INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marciel Fernandes da Silva

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: Origem, Demonstração e Aplicação

Cajazeiras-PB
Março de 2019

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

S586t

Silva, Marciel Fernandes da

Teorema fundamental do cálculo: origem, demonstração e aplicação / Marciel Fernandes da Silva; orientador Geraldo Herbetet de Lacerda.- Cajazeiras, 2019.-
46 f.: il.

Orientador: Geraldo Herbetet de Lacerda.
TCC (Especialização em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2019.

1. Teorema fundamental do cálculo I. Título

CDU 517(0.067)

Marciel Fernandes da Silva

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: Origem, Demonstração e Aplicação

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda

Cajazeiras-PB
Março de 2019

Marciel Fernandes da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Aprovado em: 03/05/2019

BANCA EXAMINADORA

Geraldo H. Lacerda

Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda - Orientador
Instituto Federal da Paraíba (IFPB)

Joab Sobreira de Andrade.

Prof. Dr. Joab Sobreira de Andrade
Instituto Federal da Paraíba (IFPB)

Gilberto Fernandes Vieira

Prof. Dr. Gilberto Fernandes Vieira
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Cajazeiras-PB
2019

Dedico este trabalho a Deus e a minha família que é a base de tudo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que me iluminou nesta caminhada, permitindo a realização de mais uma grande etapa da minha vida.

Aos meu pais, Paulo Queiroga da Silva e Delzivia Fernandes da Silva por todo amor, dedicação, carinho e compreensão, bem como minhas irmãs Marcia, Marciana, Maria e Marlira que estão sempre me apoiando.

A minha noiva Ariane que sempre me apoiou e me ouviu, obrigado por todo seu amor, paciência e compreensão durante esse período.

A todos os familiares que estão sempre me apoiando, em especial ao meu avô Zé Pedro, exemplo de ensinamento.

Ao Professor Mestre Geraldo Herbetet de Lacerda, por sua dedicação, incentivo, ensinamentos e pelo privilégio de ter sido seu orientando.

Aos Professores Dr. Gilberto Fernandes Vieira, que sempre me auxiliou em todos os momentos, e Dr. Joab Sobreira de Andrade, que aceitaram fazer parte da Banca Examinadora, pelas sugestões, comentários que engrandeceram este trabalho.

Ao coordenador da Especialização em Matemática, compus IFPB, Cajazeiras – PB, Professor Mestre Leonardo Ferreira Soares, que sempre esteve presente.

Estendo aqui meus agradecimentos a todos que contribuíram direto e indiretamente para que esse sonho se tornasse realidade.

A todos, o meu carinho e reconhecimento.

Resumo

Em suma, este trabalho apresenta de forma bem detalhada o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), abordando desde sua origem até chegar ao que temos hoje a respeito deste importante teorema, evidenciando sua demonstração formal, e, fechando o desenvolvimento com uma aplicação interessante. Diante disso, este trabalho tem como objetivo principal a explanação do Teorema Fundamental do Cálculo de forma mais clara e bem detalhada, mostrando a importância do mesmo para o cálculo, evidenciando seus aspectos históricos desde a criação, fazendo com que tenha mais sentido o estudo do mesmo. Através de uma pesquisa bibliográfica é exposta a origem do TFC desde a antiguidade e o seu desenvolvimento até o século XVII, bem como sua formalização no século XIX. Na demonstração é abordada de maneira explícita a conexão entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral tendo como referência livros de cálculo. A parte de aplicabilidade mostra como o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser bastante útil no nosso dia-a-dia, em diversas situações, não só na matemática bem como nas mais variadas áreas: física, astronomia, economia, engenharia, medicina, química, auxiliando na resolução de problemas. Neste sentido, foi feito uma aplicação para o cálculo do volume de uma taça utilizando o TFC.

Palavras-Chave: Teorema Fundamental do Cálculo, Origem, História, Aplicação.

Abstract

In short, this paper presents the Fundamental Theorem of Calculus (TFC) in a very detailed way, approaching from its origin to what we have today about this important theorem, evidencing its formal demonstration, and closing the development with an interesting application. The main objective of this work is to explain the Fundamental Theorem of Calculus in a clearer and more detailed way, showing the importance of the same to the calculation, showing its historical aspects from the creation, making it more meaningful the study of (TFC). Through a bibliographical research it is exposed the origin of the TFC from the antiquity and its development until century XVII, as well as its formalization in Century XIX. In the demonstration, the connection between Differential Calculus and Integral Calculus is discussed explicitly with reference to calculation books. The applicability part shows how the Fundamental Theorem of Calculus can be very useful in our day-to-day situations, not only in mathematics but also in the most varied areas such as: physics, astronomy, economics, engineering, medicine, chemistry, assisting in problem solving. In this sense, a volume application was made using the TFC to find the volume of a cup.

KeyWords: Fundamental Theorem of Calculus, Origin, History, Application

Sumário

Introdução

Historicamente o nascimento do cálculo vem da necessidade da resolução de problemas de cálculos de áreas de figuras e métodos para traçar retas tangentes em pontos dados em uma curva. Neste contexto, nasce um resultado bastante interessante, conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo, o qual será posteriormente apresentado, bem como sua demonstração.

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) traduz a ideia central do Cálculo Diferencial e Integral, que é o elo entre esses dois cálculos. Este teorema mostra que a integração e a diferenciação são operações inversas, chegando à conclusão de que os problemas de cálculos de área sob um gráfico de uma função em um intervalo e o problema de construção de uma reta tangente num ponto da função estão interligados e podem ser resolvidos juntos.

Este trabalho é constituído de três capítulos bem definidos:

O capítulo 1, conta a história desde a origem do Teorema Fundamental do Cálculo, a motivação para se adotar a história do Teorema Fundamental do Cálculo neste trabalho, é que o enfoque histórico permite ao leitor descobrir a gênese dos conceitos e métodos presentes na teoria, ou seja, permitirá fazer relação das ideias matemáticas desenvolvidas desde a origem, proporcionando uma visão dinâmica da evolução do teorema.

A inserção de fatos do passado é uma dinâmica bastante interessante para introduzir um determinado conteúdo matemático, visto que o leitor pode ver a matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca por soluções de problemas do cotidiano, estabelecendo comparações entre os processos matemáticos do passado e do presente. Segundo D'Ambrosio (1999):

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D'AMBROSIO, 1999, p. 97)

O historiar a matemática é interessante, pois permite o sujeito perceber que o pensamento matemático se desenvolveu de forma contextualizada, da necessidade de indivíduos para a sobrevivência, construído no cotidiano da existência humana. De acordo com Lorenzato (2008), "quase todo o desenvolvimento do pensamento matemático se deu por necessidade do homem diante do contexto da época".

O aspecto histórico é um recurso que instiga a curiosidade do ledor, respondendo alguns questionamentos, deixando de ser apenas um recurso informativo, mostrando como os conhecimentos matemáticos foram gerados, organizados e difundidos, essenciais para desenvolver uma visão crítica em relação à teoria.

No Capítulo 2 é enunciado e demonstrado o teorema trazendo alguns exemplos, a utilização da demonstração é defendida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, afirmando que "[...] a demonstração é, portanto, não apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas muitas vezes uma forma de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados".

A demonstração está presente na consolidação da matemática como área do conhecimento, no passado as deduções matemáticas eram destituídas de rigor; se faltar rigor em uma demonstração matemática, ela será defeituosa.

> Até os últimos anos do século XIX, a noção de demonstração era primordialmente, de carácter psicológico. Uma demonstração era uma atividade intelectual que objetivava convencer o próprio indivíduo e outras pessoas da verdade da sentença em discussão; mais especificamente demonstrações eram utilizadas no desenvolvimento de uma disciplina matemática para convencer o próprio indivíduo e os outros de que a sentença em discussão deveria ser aceita como verdadeira, uma vez que certas sentenças haviam sido aceitas como tal. Não havia restrições com respeito aos argumentos usados na demonstração, exceto que eles deveriam ser intuitivamente convincentes. (PIETROPAOLO, 2005, p. 54).

O conhecimento matemático está baseado em demonstração, não em observação, que tem por finalidade estabelecer a verdade em um enunciado e convencer sobre a veracidade do que é demonstrado, tornando-se um aspecto central na matemática, fazendo com que a matemática seja diferente das outras ciências naturais.

A Demonstração é necessária para o estabelecimento da verdade matemática, assumindo uma dimensão explicativa aplicada a uma teoria.

> [...] na maior parte dos casos em que os resultados em questão são intuitivamente evidentes por si mesmos e/ou são apoiados numa quase empírica evidência convincente, a função da demonstração para os matemáticos não é a de verificação, mas sim a de explicação [...] (DE VILLIERS, 2001, p. 33).

Para finalizar, o Capítulo 3 traz uma aplicação do teorema. Para Rosa (1998) "Estudar desde a necessidade que levou o homem de determinada época a pensar sobre determinado assunto até as aplicações práticas levaria o aluno a se motivar mais, e ter mais prazer, pois as apresentações ficariam mais claras".

> Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver (BRASIL, 1999, p. 211).

A parte de aplicabilidade mostra como o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser bastante útil no nosso dia-a-dia, em diversas situações, não só na matemática como também nas mais variadas áreas: física, astronomia, economia, engenharia, medicina, química, auxiliando na resolução de problemas.

O trabalho é encerrado com as considerações finais.

Objetivos

Objetivo Geral: Explanar o Teorema Fundamental do Cálculo de forma mais clara e detalhada, evidenciando seus aspectos históricos desde a criação, bem como sua importância nas aplicações.

Objetivos Específicos:

- Recontar a história do Teorema Fundamental do Cálculo remontando suas origens.
- Enunciar e demonstrar minuciosamente o teorema, com um cuidadoso e extenso desenvolvimento lógico da teoria.
- Evidenciar a importância do mesmo na resolução de problemas em diversos ramos do conhecimento, através de uma aplicação.

Metodologia

Este trabalho apresenta uma abordagem qualitativa, tendo como norteamento uma pesquisa aplicada, expondo o Teorema Fundamental do Cálculo em um encadeamento de conhecimentos históricos e matemáticos sequenciados.

Para desenvolver este trabalho foi feita uma pesquisa bibliográfica a partir do levantamento de referências teóricas tomando como base algumas obras bastante aceitas nos meios acadêmicos, bem como estudos de artigos científicos que fundamentam a pesquisa.

No desenvolvimento do Capítulo 1 foi tomado como referência, baseando-se nos registros históricos de Boyer (1974) *"História da Matemática"* e Eves (2011) *"Introdução à História da Matemática"*. Desse modo procurou-se analisar a maneira como cada autor reconta a história do TFC buscando manter uma linha lógica nos acontecimentos dos fatos. Nessa pesquisa bibliográfica, foram elencadas secções que nortearam o desenvolvimento desse teorema que seguiu um longo percurso desde a antiguidade até o século XIX, destacando os estudiosos envolvidos.

A demonstração, Capítulo 2, foi baseada em livros de Cálculo como Stewart (2010) *"Cálculo Vol. 1"*, Thomas (2002) *"Cálculo Vol. 1"* e Análise de Elon Lages (2011) *"Análise Real Vol. 1"*. Com base nas fundamentações foi desenvolvida a demonstração do TFC; a partir das análises dos livros de cálculo, observou-se que as demonstrações remetem a outros capítulos do livro, com isso neste trabalho foi unificada em um único capítulo, dividida em duas partes, facilitando o entendimento, através de uma construção lógica e estruturada, sem precisar do leitor remeter a outras partes, sempre de forma clara e objetiva, apresentando a ideia geral dos conhecimentos matemáticos necessários para a compreensão do teorema, destacando todos os teoremas utilizados na demonstração, finalizando o capítulo com exemplos desse teorema.

Finalizando o desenvolvimento do trabalho, no capítulo 3 foi feito uma aplicação relacionada ao cálculo de volume, na qual foi calculado o volume de uma taça utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, com auxílio do software *Geogebra*.

Capítulo 1

Origem do Teorema Fundamental do Cálculo

Uma curiosidade sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, é um dos poucos teoremas famosos da matemática que não leva nome de ninguém associado ao mesmo. Por não ser um teorema puramente individual, foi feito um estudo detalhado do surgimento do Teorema Fundamental do Cálculo, mostrando em uma linha cronológica, como foi o percurso até chegar ao que temos hoje a respeito deste importantíssimo teorema, destacando os estudiosos matemáticos envolvidos nessa trajetória. Este teorema conta com a contribuição de vários matemáticos, como por exemplo, Eudoxo (390 - 320 a.C.), Arquimedes (287 - 212 a.C.), Apolônio (262 - 190 a.C.), Torricelli (1608 - 1647), Fermat (1601 - 1665), Descartes (1596 - 1650), Gregory (1638 - 1675), Barrow (1630 - 1677), Newton (1642 - 1727), Leibniz (1646 - 1716), Cauchy (1789 - 1857), dentre outros. Este capítulo foi dividido em seções contemplando cada matemático que fez parte dessa história, seguindo uma linha de raciocínio.

1.1 Eudoxo (390 - 320 a.C.)

O desenvolvimento do cálculo seguiu um longo percurso, iniciado cerca de três séculos antes de Cristo com os antigos gregos.

> “[...] o Período Helênico grego (c.800 – 336 a.C.) testemunhou realizações intelectuais extraordinárias. Nas ágoras de Atenas e outras cidades-Estados, os filósofos ensinavam seus discípulos e lançaram novas ideias. [...] Foi também nesse período que se assistiu pela primeira vez ao emprego do raciocínio dedutivo matemático – o que se deve a Thales de Mileto (640? – 564? a.C.) e Pitágoras (586? – 5000? a.C.), [...]” (EVES, 2011, p. 93).

Sobre essas duas figuras, Boyer (1974, p. 33) afirma que, “[...] durante o sexto século a.C. apareceram dois homens, Thales e Pitágoras, que tiveram na matemática o papel de Homero e Hesíodo na literatura”.

Os primeiros passos para o desenvolvimento de métodos de aproximação para área e volume foram dados pelos gregos antigos. Uma das mais importantes contribuições gregas para o cálculo veio de Eudoxo de Cnidus (390 - 320 a.C.) que estudou com Arquitas, seguidor de Pitágoras. Eudoxo quem desenvolveu o *“Método da Exaustão”*, admitindo que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente:

> Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegara por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2011, p. 419).

Esse método é considerado a mola propulsora do Cálculo Integral. Como um exemplo do método da exaustão, temos a quadratura do círculo que consiste em inscrever e circunscrever polígonos regulares cujas áreas são conhecidas, no círculo, e, à medida que a quantidade de lados desses polígonos aumenta, teremos uma aproximação real da área do círculo. Sobre esta questão Boyer afirma o seguinte:

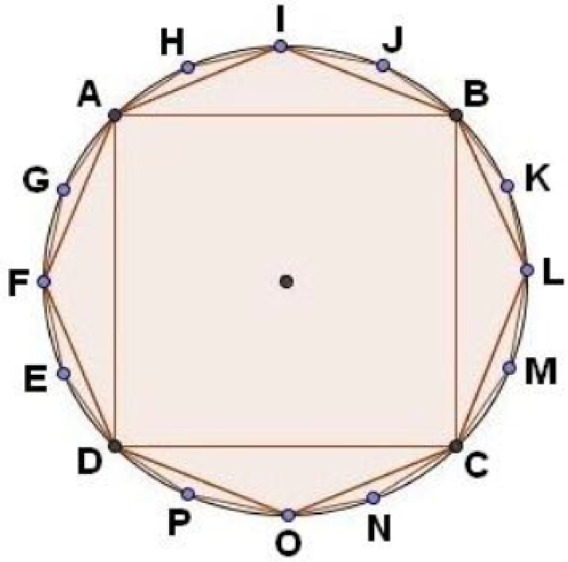
> Matemáticos anteriores parecem ter sugerido que se tentatasse inscrever e circunscrever figuras retilíneas dentro e fora da figura curva, e ir multiplicando-se indefinidamente o número de lados; mas não sabiam como terminar o argumento, pois não conheciam o conceito de limites. Segundo Arquimedes foi Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes e que serviu de base para o método da exaustão [...]. O lema ou axioma, diz que, dadas duas grandezas que tem uma razão (isto é, nenhuma delas sendo zero), pode-se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra. Esse enunciado eliminava um nebuloso argumento sobre segmento de retas indivisíveis, ou infinitésimos fixos, que às vezes aparecia. (BOYER, 1974, p. 67)

A quadratura consiste em construir um quadrado que tivesse a área equivalente a área do polígono que se desejava medir. Em se tratando de área de uma figura com lados constituídos de segmentos de curva, como no caso da circunferência, era possível encontrar somente uma aproximação para estas áreas, através do método da exaustão.

> O método da exaustão é um procedimento que consiste em esgotar a região cuja área se quer calcular por meio de outras áreas conhecidas. A ideia central está em: dada uma região cuja área se pretende determinar, nela se inscrever regiões poligonais, cuja área é conhecida, e que se aproximem da primeira. A seguir, escolhe-se outra região poligonal que dê uma melhor aproximação e o processo continua, tomando polígonos com número cada vez maior de lados, de modo a "cobrir" toda a região dada. (BOYER, 1974, p. 67)

A figura 1.1, ilustra a idéia central deste método, iniciou-se com um polígono de quatro lados até um polígono de 16 lados:

Figura 1.1: Quadratura do Círculo.



Fonte: Eves (2011)

1.2 Arquimedes (287 - 212 a.C.)

Tempos depois o método da exaustão apresentado, foi aprimorado por Arquimedes (287 - 212 a.C.), tornando-se uma importante ferramenta no cálculo de áreas, superfícies e volumes. Arquimedes nasceu e morreu em Siracusa, Grécia, situada na ilha da Sicília, foi um dos maiores matemáticos da Antiguidade, passou um tempo no Egito onde provavelmente estudou com sucessores de Euclides (330 - 260 a.C.) em Alexandria; seus pais eram astrônomos.

Figura 1.2: Arquimedes (Culver Service).

Fonte: Eves (2011)

Arquimedes (287 - 212 A.C.) é considerado um dos maiores cientistas de todos os tempos, superando matemáticos que o antecederam, seus métodos eram bastante originais, sem falar no rigor das demonstrações. Há vários trabalhos remanescentes de Arquimedes nas áreas de geometria plana: *A medida de um círculo, A quadratura da parábola e Sobre as espirais*; geometria espacial: *Sobre a esfera e o cilindro e Sobre os cones e os esferóides*; matemática aplicada: *Sobre o equilíbrio de figuras planas e Sobre os corpos flutuantes.* Muitos de seus trabalhos não foram preservados.

Um dos trabalhos mais importantes de Arquimedes, registrado na história da matemática, foi encontrado relativamente há pouco tempo, em 1906 na cidade de Constantinopla, era uma espécie de carta destinada a Erastóstenes escrita em um pergaminho, fornecendo informações acerca do "método", o método de equilíbrio, que Arquimedes usava para resolver problemas de áreas e volumes:

> [...] corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centróide conhecidos. (EVES, 2011, p. 422)

As primeiras concepções que se baseiam grande parte das ideias que deram origem ao Cálculo Integral estão presentes em dois desses trabalhos, que são: A *quadratura da parábola* e *Sobre as espirais.*

Em particular, o exemplo da quadratura da parábola, exposto por Arquimedes, tratava-se de calcular a área da região delimitada por um arco de parábola. Ele mostrou "que a área da região parabólica é quatro terços da área do triângulo inscrito de mesma base e vértice no ponto onde a tangente é paralela à base. A dedução envolve a soma de uma série geométrica convergente". (EVES, 2011, p. 194)

1.3 Apolônio (262 - 190 a.C.)

Séculos depois, Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) se inspiraram nas duas seguintes obras (A *quadratura da parábola* e *Sobre as espirais*) juntamente com o tratado de Apolônio (262 - 190 a.C.), intitulado *Tangências.* A partir do desenvolvimento de seus estudos chegamos, hoje, ao famoso Teorema Fundamental do Cálculo (Apolônio nasceu em Perga, no sul da Ásia Menor, foi para Alexandria a fim de estudar com os sucessores de Euclides e acabou morando lá por um longo período).

> [...] foi a matemática pura de Apolônio que permitiu cerca de 1800 anos mais tarde, os "Princípia de Newton"; esse, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à Lua fosse possível. (BOYER, 1974, p.111)

A concepção de tangência a uma curva, também está envolvida na origem do Teorema Fundamental do Cálculo, que ao longo dos séculos foi objeto de estudo de muitos matemáticos. Este problema está associado à busca da reta que mais se aproxima de uma curva em um ponto. Devemos a Apolônio (262 - 190 a.C.) e a Arquimedes (287 - 212 a.C.) todo o mérito nesse estudo, no qual o primeiro apresenta em seu tratado de Tangências, métodos para determinar tangentes a uma circunferência, hipérbole e elipse; já o segundo determina a reta tangente a um espiral num ponto dado. Esses dois matemáticos influenciaram fortemente no desenvolvimento matemático.

1.4 Torricelli (1608 - 1647)

Muito tempo se passou desde as ideias de Arquimedes até a próxima contribuição para o avanço do cálculo infinitesimal, apenas no século XVI.

Evangelista Torricelli (1608 - 1647), nasceu perto de Faenza, Itália e morreu em Florença. Foi aluno de Galileu (1564 - 1643) por pouco tempo. Destacou-se em dois métodos de cálculo para área de uma região delimitada por uma ciclóide (Galileu apreciava a ciclóide pela forma graciosa que ela proporcionava a arcos em arquitetura). Galileu tentou mostrar que a área sob um arco se aproximava bastante, mas, não era exatamente igual a três vezes a área de um círculo. Mas em 1644, Torricelli publicou a primeira demonstração matemática de que a área é exatamente o triplo da área do círculo gerador, usando métodos infinitesimais como o método dos indivisíveis de Cavalieri (1598 - 1647) e o método da exaustão de Arquimedes-Eudoxo. Em paralelo ele também publicou a construção da tangente em um ponto genérico da cicloide empregando o método de composição de movimentos, já usado por Galileu (1564 - 1643) e Descartes (1596 - 1650). Todos esses resultados foram publicados por Torricelli em 1644 na obra *"De Parabole"*.

Figura 1.3: Evangelista Torricelli (Coleção David Smith)

Fonte: Eves (2011)

Segundo Boyer (1974), se Torricelli não tivesse morrido tão cedo, é possível que se tornasse o inventor do cálculo. Visto que a maior parte de seus trabalhos não tinha sido publicada, muitas de suas ideias foram transmitidas por seus seguidores, das quais podemos citar Issac Barrow (1630 - 1677), James Gregory (1638 - 1675) e Stefano Angeli (1623 - 1697).

1.5 Descartes (1596 - 1650)

O século XVII foi extremamente produtivo para matemática, no qual foram estabelecidas duas áreas importantes, a *Geometria Analítica* e o *Cálculo Infinitesimal*. "Do século dezessete em diante, portanto, a matemática desenvolve-se mais em termos de lógica interna do que sob a ação de forças econômicas, sociais ou tecnológicas, [...]"(BOYER, 1974, p. 245).

Os nomes Pierre de Fermat (1601 - 1665) e René Descartes (1596 - 1650), estabeleceram de forma independente uma relação entre a álgebra e a geometria, ambos estão no centro das mudanças que culminaram na invenção do que chamamos hoje de "geometria analítica".

Rene Descartes nasceu perto de Tours em 1596, estudou em uma escola jesuíta em La Fleche, deixou a escola em 1612 e foi para Paris onde passou a dedicar parte de seu tempo ao estudo de matemática, tornou-se militar por vários anos, depois continuou seus estudos matemáticos, vindo a morrer em Estocolmo em 1650.

Figura 1.4: René Descartes (Coleção David Smith)

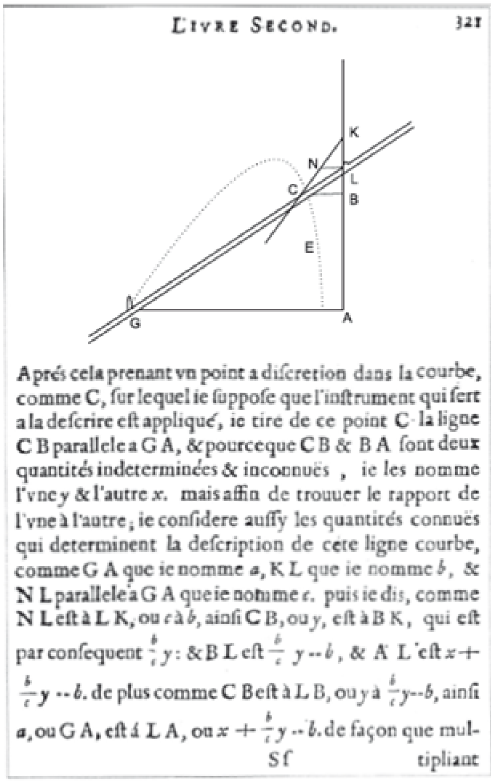
Fonte: Eves (2011)

Um dos principais escritos de Descartes foi um tratado filosófico intitulado *"Discours de la Methode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Verite dans les Sciences"* (Discurso do método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências); na qual acompanhava-se três apêndices: *La dioptrique, Les météores e La géométrie*, publicados em 1963. Dos três, apenas o último foi a única publicação matemática de Descartes, e é considerado o mais famoso. Sendo assim a contribuição de Descartes para a geometria analítica aparece neste último apêndice.

La géométrie, é dividido em três partes: na primeira parte são mostrados alguns dos princípios da geometria algébrica, despontando um avanço em relação aos gregos; a segunda parte trazia uma classificação de curvas, bem como um método para construir tangentes a estas curvas; e por último a terceira parte aborda uma forma de resolver equações de grau superior a dois, usando o que é conhecido como *regra de sinais de*

Descartes.

Figura 1.5: Uma página de *La géométrie* de Descartes (1637)



LIVRE SECOND. 321

Aprés cela prenant vn point a discretion dans la courbe, comme C, sur lequel ie suppose que l'instrument qui sert a la descrire est appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A sont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie considere aussy les quantités connuës qui determinent la description de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L est à L K, ou c à b, ainsi C B, ou y, est à B K, qui est par consequent $\frac{b}{c}y$: & B L est $\frac{b}{c}y - b$, & A L est $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B est à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainsi a, ou G A, est à L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que mul-

Sf tipliant

Fonte: Eves (2011)

1.6 Fermat (1601 - 1665)

Pierre de Fermat, nasceu em Beaumont de Lomagne, perto de Toulouse, em agosto de 1601. Filho de um comerciante de couro, alcançou o posto de conselheiro do parlamento de Toulouse, como advogado humilde, reservou seu tempo de lazer para se dedicar a matemática. Suas contribuições para matemática foram grandiosas ao ponto de ser considerado o maior matemático francês do século XVII. Morreu em Castres em janeiro 1665. Podemos destacar uma das suas mais importantes contribuições à matemática, é a fundação da moderna teoria dos números.

Fermat foi fortemente influenciado pelas obras gregas, com destaque para obras de Apolônio. O objetivo de Fermat era usar a linguagem algébrica para expressar os problemas geométricos tratados por Apolônio, realizando um estudo amplo de lugares geométricos. Apesar de ambas as obras de Fermat e Descartes tratarem de problemas geométricos, os objetivos eram distintos. A primeira obra de Fermat foi *Ad locos planos* *et solidos isagoge* (Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos), suas obras são consideradas mais didáticas comparadas a de Descartes. Fermat apresentou um trabalho sobre tangentes e quadratura definindo analiticamente muitas curvas novas, nas suas obras Fermat a partir de uma equação estudava o lugar geométrico, ao contrário de Descartes que partia do lugar geométrico e encontrava sua equação.

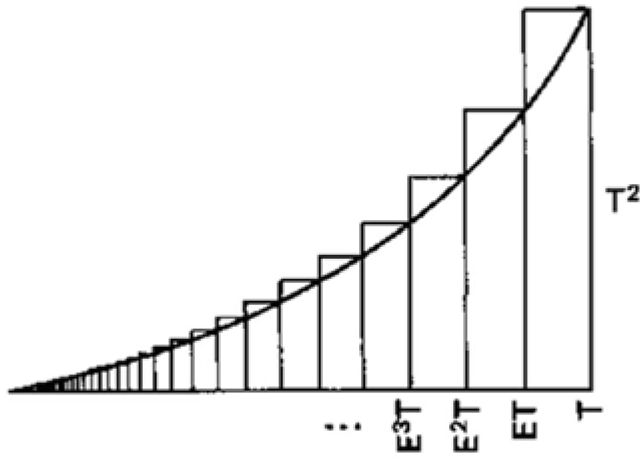
Figura 1.6: Pierre De Fermat (Coleção David Smith)

Fonte: Eves (2011)

Alguns anos mais tarde Fermat escreve um tratado, que não chegou a ser publicado em vida, chamado *"Método para achar máximos e mínimos"*, esse método é bem semelhante ao utilizado nos cálculos atuais. Segundo Boyer (1974), "Há plena razão para se reconhecer, portanto, como Pierre Simon Laplace, que Fermat foi o inventor do Cálculo Diferencial, [...]", como também contribuiu na evolução do Cálculo Integral, seu método era bastante apurado, se aproximando bem da Integral de Riemann.

Ficou evidente que Fermat descobriu os princípios básicos de derivação e integração. Já estabelecidos, a geometria analítica, reta tangente a uma curva, compreensão de máximos e mínimos de função, tudo isso escrito algebricamente, permitiu um avanço no cálculo que até então era impossível.

Figura 1.7: Integral de Fermat)



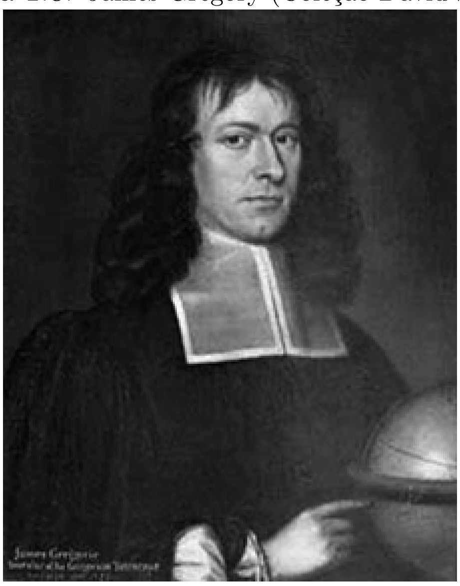
Fonte: Eves (2011)

1.7 Gregory (1638 - 1675)

Para a construção do Teorema Fundamental do Cálculo, foram cruciais as contribuições de James Gregory (1638 - 1675), Isaac Barrow (1630 - 1677), já citados anteriormente neste trabalho.

James Gregory (1638 - 1675), matemático escocês, se interessou também pela física publicando alguns trabalhos nessa área, se tornou professor de matemática das Universidades de Saint Andrews e Edimburgo. Gregory foi um dos predecessores de Newton (1642 - 1727) e morreu ainda jovem com trinta e seis anos de idade.

Figura 1.8: James Gregory (Coleção David Smith)



Fonte: Eves (2011)

Em 1663 Gregory foi para Itália passando a estudar ao lado de um grande matemático, Stefano degli Angeli (1623 - 1697), aprendeu os métodos italianos sobre indivisíveis, quadraturas de espirais, parábolas e hipérboles. Ainda na Itália estudou as expansões de funções em séries de potências e dos processos infinitos em geral, de mãos deste estudo, em 1667 publicou a obra *Vera circuli et hyperbolae quadratura* na qual apresentava resultados importantes para a Análise Infinitesimal generalizando o algoritmo de Arquimedes (287 - 212 a.C.) *"método da exaustão"* , sendo aplicado na quadratura de elipses e hipérboles. (BOYER, 1974, p. 282).

No ano seguinte em 1668, publicou a obra *"Geometriae pars Universalis"*, de caráter basicamente geométrico, difícil se ser compreendido, contendo operações para determinar tangente, arco, área e volume, presentes em um trabalho de Cálculo Infinitesimal.

Segundo Boyer (1974), se Gregory "[...] tivesse expressado sua obra analiticamente, poderia ter se antecipado a Newton (1642 - 1727) na invenção do Cálculo, pois conhecia potencialmente todos os elementos fundamentais". Gregory demonstrou que tinha clara compreensão da relação inversa entre o problema de quadratura e de tangente, como é conhecido hoje pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

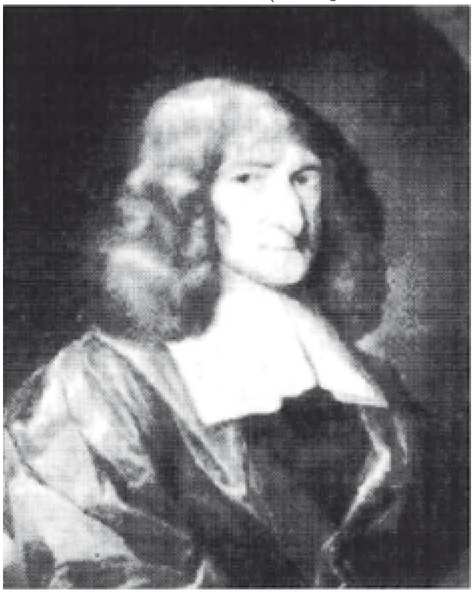
1.8 Barrow (1630 - 1677)

Contemporâneo de James Gregory, Isaac Barrow nasceu em Londres, em 1930, terminou seus estudos em Cambridge, onde faleceu em 1677. Era considerado um conservador em Matemática, por não gostar do formalismo da Álgebra. Editou obras de Euclides (330 - 260 a.C.), Apolônio (262 - 190 a.C.) e Arquimedes (287 - 212 a.C.) e, também, publicou suas próprias obras, *"Lectiones opticae"* em 1669 e *"Lectiones geometriae"* em 1670, ambas com a ajuda de seu discípulo Isaac Newton (1642 - 1727) (BOYER, 1974, p. 284), no prefácio dessas obras encontra-se agradecimentos a Newton. Apresenta uma abordagem muito próxima dos textos atuais de cálculo no que se refere ao processo moderno de diferenciação, mediante o uso do chamado *triângulo diferencial ou Infinitesimal.*

> Apesar de indícios tênues que apontam noutra direção, em geral considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra. Essa importante descoberta é conhecida como "teorema fundamental do cálculo"e aparece enunciada e provada nas "Lectiones"de Barrow. (EVES, 2011, p. 435)

As contribuições de Barrow foram de suma importância para o desenvolvimento do Cálculo, mais especificamente na construção de retas tangentes a curvas, utilizando métodos geométricos nas suas demonstrações, seus trabalhos eram baseados em curvas, tangentes e quadraturas.

Figura 1.9: Isaac Barrow (Coleção David Smith)



Fonte: Eves (2011)

1.9 Newton (1642 - 1727)

A esta altura o Cálculo diferencial e integral apresentava-se bem desenvolvido, já se tinham feito muitas integrações, quadraturas, muitas tangentes a curvas já haviam sido construídas, como também muitas retificações com o passar dos tempos. O teorema fundamental fora reconhecido bem como a ideia de limite.

> Faltava ainda a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria. Foi a primeira dessas duas coisas, ou seja, a criação de um "cálculo" manipulável e proveitoso, que Newton e Leibniz, trabalhando independentemente, deram sua contribuição. Assim, embora Newton e Leibniz tenham tido muitos precursores, a criação do cálculo em geral é atribuída a eles. (EVES, 2011, p. 435)

Os pioneiros na formulação de métodos para o cálculo foram Eudoxo e Arquimedes, as ideias dos cálculos surgiram aos poucos, através de contribuições ao longo dos séculos por vários matemáticos. Desde os primórdios na Grécia Antiga até Newton (1642 - 1727) e Leibniz (1646 - 1716) se passaram mais de dois mil anos. O estabelecimento da relação de operação inversa no processo de derivação e integração veio através de Newton e Leibniz, tendo como resultado o Teorema Fundamental do Cálculo.

> [...] o Cálculo Diferencial e Integral não finalizou nem se iniciou com Newton e Leibniz, mas cabe a eles o mérito da "invenção" do Cálculo Infinitesimal, Newton estabeleceu e unificou vários processos de cálculos e Leibniz ligou-os através de uma notação eficaz e de um novo cálculo operacional. (BARON, 1985, p. 5)

Isaac Newton nasceu em 1642, na aldeia de Woolsthope, Inglaterra. Filho de agricultor, tinha grande habilidade em construir miniaturas mecânicas, construiu um moinho pequeno que triturava trigo com a força motriz de um rato, como também um relógio movido a água. Estudou no Trinity College, Cambridge, com atenção voltada para matemática, inspirado em um livro de astronomia na qual teve contato. Devido seu interesse pela matemática estudou os *Elementos de Euclides* (330 - 260 a.C.), depois *La géométrie* de Descartes (1596 - 1650), bem como trabalhos de Kepler, Viète e Wallis, conheceu tambem obras de Galileu, Fermat (1601 - 1665), Huygens entre outros.

Newton passou a criar seus próprios trabalhos na matemática, descobriu o teorema binomial, inventou o método dos fluxos, sistematizou o cálculo infinitesimal, etc. A universidade de Cambridge teve suas portas fechadas por um período devido a uma violenta peste bubônica, Newton aproveitou este tempo e estudando em casa na sua cidade natal fez suas primeiras contribuições, entre 1665 e 1666.

As primeiras descobertas de Newton eram bem semelhantes as de James Gregory (1638 - 1675) que na mesma época estava fazendo na Itália, embora eles não soubessem.

Das contribuições de Newton, as que tiveram importância na formalização do Teorema Fundamental do Cálculo foram o teorema binomial e a sistematização do cálculo infinitesimal.

Em 1667, Newton retornou para Cambridge, em 1669 assume a cátedra lucasiana após a renúncia de Barrow, iniciando um período de docência na universidade. Em 1687, publicou o livro *"Philosophiae naturalis principia mathematica"* depois de muita luta por parte de seus colegas, considerada uma das maiores obras científicas de todos os tempos.

Em 1711, Newton publicou *"De analysi per aequationes numero terminorum infinitas"* (Sobre análises para equações com infinitos termos), foi de grande relevância esta publicação, pois, trazia em sua essência uma sistematização sobre o Cálculo Infinitesimal. Para Boyer (1974), parece ter sido a primeira vez na história da matemática que, a "área" foi registrada por meio de um processo inverso do que hoje conhecemos como diferenciação.

Figura 1.10: Isaac Newton (Coleção David Smith)

Fonte: Eves (2011)

Newton relacionou o problema das séries infinitas com o das taxas de variação e chamou de "meu método" (Methodus fluxionum et serieum infinitorum). "[...] resultaram de saber exprimir funções em termos de séries infinitas – a mesma coisa Gregory estava fazendo na Itália pela mesma época, embora dificilmente Newton pudesse saber disso." (BOYER, 1974, p. 287)

O "método dos fluxos", assim chamado, foi escrito em 1671, mas, sua publicação se deu apenas em 1736. Podemos destacar neste método criado por Newton várias aplicações como: tangentes a curvas, pontos de inflexão, concavidades de curvas, quadraturas, deteminação de máximos e mínimos entre outras.

> Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de "fluente" (uma quantidade que flui) e a sua taxa de variação dava o nome de "fluxo" do fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y, então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$. Em notação moderna esse fluxo equivale a dy/dt, onde t representa o tempo. A despeito dessa intromissão do tempo em geometria, pode-se excluir a ideia de tempo, admitindo-se que alguma quantidade, digamos, a abscissa do ponto móvel, cresça de maneira constante. Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava "fluxo principal", podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal. (EVES, 2011, p. 439)

Dessa maneira Newton enunciou os problemas fundamentais do cálculo: à relação das quantidades fluentes é inversa à relação de suas fluxões, implicitamente é o que chamamos hoje de Teorema Fundamental do Cálculo.

Newton faleceu com 84 anos, em 1727 acometido por uma doença, foi sepultado na Abadia de Westminster. Após sua morte, por mais de um século pairavam dúvidas sobre seus trabalhos, causando preocupações e controvérsias entre os estudiosos da época. Desde Arquimedes até o século XVII, foi através de Newton que a ideia de diferenciação e integração como operações inversas foi firmemente estabelecida. Nos últimos anos de vida Newton perdeu o sossego devido uma polêmica com Leibniz, para qual levaria o mérito da criação do cálculo.

1.10 Leibniz (1646 - 1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz, nasceu em Leipzig em 1646, na Alemanha. Adversário de Newton na invenção do cálculo, um grande gênio do século XVII. Desde criança mostrou grande interesse pela matemática, embora menino desenvolveu suas primeiras ideias que abrangia uma matemática universal *"characteristica generalis"*, estruturada em regras formais. Ingressou na Universidade aos quinze anos, obtendo título de bacharel, além de matemática, estudou direito, filosofia e teologia, tendo conseguido conhecimento universal. Seu grau de doutor em direito pela Universidade de Leipzig foi negado, devido sua pouca idade, se mudou para Nuremberg onde obteve seu diploma de doutor na Universidade de Altdorf, em seguida se engajou no serviço diplomático até sua morte em 1716.

Figura 1.11: Gottfried Wilhelm Leibniz (Coleção David Smith)

Fonte: Eves (2011)

Em uma de suas missões diplomáticas Leibniz foi a Paris, em 1672, onde teve a oportunidade de conhecer Huygens, grande matemático e físico, tendo aulas de matemática do mesmo. No ano seguinte 1673, suas missões o direcionaram para Londres, conquistando amizades de Oldenburg e Collin, se tornou membro da Royal Society onde apresentou uma máquina de calcular de sua criação. Durante sua estada por Londres conseguiu um exemplar da obra *"Lectiones Geometricae"* de Barrow (1630 - 1677) nesse período completou a descoberta do Cálculo Infinitesimal. O uso das séries infinitas foi tão importante para os trabalhos de Leibniz como foi também para os trabalhos de Newton.

De acordo com Eves (2011), Antes de deixar Paris, Leibniz já havia descoberto o Teorema Fundamental do Cálculo, desenvolvido grande parte de sua notação para o assunto, e estabelecido muitas das fórmulas elementares de diferenciação que compunham seu Cálculo Infinitesimal.

> Leibniz inventou o seu cálculo entre 1673 e 1676. Usou pela primeira vez o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra latina "summa" (soma) em 29 de outubro de 1675. O objetivo era indicar uma soma de indivisíveis. Algumas semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como o fazemos hoje, assim como escrevia $\int x\,dy$ e $\int y\,dx$ para integrais. Seu primeiro artigo sobre o calculo diferencial só apareceu em 1684. Nele se define dx como um intervalo finito arbitrário e dy pela proporção
>
> $$dy : dx = y : \text{subtangente}.$$
>
> Leibniz deduziu muitas das regras de diferenciação que os alunos aprendem logo no início de um curso de cálculo. A fórmula da derivada enésima do produto de duas funções é conhecida em geral por "regra de Leibniz". (EVES, 2011, p. 443)

No cálculo infinitesimal de Leibniz sua notação foi bastante aceita, mas seu cálculo era considerado mais complicado em relação ao desenvolvido por Newton. Em 1686, Leibniz publicou um artigo no *Acta Eruditorum* em que apresenta o seu cálculo integral e enfatiza a relação inversa entre diferenciação e integração. (BOYER, 1974, p. 296)

Newton e Leibniz são considerados fundadores do Cálculo Infinitesimal, que tem como elemento central de sistematização dos métodos o Teorema Fundamental do Cálculo, como é conhecido atualmente. Apesar de ter sido Newton o primeiro a criar uma teoria de cálculo bem desenvolvida, Leibniz foi o primeiro a tornar público seus resultados que eram bem difundidos no mundo científico. No início do século XVIII houve uma verdadeira guerra da parte de alguns seguidores de Newton contra os trabalhos de Leibniz, acusando-o de plágio. Mas é perceptível que os trabalhos de Newton antecederam os de Leibniz, embora as divulgações não, Leibniz fez suas publicações entre 1684 e 1686, no periódico *Acta Eruditorum*, ao contrario de Newton que teve sua primeira publicação do assunto somente em 1687, um ano após. Leibniz sempre desejou uma absolvição da acusação de plágio e o reconhecimento de seu trabalho.

Apenas no início do século XIX quando os manuscritos originais de Leibniz foram encontrados, depois de um estudo meticuloso feito por vários estudiosos da época, foi resolvido este constrangimento, chegaram à conclusão que Newton e Leibniz desenvolveram independentemente o Teorema Fundamental do Cálculo, dividindo igualmente a honra da criação do Cálculo Infinitesimal.

1.11 Cauchy (1789 - 1857)

No século XIX, teve início o rigor matemático, com destaque à Cauchy (1789 - 1857) que redesenvolveu os conceitos fundamentais do cálculo em bases aceitáveis, rigorosamente falando.

Augustin Louis Cauchy, nasceu em 1789 na cidade de Paris, França. Foi educado primeiramente em casa, em seguida na École Centrale du Pantheón. No ano de 1805 entrou na Escola Politécnica, ganhando admiração de Lagrange e Laplace, tempos depois se tornou professor da mesma. Cauchy escreveu bastante sobre matemática pura e aplicada, publicou vários livros e artigos longos. Grande parte das escritas atuais dos textos universitários na parte do cálculo deve-se a Cauchy. Após a revolução de 1830 foi obrigado a abandonar seu cargo de professor na Escola Politécnica, veio a falecer subitamente em 1857 com 68 anos de idade.

Figura 1.12: Augustin-louis Cauchy (Coleção David Smith)

Fonte: Eves (2011)

A prova formal do Teorema Fundamental do Cálculo que temos hoje foi formulada para funções contínuas por Cauchy (1789-1857), publicada em seu *"Lessons Given at the École Royale Polytechnique on the Infinitesimal Calculus"* (1823). Os argumentos usados nos livros de cálculos hoje foram os mesmos usados por Cauchy, de forma elegante e útil ele uniu rigorosamente os dois principais ramos do cálculo.

Este teorema é de suma importância para o cálculo, à prova disso que recebeu o nome de Teorema Fundamental, pois, traz consigo a ideia central do Cálculo Diferencial e Integral que é a conexão entre esses dois cálculos.

Finalizado a parte histórica e dando continuidade ao trabalho, será enunciado e demonstrado formalmente, no próximo capítulo, o Teorema Fundamental do Cálculo, dividido em duas partes.

Capítulo 2

Demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo

Encontra-se neste capítulo umas das partes principais do trabalho que consiste na demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, expondo também alguns exemplos.

O Teorema Fundamental do Cálculo como é abordado atualmente, é resultado do desenvolvimento do cálculo há mais de 3000 anos, como vimos, envolvendo vários estudiosos matemáticos, é um dos mais importantes teoremas da matemática. Este Teorema mostra que a integração e diferenciação são operações inversas, chegando à conclusão de que os problemas de cálculos de área sob um gráfico de uma função em um intervalo e o problema de construção de uma reta tangente num ponto da função estão interligados e podem ser resolvidos juntos. O teorema fundamental do cálculo minimiza o cálculo de integrais, que embora apesar de ser eficiente, era feito através de limites de somas exaustivas, sendo um processo não muito prático.

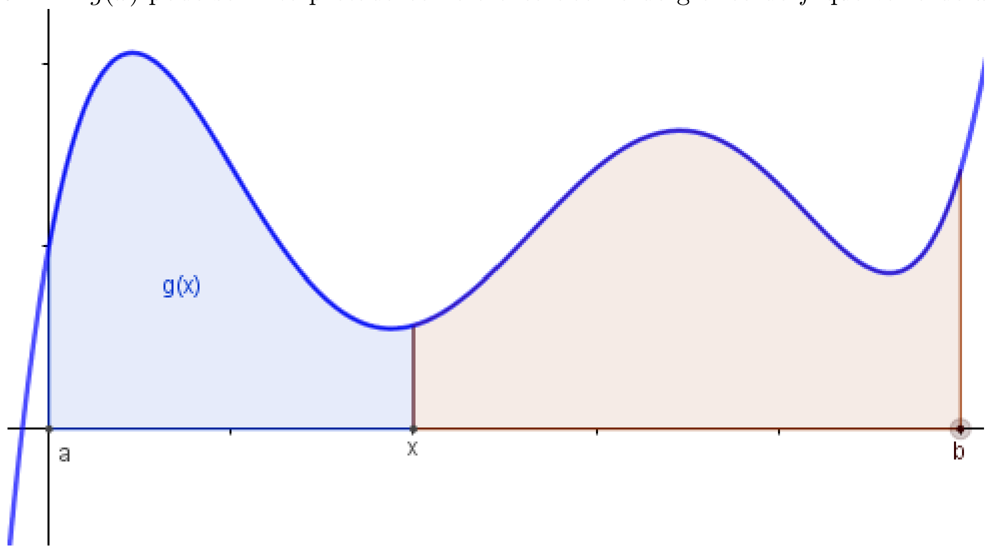
2.1 Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) – Parte I

Temos uma função, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, contínua. (Condição do teorema, as hipóteses são basicamente continuidade da função). Então f é integrável em qualquer subintervalo de $[a, b]$, a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma: $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, com $a \leq x \leq b$ é contínua em $[a, b]$, é diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$ (A derivada da g existe e vale exatamente o valor da função f). Obs.: g é chamada antiderivada ou primitiva de f.

Note que se integrarmos a função f no intervalo $[a, x]$, deixando a extremidade superior variar, e derivar em relação a essa variável, voltaremos a função f, já se fixarmos um número x, então a integral $\int_a^x f(t)\,dt$ é um número definido. De acordo com o teorema, a integral definida (Integral de Riemann) é uma operação inversa da operação de derivação. Com este resultado poderemos resolver esta integral sistematicamente, procurando a função g cuja derivada é uma função dada f.

Graficamente:

Figura 2.1: $g(x)$ pode ser interpretada como a área abaixo do gráfico de f que varia de a até x.



Se f for uma função positiva, então $g(x)$ pode ser interpretada como a área abaixo do gráfico de f que varia de a até x, onde $a \leq x \leq b$. Na verdade, conhecendo a integral, definimos a área como sendo a integral da função positiva no intervalo.

A partir da primeira parte da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo enunciada a seguir, fica fácil descobrir qual a função que nos dá a área da região variável.

Teorema 2.1 (TFC - Parte I)**.** *Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $a \leq x \leq b$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$. (STEWART, 2010, p. 359)*

Demonstração: Quando afirmamos que f é integrável, é um conceito relativamente complicado e difícil de ser demonstrado. Vamos assumir como verdadeira essa afirmação, pois o que interessa no momento é mostrar que a função definida satisfaz essa propriedade $[g'(x) = f(x)]$.

Usando a definição de derivada temos:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \tag{2.1}$$

Usando a definição da função g, temos

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} \tag{2.2}$$

Por hora, vamos assumir que $h > 0$. Utilizaremos a seguinte propriedade da integral, que nos diz como combinar integrais de uma mesma função em intervalos adjacentes:

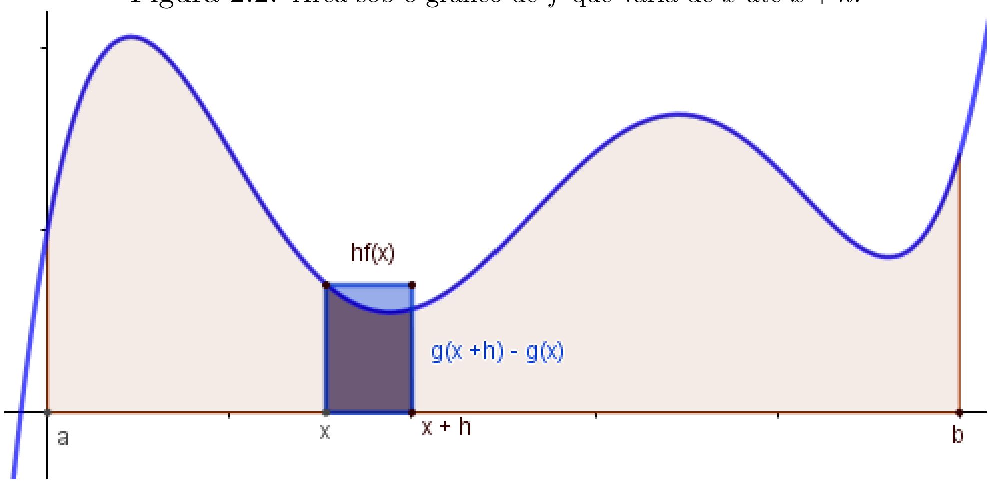
Propriedade 2.2.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad a < c < b$$

Podemos fazer uma interpretação geométrica da propriedade a partir da Figura 2.1; é fácil ver que a área sob o gráfico da função de a até x mais a área de x até b é igual à área total de a até b.

Na figura 2.2 abaixo está representada a área de estudo, que varia de x até $x+h$.

Figura 2.2: Área sob o gráfico de f que varia de x até $x+h$.



Como $f : [x, x+h] \to \mathbb{R}$ é contínua, definida em um intervalo fechado, portanto, pelo lema 2.3, f tem pontos de máximo e mínimo globais em $[x, x+h]$.

Lema 2.3 (Lema do Valor Extremo). *"Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(v)$ e um valor mínimo absoluto $f(u)$ em pontos $u, v \in [a, b]$".(STEWART, 2010, p. 254)*

Nestas circunstâncias, seja $u = f(u)$ mínimo global e $v = f(v)$ máximo global, $u, v \in [x, x+h]$, se $t \in [x, x+h] \Rightarrow f(u) \leq f(t) \leq f(v)$.

Precisamos enunciar outra propriedade da integral para darmos continuidade a nossa demonstração.

Propriedade 2.4. "Se $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, então $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$".

Esta propriedade nos afirma que a área sob o gráfico f é maior que a área do retângulo com altura m e menor que a área do retângulo com altura M. A demonstração para esta propriedade pode ser facilmente encontrada nos livros de cálculo.

Pela Propriedade 2.4, temos:

$$u(x+h-x) \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq v(x+h-x)$$

$$f(u)h \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(v)h$$

Uma vez que $h > 0$, dividiremos a desigualdade por h:

$$\frac{f(u)h}{h} \leq \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \leq \frac{f(v)h}{h}$$

$$f(u) \leq \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \leq f(v)$$

Esta desigualdade pode ser demonstrada da mesma maneira para $h < 0$, basta inverter as desigualdades e fazer as devidas alterações.

Aplicando a Propriedade 2.2 em (2.2), temos:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h}$$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \tag{2.3}$$

Fazendo h tender a 0, $x+h$ tende para x, $f(u)$ e $f(v)$ estão sempre entre x e $x+h$, pois, variando h, u e v variam juntos já que estão sempre entre x e $x+h$, então, quando h tende a 0, u e v tendem para x. Mas se u e v tendem para x, $f(u)$ e $f(v)$ tendem para $f(x)$, pois f é contínua.

Reescrevendo matematicamente o que foi enunciado no parágrafo anterior temos: à medida que $h \longrightarrow 0 \Rightarrow u \longrightarrow x$ e $v \longrightarrow x$, pois u e v estão entre x e $x+h$. Consequentemente,

$$\lim_{h \to 0} f(u) = \lim_{u \to x} f(u) = f(x)$$

$$e$$

$$\lim_{h \to 0} f(v) = \lim_{v \to x} f(v) = f(x)$$

pois f é contínua em x.

Usando o resultado a seguir

Lema 2.5 (Lema do Confronto ou do Sanduíche)**.** *"Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ então $\lim_{x \to a} g(x) = L$. (STEWART, 2010, p. 94).*

concluímos, de (2.3) que:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(x)$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação: Não só provamos que $g'(x) = f(x)$, mas que a função é diferenciável. Esta igualdade pode ser reescrita usando a notação de Leibniz para as derivadas:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Na próxima secção, será enunciado e demosntrado o Teorema Fundamental do Cálculo Parte II.

2.2 Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) – Parte II

Na verdade esta Parte II do TFC é um corolário imediato, e, é a técnica para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, se f for contínua. Este teorema afirma o seguinte: "Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, contínua (hipótese), e seja $F(x)$ uma antiderivada para f, ou seja, $F'(x) = f(x)$ (neste caso sabemos que existe pelo menos uma $F(x)$ como foi visto na demonstração da Parte I do TFC), então, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$".

Com este teorema é possível calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ sem fazer muito esforço, sem precisar usar definição completa de limite, basta encontrar uma antiderivada e depois fazer a diferença entre a antiderivada final menos a inicial. A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, que segue facilmente da primeira parte, nos permite efetuar de maneira mais simples o cálculo de integrais.

Definição 2.6 (TFC - Parte II)**.** Se f for contínua em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F'(x) = f(x)$. (STEWART, 2010, p. 361)

Demonstração: Seja $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Sabemos da Parte I que $g'(x) = f(x)$; g é uma primitiva de f.

Por hipótese $F'(x) = g'(x) = f(x)$.

Logo, $F'(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow (F(x) - g(x))' = 0 \Leftrightarrow F(x) - g(x) = C \Leftrightarrow F(x) = g(x) + C$

Daí,

$$\begin{aligned} F(b) &= g(b) + C \\ F(a) &= g(a) + C \end{aligned}$$

Calculando, $g(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0.$

Portanto,

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= (g(b) + C) - (g(a) + C) \\
&= g(b) + C - g(a) - C \\
&= g(b) - g(a), \qquad g(a) = 0 \\
&= g(b) \\
&= \int_a^b f(t)\,dt,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Em suma, podemos agora calcular a integral definida determinando inicialmente a integral indefinida correspondente e, em seguida, obter a diferença entre os valores numéricos desta para os extremos de integração (superior menos inferior). A notação a seguir esclarece bem esta ideia:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Justapondo as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

Teorema 2.7 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, contínua e* $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt.$

1. g *é diferenciável em* (a,b) *e* $g'(x) = f(x)$.
2. *Se* $F(x)$ *satisfizer* $F'(x) = f(x)$ *em* (a,b)*, então* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

O Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que integral e derivada estão relacionadas como operações inversas, a menos de uma constante.

Exemplo 2.8. Calcule $g(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t)\, dt$ e $h(x) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos(t)\, dt$, tire conclusões.

Solução: Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, já sabendo que $f(x) = sen(x)$ é uma primitiva de $f'(x) = \cos(x)$, então:

$$g(x) = \int_0^x \cos(t)\, dt = \int \cos(t)\, dt\Big|_0^x = sen(t)\Big|_0^x = sen(x) - sen(0) = sen(x) - 0 = sen(x)$$

$$h(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos(t)\, dt = \int \cos(t)\, dt\Big|_{\frac{\pi}{2}}^x = sen(t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^x = sen(x) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen(x) - 1$$

A diferença entre essas duas funções é a constante, em geral o ponto inicial de integração é quem determina essa constante. Ambas as funções são primitivas, a menos de uma constante, portanto têm a mesma derivada. □

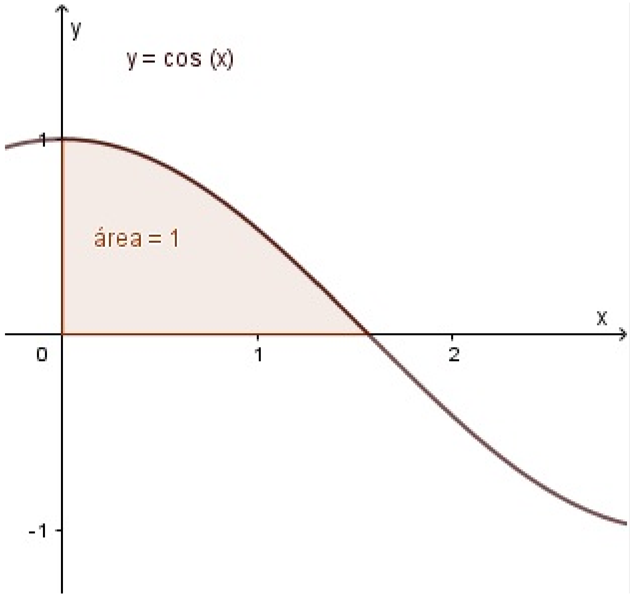
Exemplo 2.9. Ache a área sob a curva $y = \cos(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Solução: Sabemos que $f(x) = sen(x)$ é uma primitiva de $f'(x) = \cos(x)$, daí usando o Teorema fundamental do Cálculo, a área (A) procurada será:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = \int \cos(x)\, dx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = sen(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0) = 1 - 0 = 1$$

Graficamente:

Figura 2.3: Área da região sob o gráfico, variando de 0 à $\pi/2$.



$\square$

Sem muito esforço foram resolvidos os exemplos utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo que nos fornece um método muito mais curto, basta conhecer uma antiderivada.

Para finalizar o desenvolvimento do trabalho, no próximo capítulo vamos ver uma aplicação interessante do Teorema Fundamental do Cálculo.

Capítulo 3

Aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo

Várias situações da nossa vida nos remetem a uma aplicação do teorema fundamental do cálculo, como por exemplo: no cálculo de áreas, comprimentos e volumes, em várias situações da Física, na Economia e na maioria dos fenômenos mensuráveis.

Neste capítulo será calculado o volume de uma taça como aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo, utilizando-se de recursos do *software Geogebra*, auxiliando na descoberta da função que delimita o sólido de revolução que tem o formato da taça.

Figura 3.1: Taça utilizada na aplicação.

De modo geral, para calcular o volume de um sólido precisamos encontrar o gráfico da função, que através da rotação em torno de um eixo, gere o sólido em questão.

Foi inserida a imagem da taça no *software Geogebra*, em seguida atribuiu-se cinco pontos aleatórios na borda taça, com a ferramenta "polinômio"encontrou-se a função ($f(x) = -0.00005x^4 + 0.00262x^3 - 0.0615x^2 + 0.64994x + 1.14805$) que rotacionada em torno do eixo x nos dá o formato da taça que será calculado o volume. As figuras abaixo ilustram alguns passos para obtenção da função no *Geogebra*.

Figura 3.2: Função encontrada, $f(x) = -0.00005x^4 + 0.00262x^3 - 0.0615x^2 + 0.64994x + 1.14805$.

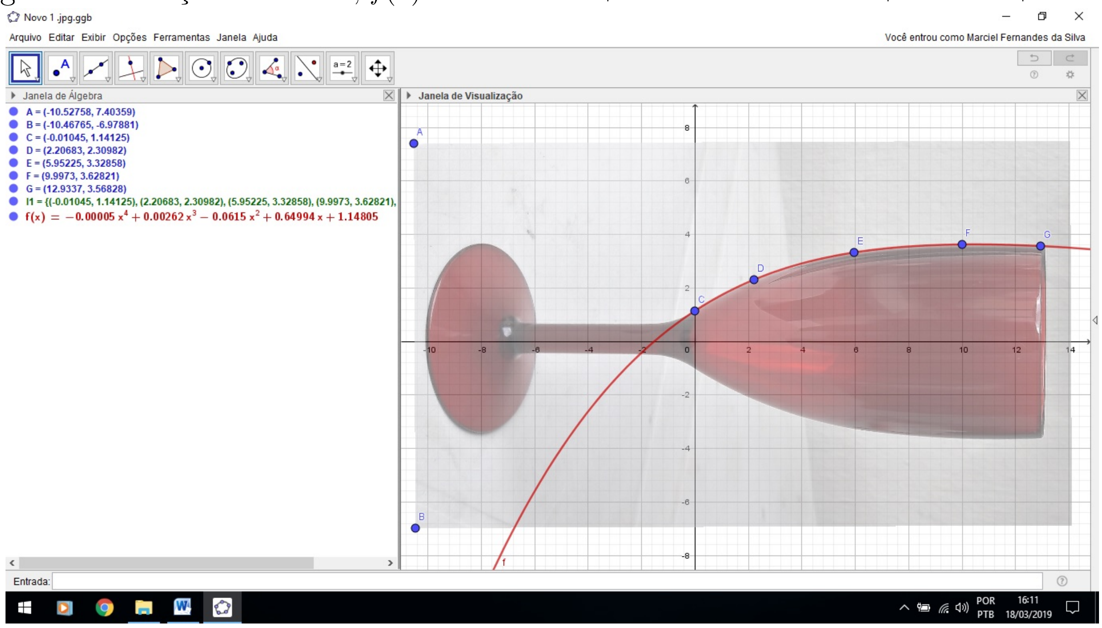


Figura 3.3: Função limitada no intervalo $[0, 13]$ que corresponde a altura da taça em *cm*.

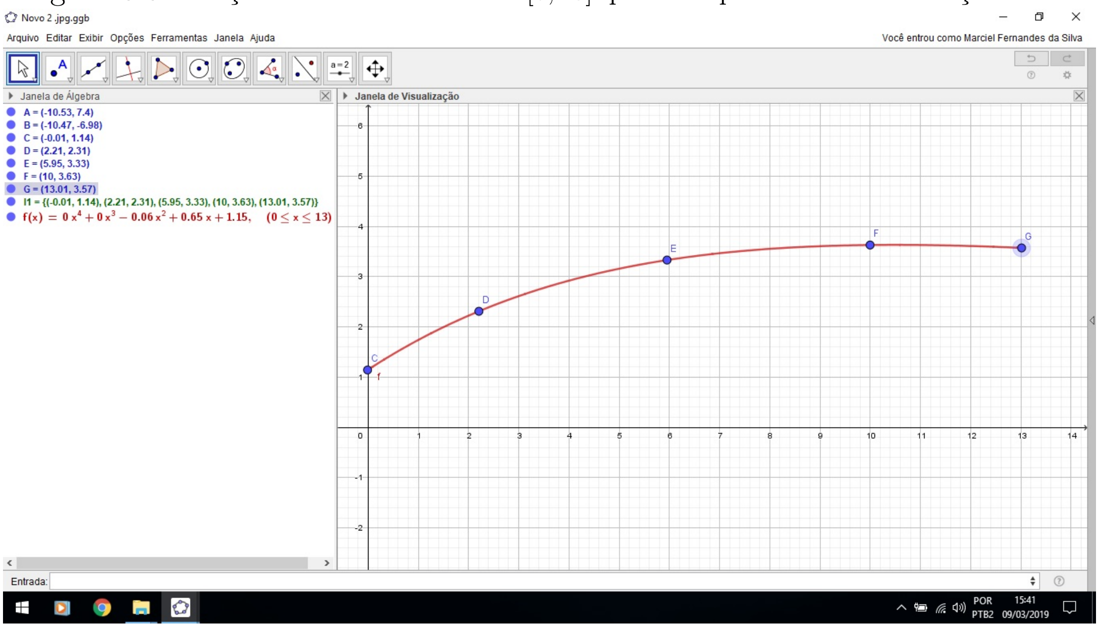
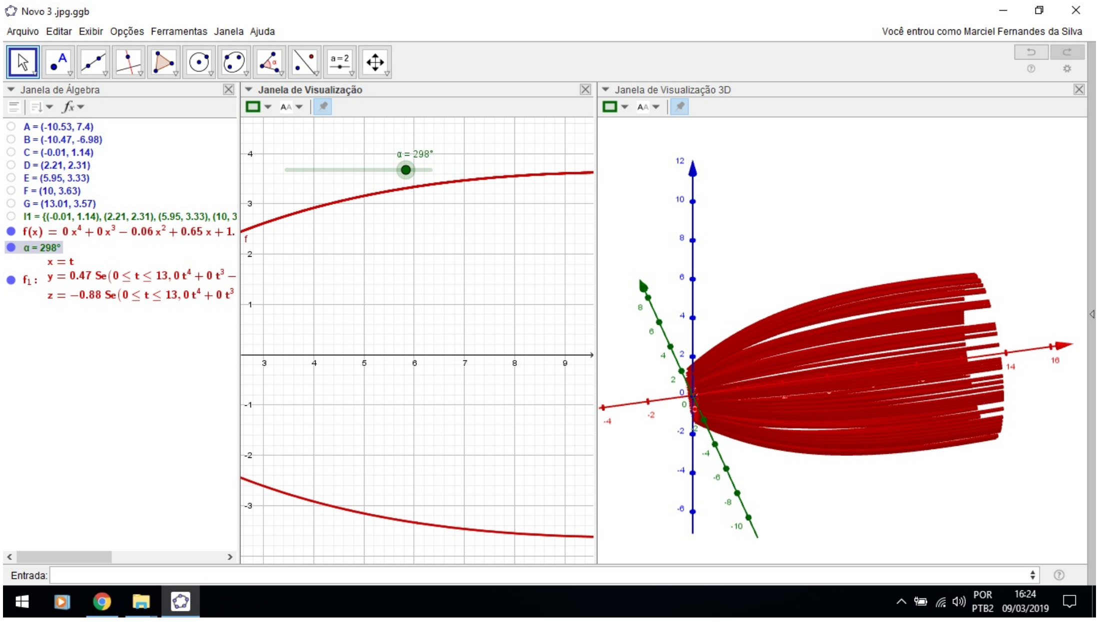


Figura 3.4: Sólido gerado pela rotação da função $f(x)$ em torno do eixo x.



Uma secção transversal, perpendicular ao eixo x, é um disco de raio $f(x)$ (função que delimita a taça) e área:

$$A(x) = \pi(raio)^2 = \pi[f(x)]^2$$

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

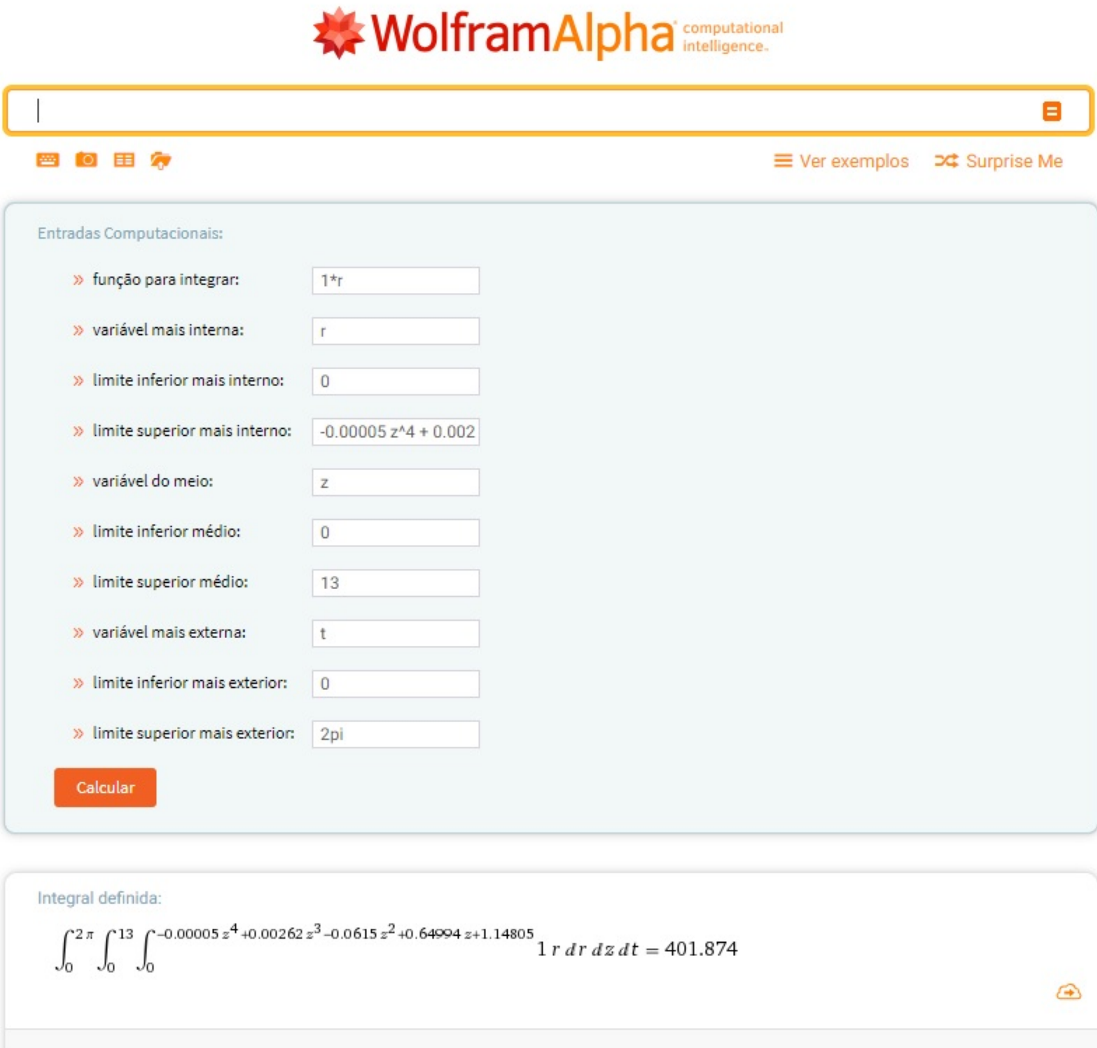
$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

O sólido está entre $x = 0\, cm$ e $x = 13\, cm$, assim o seu volume é:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{13} \pi [f(x)]^2\, dx \\
&= \int_0^{13} (-0.00005x^4 + 0.00262x^3 - 0.0615x^2 + 0.64994x + 1.14805)^2 \pi\, dx \\
&= \pi \int_0^{13} (0,0000000025x^8 - 0,000000262x^7 + 0,0000130144x^6 \\
&\quad -0,000387254x^5 + 0,0070731306x^4 - 0,073926838x^3 \\
&\quad +0,2812118530x^2 + 1,492327233x + 1,3180188030\, dx \\
&= \pi \Big[0,00000000028x^9 - 0,00000003275x^8 + 0,0000018592x^7 \\
&\quad -0,0000645423x^6 + 0,00141462612x^5 - 0,0184817095x^4 \\
&\quad +0,09373728453x^3 + 0,746163617x^2 + 1,3180188025x\Big]_0^{13} \\
&= \pi \Big[(2,94569427 - 26,71518111 + 116,6620428 - 311,5335154 + 525,240776 \\
&\quad -527,856105 + 205,9408137 + 126,1016512 + 17,13424444) - 0\Big] \\
&= \pi(127,9204209) \\
&= 3,141592654(127,9204209) \\
&= 401,874\ cm^3 = \mathbf{401{,}874\ ml}
\end{aligned}
$$

Para confirmar o valor encontrado utilizou-se uma calculadora computacional (Wolfram|Alpha).

Figura 3.5: Ambiente (Wolfram|Alpha)



Portanto, é perceptível o quanto o Teorema fundamental do cálculo é um método muito eficiente e poderoso, que permite resolver muitos problemas em diversas situações, de maneira simples.

Considerações Finais

O Teorema Fundamental do Cálculo é um dos mais importantes teoremas da matemática. Devido sua importância, foi escolhido para ser objeto de estudo neste trabalho. Este teorema mostra que a integração e diferenciação são operações inversas, chegando à conclusão de que os problemas de cálculos de área sob um gráfico de uma função em um intervalo e o problema de construção de uma reta tangente num ponto da função estão interligados e podem ser resolvidos juntos. O teorema fundamental do cálculo minimiza o cálculo de integrais, que embora apesar de ser eficiente, era feito através de limites de somas exaustivas, sendo um processo não muito prático.

Neste trabalhado foi apresentado o desenvolvimento histórico do TFC, remontando desde sua origem até sua formalização com Newton (1642 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716), no século XVII, estendendo-se até os tempos modernos. Conhecer a sua história é participar da sua reconstrução.

Tendo também como um dos objetivos principais do trabalho, enunciar e demonstrar o teorema, bem como expor alguns exemplos de cálculo, mostrando sua praticidade.

Buscou-se mostrar a importância do TFC em aplicações que envolvem as mais variadas áreas do conhecimento, agilizando o trabalho de profissionais no cálculo em diversas situações, por ser um teorema prático e eficiente em comparação com outros métodos utilizados.

A recomendação para trabalhos futuros é a utilização de aplicativos que abordam outras diversas aplicações do TFC, de modo que as situações se tornem mais reais a partir da interface gráfica dos programas, instigando o espírito de descoberta.

Referências Bibliográficas

[1] BARON, M. ***Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do Cálculo.*** Tradução: José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes Brasília: Editora da UnB, 1985.

[2] BOYER, Carl Benjamin. ***História da Matemática***. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgar Blucher, Ed. da USP, 1974.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Média e Tecnologia. ***Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio***. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

[4] D'AMBROSIO, Ubiratã. ***A história da matemática: questões historiográficas, políticas e reflexos na educação matemática***. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectiva. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

[5] DE VILLIERS, Michael D. ***Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad***. Revista Educação e Matemática, Lisboa, Portugal, nº. 62, p. 31-36, mar./abr. 2001.

[6] EVES, Howard. ***Introdução à História da Matemática.*** Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

[7] LIMA, Elon Lages. ***Análise real.*** 11ª edição, volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[8] LORENZATO, Sérgio. ***Para aprender matemática.*** 2ª edição, Campinas-SP: Autores Associados, 2008.

[9] PIETROPAOLO, Ruy César. ***(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica.*** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

[10] ROSA, Jocélia. ***História da Matemática no Ensino da Matemática.*** São Paulo: Produção Independente, 1998.

[11] STEWART, James. ***Cálculo.*** 6ª edição, volume 1. Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

[12] THOMAS, George B. ***Cálculo.*** 10ª edição, volume 1. São Paulo: Pearson Addioson Wesley, 2002.