



ALYSSON ALDRIN BARRETO BEZERRA

**ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA E
ELASTOPLÁSTICA DE TRELIÇA PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL**

ALYSSON ALDRIN BARRETO BEZERRA

**ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA E
ELASTOPLÁSTICA DE TRELIÇA PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba-*Campus* Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Sebastião Simão da Silva

Cajazeiras
2019

IFPB
Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catálogo na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

B574a

Bezerra, Alysson Aldrin Barreto

Análise não linear geométrica e elastoplástica de treliça pelo método dos elementos finitos posicional / Alysson Aldrin Barreto; orientador Sebastião Simão da Silva.-

47 f.: il.

Orientador: Sebastião Simão da Silva.

TCC (Bacharelado em Eng. Civil) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2019.

1. Treliças 2. Não linearidade geométrica 3. Não linearidade física 4. Elementos finitos 5. Formulação composicional 6. Comprimento de arco I.
Título

CDU 674.26(0.067)

ALYSSON ALDRIN BARRETO BEZERRA

**ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA E
ELASTOPLÁSTICA DE TRELIÇA PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Coordenação do Curso de Bacharelado em
Engenharia Civil do Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba,
como parte dos requisitos para a obtenção do
Título de Bacharel em Engenharia Civil.

BANCA EXAMINADORA

Sebastião Simão da Silva – IFPB-*Campus* Cajazeiras
Orientador

Daniel Torres Filho – IFPB-*Campus* Cajazeiras
Examinador 1

Patrício Luiz de Andrade – IFPB-*Campus* Cajazeiras
Examinador 2

Cajazeiras, 17 de abril de 2019.

Dedico este trabalho a minha família, por fazerem possível meu foco nos estudos durante toda minha vida estudantil.

AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial a minha mãe, Veruscka, que com muita garra, sempre fez o possível e o impossível, para que eu pudesse manter meus focos nos estudos, à minha irmã, Maria Alyce, por auxiliar e alegrar o meu dia-a-dia com seu jeito amável e sua lealdade, e as minhas cachorras por trazer o amor verdadeiro que só elas conseguem passar.

Ao meu orientador, Sebastião, pela disponibilidade e paciência para auxiliar no desenvolvimento do trabalho, apesar das noites mal dormidas, e ser um exemplo de profissional que eu espero conseguir a ser.

Ao meu grupo de amigos que perpetuam desde o ensino médio minha vida, que posso contar para cada momento da minha vida, sejam eles bons ou ruins.

Ao meu grupo de amigos da faculdade, José Rafael, Luanda, Priscila e Sheldon, onde apesar dos diversos conflitos, enfrentamos todas as dificuldades da graduação juntos, e continuaremos nesse caminho.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Cajazeiras, pela hospitalidade e oportunidade de fazer esse trabalho.

RESUMO

O uso de treliças espaciais é bastante intenso, visto que estas estruturas apresentam várias vantagens comparadas a outros sistemas estruturais. Apesar da relativa simplicidade, o estudo dessas estruturas requer o uso intenso de técnicas aprimoradas de análise estrutural. Assim, uma análise apropriada de estruturas formadas por treliças espaciais deve ser realizada considerando-se as não linearidades tanto geométricas quanto físicas do problema estudado. A não linearidade física é proveniente da mudança do comportamento do material utilizado. Com o advento da mecânica computacional, surgiram Métodos Aproximados fundamentados em discretizar o espaço em que o modelo matemático está inserido, tais como Método dos Elementos Finitos (MEF). Na análise não linear de treliças, a obtenção da trajetória de equilíbrio se faz relevante e, geralmente, requer um estudo a parte. Desse modo, manifestações como *snap-through* e *snap-back*, são obtidas somente com métodos mais robustos como, por exemplo, o Método do Comprimento de Arco (*arclength*). A formulação posicional do MEF gera soluções adequadas e atrativas em termos computacionais, o que se coaduna com a necessidade de análises mais apuradas para obter soluções mais econômicas. Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo principal implementar elastoplasticidade em um código computacional produzido e constante na Dissertação de Mestrado de Estéfane George Macedo de Lacerda na UFRN em 2014, que possibilita realizar análise não linear geométrica de treliças planas e espaciais mediante a utilização dos Métodos dos Elementos Finitos Posicionais. O código desenvolvido no presente trabalho foi implementado com auxílio da ferramenta computacional MATLAB. Foram analisados alguns *benchmarks* e os resultados obtidos foram comparados com os encontrados em outras literaturas, bem como com os calculados com o *software* ABAQUS. As análises das trajetórias de equilíbrio das estruturas analisadas atestam a boa eficiência do código implementado.

Palavras-Chave: Treliça; Não linearidade geométrica; Não linearidade física; Elastoplasticidade; Elementos finitos; Formulação posicional; Comprimento de arco.

ABSTRACT

The use of space trusses is quite intense, since these structures present several advantages compared to other structural systems. Despite relative simplicity, the study of these structures requires the intensive use of improved structural analysis techniques. Thus, an appropriate analysis of structures formed by space trusses must be performed considering both the geometric and physical non-linearities of the problem studied. Physical non-linearity is due to the change in the behavior of the material used. With the advent of computational mechanics, approximate methods have emerged based on discretizing the space in which the mathematical model is inserted, such as Finite Element Method (FEM). In the non-linear analysis of trusses, obtaining the equilibrium trajectory becomes relevant and generally requires a separate study. In this way, manifestations such as snap-through and snap-back, are obtained only with more robust methods, such as the Arclength Method. The positional formulation of FEM generates suitable and computationally attractive solutions, which is consistent with the need for more accurate analyzes to obtain more economical solutions. In this context, the main objective of this work is to implement elastoplasticity to a computer code produced and constant in the Master's Dissertation of de Estéfane George Macedo de Lacerda, UFRN, in 2014, which allows to perform geometric non-linear analysis of flat and space trusses using Finite Element Methods Positional. The code developed in the present work was implemented with the help of the MATLAB computational tool. Some benchmarks were analyzed and the results obtained were compared with those found in other literature, as well as those calculated with ABAQUS software. The analysis of the equilibrium trajectories of the analyzed structures attest to the good efficiency of the implemented code.

Keywords: Truss; Geometric non-linearity; Physical non-linearity; Elastoplasticity; Finite elements; Positional formulation; Arc-length method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo do uso de treliça espacial na Rodoviária de Cajazeiras	13
Figura 2 - Exemplos de <i>snap-through</i> e <i>snap-back</i>	17
Figura 3– Elemento friccional unidimensional	18
Figura 4– O Método de Newton-Raphson.....	23
Figura 5 – Estrutura com um grau de liberdade	24
Figura 6 – Método de Newton-Raphson Incremental-Iterativo.....	26
Figura 7 – Método de Newton-Raphson Incremental-Iterativo Modificado.....	28
Figura 8 – Vetor Predictor.....	33
Figura 9 - (a) Geometria da treliça plana (b) Lei constitutiva do material.....	40
Figura 10 – Gráfico carga x deslocamento comparativo entre o presente trabalho e Greco <i>et al.</i> (2006)	41
Figura 11 – Gráfico tensão x deformação para a barra central.....	41
Figura 12 – Gráfico tensão x deformação para as barras inclinadas	42
Figura 13– Exemplo Barra Axial Inclinada.....	43
Figura 14 – Gráfico tensão x deformação para as barras inclinadas	43

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Mapeamento de Retorno	22
Algoritmo 2 – Método de Newton-Raphson	26
Algoritmo 3 – Método de Newton-Raphson Modificado.....	28
Algoritmo 4 – Método de comprimento de arco	34

LISTA DE ABREVIATURAS

NFL – Não Linearidade Física

NLG – Não Linearidade Geométrica

MDF – Método das Diferenças Finitas

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MEF – Método dos Elementos Finitos

MVF – Método dos Volumes Finitos

MSM – Métodos Sem Malha

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{u} – vetor de deslocamento

\mathbf{f} – vetor de cargas

\mathbf{K} – matriz de rigidez

E – constante elástica

σ_y – tensão de escoamento

σ – tensão

ε - deformação

ε^e – deformação sobre a mola (parte elástica)

ε^p – deformação sobre o dispositivo friccional (parte plástica)

$f(\sigma)$ – condição de escoamento para plasticidade perfeita

γ – parâmetro de consistência

$sign(\sigma)$ - função

t – tempo

\hat{E} – módulo tangente elastoplástico

$\Delta\varepsilon_n$ – incremento na deformação do elemento estrutural

σ_{n+1}^{teste} – tensão elástica teste

σ_n – tensão no passo anterior

f_{n+1}^{teste} – condição de escoamento teste

\mathbf{q} – forças internas

\mathbf{u} –deslocamento nodal

\mathbf{f} – forças externas

$g(x)$ – função contínua e diferenciável

x_i – ponto estimado inicial

x_{i+1} – próximo ponto estimado

tol - tolerância

$\mathbf{q}(\mathbf{u})$ – força interna em função do deslocamento

$\mathbf{g}(\mathbf{u})$ - força residual

\mathbf{K}_t – tangente de rigidez

$\Delta\mathbf{f}$ – incremento de carga

i_{max} – número máximo de passos de cargas

j_{max} – número máximo de iterações

λ – fator de carga

δ – incremento de Newton Raphson

ψ - fator de escala

Δl^j - arco do ciclo atual

N_w - número procurado de iterações para convergir

N_{j-1} - número de iterações para convergir no passo anterior

ζ – constante

L – comprimento inicial da barra

l – comprimento final da barra

\mathbf{x} – vetor de deslocamentos

\mathbf{x}_i – vetor de posições nodais

U = energia de deformação

A = área de seção transversal da barra

\otimes - produto tensorial

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 OBJETIVOS	15
3 REVISÃO DE LITERATURA.....	16
3.1 ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR.....	16
3.2 NÃO LINEARIDADE FÍSICA (ELASTOPLASTICIDADE).....	17
3.3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR	22
2.3.1. Método de Newton-Raphson.....	23
2.3.2. Método de Newton-Raphson incremental-iterativo.....	26
2.3.3. Método de Comprimento de Arco	29
3.4 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE TRELIÇA NO MEF POSICIONAL.....	35
4 METODOLOGIA.....	39
5 ANÁLISE DOS RESULTADOS	40
5.1 TRELIÇA PLANA DE TRÊS LADOS	40
5.2 BARRA AXIAL INCLINADA.....	42
6 CONCLUSÃO.....	44
REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

Treliças são estruturas que possibilitam vencer grandes vãos de forma econômica e esteticamente elegante, com uma relação entre peso e vão bem reduzida, e que apresentam grande rapidez e facilidade de montagem. Um exemplo da utilização de uma treliça espacial é apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Exemplo do uso de treliça espacial na Rodoviária de Cajazeiras



Fonte: PINHEIRO, 2018

O uso de treliças espaciais está em contínuo crescimento no Brasil, já que estas têm várias vantagens comparadas a outros elementos estruturais de cobertura, das quais destaca-se a semelhança das dimensões dos elementos e dos detalhes nodais, simplificando desta maneira os processos de fabricação e de armação, e proporcionando leveza e forma agradável, frequentemente isentando a utilização de forros (MAIOLA, 2002).

O surgimento do emprego de estruturas treliçadas espaciais de alto grau de dificuldade, requer o uso intenso de técnicas aprimoradas de análise estrutural e, especialmente, de máquinas potentes. Entretanto, normalmente, uma análise apropriada de estruturas formadas por treliças espaciais deve ser realizada considerando-se as não linearidades tanto geométricas quanto físicas do problema estudado (LEITE, 2000).

No estudo de treliças não linear, deve-se englobar ambas as não linearidades, tanto física quanto geométrica. A não linearidade física (NLF) é proveniente da mudança do comportamento do material estudado. Já levando em conta a mudança de geometria da estrutura, e o equilíbrio sendo realizado na situação deslocada, a trajetória carga x deslocamento

será não linear, sendo uma situação de não linearidade geométrica (NLG), podendo ocorrer concomitantemente a NLF (LEITE, 2000).

O advento da Mecânica Computacional tornou possível o desenvolvimento de modernos Métodos Aproximados de análise de estruturas. Estes, fundamentam-se em discretizar o espaço em que o modelo matemático está inserido. Alguns exemplos de métodos de discretização são: Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos de Contorno (MEC), Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Volumes Finitos (MVF), e os Métodos Sem Malha (MSM) (BELO, 2009).

De acordo com LACERDA (2014), em comparação a formulações mais antigas, existem poucos trabalhos publicados com a formulação posicional do MEF. Apesar disso, este método por gerar soluções adequadas e atrativas em termos computacionais, pois não requer matrizes de transformações entre coordenadas locais e globais.

2 OBJETIVOS

GERAL

Esse trabalho tem o objetivo geral de adicionar a análise não linear material (física) ao código computacional produzido no trabalho “Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional” (LACERDA,2014), o qual já trata da análise não linear geométrica.

ESPECÍFICOS

- Entender o fenômeno da elastoplasticidade unidimensional;
- Implementar não linearidade material no código desenvolvido por Lacerda (2014);
- Analisar um número de *benchmarks* com o código desenvolvido e com o *software* comercial ABAQUS.

3 REVISÃO DE LITERATURA

3.1 ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR

Este item descreve conceitos básicos encontrados na análise não linear das estruturas conforme abordagem de Brito (2018). A formulação do Método dos Elementos Finitos na análise linear de estruturas se baseia nas hipóteses de que os deslocamentos nodais são infinitesimalmente pequenos, que o material é linearmente elástico e que as condições de contorno não se modificam durante a aplicação das cargas (BATHE, 2006). Quando atendidas, o vetor de deslocamento \mathbf{u} se relaciona linearmente com o vetor de cargas \mathbf{f} através da matriz de rigidez \mathbf{K} conforme Equação (1).

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f} \quad (1)$$

Isso significa que, se as cargas aumentarem conforme um constante, os deslocamentos também aumentam por este valor. Se essa proporcionalidade não ocorrer, o sistema estrutural é caracterizado como não linear. A não linearidade de uma estrutura pode apresentar diversos tipos, podendo ser elencado como principais as não linearidades geométricas e físicas, e as das condições de contorno. A não linearidade geométrica se dá quando a estrutura sofre grandes mudanças na sua geometria, fazendo com que as equações de equilíbrio para sua geometria inicial deixem de ser válidas-

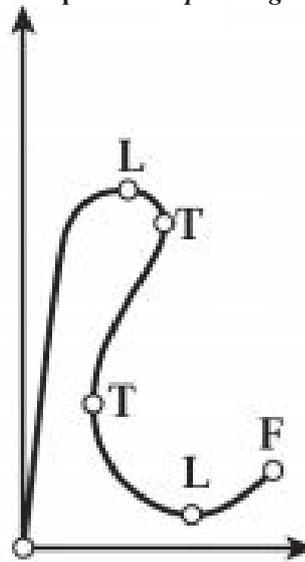
Já a não linearidade física é relacionada aos comportamentos não lineares dos materiais, como a elasticidade não linear, plasticidade, viscoelasticidade e fluência. Por sua vez, as condições de contorno não lineares ocorrem devido a sua alteração conforme o deslocamento do sistema, motivado por contato ou impacto entre dois corpos ou quando as forças externas são dependentes do deslocamento.

Com o objetivo de estudar o comportamento de uma estrutura, necessita-se analisar o caminho de equilíbrio levando em consideração algumas variáveis de controle, como por exemplo cargas e deslocamentos. Assim, numa trajetória de equilíbrio destacam-se alguns pontos críticos:

- Ponto de limite ou *snap-through*: ponto de tangente horizontal, ou seja, ponto de máximo ou mínimo da função. Em alguns métodos de solução acontece um salto no valor das abcissas na trajetória de equilíbrio.
- Ponto de viragem ou *snap-back*: ponto de tangente vertical, não apresenta importância física, porém em alguns métodos de solução acontece um salto no valor das ordenadas na trajetória de equilíbrio.

Na Figura 2, tem-se nos pontos L e nos pontos T, exemplos de *snap-through* e *snap-back*, respectivamente, em ambas o eixo das ordenadas representa a carga, enquanto o eixo das abcissas o deslocamento.

Figura 2 - Exemplos de *snap-through* e *snap-back*



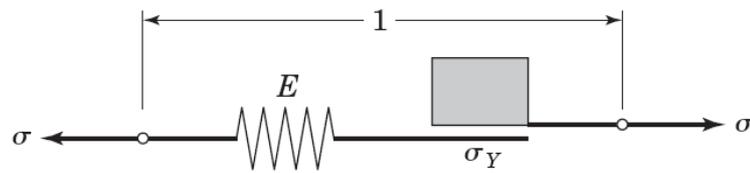
Fonte: SILVA, 2011

3.2 NÃO LINEARIDADE FÍSICA (ELASTOPLASTICIDADE)

Conforme Simo (1998), neste item serão apresentadas definições sobre elastoplasticidade em sistemas unidimensionais que são aplicados em estruturas formadas por barras, como treliças. Será considerado uma relação constitutiva com plasticidade perfeita (sem endurecimento).

Na Figura 3 pode-se ver um elemento friccional unidimensional, para fundamentar a estrutura matemática da plasticidade. Assumindo que o mesmo possui comprimento e área unitária, sendo formado por uma mola com constante elástica E , e elemento de fricção de Coulomb com constante $\sigma_y > 0$, aplica-se uma tensão σ que gera uma deformação ϵ total.

Figura 3– Elemento friccional unidimensional



Fonte: SIMO, 1998

Logo, analisando a Figura 3, temos que:

- a) A deformação ε total se divide em uma parte ε^e sobre a mola (parte elástica) e noutra ε^p sobre o dispositivo friccional (parte plástica).

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2)$$

- b) Por condição de equilíbrio, a tensão sobre a mola é σ , sendo assim:

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (3)$$

A condição de escoamento é uma função usada para identificar matematicamente quando ocorre escoamento. Definida para plasticidade perfeita como:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (4)$$

Se a condição de escoamento assumir um valor negativo ou igual a zero, o valor atual de tensão está abaixo do escoamento e apenas a deformação elástica está aumentando. Já se for positivo o nível de tensão atual é acima do escoamento e, para plasticidade perfeita, apenas a deformação plástica está aumentando, porém para casos diferentes de plasticidade, ambas os tipos de deformação estariam em ascensão. Entretanto, não é admitido $f < 0$ requerendo ser calculado a quantidade de fluxo plástico para alcançar $f = 0$. Isto é realizado calculando um parâmetro de consistência γ , que permite determinar o nível de fluxo plástico para satisfazer a condição $f = 0$. Assim,

$$f(\sigma) < 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\gamma > 0 \Rightarrow f(\sigma) = 0$$

Unificando as duas equações anteriores, chegamos a:

$$\gamma f(\sigma) = 0 \quad (5)$$

Formando assim as condições de Kuhn-Tucker, que descrevem matematicamente o processo de carregamento e descarregamento elastoplástico.

Utilizando a notação $\dot{f}(t) = \frac{df}{dt}$ (para qualquer função), então para $f(\sigma) < 0$ não ocorre escoamento, logo $\dot{\varepsilon}^p = 0$, apenas ocorrerá mudança no valor de ε^p se $f(\sigma) = 0$, tal que o escoamento ocorrerá na direção da tensão σ aplicada, com taxa de escoamento constante, sendo $\gamma \geq 0$ o valor absoluto dessa taxa de escoamento. Assim:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \gamma \geq 0 \text{ se } \sigma = \sigma_y > 0 \\ \dot{\varepsilon}^p &= -\gamma \geq 0 \text{ se } \sigma = -\sigma_y < 0 \end{aligned}$$

Podendo ser escrito como:

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \text{ sign}(\sigma) \quad (6)$$

Conhecida como lei de fluxo, onde *sign* é uma função que retorna o sinal do parâmetro recebido, assim:

$$\begin{aligned} \text{sign}(\sigma) &= +1 \text{ se } \sigma > 0 \\ \text{sign}(\sigma) &= -1 \text{ se } \sigma < 0 \end{aligned}$$

Em seguida, necessita-se de uma maneira de calcular o valor de γ em qualquer instante de tempo t , isto é:

$$\hat{f}(t) = f[\sigma(t)] \quad (7)$$

Pode-se concluir que, se $\hat{f}(t) \leq 0$, pois se $\hat{f}(t)$ fosse positivo, implicaria em $\hat{f}(t + dt) > 0$ para algum $dt > 0$, desobedecendo a lei de escoamento ($f \leq 0$). Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \gamma > 0 &\Rightarrow \dot{f} = 0 \\ \dot{f} < 0 &\Rightarrow \gamma = 0 \end{aligned}$$

Formando a condição de persistência ou consistência que pode ser resumida em:

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \quad (8)$$

Para $\dot{f} < 0$, $\gamma = 0$, porém se $\dot{f} = 0$, tem-se pela regra da cadeia:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \quad (9)$$

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (10)$$

Substituindo (6) em (10):

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - E[\gamma \text{sign}(\sigma)] \quad (11)$$

Aplicando (11) em (9):

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} E\dot{\varepsilon} - \gamma E \frac{\partial f}{\partial \sigma} [\text{sign}(\sigma)] \quad (12)$$

Porém,

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\sigma|}{\partial \sigma} &= \text{sign}(\sigma) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma) \\ \text{sign}(\sigma)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Assim:

$$\dot{f} = E\dot{\varepsilon} \text{sign}(\sigma) - \gamma E = 0$$

$$\gamma = \dot{\varepsilon} \text{sign}(\sigma) \quad (13)$$

Substituindo (13) em (6):

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} \quad (14)$$

Assim, toda a deformação é plástica quando $\dot{f}(\sigma) = 0$ e $f(\sigma) = 0$, e o módulo tangente elastoplástico \hat{E} será nulo, sendo assim a curva tensão x deformação constante durante os passos plásticos, quando se considera plasticidade perfeita.

Deste modo, baseado na teoria apresentada foi desenvolvido um algoritmo chamado de *return mapping* (mapeamento de retorno) para controlar através de passos de carga, se ocorreu plastificação ou não no elemento estrutural em estudo.

A cada passo de carga é realizado um incremento na deformação do elemento estrutural $\Delta\varepsilon_n$, que é utilizado para calcular uma tensão elástica teste σ_{n+1}^{teste} através da equação:

$$\sigma_{n+1}^{teste} = \sigma_n + E\Delta\varepsilon_n \quad (15)$$

Onde, σ_n é a tensão calculada no passo anterior. Então, calcula-se a condição de escoamento f_{n+1}^{teste} :

$$f_{n+1}^{teste} = |\sigma_{n+1}^{teste}| - \sigma_y \quad (16)$$

Se $f_{n+1}^{teste} \leq 0$, assim sendo $\gamma = 0$, o passo será elástico, sendo a deformação plástica apenas congelada, ou seja, igualada ao passo anterior e a tensão sendo igual a de teste.

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p \quad (17)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{teste} \quad (18)$$

Já, caso $f_{n+1}^{teste} > 0$, então o passo será plástico, sendo necessário calcular o valor de γ para reduzir o valor de f para 0. Deste modo:

$$\gamma = \frac{f_{n+1}^{teste}}{E} \quad (19)$$

Como o passo de carga é plástico, deve-se recalculer o valor da tensão e da deformação plástica em função do valor de γ .

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}^{teste}) \quad (20)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{teste} - \gamma E \text{sign}(\sigma_{n+1}^{teste}) \quad (21)$$

Algoritmo 1 – Mapeamento de Retorno

1. Dados de entrada: $\{\sigma_n, \varepsilon_n^p\}$
2. Incremento de deformação acontece tal que: $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n$
3. Calcula tensão elástica teste, e depois o teste da função de escoamento:

$$\sigma_{n+1}^{teste} = \sigma_n + E\Delta\varepsilon_n$$

$$f_{n+1}^{teste} = |\sigma_{n+1}^{teste}| - \sigma_y$$

4. Se $f_{n+1}^{teste} \leq 0$, passo elástico, então:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{teste}$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$$

Fim

Se não, passo plástico, então:

$$\gamma = \frac{f_{n+1}^{teste}}{E}$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{teste} - \gamma E \text{sign}(\sigma_{n+1}^{teste})$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}^{teste})$$

Fim

Fonte: Adaptado de SIMO, 1998

3.3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR

O principal problema na análise de sistemas não lineares consiste em encontrar o estado de equilíbrio da estrutura relacionada às forças externas aplicadas. Assim, busca-se igualar os valores das forças internas \mathbf{q} (função do deslocamento nodal \mathbf{u}) e externas \mathbf{f} , em

todos os graus de liberdade de um determinado sistema de elementos finitos (BATHE, 2006). Deste modo, o foco dessa seção é encontrar o caminho de equilíbrio da estrutura onde:

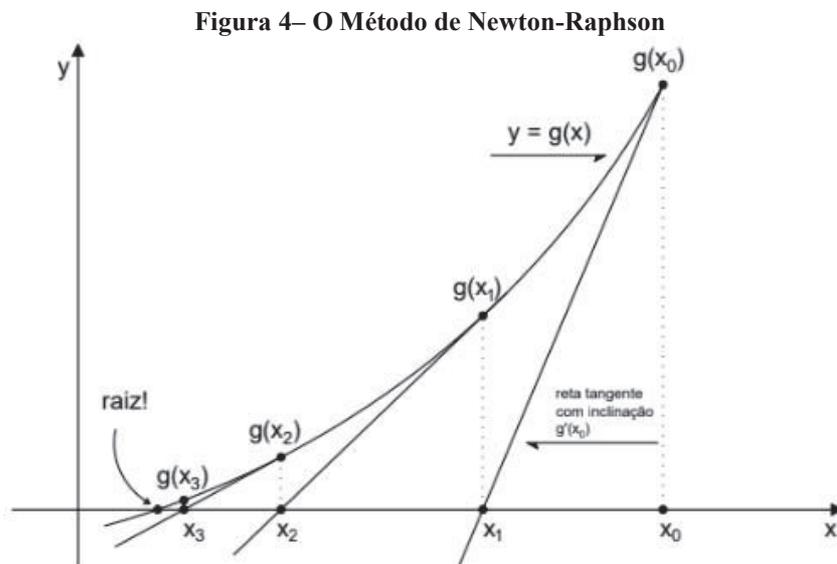
$$\mathbf{q} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (22)$$

Será descrito a seguir o método incremental-iterativo de Newton-Raphson, pois este é um dos métodos mais tradicionais de solução de sistemas não lineares. Além disso, será apresentado o método do comprimento de arco, que auxilia o método anterior a solucionar problemas que apresentam os fenômenos como *snap-through* e *snap-back*.

2.3.1. Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é um procedimento clássico para calcular raízes de funções de maneira iterativa, sendo assim eficiente para solucionar problemas não lineares. O procedimento consiste em, a partir de um função $g(x)$, contínua e diferenciável, e um ponto estimado inicial x_i , calcular a próxima estimativa x_{i+1} através do encontro da reta tangente à $g(x)$ no ponto $(x_i, g(x_i))$ com o eixo x, e assim sucessivamente, para as interações seguintes. Logo, a seguir é exibida a equação geral:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)} \quad (23)$$



Fonte: BRITO, 2018

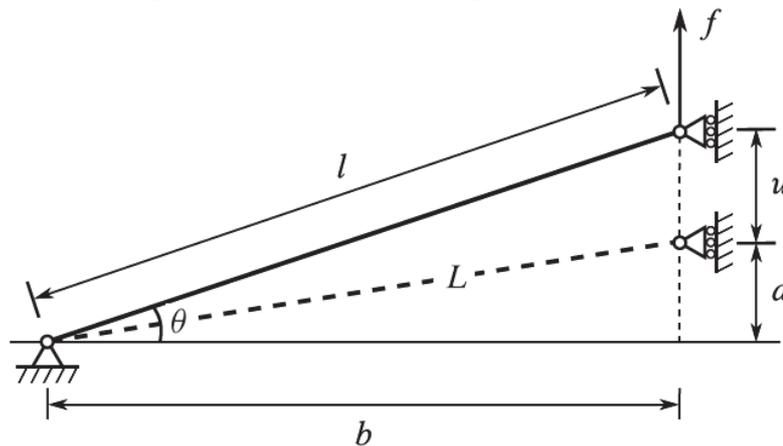
As iterações terminam quando algum critério de convergência é cumprido. Com um valor de tolerância tol , previamente estabelecido, dois critérios definidos são habitualmente usados (GILAT; SUBRAMANIAN, 2008):

$$\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \right| \leq tol$$

$$|g(x_i)| \leq tol$$

Aplicando o método para uma treliça simples com um grau de liberdade mostrada na Figura 5.

Figura 5 – Estrutura com um grau de liberdade



Fonte: LACERDA, 2014

O equilíbrio deverá ser encontrado para o grau de liberdade livre, onde a equação é dada por:

$$g(u) = q(u) - f = 0 \quad (24)$$

onde f é a força externa, $q(u)$ a força interna em função do deslocamento vertical e $g(u)$ a força residual que deverá ser igualada a 0. Assim, utiliza-se o Newton-Raphson para encontrar a solução da Equação 24.

$$u_{i+1} = u_i - \frac{g(u_i)}{g'(u_i)} \quad (25)$$

Desenvolvendo $g'(u_i)$, obtém-se

$$g'(u_i) = \frac{d(q(u) - f)}{du} = \frac{dq(u)}{du} = K_t \quad (26)$$

onde K_t é a tangente de rigidez, que é uma relação à carga e ao deslocamento. Deste modo, a equação 25 pode ser escrita na seguinte forma:

$$u_{i+1} = u_i - K_t^{-1}g(u_i) \quad (27)$$

Muitas vezes, a Equação 27, é dividida em duas:

$$\Delta u_i = -K_t^{-1}g(u_i) \quad (28)$$

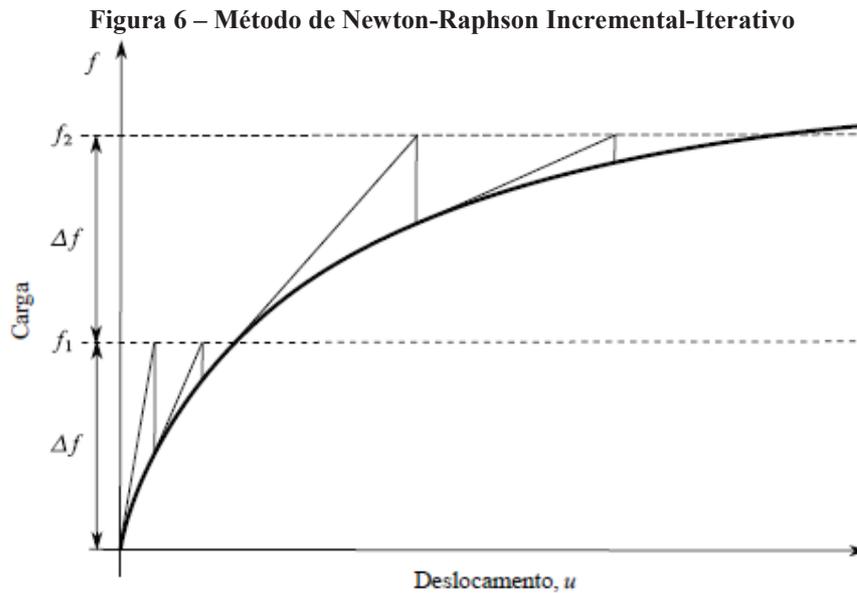
$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i \quad (29)$$

Para estruturas com mais de um grau de liberdade, a solução do sistema mantém-se a mesma, porém a tangente de rigidez K_t transfigura-se como a matriz jacobiana das forças internas, conhecida como matriz de rigidez tangente, e as forças residuais g , as forças externas f , as forças internas q e os deslocamentos u , conseqüentemente Δu também, tornam-se vetores, onde cada linha representa o comportamento estrutural para cada os diversos graus de liberdade estudados.

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial q}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \quad (30)$$

2.3.2. Método de Newton-Raphson incremental-iterativo

Sabe-se que o método de Newton-Raphson é capaz de calcular um ponto na trajetória de equilíbrio. Assim, para calcular o resto do caminho, une-se ao processo iterativo um procedimento incremental. Deste modo, serão aplicadas as iterações newtonianas para diferentes níveis de carga ($f, f + \Delta f, f + 2\Delta f$), obtendo um valor de deslocamento para cada um dos mesmos. Na Figura 6 é ilustrado o processo de cálculo desse caminho:



O algoritmo de cálculo de trajetória de equilíbrio usando o método de Newton-Raphson, deverá receber como entrada o incremento de carga Δf a cada passo de carga, o número de passo de carga i_{max} , número máximo de iterações j_{max} e tolerância tol , podendo ser escrito em pseudocódigo no Algoritmo 2:

Algoritmo 2 – Método de Newton-Raphson

```
input  $\Delta f, i_{max}, j_{max}, tol;$ 
```

```
 $f = 0; u = 0;$ 
```

```
for  $i = 1$  to  $i_{max}$ 
```

```
{
```

```
   $f = f + \Delta f;$ 
```

```
   $g = q(u) - f;$ 
```

```
  for  $j = 1$  to  $j_{max}$ 
```

```
  {
```

```

 $K_t = \frac{\partial q(u)}{\partial u};$ 
 $\Delta u = -K_t^{-1}g;$ 
 $u = u + \Delta u;$ 
 $g = q(u) - f;$ 
if  $\|g\| \leq tol \cdot \|\Delta f\|$  then break;
}
output  $u, f$ ;
}

```

Fonte: Adaptado de LACERDA, 2014

Observa-se que o critério de parada utilizado para mais de um grau de liberdade foi:

$$\frac{\|g\|}{\|\Delta f\|} \leq tol$$

Podendo também ser usado:

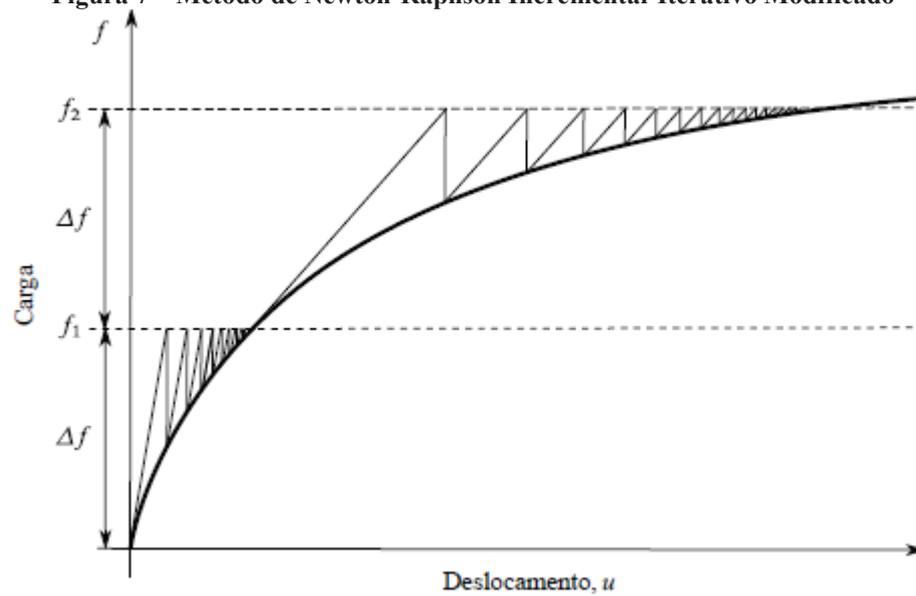
$$\frac{\|\Delta u_i\|}{\|u_i\|} \leq tol$$

Mesmo em problemas onde se busca uma solução para certa carga definida, deve-se utilizar o processo incremental-iterativo, pois a aplicação de um valor alto diretamente em uma carga pode gerar problemas de convergência. Assim, aumentar a carga a cada passo, recalculando a matriz tangente de rigidez em função da estrutura deslocada, torna a solução da primeira iteração de cada incremento mais próxima da solução final, facilitando o processo de convergência (LACERDA, 2014).

Em casos onde se considera a NLF, esse procedimento incremental-iterativo é especialmente importante pois, com aumento das tensões nas barras pode ocorrer mudanças no módulo tangente elastoplástico, alterando a matriz de rigidez tangente, que será utilizada na próxima iteração.

Entretanto, computar a matriz de rigidez tangente a cada iteração é um processo de alto custo computacional. Assim, desenvolveu-se uma alteração no método de Newton-Raphson convencional, surgindo o método de Newton-Raphson Modificado, baseado em calcular a matriz jacobiana uma única vez na parte incremental do algoritmo, ou seja uma vez a cada passo de carga. O procedimento é representado na Figura 7 e mostrado no Algoritmo 3.

Figura 7 – Método de Newton-Raphson Incremental-Iterativo Modificado



Fonte: LACERDA, 2014

Algoritmo 3 – Método de Newton-Raphson Modificado

```

input  $\Delta f, i_{max}, j_{max}, tol;$ 
 $f = 0; u = 0;$ 
for  $i = 1$  to  $i_{max}$ 
{
   $f = f + \Delta f;$ 
   $K_t = \frac{\partial q(u)}{\partial u};$ 
   $g = q(u) - f;$ 
  for  $j = 1$  to  $j_{max}$ 
  {
     $\Delta u = -K_t^{-1}g;$ 
     $u = u + \Delta u;$ 
     $g = q(u) - f;$ 
    if  $\|g\| \leq tol \cdot \|\Delta f\|$  then break;
  }
  output  $u, f;$ 
}

```

Fonte: Adaptado de LACERDA, 2014

Como observado na Figura 7, o método modificado exige maior número de iterações para convergir, o que pode invalidar sua vantagem computacional.

Outra forma de utilização do método de Newton-Raphson sem aplicação dos incrementos de carga seria estabelecer incrementos de deslocamento. Dessa forma, faz-se o

caminho inverso, calculando as cargas externas necessárias para causar esse deslocamento esperado a cada passo incremental do sistema.

Entretanto, tanto o incremento à carga quanto ao deslocamento apresenta limitações para solucionar a trajetória de equilíbrio. Enquanto o método de Newton-Raphson com controle de carga não consegue descrever caminhos que apresentam o fenômeno do *snap-through*, o controle de deslocamento se limita a trajetórias que não apresentam o fenômeno conhecido como *snap-back*.

2.3.3. Método de Comprimento de Arco

Conforme Lacerda (2014) será apresentado o método de comprimento de arco (*arc length*), que é bastante utilizado para determinar a trajetória de equilíbrio, pois ele consegue determinar a trajetória gerada pelos fenômenos do *snap-back* e *snap-through* de maneira muito eficiente, sendo o método mais utilizado, até mesmo por *softwares* comerciais, como o ABAQUS.

A principal inovação desse método é a forma de incrementar as variáveis da trajetória de equilíbrio, visto que acontece de maneira conjunta, ocorrendo incrementos tanto na carga como no deslocamento. Assim, surge uma nova incógnita para auxiliar nesse processo, conhecida como fator de carga (λ), alterando a equação de cálculo da força residual conforme mostra a Equação 31.

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{q}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{f} = 0 \quad (31)$$

Aplicando os incrementos na carga e no deslocamento:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_{i+1}, \lambda_{i+1}) = \mathbf{q}(\mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}) - (\lambda_i + \Delta \lambda) \mathbf{f} = 0 \quad (32)$$

Também, necessita-se da adição de uma restrição no sistema de equações de equilíbrio que irá limitar a distância entre dois passos de carga consecutivos, além de auxiliar no cálculo do valor da nova incógnita. Essa equação varia de acordo com a restrição c utilizada, que pode ser por exemplo, restrição de hipersfera ou hiperplano.

Fazendo uma formulação genérica considerando uma restrição $c = 0$ qualquer, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{g} = \mathbf{q} - \lambda \mathbf{f} = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Resolvendo o sistema utilizando o método de Newton-Raphson, onde δ simboliza os incrementos do mesmo método:

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_i \\ \delta \lambda_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial g_i}{\partial \lambda} \\ \left(\frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{u}}\right)^T & \frac{\partial c_i}{\partial \lambda} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_i \\ c_i \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{i+1} \\ \Delta \lambda_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_i \\ \Delta \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_i \\ \delta \lambda_i \end{bmatrix} \quad (35)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{u}} &= \frac{\partial q_i}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_t \\ \frac{\partial g_i}{\partial \lambda} &= -\mathbf{f} \end{aligned}$$

Realizando substituição com intuito de facilitar a notação:

$$\begin{aligned} b_i &= \left(\frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \\ m_i &= \frac{\partial c_i}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

Tem-se:

$$-\mathbf{K}_t \delta \mathbf{u}_i + \mathbf{f} \delta \lambda_i = \mathbf{g}_i \quad (36)$$

$$-b_i \delta u_i - m_i \delta \lambda_i = c_i \quad (37)$$

Isolando δu_i em (36):

$$\delta \mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}_i + \delta \lambda_i \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{f} \quad (38)$$

Onde:

$$\delta \mathbf{u}_i^R = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}_i \quad (39)$$

$$\delta \mathbf{u}_i^F = \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{f} \quad (40)$$

Assim:

$$\delta \mathbf{u}_i = \delta \mathbf{u}_i^R + \delta \lambda_i \delta \mathbf{u}_i^F \quad (41)$$

Logo, ambos os termos ($\delta \mathbf{u}_i^F$ e $\delta \mathbf{u}_i^R$) estão em função de partes conhecidas, $\delta \mathbf{u}_i^F$ sendo calculado no início de cada passo incremental, enquanto que $\delta \mathbf{u}_i^R$ é determinado no começo de cada passo iterativo. Substituindo (41) em (37), e isolando $\delta \lambda_i$:

$$\begin{aligned} -b_i \delta \mathbf{u}_i^R - b_i \delta \lambda_i \delta \mathbf{u}_i^F - m_i \delta \lambda_i &= c_i \\ \delta \lambda_i (-b_i \delta \mathbf{u}_i^F - m_i) &= c_i + b_i \delta \mathbf{u}_i^R \end{aligned}$$

$$\delta \lambda_i = -\frac{c_i + b_i \delta \mathbf{u}_i^R}{m_i + b_i \delta \mathbf{u}_i^F} \quad (42)$$

Quando ocorrer a convergência do Newton-Raphson, finaliza-se a fase incremental com:

$$\mathbf{u}^{j+1} = \mathbf{u}^j + \Delta \mathbf{u} \quad (43)$$

$$\mathbf{f}^{j+1} = \mathbf{f}^j + \Delta \lambda \mathbf{f} \quad (44)$$

Utilizando a restrição de hiperplano fixo (RIKS *apud* LACERDA, 1972):

$$c = \Delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u} + \psi^2 \delta \lambda \Delta \lambda_1 \mathbf{f}^T \mathbf{f} = 0 \quad (45)$$

onde ψ é um fator de escala para o fator de carga, visto que as unidades de carga e deslocamento são diferentes, obtém-se

$$\delta \lambda_i = - \frac{\Delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_i^R}{\Delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_i^F + \psi^2 \Delta \lambda_1 \mathbf{f}^T \mathbf{f}} \quad (46)$$

Entretanto, geralmente se adota $\psi = 0$, em razão do mesmo exercer influência irrisória nos resultados, reduzindo, portanto, o trabalho computacional demandado (BORST *et al.* *apud* LACERDA, 2012). Deste modo:

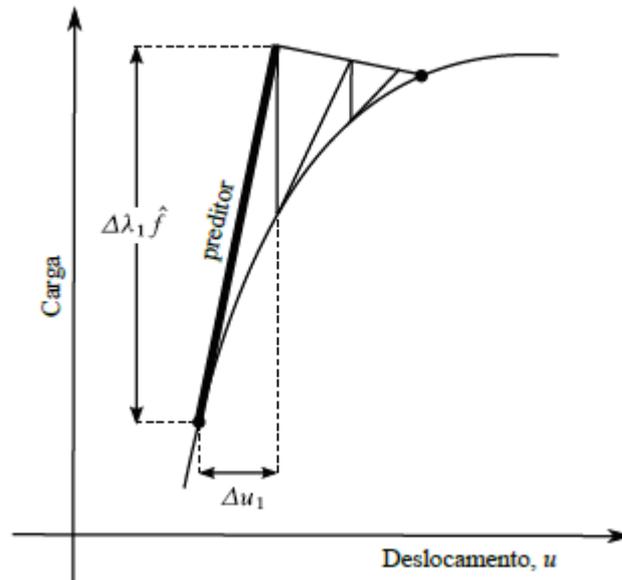
$$\delta \lambda_i = - \frac{\Delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_i^R}{\Delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_i^F} \quad (47)$$

No comprimento de arco, sabe-se que acontece incrementos tanto nas cargas quanto nos deslocamentos. Porém, nos primeiros incrementos, deve-se calcular um vetor preditor que dá origem aos incrementos iniciais $\Delta \mathbf{u}_1$ e $\Delta \lambda_1$ no início de cada ciclo incremental. Tanto o vetor preditor como o vetor $\Delta \mathbf{u}_1$ serão tangentes à trajetória de equilíbrio do sistema, tendo a mesma direção do vetor $\delta \mathbf{u}^F = K_t^{-1} \mathbf{f}$, como observado na Figura 8. Deste modo:

$$\Delta \lambda_1 = \pm \frac{\Delta l}{\|\delta \mathbf{u}^F\|} \quad (48)$$

$$\Delta u_1 = \Delta \lambda_1 \delta u^F \quad (49)$$

Figura 8 – Vetor Preditor



Fonte: LACERDA, 2014

Nota-se que $\Delta \lambda_1$ pode assumir valor positivo ou negativo, o que determina a direção do vetor preditor. Para que isso ocorra, deve-se observar as seguintes condições:

- Se $(\Delta u^{j-1})^T \delta u^F > 0$, então o preditor deverá seguir o mesmo sentido do vetor δu^F , utilizando a parcela positiva da Equação 48;
- Se não, então o preditor terá sentido oposto a δu^F , utilizando a parcela negativa da Equação 48.

Onde Δu^{j-1} é o incremento final do passo incremental anterior.

Como o grau de não linearidade é inconstante durante a solução do problema, geralmente se utiliza um comprimento de arco Δl variável, que diminui em situações de alto grau de não linearidade e aumenta em situações de baixo grau de não linearidade. Assim, utiliza-se a Equação 50 para recalcular o comprimento de arco do ciclo atual Δl^j .

$$\Delta l^j = \Delta l^{j-1} \left(\frac{N_w}{N_{j-1}} \right)^\zeta \quad (50)$$

Sendo Δl^{j-1} o comprimento de arco do ciclo anterior, N_w o número procurado de iterações para convergir (normalmente varia entre 2 e 5), N_{j-1} o número de iterações para convergir no passo incremental anterior e ζ é uma constante que modifica a influência do quociente no cálculo do novo comprimento de arco (geralmente igual a 0,5).

Portanto, tem-se o Algoritmo 4 de comprimento de arco, utilizando comprimento de arco variável, método de Newton-Raphson modificado para fazer as iterações e critério de convergência $\frac{\|g\|}{\lambda\|f\|} \leq tol$.

Algoritmo 4 – Método de comprimento de arco

```

input  $\Delta f, i_{max}, j_{max}, tol$ ;
 $\lambda = 0; u = 0; \Delta u = 0$ ;
for  $j = 1$  to  $j_{max}$ 
{
   $K_t = \frac{\partial q(u)}{\partial u}$ ;
   $\delta u^F = K_t^{-1} f$ ;
   $\Delta \lambda = \frac{\Delta l}{\|\delta u^F\|}$ ;
  Se  $\Delta u^T \delta u^F < 0$ 
  {
     $\Delta \lambda = -\Delta \lambda$ ;
  }
   $\Delta u_1 = \Delta \lambda \delta u^F$ ;
   $\Delta u = \Delta u_1$ ;
   $g = q(u + \Delta u) - f(\lambda + \Delta \lambda)$ ;
  for  $i = 1$  to  $i_{max}$ 
  {
     $\delta u^R = -K_t^{-1} g$ ;
     $\delta \lambda = -\frac{\Delta u_1^T \delta u^R}{\Delta u_1^T \delta u^F}$ ;
     $\delta u = \delta u^R + \delta \lambda \delta u^F$ ;
     $\Delta u = \Delta u + \delta u$ ;
     $\Delta \lambda = \Delta \lambda + \delta \lambda$ ;
     $g = q(u + \Delta u) - f(\lambda + \Delta \lambda)$ ;
    if  $\|g\| \leq tol \cdot \|\Delta f\|$  then break;
  }
   $u = u + \Delta u$ ;
   $\lambda = \lambda + \Delta \lambda$ ;
output  $u, f$ ;

```

$$\Delta l = \Delta l \left(\frac{N_w}{i} \right)^{0.5}$$

}

Fonte: Adaptado de LACERDA, 2014

3.4 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE TRELIÇA NO MEF POSICIONAL

Essa formulação tem por objetivo desenvolver as expressões para calcular a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_t e o vetor de forças internas q , utilizando a medida de deformação de engenharia.

As treliças são estruturas reticuladas onde ocorre apenas transmissão de força axial. Cada elemento será formado por dois nós de coordenadas iniciais (X_A, Y_A, Z_A) e (X_B, Y_B, Z_B) , e após aplicados os deslocamentos, as novas coordenadas serão (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B) . Deste modo, os comprimentos inicial e final da barra serão, respectivamente:

$$L = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2} \quad (51)$$

$$l = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad (52)$$

Reunindo as novas coordenadas em um vetor transposto para utilizar no MEF Posicional, que irá substituir o vetor de deslocamentos no método de solução escolhido:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T \quad (53)$$

Pois no MEF Posicional na solução do sistema, o vetor de deslocamentos \mathbf{u}_i é substituído pelo vetor de posições nodais \mathbf{x}_i .

Assim, para o processo iterativo de Newton-Raphson fica:

$$\Delta \mathbf{x}_i = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}_i \quad (54)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \Delta \mathbf{x}_i \quad (55)$$

Utilizando a deformação de engenharia dada por:

$$\varepsilon = \frac{l - L}{L} \quad (56)$$

Calculando o gradiente de ε :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{L} \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} \quad (57)$$

Calculando $\frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}}$, através de $\frac{\partial l^2}{\partial \mathbf{x}}$:

$$\frac{\partial l^2}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\frac{\partial l^2}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{d} \quad (58)$$

Onde:

$$\mathbf{d} = [x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B, x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A]^T \quad (59)$$

Sabe-se que:

$$\frac{\partial l^2}{\partial \mathbf{x}} = 2l \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} \quad (60)$$

Substituindo (58) em (60):

$$2\mathbf{d} = 2l \frac{\partial l}{\partial x}$$

$$\frac{\partial l}{\partial x} = \frac{1}{l} \mathbf{d} \quad (61)$$

Aplicando (61) em (57):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{Ll} \mathbf{d} \quad (62)$$

Sendo a energia de deformação:

$$U = \frac{1}{2} EAL\varepsilon^2 \quad (63)$$

Onde, A é a área da seção transversal da barra. Assim, calculando o vetor de forças internas:

$$\mathbf{q} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{EAL}{2} \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial x} = EAL\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \quad (64)$$

Substituindo (62) em (64):

$$\mathbf{q} = \frac{EA\varepsilon}{l} \mathbf{d} = \frac{\sigma A}{l} \mathbf{d} \quad (65)$$

Calculando a matriz de rigidez tangente:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = EA \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\varepsilon}{l} \mathbf{d} \right] \quad (66)$$

Sendo o gradiente de funções escalares e vetoriais quaisquer:

$$\frac{\partial f \mathbf{v}}{\partial x} = f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{v} \otimes \frac{\partial f}{\partial x} \quad (67)$$

onde \otimes é o produto tensorial. Deste modo, aplicando (67) em (66), obtém-se:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA\varepsilon}{l} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x} + EA \mathbf{d} \otimes \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\varepsilon}{l} \right] \quad (68)$$

Usando a regra do quociente de derivadas e aplicando (61) e (62), tem-se que:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA\varepsilon}{l} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x} + \frac{EA}{l^3} \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \quad (69)$$

Assim:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA\varepsilon}{l} \mathbf{B} + \frac{EA}{l^3} \mathbf{C} = \frac{A\sigma}{l} \mathbf{B} + \frac{EA}{l^3} \mathbf{C} \quad (70)$$

Onde:

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (71)$$

e

$$\mathbf{C} = \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{d} \quad (72)$$

4 METODOLOGIA

Analisou-se o comportamento de treliças sob o efeito da não linearidade geométrica e da plasticidade do material. Para tanto, a partir do código computacional de Lacerda (2014), que trata da análise não linear geométrica de treliças usando o método dos elementos finitos posicional, adicionou-se a elastoplasticidade unidimensional com o auxílio da linguagem de programação de alto nível MATLAB. Esta foi escolhida pela facilidade de gerar gráficos, estes sendo o principal resultado desse trabalho.

No arquivo de entrada, deve-se informar a geometria da treliça (posição dos nós e conectividade dos mesmos), as propriedades dos elementos (módulo de elasticidade, área da seção transversal, tensão de escoamento e módulo de plasticidade), as cargas externas e não menos importante as condições de contorno da estrutura. Também, são inicializadas as variáveis relacionadas à análise não linear física, que são: vetor de tensões, matriz de variáveis plásticas, vetor de deformações da iteração anterior e um vetor que indica se o elemento plastificou ou não (teste de plasticidade).

Então, informa-se dados do método de solução do sistema, o comprimento de arco inicial, o número máximo de ciclos de carga/deslocamento na estrutura e, caso esteja fazendo uma análise com comprimento de arco variável, o número almejado de iterações em cada ciclo. O algoritmo de mapeamento de retorno é utilizado na função que calcula as forças internas dos elementos para atualizar o valor das tensões caso ocorra plastificação no elemento. As variáveis relacionadas à elastoplasticidade são atualizadas a cada passo de carga. O vetor “teste de plasticidade” é utilizado no momento de recalcular a matriz de rigidez, para mudar o valor do módulo tangente elastoplástico, caso tenha ocorrido plastificação no elemento.

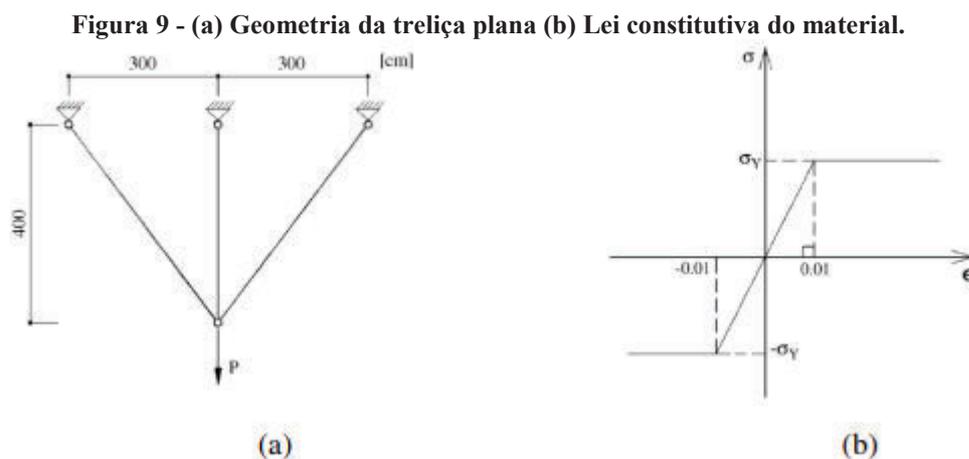
Então, foram selecionados problemas conhecidos na literatura para ser efetuada a análise comparativa, incluindo também os resultados obtidos no *software* comercial ABAQUS. Por fim, realizou-se uma discussão dos resultados obtidos através do código desenvolvido, verificando assim a eficiência do mesmo.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta seção, será avaliado o comportamento não linear físico e geométrico de treliças, comparando os resultados com outros obtidos na literatura e por meio do *software* comercial ABAQUS.

5.1 TRELIÇA PLANA DE TRÊS LADOS

Aqui se apresenta o comportamento não linear de uma treliça plana com a geometria e a lei constitutiva do material, mostradas na Figura 9. Buscou-se analisar uma formulação proposta por Greco *et al.* (2006), que obteve uma solução por meio do uso de três elementos finitos e com passos de deslocamentos de 0,5 cm aplicados no nó central, utilizando o método numérico comprimento de arco com método iterativo Newton-Raphson. O módulo de elasticidade (E) das barras tem valor de 1000 kN/cm^2 , a tensão de escoamento (σ_y) é igual a 10 kN/cm^2 , sendo a lei constitutiva do tipo plasticidade perfeita, e a área da seção transversal das barras (A) é igual a 1 cm^2 . Dessa forma, primeiramente, há uma fase de carregamento da estrutura, e uma fase com descarregamento e, após isso, tem-se o carregamento no sentido inverso, de tal forma que permita a verificação da influência das deformações plásticas que ocorrem no material.

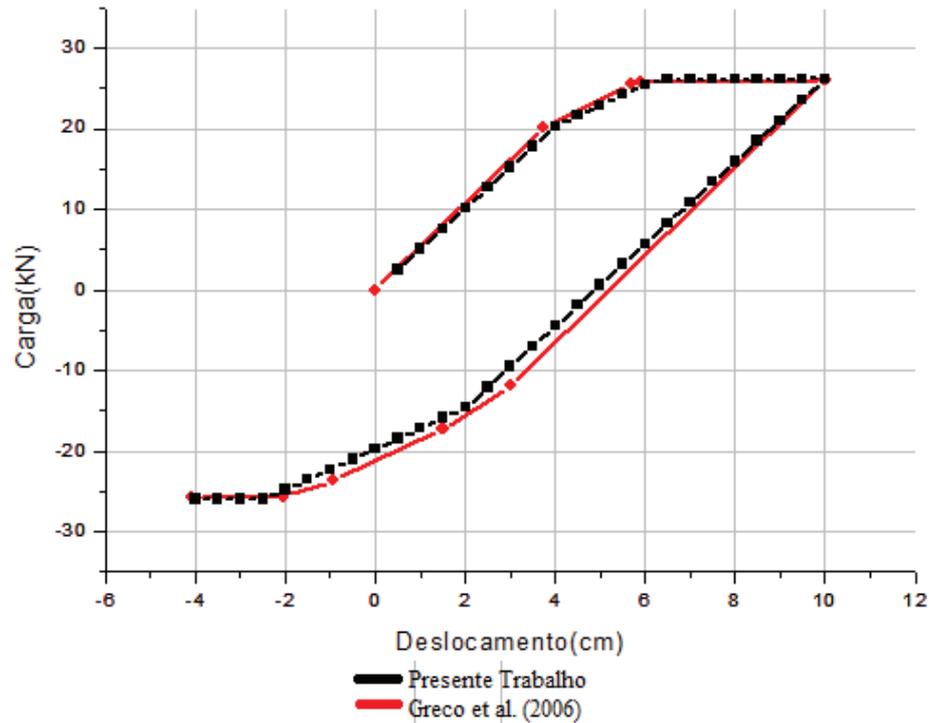


Fonte: Greco *et al.* (2006)

Na Figura 10, em preto estão apresentados os resultados deste trabalho, e em vermelho os resultados referentes aos estudos de Greco *et al.* (2006). Assim, nesta figura, podemos observar que os resultados calculados atendem às especificações onde, na primeira parte do

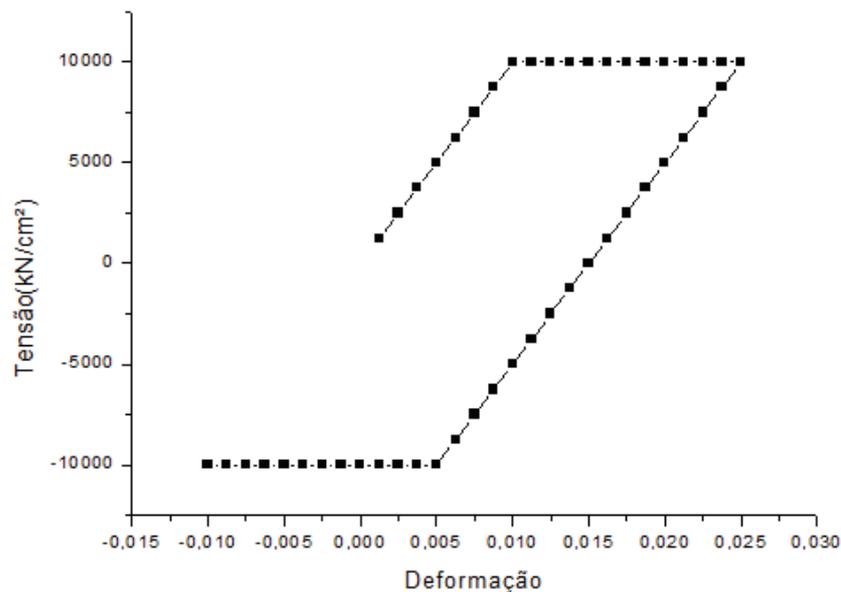
gráfico, ocorreu deslocamento vertical da posição original do nó central igual a 10 cm. Depois, fez-se o descarregamento até o deslocamento vertical alcançar o valor de 4 cm no sentido oposto. Percebe-se que ocorre uma mudança de inclinação pois, a barra central plastifica antes das demais no oitavo passo de carga, enquanto que as demais barras apenas plastificam no décimo terceiro passo de carga, como observado nos gráficos das Figuras 11 e 12.

Figura 10 – Gráfico carga x deslocamento comparativo entre o presente trabalho e Greco *et al.* (2006)

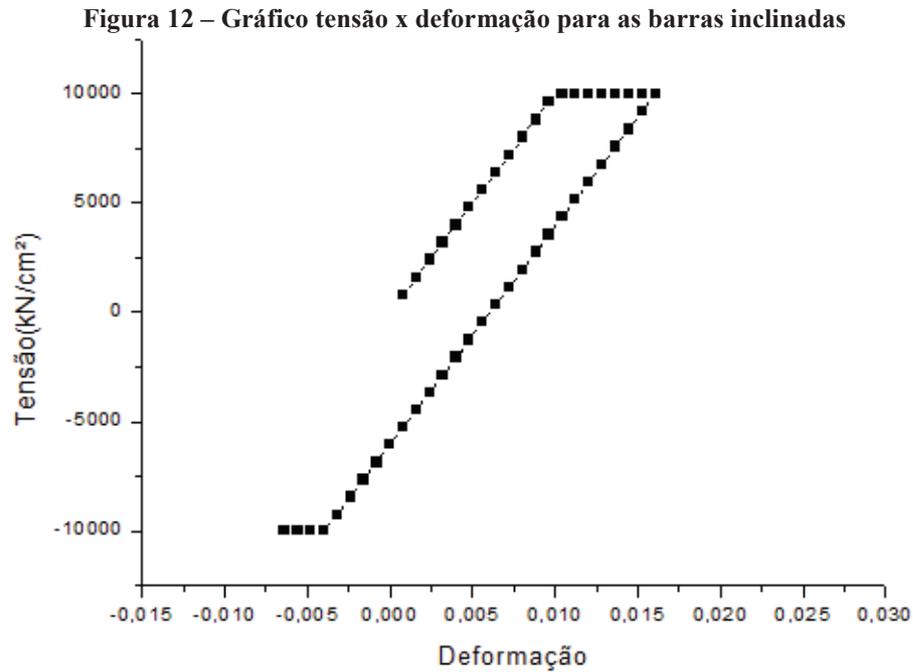


Fonte: Autoria própria, 2019

Figura 11 – Gráfico tensão x deformação para a barra central



Fonte: Autoria própria, 2019

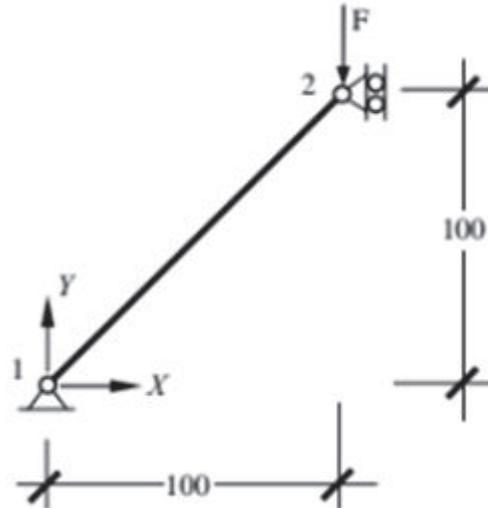


Logo, tem-se uma carga inicial de plastificação igual a 20,29 kN (quando a barra central plastifica) e carga limite de 26,10 kN, enquanto que Greco *et al.* (2006) obteve como valores, respectivamente, 20,24 kN e 26,00 kN, ou seja, os resultados mostraram-se bastante aproximados.

5.2 BARRA AXIAL INCLINADA

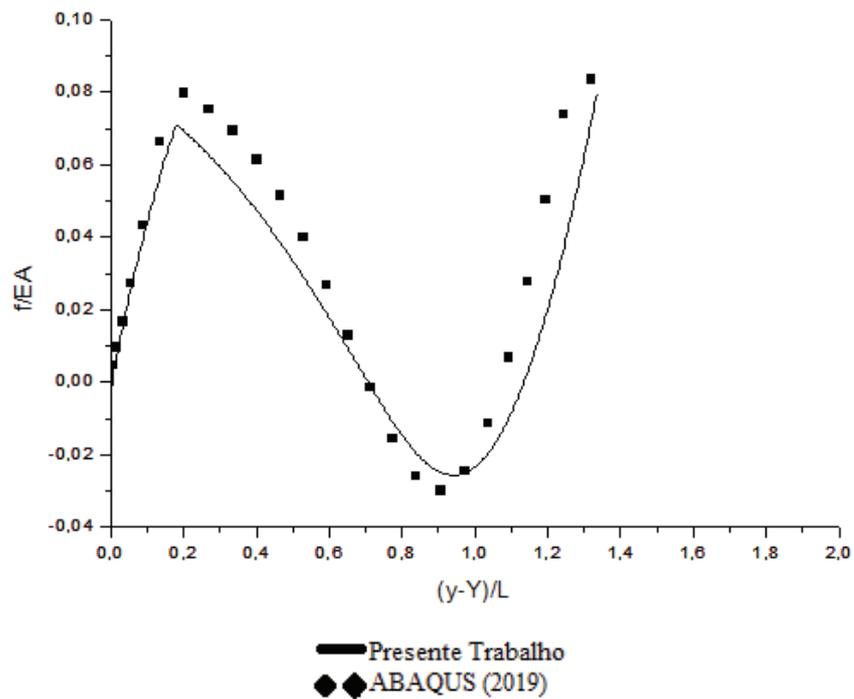
A barra axial inclinada encontrada em Bonet e Wood (1997), na figura 13, é carregada com uma força vertical para baixo. O elemento estrutural tem módulo de elasticidade realístico, $E = 210 \text{ kN/mm}^2$, e possui tensão de escoamento alterado para um valor maior que 25 kN/mm^2 com o objetivo de permitir certo grau de não linearidade geométrica, antes que ocorra a plastificação do elemento estrutural. O caminho de equilíbrio apresenta o fenômeno do *snap-through*. Na figura 15, tem-se um comparativo do resultado obtido no presente trabalho com o obtido através do *software* ABAQUS, pois pegar os dados obtidos pelo autor original diretamente do gráfico no formato imagem não teria precisão. A solução foi baseada considerando comprimento de arco inicial $\Delta l = 0.5$, número máximo de ciclos igual a 380 e tolerância 10^{-4} .

Figura 13 – Exemplo Barra Axial Inclinada



Fonte: Adaptado de BONET, 1997

Figura 14 – Gráfico tensão x deformação para as barras inclinadas



Fonte: Autoria própria a partir de dados do ABAQUS, 2019

Logo, observa-se diferenças de valores nos pontos de maior deformação, o que talvez possa ser justificado pelo tipo de deformação adotado, deformação de engenharia, enquanto que o *software* ABAQUS utiliza unicamente a deformação logarítmica com mudança de volume.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi tratado o estudo da influência da lei constitutiva do material nos trajetória de equilíbrio de treliças, verificando fenômenos não lineares como pontos limites, *snap-through* e *snap-back*. Com o amplo uso desse tipo de sistemas estruturais, ver-se a necessidade de estudar o comportamento do material para serem produzidas estruturas mais econômicas.

A formulação posicional foi aplicada a exemplos de treliças *benchmarks*, como o exemplo de três barras, onde ocorre carregamentos e descarregamentos na estrutura, obtendo valores muito próximos dos esperados. O outro exemplo estudado considerou uma barra inclinada onde ocorreu certas diferenças na trajetória de equilíbrio, especialmente, nos locais de grande deformação, justificadas pelo tipo medida de deformação utilizado na análise.

O presente trabalho apresentou resultados satisfatórios quando comparados aos obtidos pelos autores – cujas respostas foram comparadas – e com *software* comercial ABAQUS. Assim, comprovou-se a eficácia da utilização do código para obter trajetórias de equilíbrio condizentes com a realidade.

Como sugestões para futuras pesquisas, pode-se estender o código para abordar outros fenômenos muito importante em treliças como a flambagem. Outra possibilidade, é a simulação de mais exemplos, incluindo aqueles com geometria espacial.

REFERÊNCIAS

- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2006.
- BELO, I. M. **Desenvolvimento da formulação corrotacional em elementos finitos de casca para a análise hiperelástica**, Tese (Doutorado) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.
- BONET, J., & WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. Cambridge university press, 1997.
- BRITO, C. M. S. R. **Modelagem e simulação numérica de treliças espaciais submetidas a carregamentos estáticos e dinâmicos em regime elástico não linear**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2018.
- CRISFIELD, M.A., **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Volume 1: *Essentials*, John Wiley & Sons, 1991.
- GILAT, A.; SUBRAMANIAN, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas**. Porto Alegre/RS: Bookman, 2008.
- GRECO, M. *et al.* **Nonlinear positional formulations for space truss analysis**. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 42, 2006.
- LACERDA, E. G. M. **Análise não linear de treliças pelo Métodos dos Elementos Finitos Posicional**. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.
- LEITE, F. N. **Uma Formulação Teórica Consistente para Análise Não Linear de Estruturas Treliçadas Espaciais**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2000.
- MAIOLA, C. H.; MALITE, M. **Análise teórica e experimental de treliças metálicas espaciais constituídas por barras com extremidades estampadas**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, n. 20, p. 105-125, 2002.
- PINHEIRO, J. **Venda de passagens de ônibus é suspensa em Cajazeiras; saiba como empresas estão funcionando na cidade**. Paraíba, Cajazeiras, 26 mai. 2018. Disponível em: <<https://www.diariodosertao.com.br/noticias/cidades/259290/venda-de-passagens-de-onibus-e->

[suspensa-em-cajazeiras-saiba-como-empresas-estao-funcionando-na-cidade.html](#)>. Acesso em: 31 mar. 2019

SILVA, S. S. **Análise Não Linear de Pórticos Planos Utilizando uma Formulação Corrotacional e Plasticidade por Camadas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2011.

SIMO, J.C. & HUGHES, T.J.R., **Computational Inelasticity**, Springer-Verlag, 1998.