$  passa pela origem e pelos pontos  $A$  e  $E$ , assim soma 2 pontos.

b)  $y = 0$

Para  $y = 0$  passa pela origem, mas não passa pelo ponto  $A$ , assim podemos desconsiderá-la.

c)  $x^2 + y^2 = 16$

A circunferência  $x^2 + y^2 = 16$  têm centro na origem  $(0,0)$  e raio medindo 4, então não passa pela origem e portanto devemos desconsiderá-la.

d)  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

A circunferência  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$  têm centro no ponto  $E(0,2)$  e possui raio 2, passa pela a origem e pelos pontos  $A$  e  $D$ , logo soma 4 pontos.

e)  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

A circunferência  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$  com centro no ponto  $D(2,2)$  e raio igual a  $2\sqrt{2}$ , passa pela origem e pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , somando 6 pontos, portanto essa é a equação que fornece a maior pontuação.

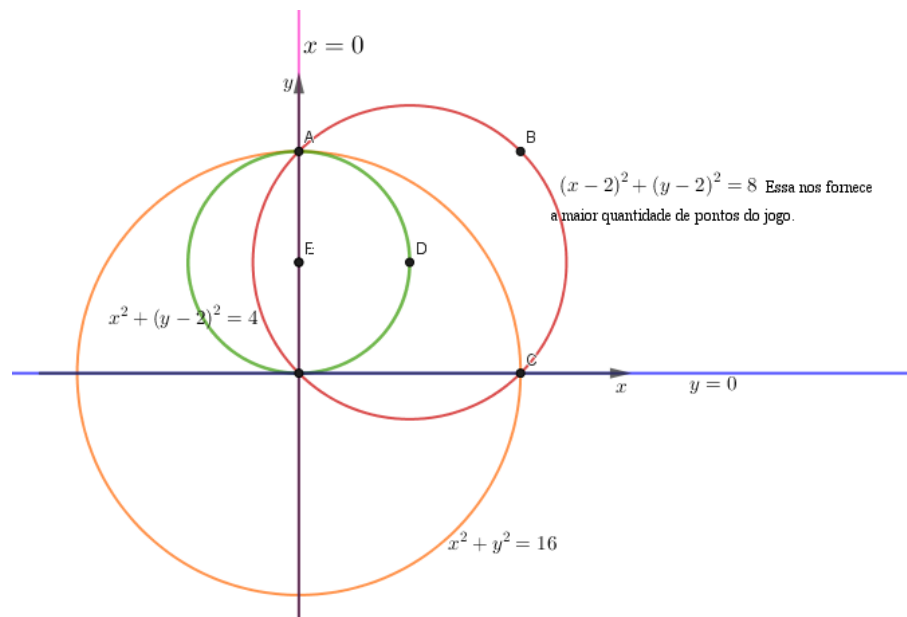
### Construção no GeoGebra

Analizamos nesta construção geométrica para cada um dos itens. Da figura 3.4 fica fácil entendermos que é possível obter cada uma das retas e das circunferências de acordo com os dados da questão. Marcamos os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$ , construímos as retas de equações  $x = 0$ ,  $y = 0$  e as circunferências de equações  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ ,  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$ .

A condição é que se o tiro for dado por meio da equação de uma circunferência, que passe pela origem e pelo ponto  $A$ , cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, que passe pela origem e pelo ponto  $A$ , cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Fazendo o uso do GeoGebra para jogar, construímos as retas e circunferências dadas no problema e observamos geometricamente cada ponto atingido por cada uma e notadamente observamos que a circunferência (vermelha) de equação  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$  com centro  $D(2,2)$  que passa pela origem e pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  nos fornece a maior quantidade de pontos do jogo 6 *pontos*.  $\diamond$

**Aplicação 4** (UNICAMP 2019) No Plano cartesiano considere a reta  $r$  de equação  $2x + y = 1$  e os pontos de coordenadas  $A(1,4)$  e  $B(3,2)$ .

Figura 3.4 – Construção dos elementos de acordo com as regras do jogo



Fonte: Elaborada pelo autor

- a) Encontre as coordenadas do ponto de intersecção entre a reta  $r$  e a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ .
- b) Determine a equação da circunferência na qual um dos diâmetros é o segmento  $AB$ .

**Solução:** a) Encontre as coordenadas do ponto de intersecção entre a reta  $r$  e a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ .

### Resolução Matemática

Para encontrar esse ponto de intersecção que chamamos de  $D$ , resolvemos um sistema de equações do primeiro grau, pois precisamos das duas equações. Como já temos a equação da reta  $r$ , vamos inicialmente encontrar a equação da reta que passa pelos os pontos  $A$  e  $B$ .

Pelo determinante, temos

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x + 3y + 2 - 12 - 2x - y = 0$$

$$2x + 2y - 10 = 0$$

$$x + y = 5$$

Encontrando as coordenadas do ponto de intersecção temos:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que  $x = -4$  e  $y = 9$ .

Portanto as coordenadas do ponto de intersecção  $D$  são  $x = -4$  e  $y = 9$ .

b) Determine a equação da circunferência na qual um dos diâmetros é o segmento  $AB$ .

### Resolução Matemática

Para determinar a equação da circunferência precisamos do centro e o raio. Como o diâmetro é o segmento  $AB$ , o centro será o ponto médio e o raio será a metade do comprimento de  $AB$ . As coordenadas do ponto médio deste segmento são:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{1+3}{2} \\ x_M &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{4+2}{2} \\ y_M &= 3 \end{aligned}$$

O ponto médio é também o centro  $C(2,3)$  da circunferência. E o raio  $r$ , é dado por  $\frac{d_{AB}}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{d_{AB}}{2} &= \frac{\sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2}}{2} \\ d_{AB} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

. Da equação reduzida de circunferência temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

. Daí obtemos a circunferência de equação

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$$

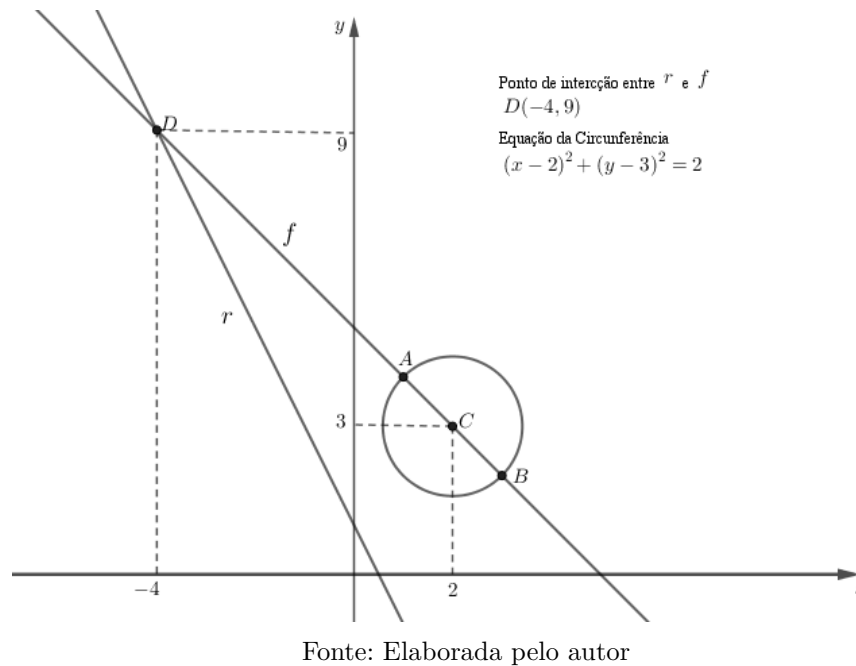
.

### Construção no GeoGebra

A Figura 3.5 contribuirá com o incentivo ao uso do GeoGebra no que se trata de construções de retas e circunferências, assim como para analisar o comportamento gráfico

de cada uma, seu (s) pontos de intersecção e a ideia de ponto médio, diâmetro e raio. Para esta, utilizamos as equações  $2x + y = 1$  e  $x + y = 5$  para visualizar o ponto de intersecção  $D(-4, 9)$  no qual podemos visualizar na figura 3.5. Os pontos  $A(1, 4)$  e  $B(3, 2)$  determinam a reta  $f$  e o comprimento do segmento formado por eles é o diâmetro da circunferência que tem como equação  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$ .

**Figura 3.5 – Construção geométrica da intersecção entre a reta e a circunferência**



◇

**Aplicação 5** (FGV-SP 2020) No plano cartesiano, a reta de equação  $3x + 4y = 0$  determina, na circunferência  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ , uma corda cujo comprimento é:

- a)  $2\sqrt{22}$
- b)  $2\sqrt{18}$
- c)  $2\sqrt{20}$
- d)  $2\sqrt{21}$
- e)  $2\sqrt{19}$

Encontrando o centro e raio da circunferência

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$$

Completando quadrado temos:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 2y - 20 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 5 - 20 &= 0 \end{aligned}$$

Assim podemos escrever a equação da circunferência na sua forma reduzida:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

O centro  $C$  é  $(2, 1)$  e o raio  $r$  é 5. Usando o modelo matemático para encontrar a distância de um ponto a uma reta, vamos encontrar a distância que podemos chamar de  $d$  do centro  $C$  da circunferência até a corda

$$\begin{aligned} d &= \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ d &= \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 0|}{\sqrt{9 + 16}} \\ d &= \frac{|6 + 4|}{\sqrt{25}} \\ d &= \frac{10}{5} \\ d &= 2 \end{aligned}$$

Assim a menor distância  $d$  do centro a corda, o raio  $r$  e o segmento  $x$  de comprimento igual a metade da corda forma um triângulo retângulo, conforme Figura 3.6. Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$\begin{aligned} r^2 &= d^2 + x^2 \\ 5^2 &= 2^2 + x^2 \\ 25 &= 4 + x^2 \\ x^2 &= 25 - 4 \\ x^2 &= 21 \\ x &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

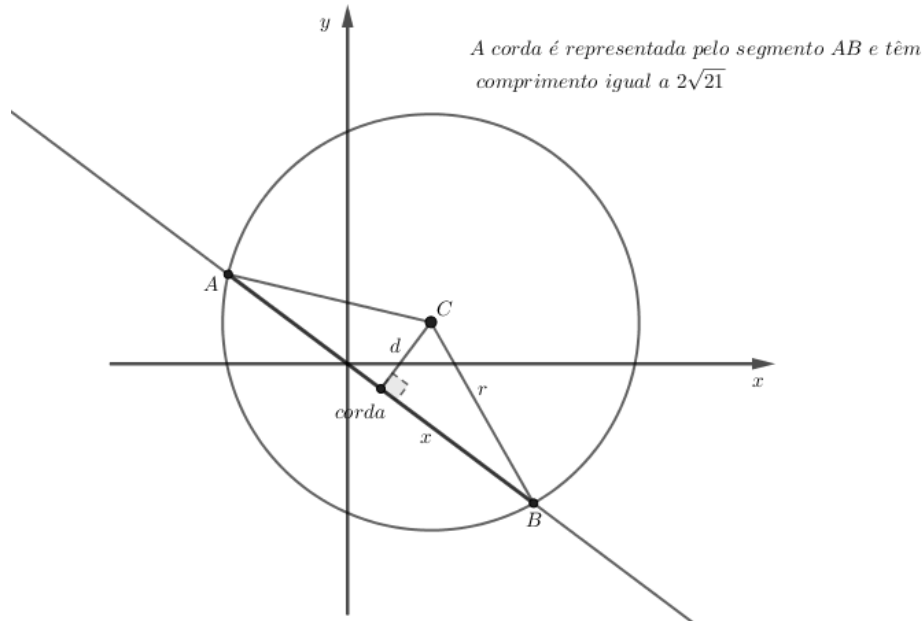
Portanto se metade do comprimento da corda mede  $x = \sqrt{21}$  então a corda inteira mede  $2\sqrt{21}$

### Construção no GeoGebra

A construção, além de contribuir geometricamente para resolução matemática apresentada nos proporciona a verificar uma solução com maior facilidade a partir da



**Figura 3.6 – Representação geométrica da corda**



Fonte: Elaborada pelo autor

intersecção da reta e da circunferência dadas, onde partindo desses pontos podemos encontrar o comprimento da corda usando distância entre dois pontos.

Seja a equação da reta  $3x + 4y = 0$  e da circunferência  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$  dadas, seus pontos de intersecção são os pontos  $A\left(\frac{-29}{10}, \frac{21}{10}\right)$  e  $B\left(\frac{45}{10}, \frac{-33}{10}\right)$ . Pela distância entre dois pontos

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{\left(\frac{45}{10} - \frac{-29}{10}\right)^2 + \left(\frac{-33}{10} - \frac{21}{10}\right)^2} \\ d_{AB} &= \sqrt{\left(\frac{74}{10}\right)^2 + \left(\frac{-54}{10}\right)^2} \\ d_{AB} &= 2\sqrt{21} \end{aligned}$$

**Aplicação 6** Duas amigas A e B, combinaram de encontrar-se entre meio dia e uma hora da tarde, de modo que, quem chegasse primeiro ao local do encontro esperaria pela outra no máximo 15 minutos e depois iria embora. Supondo que os horários combinados sejam aleatórios dentro do intervalo combinado, qual a probabilidade desse encontro acontecer?

**Solução:**

**Resolução Matemática**

A partir do plano cartesiano, podemos marcar os possíveis horários de chegada de cada uma das amigas determinando por um ponto  $(x, y)$  no interior de um quadrado de lado 60, representando cada unidade como 1 minuto (60 minutos). Por exemplo: Se  $A$  chegar 12 horas e 20 minutos e  $B$  chegar 12 horas e 40 minutos, esse horário corresponde ao ponto  $P(20, 40)$ . Assim, as condições impostas no problema se remete que o encontro das duas acontece se o ponto definido pelo encontro pertencer a região limitada pelo sistema

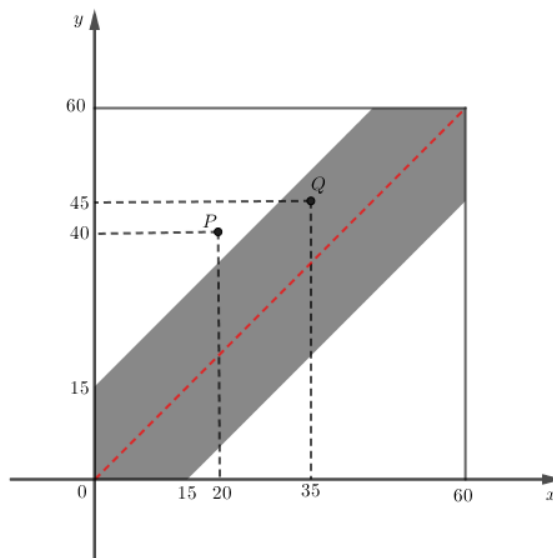
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 60 \\ 0 \leq y \leq 60 \\ |x - y| \leq 15 \end{cases} \quad (10)$$

Usaremos o GeoGebra para nos auxiliar nesta resolução.

### Construção no GeoGebra

A construção, nesta situação, se remete a mostrar geometricamente a região definida pelo sistema 10, facilitando o entendimento do leitor quanto a resolução da questão. A Figura 3.7 mostra de forma clara os argumentos utilizados e através dela é fácil notar que qualquer ponto pertencente a região mais escura representa um par ordenado que define a ocorrência do encontro, enquanto que um ponto fora dela determina que o encontro não acontece. Tomando o exemplo do ponto  $P$  citado anteriormente, elas não se encontram, já se tomarmos um outro exemplo em que  $A$  chegue 12 horas e 35 minutos e  $B$  chegar 12 horas e 45 minutos, o encontro acontece.

**Figura 3.7 – Construção geométrica para visualização do encontro de  $A$  e  $B$**



Fonte: Elaborada pelo autor

Por 10, é fácil visualizar que a área da região definida pelas inequações  $0 \leq x \leq 60$

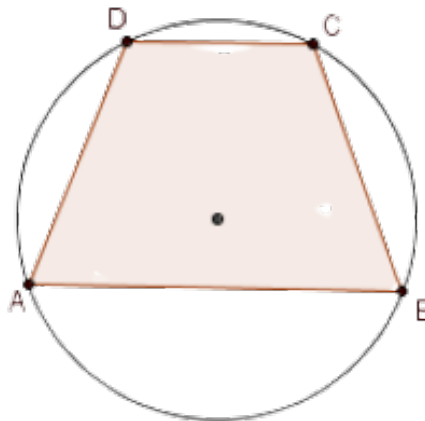
e  $0 \leq y \leq 60$  corresponde a área do quadrado de lado 60 no qual chamamos de  $S_1$  com área  $S_1 = 60^2 = 3600$  u.a, enquanto que a área da região definida pelo sistema é  $S_2 = 60^2 - 2 \cdot \frac{45 \cdot 45}{2} = 3600 - 2025 = 1575$  u.a. Assim, a probabilidade desse encontro acontecer é

$$\begin{aligned} P &= \frac{S_2}{S_1} \\ &= \frac{1575}{3600} \\ &= \frac{7}{16} \end{aligned}$$

E portanto, a probabilidade do encontro acontecer é de  $\frac{7}{16}$   $\diamond$

**Aplicação 7** *OBMEP 2015 - Nível 3* - A figura,  $ABCD$  é um trapézio inscrito numa circunferência. A base maior do trapézio mede 16 cm, a base menor 10 cm e a altura 9 cm. Qual é a medida, em centímetros, do raio da circunferência?

**Figura 3.8 – Trapézio inscrito em uma circunferência**



Fonte: OBMEP 2015

**Solução:**

**Resolução Matemática** É possível encontrar o comprimento do raio da circunferência posicionando a imagem sobre um plano cartesiano e posicionando de modo que seu centro coincida com a origem do plano. Assim, pelas dimensões do trapézio dada na questão E pelo fato de o trapézio ser inscrito na circunferência, teremos  $C(5, y)$  e  $B(8, y - 9)$ . Usando o fato de que as  $d_{O,C} = d_{O,B} = r$ , temos que

$$\begin{aligned} \sqrt{5^2 + y^2} &= \sqrt{8^2 + (y - 9)^2} \\ 25 + y^2 &= 64 + y^2 - 18y + 81 \\ y &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

E assim temos que o ponto  $C(5, \frac{20}{3})$ , cujo valor do raio da circunferência é

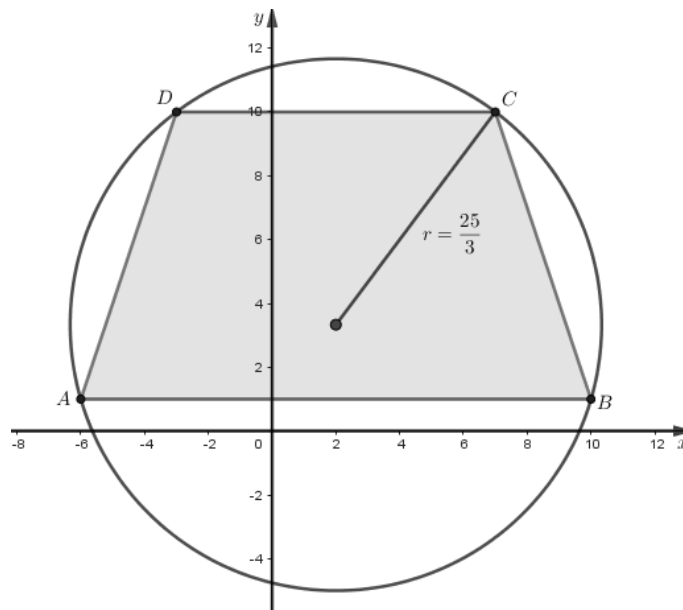
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{5^2 + \left(\frac{20}{3}\right)^2} \\ r &= \sqrt{\frac{625}{9}} \\ r &= \frac{25}{3} \end{aligned}$$

### Construção no GeoGebra

A construção no GeoGebra desta aplicação tem como objetivo facilitar o entendimento da resolução matemática apresentada. Nesta, além de podermos verificar a estratégia utilizada na resolução matemática de usar o centro da circunferência na origem do plano nos mostra geometricamente que se posicionarmos o centro em qualquer ponto do plano cartesiano é possível determinarmos a solução.

Na construção, Figura 3.9, iniciamos com o trapézio utilizando as dimensões mencionadas, em seguida construindo a circunferência circunscrita no trapézio, utilizando a caixa de entrada do GeoGebra marcamos o centro da circunferência e para concluir a solução construímos um segmento de reta que liga o centro ao ponto  $C$ , verificando o comprimento de  $\frac{25}{3}$ .  $\diamond$

**Figura 3.9 – Construção geométrica para o cálculo do raio da circunferência**



Fonte: Elaborada pelo autor

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho está baseado em uma proposta metodológica que sugere o uso do GeoGebra no ensino da Geometria Analítica com o objetivo de contribuir para um melhor entendimento em conceitos, definições e resoluções de situações-problema por parte dos alunos em sala de aula. Como nossa problematização enfatiza como contribuir para o ensino/aprendizagem do conteúdo, abordando o estudo da reta e da circunferência, analisamos aplicações corriqueiras na vida estudantil dos alunos do ensino médio como: questões de livros, revistas, artigos, Enem, vestibulares, concursos através da construção e análise gráfica usando uma ferramenta poderosa no campo da matemática que trata-se do GeoGebra.

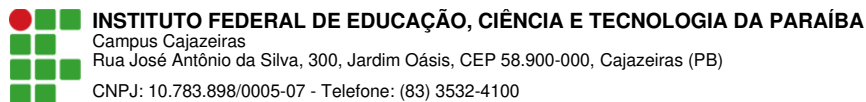
Tratando-se de uma análise bibliográfica, não nos aprofundamos em abordar como se faz o uso das ferramentas do GeoGebra em termos gerais, apenas o seu uso de forma básica e acessível diante do conteúdo abordado e que possa ser utilizado sem maiores complicações pelo professor de matemática em sala de aula. A pesquisa limitou-se à apresentar sugestões para o professor abordar essas aplicações no intuito de proporcionar o GeoGebra como um recurso pedagógico facilitador para o ensino e aprendizagem.

Na construção deste trabalho, observamos que a tecnologia já está inserida na vida social do aluno e dessa forma também deverá estar no contexto escolar, no entanto, podemos apresentar como um exemplo os celulares, que podem ser baixado diversos software matemáticos, inclusive o GeoGebra que é gratuito e fácil de ser usado, sendo este o motivo para escolha como objeto de estudo desta pesquisa.

Também sinalizamos que a partir deste trabalho podem gerar outras futuras pesquisas fazendo uso do GeoGebra no ensino da Geometria Analítica. Com esta pesquisa, pretendemos também desenvolver na prática e assim, a partir dessa experiência, identificar com mais propriedade os pontos positivos e negativos e continuar pesquisando de modo a contribuir com a educação como um todo.

## REFERÊNCIAS

- BRASIL, MEC, **Base Nacional Comum Curricular - BNCC, versão aprovada pelo CNE, novembro de 2018**. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCCEIEF110518versaofinalsite.pdf>>. Acesso em: 05 jun. 2023.
- DANTE, L.R. **Matemática: contexto e aplicações**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.
- ENEM 2018 – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <<http://www.enem.inep.gov.br/>>. Acessado em março de 2023.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- GEOGEBRA . **GeoGebra - Aplicativos Matemáticos**. 2018. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>> Acesso em: 05 jun. 2023.
- IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, geometria analítica**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- LACERDA, A. C. T. **Aplicações da Geometria Analítica na Resolução de Problemas**. 2015. 49 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, 2015.
- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 3. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- NUNES, K. R. A. **Arte e Recursos Digitais no Ensino da Matemática**. Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana. Volume 11. Pernambuco: 2020.
- OBMEP. Portal da OBMEP. Disponível em <<https://drive.google.com/file/d/1A8gk7I8maNZuf9sJjb93BfEdb6WFgbW/view>>. Acesso 05/06/2023.
- PRODANOV, C.C. FREITAS, E. C. **Métodos e técnicos da pesquisa e do trabalho acadêmico** 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.



## Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

### TCC versão final

**Assunto:** TCC versão final  
**Assinado por:** Weliton Sousa  
**Tipo do Documento:** Anexo  
**Situação:** Finalizado  
**Nível de Acesso:** Ostensivo (Público)  
**Tipo do Conferência:** Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Weliton Iris de Sousa, DISCENTE (202112210022) DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 22/07/2023 10:31:00.

Este documento foi armazenado no SUAP em 22/07/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 884924  
Código de Autenticação: 24c2ba3951

