

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO,
CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA

COORDENAÇÃO DO CURSO SUPERIOR DE
BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL



John Williams Ferreira de Souza

**MODELAGEM MATEMÁTICA E NUMÉRICA DE
ESCOAMENTOS BIFÁSICOS EM
RESERVATÓRIOS PETROLÍFEROS**

Trabalho de Graduação

**Curso de Bacharelado em
Engenharia Civil**

Cajazeiras, PB

2018

John Williams Ferreira de Souza

**MODELAGEM MATEMÁTICA E NUMÉRICA DE
ESCOAMENTOS BIFÁSICOS EM
RESERVATÓRIOS PETROLÍFEROS**

Orientador

Prof. Me. Patrício Luiz de Andrade (IFPB)

BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA
PARAÍBA**

CAJAZEIRAS, PB

2018

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catálogo na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

S729m

Souza, John Williams Ferreira de

Modelagem matemática e numérica de escoamentos bifásicos em reservatórios petrolíferos / John Williams Ferreira de Souza; orientador Patrício Luiz de Andrade.-

105 f.: il.

Orientador: Patrício Luiz de Andrade.

TCC (Bacharelado em Eng. Civil) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2019.

1 Equações diferenciais 2 Métodos numéricos 3 Python – linguagem de programação 4 Recuperação secundária de petróleo I Título

CDU 517.95:004(0.067)

JOHN WILLIAMS FERREIRA DE SOUZA

**MODELAGEM MATEMÁTICA E NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS
BIFÁSICOS EM RESERVATÓRIOS PETROLÍFEROS**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Coordenação do Curso de Bacharelado em
Engenharia Civil do Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba,
como parte dos requisitos para a obtenção do
grau de Bacharelado em Engenharia Civil

BANCA EXAMINADORA

Patrício Luiz de Andrade

Me. Patrício Luiz de Andrade - (Orientador)
Unidade Acadêmica de Matemática do IFPB

Bruno de Medeiros Souza

Esp. Bruno de Medeiros Souza - (Membro – Avaliador Interno)
Unidade Acadêmica de Indústria do IFPB.

Enivaldo Santos Barbosa

Dr. Enivaldo Santos Barbosa - (Membro – Avaliador Externo)
Departamento de Energia Nuclear da UFPE

Cajazeiras, PB
20 de Dezembro de 2018

A Deus, que nos criou e foi criativo nesta tarefa. Seu fôlego de vida em mim me foi sustento e me deu coragem para questionar realidades e propor sempre um novo mundo de possibilidades frente às adversidades. Dedico minha conquista, em especial, aos meus pais Levi Vicente de Souza e Cicera Ferreira Alexandre e a todos aqueles que me apoiaram e sempre estiveram ao meu lado em todos os momentos durante essa caminhada.

Agradecimentos

À minha família, por sua capacidade de acreditar em mim e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que me deram a esperança para seguir e ser sempre a minha melhor versão todos os dias. Pai, sua presença significou segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada e que posso contar com você para qualquer coisa.

À minha namorada, companheira de longas jornadas, que sempre esteve comigo em várias decisões importantes.

Ao meu grupo de estudos e projetos durante toda a graduação. Desejo uma vida repleta de realizações. Obrigado por serem pacientes e por agirem quando o cansaço chegava.

Ao IFPB, especialmente ao Campus Cajazeiras a qual tenho vínculo estudantil de longas datas, desde a formação técnica em Edificações e em Segurança do Trabalho. Seu corpo docente, funcionários de todos os setores, direção e administração, oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

Ao meu orientador, Me. Patrício Luiz de Andrade, por todo apoio na construção deste trabalho, proporcionando um ambiente satisfatório para a pesquisa e sem medir esforços para orientar alunos de outras unidades acadêmicas do Campus. Dessa forma, fico agradecido pela confiança e por todos os ensinamentos transmitidos.

Agradeço a todos os professores, por me proporcionarem o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. A palavra mestre/doutor, nunca fará justiça aos professores dedicados aos quais sem nominar terão os meus eternos agradecimentos.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

*“Procure sempre fazer as coisas
do modo mais simples que você puder.”*

— SIR ALBERT EINSTEIN

Resumo

Uma das alternativas no processo de recuperação do petróleo é a recuperação secundária, comumente realizada com a injeção de água no reservatório a fim de manter a pressão necessária para sua extração. Para auxiliar os engenheiros a obter melhores informações que têm grande impacto no planejamento da recuperação de óleo, tornam-se extremamente importantes as simulações computacionais. No entanto, trata-se de um grande desafio implementar simulações destes problemas, pois há uma abrangência de conhecimentos que estão interconectados nas diversas áreas, tais como: programação matemática, geração de malhas, análise do escoamento, etc. Existe também uma estreita relação com a hidrologia de águas subterrâneas, mecânica dos solos, mecânica dos fluidos e mecânica das rochas. Cada um destes temas se apresenta como uma área de conhecimento bastante vasta, tanto no aspecto teórico como computacional. Neste trabalho são estudados os problemas de advecção linear e não-linear, focalizando no problema de Buckley Leverett, que se trata de uma Equação Diferencial Parcial (EDP) hiperbólica não-linear, visando o escoamento imiscível água-óleo em meios porosos no caso unidimensional. Nos experimentos numéricos, foram realizadas simulações computacionais usando o Python para obter soluções numéricas do comportamento do perfil de saturação, com a aplicação dos métodos numéricos clássicos de diferenças finitas: Upwind (UPW), Lax-Friedrichs (LXF) e Lax-Wendroff (LXW).

Palavras-Chave: Buckley-Leverett. EDP. Métodos Numéricos. Recuperação secundária de petróleo.

Abstract

One of the alternatives in the oil recovery process is the secondary recovery, commonly performed with the injection of water into the reservoir in order to maintain the necessary pressure for its extraction. In order to help engineers obtain better information that has a great impact on oil recovery planning, computational simulations become extremely important. However, it is a great challenge to implement simulations of these problems, since there is a range of knowledge that is interconnected in the various areas, such as: mathematical programming, mesh generation, flow analysis, etc. There is also a close relationship with the hydrology of groundwater, soil mechanics, fluid mechanics and rock mechanics. Each of these themes presents itself as a vast area of knowledge, both theoretically and computationally. In this work the problems of linear and non-linear advection are studied, focusing on the Buckley-Leverett problem, which is a nonlinear hyperbolic Partial Differential Equation (EDP), aiming the immiscible water-oil flow in porous media in the case one-dimensional. In the numerical experiments, computational simulations were performed using Python to obtain numerical solutions of the saturation profile behavior, with the application of classical numerical finite difference methods: Upwind (UPW), Lax-Friedrichs (LXF) and Lax-Wendroff (LXW).

Keywords: Buckley-Leverett. EDP. Numerical methods. Secondary oil recovery.

Lista de Figuras

FIGURA 1.1 – Representação de um reservatório de petróleo submetido à produção de óleo por injeção de água	19
FIGURA 2.1 – Modelo esquemático em microescala de uma matriz rochosa, formada por grãos minerais, contendo poros.	27
FIGURA 2.2 – Amostra de rocha para ensaio de deslocamento	30
FIGURA 2.3 – Registro de ensaio de deslocamento da amostra de rocha	31
FIGURA 2.4 – escoamento de um fluido por uma região retangular	32
FIGURA 2.5 – Geometria para o cálculo da área efetiva \bar{S}	33
FIGURA 2.6 – Aproximação de uma área \bar{S} por segmentos de retas	33
FIGURA 2.7 – Elemento de fluido utilizado para o cálculo do divergente	34
FIGURA 2.8 – Região com uma fronteira de entrada e outra de saída de fluido . . .	35
FIGURA 2.9 – Fluxo de massa através das fronteiras de um elemento de fluido . . .	40
FIGURA 2.10 – Experimento de Darcy	44
FIGURA 2.11 – Gráfico da função de fluxo $f(s)$ no problema de escoamento bifásico	51
FIGURA 2.12 – Gráfico da derivada da função de fluxo $f(s)$ no problema de escoamento bifásico	52
FIGURA 2.13 – Escoamento bifásico em meio poroso. Tanque de Provas Numérico da USP	52
FIGURA 3.1 – Curvas Características	55
FIGURA 3.2 – Curva Inicial - Advecção Linear (Caso 01)	56
FIGURA 3.3 – Solução - Advecção Linear	57
FIGURA 3.4 – Gráfico das Funções $u_0(x)$ e $u'_0(x)$	59
FIGURA 3.5 – Curvas Características Planas do Problema	60

FIGURA 3.6 – Solução em cada subconjunto considerado	61
FIGURA 3.7 – Curvas Características - Região do Choque	61
FIGURA 3.8 – Condição inicial para o Problema de Riemann	63
FIGURA 3.9 – Solução do problema de Riemann no plano xt	64
FIGURA 3.10 – Curva Inicial - Advecção Não-Linear - Equação de Burgers	67
FIGURA 3.11 – Solução - Equação de Burgers (Caso Não-Linear)	68
FIGURA 3.12 – Esboço da solução fraca do problema do Exemplo 4.1	69
FIGURA 3.13 – Esboço da Solução do Problema	69
FIGURA 3.14 – Curvas Características no Plano xt	71
FIGURA 3.15 – Solução do Problema por Rarefação	72
FIGURA 4.1 – Molécula do Esquema Upwind	78
FIGURA 4.2 – Propagação pelo Esquema Upwind	78
FIGURA 4.3 – Molécula do Esquema Lax-Friedrichs	79
FIGURA 4.4 – Molécula do Esquema Lax-Wendroff	80
FIGURA 5.1 – Curva Inicial da Equação de Buckley Leverett	81
FIGURA 5.2 – a) Curvas Características da Equação de Buckley-Leverett e b) Curvas de Rarefação e Choque	83
FIGURA 5.3 – Diagrama de distribuição de saturação da água versus distância do ponto de injeção	83
FIGURA 5.4 – Construção da solução da Equação de Buckley-Leverett	84
FIGURA 5.5 – Solução da Equação de Buckley-Leverett - Posição da Frente de Avanço da Água	85
FIGURA 5.6 – Obtenção da saturação pós-choque. (a) Função de Fluxo $f(s)$ e (b) Derivada $f'(s)$	86
FIGURA 5.7 – Solução Clássica Descontínua - Método Upwind com CFL = 0.5 para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$	90
FIGURA 5.8 – Solução Clássica Descontínua - Método Upwind com CFL = 1 para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$	90
FIGURA 5.9 – Solução Clássica Descontínua - Método Upwind com CFL = 1.5 para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$	91

FIGURA 5.10 – Solução Clássica Descontínua - Método Lax-Friedrichs com CFL = 0.5 para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$	92
FIGURA 5.11 – Solução Clássica Descontínua - Método Lax-Friedrichs com CFL = 1 para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$	92
FIGURA 5.12 – Solução Clássica Descontínua - Método Lax-Friedrichs com CFL = 1.5 para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$	93
FIGURA 5.13 – Solução Clássica Descontínua - Método Lax-Wendroff com CFL = 0.5 para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$	94
FIGURA 5.14 – Solução Clássica Descontínua - Método Lax-Wendroff com CFL = 1 para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$	94
FIGURA 5.15 – Solução Clássica Descontínua - Método Lax-Wendroff com CFL = 1.5 para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$	95
FIGURA 5.16 – Função de Fluxo e sua Derivada para $a = 1$	95
FIGURA 5.17 – Soluções Numéricas (UPW + LXF) com $a = 1$	96
FIGURA 5.18 – Curva de Choque com $a = 1$	97
FIGURA 5.19 – Função de Fluxo e sua Derivada para $a = 0.1$	97
FIGURA 5.20 – Soluções Numéricas (UPW + LXF) com $a = 0.1$	98
FIGURA 5.21 – Curva de Choque com $a = 0,1$	99
FIGURA 5.22 – Função de Fluxo e sua Derivada para $a = 0.01$	99
FIGURA 5.23 – Soluções Numéricas (UPW + LXF) com $a = 0.01$	99
FIGURA 5.24 – Curva de Choque com $a = 0,01$	100
FIGURA 5.25 – Função de Fluxo e sua Derivada para $a = 0.001$	100
FIGURA 5.26 – Soluções Numéricas (UPW + LXF) com $a = 0.001$	101
FIGURA 5.27 – Curva de Choque com $a = 0,001$	101

Lista de Tabelas

TABELA 5.1 – Tabela com $a = 1$ e T variando	97
TABELA 5.2 – Tabela com $a = 0.1$ e T variando	98
TABELA 5.3 – Tabela com $a = 0.01$ e T variando	100
TABELA 5.4 – Tabela com $a = 0.001$ e T variando	101

Lista de Abreviaturas e Siglas

DFC	Dinâmica dos Fluidos Computacional
EDP's	Equações Diferenciais Parciais
LXF	Lax-Friedrichs
LXW	Lax-Wendroff
MDF	Método das Diferenças Finitas
REV	Volume Elementar Representativo
SI	Sistema Internacional
UPW	Upwind

Lista de Símbolos

α	Fase molhante
ϕ	Porosidade
V_{poros}	Volume de vazios interconectados
V	Volume total de um REV
k	Permeabilidade do meio
ϕ_α	Fração de volumes da fase α
V_α	Porção de V que é ocupada pela fase α
s	Saturação do fluido (no caso monofásico)
S_α	Saturação da fase α
M_α	Massa da fase α
ρ_α	Massa específica aparente pontual da fase α
ρ_α^r	Massa específica intrínseca (média) ou real da fase α
ρ	Densidade do fluido (no caso monofásico)
v	Velocidade do fluido (no caso monofásico)
K	Permeabilidade absoluta do meio poroso
g	Gravidade
V	Velocidade de Darcy
L	Comprimento do meio poroso
μ_α	Viscosidade da fase alpha
μ_i	Viscosidade da fase i , $i = w, o$
$k_{r\alpha}$	Permeabilidade relativa da fase α
k_{ri}	Permeabilidade relativa da fase i , $i = w, o$
λ_α	Mobilidade da fase α
λ_i	Mobilidade da fase i , $i = w, o$, onde $\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i}$
λ	Mobilidade total, onde $\lambda = \lambda_w + \lambda_o$
f_i	Função de fluxo fracionário da fase i , $i = w, o$, onde $f_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$
x	Variável espacial
t	Variável temporal

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Motivação	17
1.2	Justificativa	20
1.3	Objetivos	22
1.3.1	Objetivo Geral	22
1.3.2	Objetivos Específicos	22
1.4	Metodologia	22
1.5	Organização do trabalho	23
2	MODELAGEM DE ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS	25
2.1	Escoamentos em Meios Porosos	25
2.2	Conceitos Básicos de Geologia e Grandezas Fundamentais	26
2.3	Fluxo e Divergência	31
2.4	Lei de Conservação da Massa	38
2.5	Lei de Darcy	43
2.5.1	Forma Empírica	44
2.5.2	Forma Multidimensional	45
2.5.3	Lei de Darcy para Escoamentos Multifásicos	46
2.6	Escoamento Bifásico Unidimensional	47
3	LEIS DE CONSERVAÇÃO	53
3.1	Curvas Características	53
3.1.1	Leis de Conservação Lineares	54

3.1.2	Leis de Conservação Não Lineares	57
3.2	Soluções Descontínuas e Formação de Choque	59
3.3	Problema de Riemann	63
3.4	Condição de Salto de Rankine-Hugoniot	64
3.5	Rarefações	70
4	MODELAGEM NUMÉRICA DO PROBLEMA	73
4.1	Condição de CFL (Courant, Friedrichs e Lewy)	73
4.2	Método das Diferenças Finitas	74
4.2.1	Fórmulas de Diferenças Finitas	75
4.2.2	MDF para a Equação de Advecção Não-Linear de Buckley Leverett	77
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	81
5.1	Resultados Numéricos para a Equação de Buckley-Leverett	88
5.1.1	Resultados - Método Upwind	89
5.1.2	Resultados - Método de Lax-Friedrichs	91
5.1.3	Resultados - Método de Lax-Wendroff	93
6	CONCLUSÃO	102
	REFERÊNCIAS	103

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Nos últimos tempos vem se observando um avanço nos estudos a respeito da hipótese do esgotamento das reservas de petróleo, levando a desafios cada vez maiores e mais difíceis com preocupações a nível mundial, como lâminas de águas profundas e ultra-profundas, e em ambientes inóspitos, como o continente Antártico. Com isso, a exploração e a produção de petróleo em condições cada vez mais adversas demandam o desenvolvimento de pesquisas avançadas e a formação de recursos humanos qualificados, tanto a nível mundial quanto a nível nacional.

Somado a essas dificuldades, a crescente demanda do petróleo e seus derivados, seu aumento de preços em todo o mundo, só tende acelerar o quadro geral de busca e a oferta mundial terá dificuldade de atender plenamente essa demanda. As projeções apontam o petróleo como a principal fonte primária de energia para as próximas duas décadas.

O modelo mundial de consumo é excessivamente baseado em petróleo. Desde a segunda metade do século XIX, descobrimos esta forma de energia com elevada eficiência, que revolucionou o modo de se fazer as coisas e, com exceção dos choques do petróleo na década de 1970, o consumo só cresceu. Apesar de seu consumo ter diminuído de forma significativa, o petróleo ainda é considerado o recurso básico da sociedade industrial contemporânea.

Segundo (LABASTIE, 2011) para suprir a demanda de energia nos próximos anos, a capacidade de recuperação do óleo precisa ser aumentada, uma vez que, com as tecnologias atualmente utilizadas, apenas cerca de 35 % do petróleo disponível no reservatório consegue ser recuperado, ou seja, para cada barril produzido, cerca de dois barris ficam no poço e não podem ser diretamente recuperados.

Por conta de sua importância vital para o abastecimento de energia que garante o funcionamento das sociedades, o petróleo é considerado um recurso natural extremamente estratégico. Isso significa que aqueles que o possuem, além de uma fonte de renda, adquirem também domínio de poder.

Diante das inúmeras situações de desequilíbrio econômico no Brasil, observa-se movimentos grevistas recentes em que foi perceptível a diminuição gradual das mercadorias nas prateleiras dos supermercados, a redução das frotas de ônibus, o cancelamento das atividades escolares e o vazio das ruas, antes repletas de automóveis. Dessa forma, fica evidente que é praticamente impossível pensar o dia a dia sem a presença de algum produto obtido a partir da indústria petroquímica, pois há muita tecnologia e conhecimento envolvido que essa indústria utiliza como matéria-prima dos derivados do petróleo ou do gás natural, para a concretização de inúmeros produtos que nos traz conforto e praticidade.

Segundo (NAVEIRA, 2007), a indústria do petróleo é caracterizada por ser uma atividade que exige projetos de grandes investimentos intensivos em tecnologia, apoiando-se fortemente no desenvolvimento científico caracterizado pela inter e multidisciplinaridade. Nesse sentido, os profissionais da área se deparam com situações em que necessitam realizar difíceis escolhas, isto é, tomar decisões que envolvem milhões de dólares, seja na fase de exploração, perfuração, produção ou completação. Como exemplo, podemos citar o custo diário do aluguel de uma sonda de perfuração que pode variar entre 200 a 800 mil reais e, o custo de um poço de petróleo em uma lâmina d'água de 2500 metros, por exemplo, pode custar entre 35 a 55 milhões de reais.

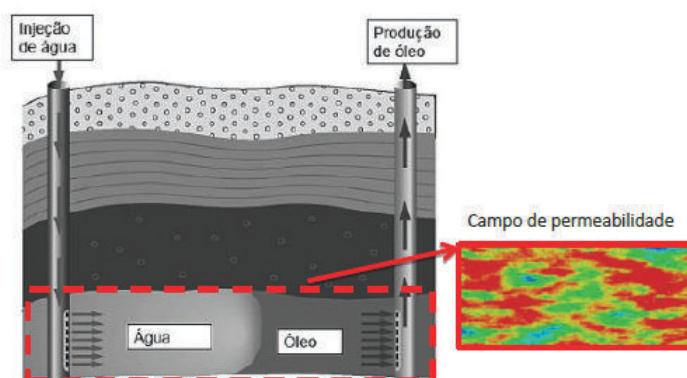
Ainda conforme preconizado por (NAVEIRA, 2007), nos primórdios da exploração e produção de petróleo, os profissionais da área contavam com a intuição, aspectos topográficos, hidrológicos e inúmeras teorias não fundamentadas em base científica. Porém, com o crescimento do setor petrolífero tornou-se necessário o surgimento de ferramentas mais confiáveis, capazes de auxiliar o profissional na tomada de decisões objetivando diminuir a probabilidade de erro. Com a evolução da tecnologia e da ciência, atualmente pode-se contar com a utilização de ferramentas fundamentadas em conceitos magnéticos, elétricos, gravitacionais, sonoros e computacionais.

De acordo com (AMORIM, 2009), o petróleo encontra-se, em geral, a uma grande profundidade da superfície terrestre, incrustado em um meio poroso ou rocha porosa chamada rocha reservatório. Ao se perfurar um poço, parte do óleo pode ser expelida da rocha e atingir a superfície apenas pelo efeito do gradiente de pressão. Este é o chamado processo de recuperação primário. Apenas um pequeno percentual do óleo pode ser recuperado desta forma, pois a pressão do poço decai muito, dificultando a extração do restante. O processo de recuperação secundário consiste em injetar um líquido (água) através de poços injetores para expulsar o óleo restante, recuperando-o nos poços produtores. Existem ainda modos mais sofisticados de recuperação secundária e terciária, mas neste trabalho nos restringiremos aos processos secundários de injeção de água, resumindo-se a entender o escoamento de dois fluidos imiscíveis (óleo e água) em um meio poroso (rocha subterrânea).

Neste contexto, diversas tecnologias de recuperação secundária e até terciária são utilizadas, a citar: injeção de água, injeção de vapor e combustão *in situ*, sendo que a mais utilizada atualmente é a de injeção de água, por ser relativamente mais barata, ainda mais no contexto *off-shore*. Uma das formas de aumentar a capacidade de produção de um reservatório é o método de WAG (Water Alternating Gas); uma metodologia que visa à injeção alternada de água e gás em um reservatório de forma a resultar em uma produção de hidrocarbonetos superior à injeção de água ou gás separadamente. Entretanto, esta metodologia envolve o estudo de vários fenômenos e processos físico-químicos extremamente complexos, relacionados com escoamentos em meios porosos. (PEÇANHA, 2014).

Nesse método de recuperação secundária intervém somente uma ação mecânica e nenhuma ação química. Na verdade, essa recuperação consiste na injeção de um fluido imiscível ao óleo que "empurra" o óleo. Esse fluido, que poderia ser água Figura 1.1, funciona como um tipo de pistão que permitirá aumentar ou manter a pressão dentro do reservatório. É chamado de efeito pistão pelo fato de o fluido injetado ser imiscível com o fluido presente dentro do reservatório. Por isso o fluido injetado empurra o óleo somente pela pressão que ele criou semelhante a um pistão que empurra o fluido para dentro de um tubo (SANTOS *et al.*, 2010).

FIGURA 1.1 – Representação de um reservatório de petróleo submetido à produção de óleo por injeção de água



Fonte: Santana (2008)

Quando o óleo é extraído do reservatório, ele é misturado a uma quantidade de água. Após tratamento do óleo, é possível separar a água do óleo e então reinjetar a água dentro do reservatório para realizar o método secundário de forma cíclica. A injeção pode ser feita utilizando gases de fontes próximas, entretanto exige um tratamento do gás antes de ser injetado. A presença de água no gás pode gerar uma cristalização, pelo fato de uma variação da pressão e pode criar uma modificação de estado da água que pode passar de um estado gasoso a um estado sólido. Isso acarretaria um entupimento no duto devido

à presença de gelo, que causaria um acidente. Para aperfeiçoar a eficiência, é importante injetar o fluido antes que haja uma queda de pressão muito relevante (SANTOS *et al.*, 2010).

Diante disso, (AMORIM, 2009) assinala que um processo secundário é modelado por um sistema de equações diferenciais parciais, no qual a resolução numérica deste modelo integra a Simulação de Reservatórios de Petróleo. Assim, um de seus principais objetivos é auxiliar os engenheiros a obter melhores previsões do comportamento de um reservatório sob diferentes condições de operação. Em um projeto de recuperação de óleo, decisões envolvem custos financeiros muito elevados. A simulação de reservatórios pode fornecer informações que têm grande impacto no planejamento da recuperação de óleo. Este problema é difícil de resolver analiticamente e, por isso, é natural explorarmos métodos computacionais que são uma ferramenta cada vez mais popular para resolver diferentes tipos de problemas em todos os ramos da engenharia e ciências aplicadas, pois fornecem uma alternativa rápida, flexível e barata aos experimentos.

A simulação numérica ocupa um patamar de extrema importância na cadeia produtiva do petróleo, fornecendo previsões de reservas, quedas de pressões, indicadores para recuperação primária e/ou secundária, avaliadores da viabilidade de um poço em produção, previsões de incertezas, entre outros. No que tange a área da engenharia de reservatórios, os métodos computacionais auxiliam no estudo e na modelagem do fluxo (STEFFENS *et al.*, 2014).

É interessante notarmos que se trata de um grande desafio implementar um sistema computacional para simulação destes problemas, pois há uma abrangência de conhecimentos que estão interconectados nas diversas áreas, tais como: programação matemática, modelagem física e matemática, propriedades físicas, geração de malhas, análise do escoamento, etc. Observa-se também que existe uma estreita relação entre engenharia de reservatórios de petróleo com a hidrologia de águas subterrâneas, física do solo, mecânica dos solos, mecânica dos fluidos e mecânica das rochas.

Cada um destes temas se apresenta como uma área de conhecimento bastante vasta, tanto no aspecto teórico como computacional. Assim, a solução desses problemas requer o manuseio de Equações Diferenciais Parciais (EDP's) e o emprego de métodos numéricos computacionais robustos.

1.2 Justificativa

Sob a ótica do conhecimento científico, os processos internos da Terra deram-nos um ambiente capaz de sustentar a vida: uma atmosfera respirável, oceanos, solos, rios e um clima moderado. O homem da Idade da Pedra sobreviveu nesse ambiente em níveis de

subsistência. Em seguida, com o aprendizado da extração e utilização de minerais, a humanidade progrediu para uma vida de melhor qualidade. As quantidades de carvão, petróleo, gás natural e urânio que retiramos da Terra para garantir o funcionamento de nossas complexas sociedades são cada vez maiores. Esses recursos criaram riqueza e conforto, por terem fornecido os materiais e a energia necessários para processar a comida, construir estruturas, transportar coisas e manufaturar bens de todos os tipos. Entretanto, o uso dos recursos finitos da Terra, sem considerar a fragilidade do sistema Terra, pode levar à exaustão desses recursos e à acumulação de resíduos perigosos, bem como desencadear mudanças climáticas com sérias consequências. Assim, o desafio para a espécie humana é usar de forma sábia e equitativa dos recursos, para garantir um futuro sustentável.

Na procura cada vez mais sistemática de novas fontes de combustíveis e minerais, dos quais dependemos, utilizamos o conhecimento geológico existente sobre os depósitos naturais conhecidos, para determinar onde é possível encontrar mais deles. Ao mesmo tempo, estamos nos tornando mais sensibilizados quanto à finitude dos recursos da Terra e de quão frágil é o seu ambiente. Estamos começando a pensar em como podemos modificar o uso que fazemos dos recursos para conseguir um desenvolvimento sustentável do desenvolvimento que preserva a perspectiva das gerações futuras.

Os reservatórios de petróleo são, em grande parte dos casos, estruturas geológicas complexas que apresentam heterogeneidades significativas nas propriedades de fluxo. Para seu desenvolvimento, os reservatórios são explorados por diversos poços, tanto produtores quanto injetores. As acumulações de petróleo possuem originalmente uma energia dita primária, função do volume e natureza dos fluidos, além das pressões e temperatura do reservatório. O início da produção dissipa essa energia original e proporciona a perda de produtividade dos poços que pode ser mitigada pela aplicação de algum método convencional de recuperação secundária ou terciária (OLIVEIRA, 2006).

Grande parte do petróleo utilizado mundialmente é produzido por recuperação primária, através da própria diferença do gradiente de pressão, ou por recuperação secundária pela injeção de água em alguns poços para manutenção da pressão elevada, e consequente deslocamento do petróleo para poços produtores. No entanto, via de regra estes métodos são muito dispendiosos e exigem um planejamento cuidadoso. Daí a importância de se estudar modelos matemáticos, mesmo para situações simplificadas, e desenvolver simuladores numéricos para poder prever a viabilidade de uso de um ou outro método de recuperação.

Os métodos numéricos são considerados o estado da arte na simulação de bacias. A lei de Darcy que descreve o fluxo de um fluido em meio poroso, é amplamente aplicada a este problema devido à comprovação experimental dos seus resultados para fluxo de fluidos e

processos de compactação em bacias sedimentares.

De uma maneira geral, considerada a complexidade do problema exposto e os diversos contextos que demandam por respostas, fica evidente a relevância do tema e a pertinência de seu estudo.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

A pesquisa tem como objetivo geral obter um simulador numérico capaz de reproduzir o escoamento bifásico do tipo líquido-líquido unidimensional em meios porosos a partir das leis de conservação de massa das fases e da aplicação da lei de Darcy.

1.3.2 Objetivos Específicos

A pesquisa tem como objetivos específicos:

- Obter um modelo matemático consistindo de um sistema de equações diferenciais parciais do tipo de leis de conservação, que tem por característica principal a não linearidade;
- Compreender a teoria matemática para a resolução de equações não lineares do tipo de leis de conservação, sendo que o seu protótipo é a chamada Equação de Burgers sem viscosidade (Invíscida);
- Simular os escoamentos bifásicos com o uso da linguagem computacional PYTHON, reduzindo o sistema de leis de conservação à apenas uma equação, conhecida na literatura como a equação de Buckley-Leverett; e
- Resolver o problema de valores iniciais para a equação de Buckley-Leverett, onde estas condições iniciais neste caso traduzem os dados de injeção e de produção num reservatório petrolífero. Este problema de valores iniciais é conhecido na teoria matemática como o problema de Riemann.

1.4 Metodologia

Trata-se de estudo de referencial bibliográfico correspondente ao objeto de estudo abordado, onde algumas definições serão efetivadas para o entendimento dos escoamentos

multifásicos em meios porosos, bem como da teoria matemática que trata de equações diferenciais parciais do tipo de leis de conservação. Em seguida, focalizar-se-á na simulação computacional do fenômeno físico que consistirá de duas principais etapas. A primeira etapa consiste na identificação dos fatores que influenciam de maneira relevante o escoamento bifásico unidimensional. Isto implica na escolha adequada dos princípios físicos que descrevem o problema, para poder aplicar as hipóteses e simplificações corretas. A segunda etapa do processo consiste em obter a solução do modelo matemático, tarefa a ser realizada com auxílio de métodos numéricos. Nesta etapa as equações são discretizadas utilizando os métodos numéricos clássicos de Upwind, de Lax-Friedrichs e de Lax-Wendroff. Os métodos tradicionais disponíveis para o tratamento dessas equações diferenciais são o Método de Diferenças Finitas (DF), o Método de Volumes Finitos (VF) e o Método de Elementos Finitos (EF), sendo que o presente trabalho abordará o primeiro método em seu arcabouço computacional.

1.5 Organização do trabalho

O capítulo 1 contém a introdução do trabalho, onde são expostos a motivação que levou ao desenvolvimento do trabalho, a descrição do problema e sua justificação em relação à sua relevância de estudo para a engenharia e para a matemática aplicada, bem como a apresentação do objetivo geral e os objetivos específicos a serem alcançados e a metodologia para a consecução do trabalho.

O Capítulo 2 apresenta um estado da arte dos principais estudos sobre escoamentos em meios porosos, bem como se dedica à introdução da modelagem de escoamentos multifásicos em meios porosos, contendo definições de grandezas típicas de problemas multifásicos, resultando na apresentação de um problema modelo que serve de motivação para o estudo dos métodos numéricos. Para esse problema, apresenta-se uma sequência de simplificações que resultam em um problema de valor de contorno hiperbólico.

O capítulo 3 aborda o estudo teórico matemático para a resolução de equações diferenciais parciais não lineares do tipo de leis de conservação, apresentando em seu escopo uma abordagem do problema de valores iniciais conhecido na literatura como o problema de Riemann.

O capítulo 4 apresenta uma revisão de literatura sobre o método das diferenças finitas, sendo proposta algumas metodologias de aproximação numérica para a resolução do problema com os métodos numéricos clássicos: Lax-Friedrichs, Upwind e Lax-Wendroff.

O capítulo 5 apresenta os experimentos numéricos com testes implementados em malhas computacionais, conduzindo a resolução do problema de valores iniciais para a equação de Buckley-Leverett, onde estas condições iniciais neste caso traduzem os dados de

injeção e de produção num reservatório petrolífero.

Finalmente, no Capítulo 6 são dadas as principais conclusões e propostas para trabalhos futuros a serem concretizados.

2 MODELAGEM DE ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS

No presente trabalho, abordaremos a simulação unidimensional de reservatórios de petróleo com modelo de fluxo bifásico (água-óleo), imiscível e incompressível, em meio poroso. Apesar deste modelo ser bastante simplificado, ele é um modelo adequado, principalmente, para o estudo da recuperação secundária através da injeção de fluidos (injeção de água), sendo assim razoável utilizar uma equação hiperbólica de primeira ordem para a saturação (KARLSEN *et al.*, 2000).

O modelo é desenvolvido pela combinação da Lei de Darcy e das equações de continuidade para cada uma das fases. Será desenvolvida uma formulação do tipo “fracional”, gerando uma formulação do modelo baseado numa equação diferencial parcial, sendo esta resolvida por meio de métodos numéricos.

A fim de ilustrar e delimitar o problema estudado neste trabalho apresenta-se, a seguir, uma breve descrição dos componentes e fenômenos físicos envolvidos que serão utilizados para definir o domínio físico, as propriedades e as condições da simulação numérica.

2.1 Escoamentos em Meios Porosos

Desde o trabalho fundamental de Darcy, em que foi desenvolvido um experimento para o escoamento através de um meio poroso, múltiplos trabalhos ressaltantes a respeito do objeto de estudo foram publicados.

De acordo com (LIMA, 2016), o meio poroso pode ser descrito como sendo uma matriz sólida, rígida ou com deformação desprezível, com vazios que, quando interconectados, permitem o escoamento de fluido através do meio poroso. Devido à aleatoriedade da interface fluido sólida em um meio poroso real, a maioria dos trabalhos numéricos a respeito deste tipo de domínio se utiliza de modelos capazes de representar propriedades

como a permeabilidade e a porosidade.

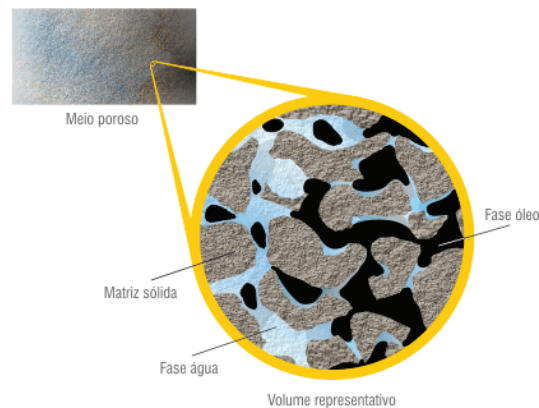
O escoamento de um fluido incompressível em um meio poroso rígido saturado conduz a um sistema de equações diferenciais parciais (EDPs) composto pela equação de conservação de massa mais a lei de Darcy, que relaciona a velocidade média do escoamento ao gradiente de um potencial hidráulico através do tensor de condutividade hidráulica. Estas EDPs formam um sistema de natureza hiperbólica, cuja resolução fornece o campo potencial e o campo de velocidades do fluido no meio poroso, também denominado de fluxo (TRISTÃO, 2013).

Para tratar o modelo computacionalmente, (FORTUNA, 2000) explana que é imprescindível expressar de forma adequada as equações e a região (domínio) em que elas são válidas com a discretização do domínio, isto é, dividindo-o em pontos que formam uma malha. Assim, as condições de contorno, juntamente com as condições iniciais, as propriedades físicas do fluido e os parâmetros do escoamento especificam o problema a ser tratado.

2.2 Conceitos Básicos de Geologia e Grandezas Fundamentais

Os reservatórios de petróleo são formações complexas, heterogêneas (variação vertical e lateral das propriedades da rocha, tais como geometria, espessura, granulometria, etc) e anisotrópicas (diferentes valores dos parâmetros petrofísicos para diferentes direções, como porosidade e permeabilidade) resultantes de longos processos geológicos deposicionais e diagenéticos, que determinam as características da rocha reservatório em diferentes escalas; desde do tamanho do grão e poro até a dimensão de unidades deposicionais (HALDORSEN, 1984). Um reservatório geológico pode ser caracterizado por uma rocha porosa e permeável, sendo composta por duas partes: a matriz rochosa, formada pelos grãos e cimento (fase sólida), e os poros, preenchidos por fluidos, em geral uma mistura de água e hidrocarbonetos sempre agregadas com CO_2 , O_2 , N_2 , H_2S , He e outros, constituindo a fase fluida (Figura 2.1).

FIGURA 2.1 – Modelo esquemático em microescala de uma matriz rochosa, formada por grãos minerais, contendo poros.



Fonte: Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor (SINMEC) - UFSC

Por se tratar de meios porosos, os reservatórios de petróleo, possuem duas propriedades básicas para sua caracterização hidráulica ou petrofísica: porosidade e permeabilidade.

A porosidade mede a capacidade de armazenamento de fluidos pelo meio poroso, e é definida como a relação entre o volume vazio que pode ser ocupado por fluidos e o volume total da rocha. Esse espaço vazio da rocha pode ser ocupado por mais de um tipo de fluido. Em outras palavras, a porosidade do meio é a capacidade de armazenar fluidos em seus espaços (poros) interiores, porém alguns destes poros são isolados e outros interconectados. A soma dos poros isolados e interconectados é chamada porosidade absoluta, que é dada pelo volume total de poros da rocha reservatório pelo volume total da mesma.

Entretanto, para o estudo do escoamento em meio poroso, somente os poros interconectados devem ser considerados na definição da porosidade, uma vez que os poros isolados não constituem caminhos para o fluxo de fluido. Assim, tem-se por definição, que a porosidade é:

$$\phi = \frac{V_{poros}}{V} \quad (2.1)$$

onde V é o volume total de um volume elementar representativo (REV) e V_{poros} é o volume de vazios em V pelos quais os fluidos possam escoar.

Os fluidos podem fluir através de um meio poroso sob a influência de um gradiente de pressão aplicado. Considerando o escoamento laminar lento (hipótese do modelo de Darcy), a taxa de fluxo de canais e tubos é linearmente proporcional ao gradiente de pressão e inversamente proporcional à viscosidade. Este é também o resultado obtido para muitos fluxos de meio poroso. A resistência de um meio poroso para o fluxo depende do tamanho, número, e “tortuosidade” das passagens de fluido através da matriz sólida. Uma medida desta resistência é a permeabilidade do k do meio. Quanto mais permeável é

o meio, isto é, quanto maior é o k , menor é o gradiente de pressão necessário para conduzir um dado fluxo. A unidade SI para a permeabilidade é metro quadrado, m^2 (SCHUBERT, 2002)

Existe a fração de volume de uma fase α (ϕ_α), que é definida como sendo a razão do volume que uma fase ocupa sobre o volume total do meio tal que:

$$\phi_\alpha = \frac{V_\alpha}{V} \quad (2.2)$$

onde V_α é a porção de V que é ocupada pela fase α .

Para representar a quantidade da fase dentro do meio, i.e., o volume armazenado dentro dos vazios, é usado o termo de saturação. Para cada um desses fluidos é definida uma saturação, que é a fração do volume de poros ocupada por ele. Assim, por exemplo, podemos definir a saturação de uma fase α que escoar, como:

$$s_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_{poros}} \quad (2.3)$$

que representa a fração dos vazios que está preenchida pela fase α .

Manipulando algebricamente as equações acima, temos:

$$\phi_\alpha = \frac{V_\alpha}{V} = \frac{V_{poros}s_\alpha}{\left(\frac{V_{poros}}{\phi}\right)} \quad (2.4)$$

$$\phi_\alpha = \phi s_\alpha \quad (2.5)$$

Consideremos M_α a massa da fase α de um corpo que ocupa a região fixa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ num instante $t \in I$.

A massa específica aparente pontual pode ser definida por:

$$\rho_\alpha = \frac{M_\alpha}{V} \quad (2.6)$$

onde M_α é a massa da fase α existente em V , ou seja:

$$\rho_\alpha : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \rightarrow \rho_\alpha(x, t)$$

A massa específica intrínseca (média) ou real pode ser definida por:

$$\rho_\alpha^r = \frac{M_\alpha}{V_\alpha} \quad (2.7)$$

De (2.4) e (2.6), sabemos que:

$$M_\alpha = \rho_\alpha V$$

$$V_\alpha = \phi_\alpha V$$

Assim, a equação (2.7) pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha^r &= \frac{\rho_\alpha V}{\phi_\alpha V} \\ \rho_\alpha^r &= \frac{\rho_\alpha}{\phi_\alpha} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Além disso, é importante considerar outras propriedades que influenciam no fluxo. Essas propriedades são a permeabilidade da rocha e a permeabilidade relativa das fases.

Permeabilidade é a medida da capacidade que um material possui para transmitir fluidos. Ela é de grande importância na determinação das características do fluxo dos hidrocarbonetos em reservatórios de petróleo e gás e da água nos aquíferos. A permeabilidade intrínseca do meio depende das propriedades da matriz. É representada por um tensor onde os componentes serão definidos para as condições de isotropia e de anisotropia do meio (GOMES, 2009). De fato um meio anisotrópico possui nove componentes no espaço tridimensional tal que:

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A permeabilidade relativa é um número adimensional que depende do estado de saturação do meio e do fluido. Microscopicamente esta propriedade é dependente da forma e do tamanho do poro preenchido por fluido. Existem modelos que permitem a aproximação desta permeabilidade relativa. Ela é nula quando não há fluido e igual a um quando o meio é saturado do fluido associado.

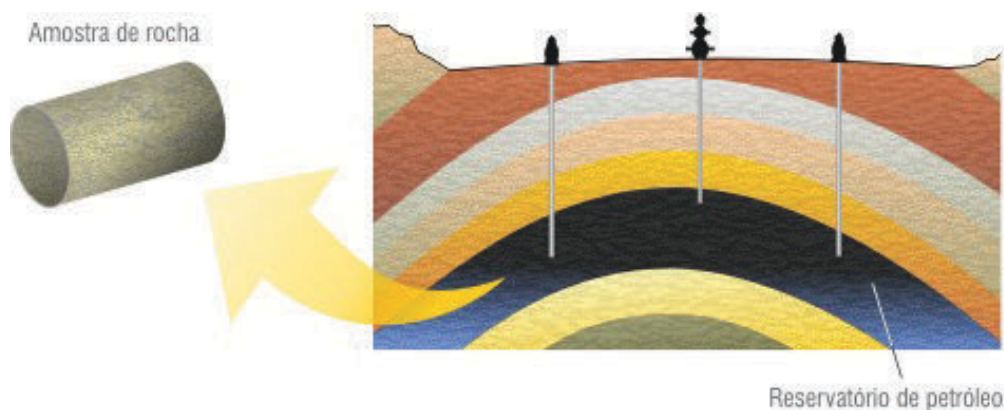
A permeabilidade relativa é um conceito chave na descrição macroscópica do escoamento multifásico em meios porosos. Quando mais de uma fase fluida escoar em um meio poroso, a sua capacidade de se deslocar é reduzida pela presença das outras fases. Essa redução na capacidade de deslocamento de uma fase é quantificada pela sua permeabilidade relativa.

A simulação de processos de recuperação de óleo envolve a descrição do escoamento de várias fases fluidas no interior do reservatório, usualmente as fases óleo, água e gás. Portanto, as permeabilidades relativas de todas as fases são ingredientes fundamentais

para a realização dessa tarefa. Em muitos casos, as permeabilidades relativas estão entre os parâmetros que mais influenciam nos resultados na simulação de reservatórios.

Durante a fase de caracterização do reservatório comumente são extraídas amostras da rocha reservatório e nelas são realizados diversos ensaios para a determinação de propriedades. No caso das curvas de permeabilidade relativa, comumente são realizados ensaios de deslocamento em regime transiente, nos quais se tenta reproduzir em laboratório os fenômenos físicos que acontecem no interior dos reservatórios de petróleo durante os processos de recuperação de óleo.

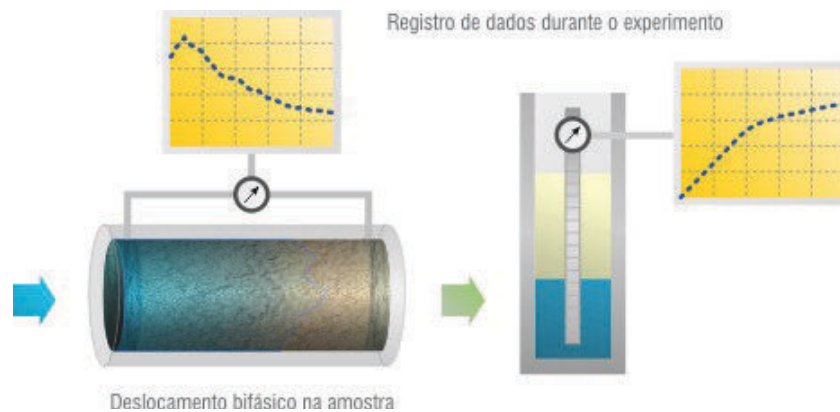
FIGURA 2.2 – Amostra de rocha para ensaio de deslocamento



Fonte: Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor (SINMEC) - UFSC

Nos ensaios, a amostra é inicialmente selada e saturada com um ou mais fluidos a fim de reproduzir a condição inicial do reservatório antes de sua exploração. Então é iniciado um processo de injeção de fluido, geralmente água ou gás, por uma das faces da amostra. O fluido injetado desaloja o fluido residente no espaço poroso da amostra, o qual é coletado na outra extremidade. Uma vez que não é possível medir diretamente valores de permeabilidade relativa, durante o ensaio são realizadas medições de grandezas físicas que são influenciadas por ela. Essas medições são registradas ao longo do tempo, para depois serem utilizadas para estimar as curvas de permeabilidade relativa a partir delas. As medições mais comuns são do volume coletado do fluido desalojado e da diferença de pressão entre as extremidades da amostra.

FIGURA 2.3 – Registro de ensaio de deslocamento da amostra de rocha



Fonte: Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor (SINMEC) - UFSC

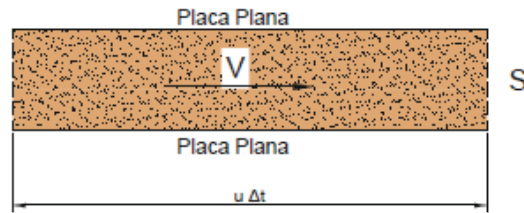
Dois tipos de escoamentos podem ocorrer quando dois fluidos escoam juntos em um meio poroso: o deslocamento miscível e o imiscível. No primeiro caso, os fluidos são solúveis um no outro e não há uma interface bem definida entre os fluidos. No segundo tipo, que será tratado neste trabalho, existe uma interface bem definida entre os fluidos (BEAR, 1972). Entretanto, apesar de apresentar uma interface bem definida, o mecanismo de deslocamento imiscível, nem tampouco o miscível, deve ser entendido como um processo em que uma fase empurra a outra expulsando-a completamente do meio poroso, e sim como um escoamento simultâneo em que as duas fases compartilham o mesmo espaço de acordo com as relações entre a permeabilidade de cada fase com suas respectivas saturações (BUCKLEY e LEVERETT, 1942; BEAR, 1972).

O restante deste capítulo será dedicado à obtenção das equações necessárias para a descrição desse tipo de processo. As equações do escoamento bifásico são obtidas a partir das equações fundamentais da Continuidade e da equação constitutiva conhecida por Lei de Darcy.

2.3 Fluxo e Divergência

Inicialmente, vamos considerar um fluido de densidade ρ se movendo com velocidade $V = (u\hat{x}, 0\hat{y})$ entre duas placas planas com área da seção reta igual a S (ver Figura 2.4). Posteriormente, faremos a expansão para os casos em que o vetor velocidade será composto em mais de uma direção.

FIGURA 2.4 – escoamento de um fluido por uma região retangular



Fonte: Própria

Em um pequeno intervalo de tempo Δt , o fluido percorre uma distância dentro da região que vale:

$$l = u\Delta t$$

Se multiplicarmos essa distância por S , obtemos o volume de fluido, por unidade de largura, na região. Vejamos:

$$volume = l \cdot S = (u\Delta t)S$$

Esse volume, multiplicado pela densidade do fluido, fornece a massa total de fluido entre as placas:

$$m = (\Delta t)S\rho u \quad (2.10)$$

Para calcularmos a descarga \dot{m} , isto é, a quantidade de massa que cruza a área S por unidade de tempo, basta dividir a expressão (2.10) por Δt :

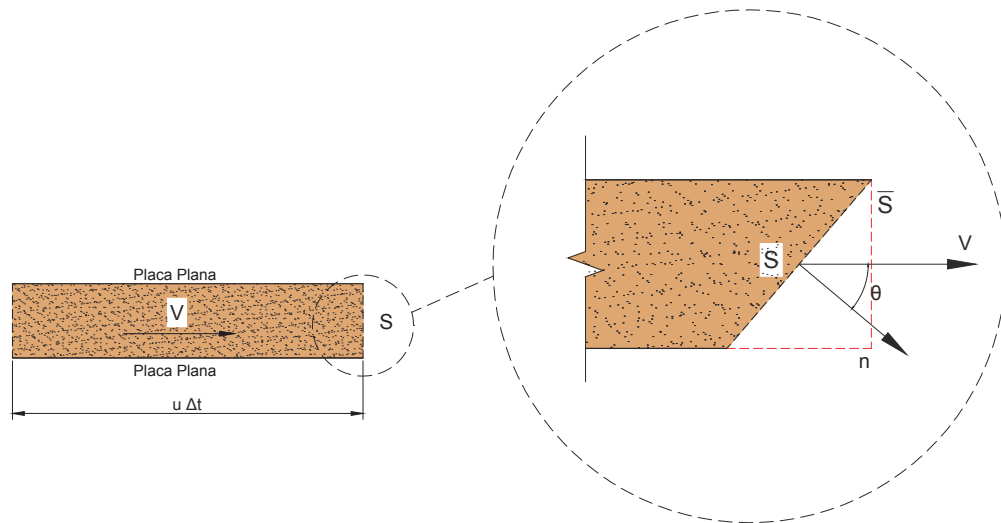
$$\dot{m} = \rho u S \quad (2.11)$$

No SI, as unidades de m e de \dot{m} são kg e kg/s, respectivamente.

Quando a área S não é perpendicular ao escoamento, a descarga é calculada estimando-se a área efetiva \bar{S} que o fluido atravessa. Na Figura (2.5), a área efetiva \bar{S} é representada pela linha vertical tracejada. Se θ for o ângulo entre a direção do escoamento e o vetor unitário $\hat{\mathbf{n}}$ normal à área S , a área efetiva \bar{S} é dada por:

$$\bar{S} = S \cos(\theta) \quad (2.12)$$

FIGURA 2.5 – Geometria para o cálculo da área efetiva \bar{S}



Fonte: Própria

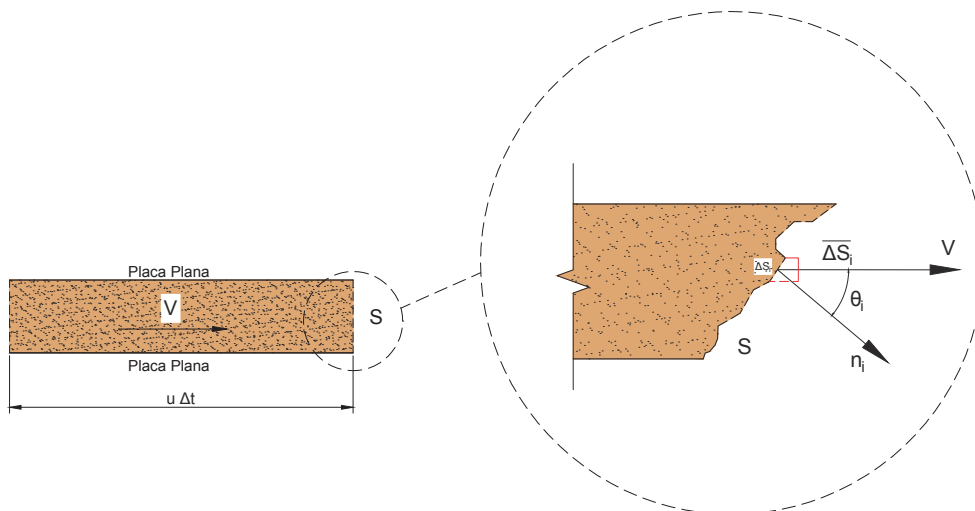
Assim, nesse caso, a descarga através de S é dada por:

$$\dot{m} = \rho u \bar{S} = \rho u [S \cos(\theta)] = \rho [u \cos(\theta)] S = \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} S \quad (2.13)$$

Uma outra interpretação da expressão (2.13) é aquela em que o produto $\bar{u} = u \cos(\theta)$ representa a componente da velocidade normal a S . Somente essa componente é relevante para o cálculo da descarga.

No caso mais geral, quando o contorno de S não tiver forma geométrica simples, \bar{S} pode ser aproximado por retas (em duas dimensões) ou poliedros (em três dimensões) com áreas (ΔS_i) (ver Figura 2.6).

FIGURA 2.6 – Aproximação de uma área \bar{S} por segmentos de retas



Fonte: Própria

Para cada face do poliedro ou reta, aplicamos o mesmo raciocínio utilizado no caso em que a área S não era ortogonal a V . No caso bidimensional, para a i -ésima reta, podemos escrever para a área efetiva $\overline{\Delta S}_i$:

$$\overline{\Delta S}_i = (\Delta S)_i \cos(\theta_i)$$

A descarga total através de S é aproximada por:

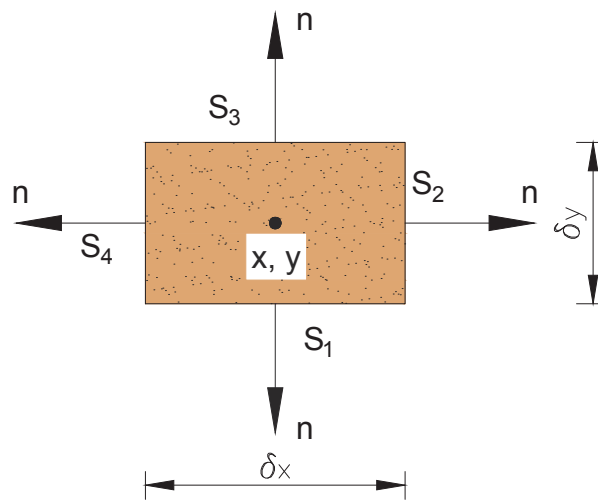
$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho u \bar{S} = \sum_{i=1}^n (\overline{\Delta S}_i) \rho u = \sum_{i=1}^n (\Delta S)_i \cos(\theta_i) \rho u \\ \dot{m} &= \sum_{i=1}^n \rho (u \cos(\theta_i)) (\Delta S)_i = \sum_{i=1}^n \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i (\Delta S)_i \end{aligned}$$

No limite de $\Delta S_i \rightarrow 0$, obtemos a descarga através da área S :

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i (\Delta S)_i \right] \\ \dot{m} &= \int_S \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \end{aligned} \tag{2.14}$$

Considere a aplicação da integral 2.14 a uma região como aquela mostrada na Figura (2.7). O vetor velocidade do fluido que cruza as fronteiras da região é, agora, dado por $V = (u\hat{x}, v\hat{y})$. Quando $\dot{m} > 0$, há mais fluido saindo da região que entrando; quando $\dot{m} < 0$ acontece o contrário.

FIGURA 2.7 – Elemento de fluido utilizado para o cálculo do divergente

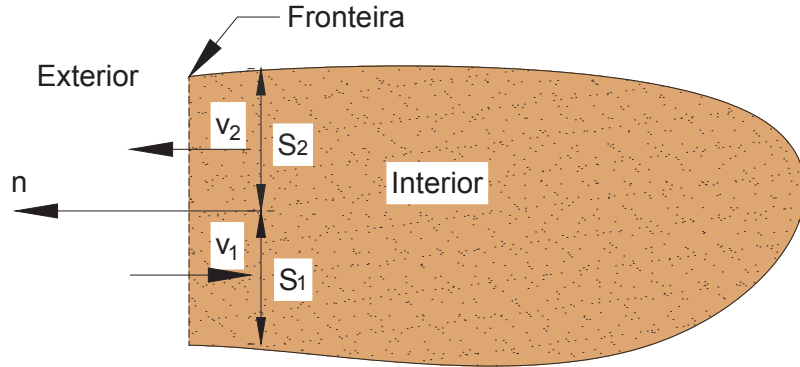


Fonte: Própria

Isso pode ser mostrado pela análise da seguinte situação. Considere a Figura (2.8),

que mostra uma região delimitada pela fronteira S , que inclui os segmentos S_1 e S_2 .

FIGURA 2.8 – Região com uma fronteira de entrada e outra de saída de fluido



Fonte: Própria

O fluido entra com velocidade v_1 através do segmento S_1 e deixa a região por S_2 com velocidade v_2 . Sem perda de generalidade e para simplificar a apresentação que se segue, podemos fazer $\rho = 1$ e considerar essas velocidades como normais à fronteira S e uniformes ao longo dos respectivos segmentos.

Uma vez que a velocidade através da fronteira S , excluindo os segmentos S_1 e S_2 , é zero, a descarga 2.14 resultante \dot{m} através de S é a soma das respectivas descargas através dos segmentos S_1 e S_2 :

$$\dot{m} = \int_{S_1+S_2} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} \mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_2} \mathbf{v}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Ao longo de S_1 , o vetor velocidade v_1 do fluido tem sentido oposto ao vetor normal $\hat{\mathbf{n}}$. Portanto, $\mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = -v_1$ e a integral ao longo do segmento S_1 é escrito como:

$$\int_{S_1} \mathbf{v}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} -v_1 dS$$

Ao longo de S_2 , o vetor velocidade v_2 do fluido tem sentido igual ao vetor normal $\hat{\mathbf{n}}$. Portanto, $\mathbf{v}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} = v_2$ e a integral ao longo do segmento S_2 é escrito como:

$$\int_{S_2} \mathbf{v}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_2} v_2 dS$$

Finalmente, \dot{m} é dado por:

$$\dot{m} = \int_{S_1} -v_1 dS + \int_{S_2} v_2 dS$$

Analisando as três possibilidades, temos:

1. Quando $\dot{m} = 0$:

$$0 = \int_{S_1} -v_1 dS + \int_{S_2} v_2 dS \Rightarrow \int_{S_1} v_1 dS = \int_{S_2} v_2 dS$$

A quantidade de fluido que entra é a mesma que sai, ou seja, a descarga resultante \dot{m} através da fronteira S é nula.

2. Quando $\dot{m} > 0$:

$$\int_{S_1} -v_1 dS + \int_{S_2} v_2 dS > 0 \Rightarrow \int_{S_2} v_2 dS > \int_{S_1} v_1 dS$$

O que mostra que há mais fluido saindo do que entrando na região.

3. Quando $\dot{m} < 0$:

$$\int_{S_1} -v_1 dS + \int_{S_2} v_2 dS < 0 \Rightarrow \int_{S_2} v_2 dS < \int_{S_1} v_1 dS$$

O que implica uma entrada de fluido maior que a saída.

A partir da integral (2.14), podemos deduzir o significado físico de um operador bastante utilizado na Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC): o divergente. Para tornar a exposição que se segue mais geral, vamos considerar a integral um caso particular da expressão:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.15)$$

quando $F = \rho V$.

Expressões do tipo (2.15) são denominadas de fluxo de \mathbf{F} através da área S . Em particular, quando $\mathbf{F} = \rho \mathbf{V}$, a integral (2.15) representa o fluxo de $\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ através da área S , ou seja, a descarga (note-se que $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal à área S). A expressão $\rho \mathbf{V}$ é denominada fluxo de massa cuja componente, em uma certa direção, é dada pelo produto escalar $\rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

Considere-se novamente o elemento de fluido mostrado na Figura (2.7). As propriedades macroscópicas do fluido estão definidas no centro de uma região, cujas coordenadas são (x, y) . Vamos calcular a integral (2.15) nesse elemento, utilizando a expressão:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_4} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.16)$$

Inicialmente, considere-se a face S_2 . Para aplicar a integral (2.15) a essa face, note-se

que $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{x}} = F_x$, em que F_x é a componente de \mathbf{F} na direção x . Portanto,

$$\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_2} F_x dS \quad (2.17)$$

Se δ_x e δ_y forem pequenos, é possível aproximar a integral (2.17) pelo valor de F_x no centro da face S_2 , multiplicando pela área δ_y . Como a face S_2 possui coordenadas $(x + \frac{\delta_x}{2}, y)$, temos:

$$\int_{S_2} F_x dS \approx (\delta_y) F_x|_{x+\frac{\delta_x}{2}, y} \quad (2.18)$$

Pode-se tratar a face S_4 da mesma maneira, apenas tomando cuidado de lembrar que:

$$\int_{S_4} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \int_{S_4} F_x dS$$

uma vez que $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F} \cdot (-\hat{\mathbf{x}}) = -F_x$. Dessa forma,

$$- \int_{S_4} F_x dS \approx -(\delta_y) F_x|_{x-\frac{\delta_x}{2}, y} \quad (2.19)$$

já que o centro da face S_4 tem coordenadas $(x - \frac{\delta_x}{2}, y)$. Adicionando-se as expressões (2.18) e (2.19), obtém-se:

$$\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_4} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \approx \left[F_x|_{x+\frac{\delta_x}{2}, y} - F_x|_{x-\frac{\delta_x}{2}, y} \right] (\delta_y)$$

Multiplicando-se e dividindo-se o termo à direita por δ_x , vem:

$$\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_4} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \approx \left[\frac{F_x|_{x+\frac{\delta_x}{2}, y} - F_x|_{x-\frac{\delta_x}{2}, y}}{\delta_x} \right] (\delta_y)(\delta_x)$$

O produto $(\delta_x)(\delta_y)$ fornece o volume δV do elemento de fluido (ou a área em problemas bidimensionais). No limite $\delta_x, \delta_y \rightarrow 0$, obtemos:

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta V} \int_{S_2+S_4} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \right\} = \lim_{\delta_x, \delta_y \rightarrow 0} \left[\frac{F_x|_{x+\frac{\delta_x}{2}, y} - F_x|_{x-\frac{\delta_x}{2}, y}}{\delta_x} \right]$$

A expressão do lado direito da igualdade acima corresponde a definição da derivada parcial de F_x em relação a x :

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta V} \int_{S_2+S_4} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \right\} = \frac{\partial F_x}{\partial x}$$

Analogamente, para as faces S_1 e S_3 , encontramos:

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta V} \int_{S_1+S_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \right\} = \frac{\partial F_y}{\partial y}$$

Portanto, no limite $\delta V \rightarrow 0$, a expressão vale:

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta V} \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \right\} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \quad (2.20)$$

A soma das derivadas parciais na equação 2.20 resulta em um escalar denominado divergente de \mathbf{F} . Em notação vetorial, representa-se o divergente do campo vetorial \mathbf{F} por $\nabla \cdot \mathbf{F}$, em que, conforme sabemos do cálculo diferencial e integral, o operador ∇ em coordenadas cartesianas e duas dimensões é dado por:

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.21)$$

Dessa forma, quando $\mathbf{F} = \rho \mathbf{V}$, a integral (2.15) representa o balanço entre os fluxos de massa (diferença entre o fluxo de massa que entra e o que sai da região), ou seja, a descarga resultante \dot{m} , através das fronteiras do elemento do fluido. Portanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{\dot{m}}{\delta V} \right\} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \quad (2.22)$$

pode ser interpretado como a variação de massa no elemento de fluido, por unidade de volume do elemento. A importância do divergente está em que ele é um dos termos da equação que exprime a conservação da massa, a equação da continuidade.

1. Quando $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$:

Há uma diminuição, por unidade de volume, da massa dentro da região.

2. Quando $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$:

Há um aumento, por unidade de volume, da massa dentro da região.

3. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$:

A massa na região, por unidade de volume, não se altera, o que implica que a descarga resultante \dot{m} é nula.

2.4 Lei de Conservação da Massa

O princípio da conservação de massa é de extrema importância para a física. Segundo (FORTUNA, 2000), “Na ausência de fontes de massa (ou simplesmente fontes) ou de locais pelos quais a massa possa desaparecer (sorvedouros), toda a massa que entra em um sistema deve sair e/ou se acumular no sistema.”

A equação da continuidade, que descreve a conservação de massa, pode ser obtida considerando-se a região com arestas δx e δy , mostrada na Figura (2.9). Na ausência de fontes ou sorvedouros de massa, o balanço de massa dentro da região pode ser escrito como:

Varição temporal da quantidade de massa no elemento = Descarga resultante através das fronteiras do elemento

A variação da quantidade total de massa dentro do elemento de fluido é dada por:

$$\frac{\delta}{\delta t} [\rho(\delta x)(\delta y)] = \left(\frac{\delta \rho}{\delta t} \right) (\delta x)(\delta y) \quad (2.23)$$

Para calcular a descarga resultante de massa através do elemento de fluido, vamos utilizar o fato que, conforme visto na seção 3.2, uma descarga positiva representa fluido saindo do elemento. Caso contrário, a descarga é negativa. Além disso, vamos supor que o elemento de fluido tem dimensões pequenas o suficiente para que seja possível escrever as propriedades macroscópicas, como velocidade e pressão, por exemplo, na fronteira do elemento de fluido como função dos respectivos valores definidos no centro do elemento.

Dessa forma, os fluxos de massa ρu e ρv , nas direções x e y , respectivamente, através da fronteira do elemento de fluido, podem ser calculados a partir de expansões em série de Taylor dos respectivos valores no centro do elemento.

Em matemática, uma série de Taylor é a série de funções da forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \quad \text{sendo} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

onde $f(x)$ é uma função analítica dada. Neste caso, a série acima é dita ser a série de Taylor de $f(x)$ em torno do ponto $x = a$. Associadamente, o polinômio de Taylor de ordem n em torno de $x = a$ de uma dada função n -vezes diferenciável neste ponto é dado por:

$$p(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x - a)^1}{1!} + f''(a) \frac{(x - a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x - a)^n}{n!}$$

No caso particular de $a = 0$, a série acima também é chamada de Série de Maclaurin ou, quando for o caso, de polinômio de Maclaurin.

Dessa forma, aplicando a expansão em série de Taylor para cada face da Figura 2.7, temos:

1. Face Esquerda:

$$\rho u - \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} (\delta x)$$

2. Face Direita:

$$\rho u + \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} (\delta x)$$

3. Face Inferior:

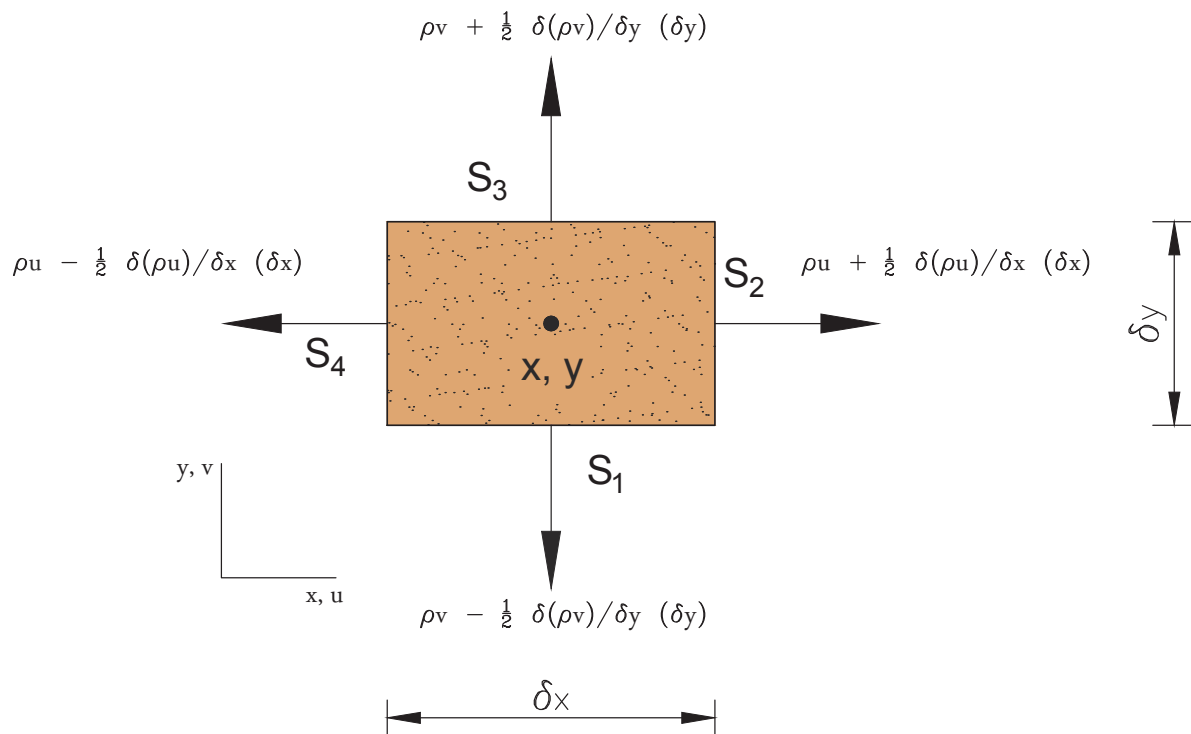
$$\rho v - \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} (\delta y)$$

4. Face Superior:

$$\rho v + \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} (\delta y)$$

Com isso, temos a representação da expansão da Série de Taylor para cada face do elemento de fluido na figura abaixo:

FIGURA 2.9 – Fluxo de massa através das fronteiras de um elemento de fluido



Fonte: Própria

Para cada face, deve-se calcular a integral 2.14 levando-se em conta o sentido do escoamento e o do vetor normal a face. Com isso, encontramos:

1. Face Esquerda:

$$\dot{m}_e = - \left[\rho u - \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} (\delta x) \right] (\delta y)$$

2. Face Direita:

$$\dot{m}_d = \left[\rho u + \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} (\delta x) \right] (\delta y)$$

3. Face Inferior:

$$\dot{m}_i = - \left[\rho v - \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} (\delta y) \right] (\delta x)$$

4. Face Superior:

$$\dot{m}_s = \left[\rho v + \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} (\delta y) \right] (\delta x)$$

As descargas \dot{m}_e e \dot{m}_i possuem sinal negativo porque são para dentro do elemento de fluido e, portanto, têm sentido oposto ao da normal às respectivas faces.

A descarga resultante através do elemento de fluido é dada pela soma das quatro descargas anteriores:

$$\dot{m} = \dot{m}_d + \dot{m}_e + \dot{m}_s + \dot{m}_i$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \left[\rho u + \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} (\delta x) \right] (\delta y) - \left[\rho u - \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} (\delta x) \right] (\delta y) + \\ &+ \left[\rho v + \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} (\delta y) \right] (\delta x) - \left[\rho v - \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} (\delta y) \right] (\delta x) \end{aligned}$$

Rearranjando os termos e colocando em evidências os parâmetros em comum, temos:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \left[\rho u + \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} (\delta x) - \rho u + \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} (\delta x) \right] (\delta y) + \\ &+ \left[\rho v + \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} (\delta y) - \rho v + \frac{1}{2} \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} (\delta y) \right] (\delta x) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{m} = \left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} (\delta x) \right] (\delta y) + \left[\frac{\delta(\rho v)}{\delta y} (\delta y) \right] (\delta x)$$

Deve-se observar que a variação da quantidade total de massa dentro do elemento de fluido é o negativo de \dot{m} , uma vez que, por exemplo, se $\dot{m} > 0$, há um fluxo resultante de massa para fora do elemento de fluido. Isso faz com que a massa total dentro do elemento diminua, ou seja, $\frac{\delta \rho}{\delta t} (\delta x) (\delta y) < 0$. Portanto,

$$\frac{\delta\rho}{\delta t}(\delta x)(\delta y) = -\dot{m} = - \left[\frac{\delta(\rho u)}{\delta x}(\delta x)(\delta y) + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y}(\delta y)(\delta x) \right]$$

Simplificando a expressão acima, temos:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(\delta x)(\delta y) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}(\delta x)(\delta y) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}(\delta x)(\delta y) = 0$$

$$\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] (\delta x)(\delta y) = 0$$

Tomando o limite quando $\delta x, \delta y \rightarrow 0$, ficamos com:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta x, \delta y \rightarrow 0} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] (\delta x)(\delta y) &= 0 \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

que é a equação da continuidade em duas dimensões. O primeiro termo representa a variação temporal da densidade do fluido, enquanto o segundo descreve a taxa de variação da massa por unidade de volume da região mostrada na Figura (2.9). Em função do operador divergente dado por 2.21, a equação (2.24) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (2.25)$$

em que $V = (u\hat{x}, v\hat{y})$.

Esta é a equação da continuidade. Ela é equivalente a lei de conservação da massa aplicada ao escoamento de fluidos: elas expressam o mesmo fenômeno em formulações diferentes, uma integral, a outra diferencial. Em princípio ela é uma equação diferencial parcial de primeira ordem não linear envolvendo as incógnitas ρ e V . Como a velocidade V é uma grandeza vetorial, no espaço tridimensional ela na realidade corresponde a 3 incógnitas, totalizando 4 incógnitas na equação da continuidade. Ela é a primeira das equações de Navier-Stokes que regem a dinâmica dos fluidos, um sistema de três equações diferenciais parciais não-lineares de segunda ordem.

Uma das vantagens da formulação integral é que ela é válida mesmo quando as funções presentes no integrando não são diferenciáveis. Esta vantagem é crucial no estudo de fenômenos físicos em que as soluções são descontínuas, por exemplo na presença de ondas de choque. No entanto, a vantagem do emprego da notação vetorial, por meio do operador divergente, é que a expressão (2.25) fica independente do sistema de coordenadas adotado.

Nesse sentido, chegamos a uma expressão geral, sendo que para um fluido α que escoar, temos:

$$\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha v_\alpha) = 0, \quad \alpha = w, o \quad (2.26)$$

Ou, em termos da massa específica real, como foi visto na seção 3.1:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha^r \phi_\alpha) + \text{div}[(\rho_\alpha^r \phi_\alpha \mathbf{v}_\alpha)] = 0$$

Fazendo $u_\alpha = \phi_\alpha v_\alpha$ (representa a velocidade de Darcy da fase α) e s_α é a saturação da fase, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha^r \phi_\alpha) + \text{div}(\rho_\alpha^r u_\alpha) = 0$$

$$\rho_\alpha^r \frac{\partial}{\partial t}(\phi_\alpha) + \rho_\alpha^r \text{div}(u_\alpha) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_\alpha) + \text{div}(u_\alpha) = 0$$

Lembrando da definição de porosidade e sua relação com a saturação, como visto na equação (2.5), temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi s_\alpha) + \text{div}(u_\alpha) = 0 \quad (2.27)$$

2.5 Lei de Darcy

Segundo (LEVEQUE, 2002), a lei de Darcy pode ser entendida como um caso particular da lei de conservação de momento linear para um fluido newtoniano que escoar em um meio poroso. Neste sentido, apresentaremos a lei de Darcy segundo o seu desenvolvimento empírico para um escoamento monofásico, e em seguida comentamos sua extensão para escoamentos multifásicos, introduzindo o modelo de permeabilidade relativa.

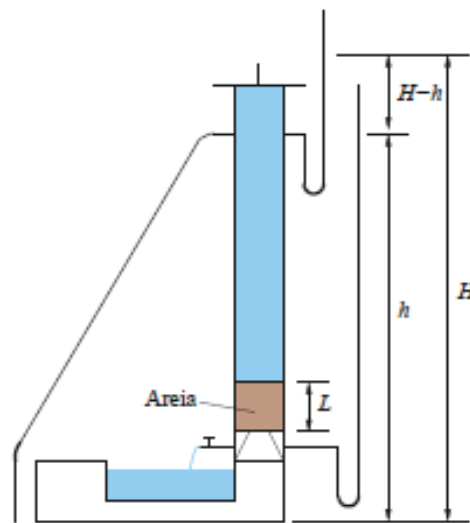
Conforme preconiza (FREEZE; CHERRY, 1979), a Lei de Darcy é de fundamental importância na descrição do escoamento de gás e petróleo em formações geológicas profundas sendo utilizada por analistas de reservatórios de petróleo. Mas, vale notar aqui que ela é igualmente importante em muitas outras aplicações de escoamento em meios porosos. Essa lei descreve o fluxo de umidade do solo e é usada por físicos de solo, engenheiros agrícolas e especialistas de mecânica dos solos. É ainda utilizada na concepção de filtros pelos engenheiros químicos, na concepção de cerâmicas porosas por cientistas de materiais e por biocientistas para descrever o escoamento de fluidos corporais através de membranas porosas no corpo.

A Lei de Darcy é uma lei empírica poderosa e seus componentes merecem a mais cuidadosa atenção. As próximas duas seções fornecem uma visão mais detalhada sobre o significado físico da carga hidráulica h e da condutividade hidráulica K .

2.5.1 Forma Empírica

Em 1856, o engenheiro francês Henry Darcy quantificou, através de trabalhos empíricos, a relação entre a taxa de escoamento de um fluido em um meio poroso e a diferença de potencial a ele aplicada. Conforme mostra a Figura (2.10), seu experimento consistia em fazer escoar, sob pressão, um fluido de massa específica e viscosidade constantes através de um tubo cilíndrico de seção transversal A , com uma parte de espessura L preenchida com areia completamente saturada pelo fluido.

FIGURA 2.10 – Experimento de Darcy



Fonte: Denise Tristão (2013)

A carga hidráulica h é medida, através de piezômetros, em dois pontos do tubo. Esta grandeza mede a energia potencial de uma massa unitária do fluido localizado no ponto em estudo, possuindo duas componentes,

$$h = z + \frac{p}{\rho g} \quad (2.28)$$

onde z é a elevação do ponto em relação a determinado nível de referência, p é a pressão no fluido, ρ sua massa específica e g a magnitude da aceleração da gravidade. O termo $\frac{p}{\rho g}$ mede a elevação do fluido no piezômetro.

Experimentalmente verifica-se que a taxa de escoamento Q (volume do fluido que atravessa a seção por unidade de tempo) é:

- proporcional à área A da seção transversal;
- proporcional à diferença de carga $(H - h)$ e
- inversamente proporcional ao comprimento L

$$Q \propto A \frac{H - h}{L} \quad (2.29)$$

Denominando a constante de proporcionalidade por condutividade hidráulica K , podemos escrever a forma unidimensional da lei de Darcy como:

$$Q = -KA \frac{H - h}{L} \quad (2.30)$$

É muito frequente o uso da velocidade de Darcy, dada por:

$$u = \frac{Q}{A} = -K \frac{dh}{dl} \quad (2.31)$$

Esta é uma velocidade média tomada a partir da vazão sobre toda a seção A , e não deve ser confundida com a velocidade real do fluido nos poros, que deve ser medida a partir da área efetiva dos poros na seção. A vazão específica é um conceito macroscópico facilmente medido e deve ser claramente diferenciada das velocidades microscópicas associadas com os caminhos reais percorridos pelas partículas individuais de água através dos grãos. A relação entre elas se dá por:

$$v = \frac{u}{\phi} \quad (2.32)$$

onde ϕ é a porosidade efetiva (poros que possuem fluido em movimento) do meio.

2.5.2 Forma Multidimensional

A condutividade hidráulica é uma grandeza dependente das características do meio poroso e do fluido que escoar. Verifica-se que para um dado meio:

$$K \propto \frac{\rho g}{\mu} \quad (2.33)$$

com μ sendo a viscosidade dinâmica do fluido, ou ainda:

$$K = \frac{k \rho g}{\mu} \quad (2.34)$$

onde k é uma grandeza puramente geométrica, à qual chamaremos de permeabilidade intrínseca do meio poroso. Para o caso mais geral, onde a matriz porosa é anisotrrópica, K é um tensor de segunda ordem positivo definido e podemos escrever:

$$u = -K \nabla h \quad (2.35)$$

ou, em termos do tensor permeabilidade intrínseca k ,

$$u = -\frac{k}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla z) \quad (2.36)$$

onde p é a pressão aplicada no meio poroso, também denominada pressão no poro e z é uma função que indica a elevação do ponto.

2.5.3 Lei de Darcy para Escoamentos Multifásicos

A lei de Darcy é estabelecida para escoamentos monofásicos, onde a fase que escoar preenche completamente os poros do meio. A sua aplicação para escoamentos multifásicos se dá a partir da hipótese de que a lei é válida para cada uma das fases que escoam:

$$u_\alpha = -\frac{k_\alpha}{\mu_\alpha} \nabla p_\alpha \quad (2.37)$$

ou seja, a velocidade de Darcy da fase α está relacionada com o gradiente de pressão na fase através de uma função k_α , que denominaremos de permeabilidade da fase α . Por motivos de simplicidade de notação, omitimos os termos oriundos da ação gravitacional. Verifica-se que:

- A mistura pode ter diferentes permeabilidades para diferentes fluidos (a permeabilidade da fase não é mais uma grandeza puramente geométrica);
- A permeabilidade da fase é dependente da presença das outras fases na mistura.

Com isso, postula-se que a permeabilidade da fase pode ser decomposta em:

- Um termo dependente da geometria e distribuição dos poros;
- Um termo dependente da saturação.

ou seja,

$$k_\alpha(x, s_\alpha) = k(x)k_{r\alpha}(s_\alpha(x)) \quad (2.38)$$

onde $k(x)$ é a permeabilidade intrínseca do meio e $k_{r\alpha}(s_\alpha(x))$ é a permeabilidade relativa da fase α . A permeabilidade relativa:

$$k_{r\alpha} = \frac{k_\alpha}{k} \quad (2.39)$$

é um número adimensional que indica o grau com que a presença de outras fases prejudica o escoamento da fase α . Este modelo, conhecido como modelo da permeabilidade relativa, foi introduzido por Muskat. De uma forma geral a permeabilidade relativa de uma fase é dada como uma função crescente da saturação desta fase e pode estar sujeita à histerese na medida em que a saturação da fase aumenta ou diminui. Com isso, escrevemos a lei de Darcy para escoamentos multifásicos como:

$$u_\alpha = -k \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \nabla p_\alpha \quad (2.40)$$

O quociente $\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}$ mede o grau de mobilidade da fase num meio poroso com permeabilidade intrínseca k , ou seja, a facilidade ou a dificuldade com que uma fase escoar no meio. Assim, definindo a mobilidade da fase α como:

$$\lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \quad (2.41)$$

reescrevemos a lei de Darcy na forma:

$$u_\alpha = -k \lambda_\alpha \nabla p_\alpha \quad (2.42)$$

A mobilidade total (da mistura) e o fluxo fracionário da fase α são definidas como:

$$\lambda = \sum_\alpha \lambda_\alpha \quad (2.43)$$

e

$$f_\alpha(s_\alpha) = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda} \quad (2.44)$$

respectivamente, o que nos permite reescrever a lei de Darcy como:

$$u_\alpha = -k \lambda f_\alpha \nabla p_\alpha \quad (2.45)$$

2.6 Escoamento Bifásico Unidimensional

Será considerado um escoamento de duas fases incompressíveis e imiscíveis, isto é, os fluidos deslocam-se mutuamente sem se misturarem e existe uma interface distinta fluido-fluido dentro de cada poro, podem ser denotadas pelos índices $\alpha = 1$ para a fase molhante e $\alpha = 2$ para a fase não-molhante.

As principais hipóteses simplificadoras são:

- Escoamento Unidimensional na direção x ;
- Geometria uniforme em y e em z , com área constante A ;
- Porosidade constante.

Sob estas hipóteses, o balanço de massa para a mistura pode ser escrito como:

$$\operatorname{div} u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = \text{constante}$$

O balanço de massa da fase molhante ($\alpha = 1$) se torna:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial s_\alpha}{\partial t} + \text{div}(f_\alpha u) &= 0 \\ \phi \frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f_1 u) &= 0 \\ \frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Utilizando a relação (2.44), temos:

$$\begin{aligned} f_\alpha(s_\alpha) &= \frac{\lambda_\alpha}{\lambda} \\ f_1 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\frac{k_{r1}}{\mu_1}}{\frac{k_{r1}}{\mu_1} + \frac{k_{r2}}{\mu_2}} \end{aligned}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por μ_1 e fazendo $a = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, temos:

$$f_1 = \frac{\mu_1 \left(\frac{k_{r1}}{\mu_1} \right)}{\mu_1 \left(\frac{k_{r1}}{\mu_1} + \frac{k_{r2}}{\mu_2} \right)} = \frac{k_{r1}}{k_{r1} + ak_{r2}}$$

Assim,

$$f_1 = \frac{k_{r1}}{k_{r1} + ak_{r2}} \quad (2.47)$$

Com isso, a equação (2.46) fica:

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_{r1}}{k_{r1} + ak_{r2}} \right) = 0 \quad (2.48)$$

Esta equação é chamada de Equação de Buckley-Leverett que se trata de uma equação hiperbólica não linear, sendo largamente empregada em protótipo para teste de esquemas numéricos para esta classe de problemas.

Em relação às permeabilidades relativas, temos que:

$$k_{r\alpha}(s_\alpha) = \left(\frac{s_\alpha - s_{r\alpha}}{1 - s_{r\alpha}} \right)^2 \quad (2.49)$$

são denominadas de relações de Corey quadráticas, em que:

$s_{r\alpha}$ = saturação residual da fase α

Sem perda de generalidade (sob a ótica matemática), podemos tomar $s_{r\alpha} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_{r1}}{k_{r1} + ak_{r2}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s_1^2}{s_1^2 + as_2^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{s_1^2}{s_1^2 + a(1 - s_1)^2} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Como a fase molhante é a água (w), podemos reescrever a equação (2.50) com o índice 1 sendo substituído por w conforme apresentado abaixo:

$$\frac{\partial s_w}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{s_w^2}{s_w^2 + a(1 - s_w)^2} \right] = 0 \quad (2.51)$$

Para encontrarmos a equação de Buckley-Leverett em sua forma adimensionalizada, introduziremos o conceito da pressão capilar como sendo a diferença entre as pressões de cada fase. Assim, temos que:

$$p_c(s_w) = p_o - p_w \quad (2.52)$$

Empiricamente, a pressão capilar é descrita em função da saturação da água. Assim, a velocidade do fluido água pode ser modelado conforme a equação (2.42):

$$u_w = -k\lambda_w \nabla p_w \quad (2.53)$$

$$u_o = -k\lambda_o \nabla p_o \quad (2.54)$$

No caso unidimensional, temos:

$$u_w = -k\lambda_w \frac{\partial p_w}{\partial x}$$

$$u_o = -k\lambda_o \frac{\partial p_o}{\partial x}$$

Para a água:

$$u_w = -k\lambda_w \frac{\partial p_o}{\partial x} - k\lambda_w \frac{\partial p_c}{\partial x} \quad (2.55)$$

Isolando a diferença parcial da pressão do óleo na equação (2.55) e, em seguida, substituindo na equação (2.54), obtemos uma expressão para a velocidade do fluido óleo:

$$u_o = -k\lambda_o \left(-\frac{u_w}{k\lambda_w} + \frac{\partial p_c}{\partial x} \right) = \frac{\lambda_o u_w}{\lambda_w} - k\lambda_o \frac{\partial p_c}{\partial x} \quad (2.56)$$

Como $u = u_w + u_o$, segue:

$$u = u_w \left(1 + \frac{\lambda_o}{\lambda_w} \right) - k\lambda_o \frac{\partial p_c}{\partial x}$$

Introduzindo a equação do fluxo fracionário da água na equação anterior, temos:

$$u = \frac{u_w}{f_w} - k\lambda_o \frac{\partial p_c}{\partial x}$$

ou

$$u_w = f_w u + k f_w \lambda_o \frac{\partial p_c}{\partial x}$$

Substituindo esta equação em (2.27) para a fase água, vem:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[u f_w + k \frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda_w + \lambda_o} \frac{\partial p_c}{\partial x} \right] = \phi \frac{\partial s_w}{\partial t}$$

Aplicando a regra da cadeia para a pressão capilar:

$$\frac{\partial p_c}{\partial x} = \frac{\partial p_c}{\partial s_w} \frac{\partial s_w}{\partial x} = p'_c(s_w) \frac{\partial s_w}{\partial x}$$

Assim, obtemos que:

$$\frac{\partial(u f_w)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda_w + \lambda_o} p'_c(s_w) \frac{\partial s_w}{\partial x} \right) + \phi \frac{\partial s_w}{\partial t} = 0 \quad (2.57)$$

Na equação acima, temos o seguinte termo conhecido como tensor de dispersão física:

$$K_{FIS} = k \frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda_w + \lambda_o} p'_c(s_w)$$

É interessante notar que na equação de Buckley-Leverett, a capilaridade é responsável pela introdução de um termo difusivo.

A equação (2.57) pode ser adimensionalizada definindo-se:

$$x_D = \frac{x}{L} \quad t_D = \int_0^t \frac{u}{\phi L} dt$$

Logo, substituindo essas definições ficamos com:

$$\frac{\partial(f_w)}{\partial x_D} - \frac{1}{uL} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{FIS} \frac{\partial s_w}{\partial x_D} \right) + \frac{\partial s_w}{\partial t_D} = 0$$

$$\frac{\partial(f_w)}{\partial x_D} + \frac{\partial s_w}{\partial t_D} = \frac{1}{uL} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{FIS} \frac{\partial s_w}{\partial x_D} \right)$$

A equação de Buckley-Leverett é composta por uma parte convectiva (parte esquerda da equação) e uma parte difusiva (parte direita). Ela é estritamente não linear e parabólica, porém em nosso estudo estaremos interessados na parte convectiva (desprezando os efeitos difusivos), pois dá origem a equação de Buckley Leverett em sua forma mais usual na literatura. Logo, a equação se torna convectiva estritamente hiperbólica não linear, como é mostrado na equação abaixo:

$$\frac{\partial s_w}{\partial t_D} + \frac{\partial(f_w)}{\partial x_D} = 0 \quad (2.58)$$

Aplicando a regra da cadeia para a função de fluxo fracionário, obtemos uma nova versão para a equação de Buckley-Leverett¹, sem os índices de adimensionalização:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + f' \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (2.59)$$

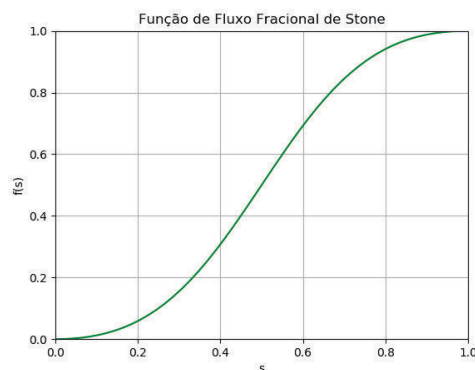
Existem vários modelos para a função de fluxo fracionário para o problema de Buckley-Leverett. A função de fluxo é não linear e não convexa, representando a transferência da quantidade da saturação que ocorre em determinadas regiões do escoamento em certos intervalos de tempo. Para o nosso estudo, utilizaremos o modelo de Stone, considerando a saturação do fluido molhante (no caso a água), bem como a razão das viscosidades dos fluido, sendo dado por:

$$f(s) = \left[\frac{s^2}{s^2 + a(1-s)^2} \right], \quad (2.60)$$

onde $a = \frac{\mu_w}{\mu_o} < 1$ é uma constante.

Aqui s representa a saturação da fase molhante (água). Logo, $0 < s < 1$.

FIGURA 2.11 – Gráfico da função de fluxo $f(s)$ no problema de escoamento bifásico



Fonte: Própria

Considerando um meio poroso saturado, isto é, completamente tomado de fluido, a

¹Por motivos de simplificação de notação matemática, iremos atribuir a partir de agora que a saturação da água será dada apenas pela letra s e não por s_w .

saturação do óleo é $s_o = 1 - s$.

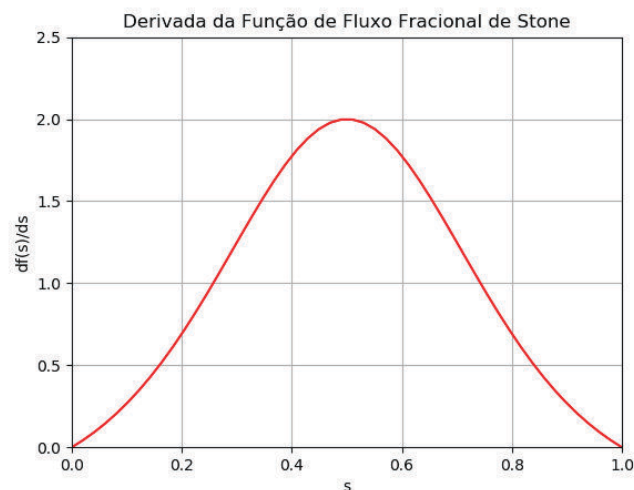
Note que a função de fluxo (2.60) é não convexa com um único ponto de inflexão e sua derivada é dada por:

$$f'(s) = \frac{2s[s^2 + a(1-s)^2] - s^2[2s + 2a(1-s)(-1)]}{[s^2 + a(1-s)^2]^2}$$

$$f'(s) = \frac{2as(1-s)}{[s^2 + a(1-s)^2]^2}$$

O gráfico ($s \times f'(s)$) na Figura (2.12) mostra a velocidade característica que tem um máximo no ponto de inflexão:

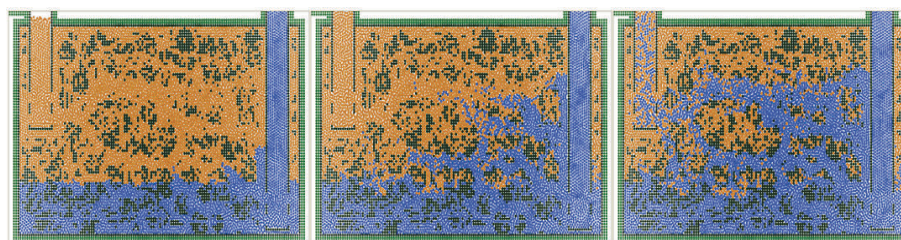
FIGURA 2.12 – Gráfico da derivada da função de fluxo $f(s)$ no problema de escoamento bifásico



Fonte: Própria

O esquema abaixo mostra o Tanque de Provas Numérico da USP para o Escoamento Bifásico:

FIGURA 2.13 – Escoamento bifásico em meio poroso. Tanque de Provas Numérico da USP



Fonte: Amilton (2012)

3 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Neste capítulo, serão apresentadas propriedades matemáticas para a aproximação da solução de equações na forma conservativa.

A modelagem dinâmica de fenômenos físicos é frequentemente baseada em princípios físicos chamados Leis de Conservação, que podem ser escritos na forma:

$$u(x, t)_t + f(u(x, t))_x = 0, \quad (3.1)$$

onde $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ representa as variáveis de estado, $n > 1$, $(x, t) \in Q := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Uma dificuldade que estas equações apresentam é que nem sempre elas admitem soluções clássicas. As soluções deste tipo de equação são estudadas para o problema de Riemann, cuja solução é uma sequência de ondas.

Com o intuito de incorporar conhecimentos matemáticos mais avançados, para em seguida utilizá-lo no entendimento dos problemas estudados, o presente capítulo trata de elaborar um estudo da teoria das Leis de Conservação, sendo discutidas as soluções fracas que, fisicamente, podem ser interpretadas como ondas de choques ou rarefação. Então, para que possam ser distinguidas as fisicamente admissíveis, foi considerado o princípio de entropia, em suas diversas formas. Logo, a teoria das equações diferenciais parciais (EDP) hiperbólicas referente às Leis de Conservação lineares e não lineares são introduzidas de forma gradativa neste estudo.

3.1 Curvas Características

Nesta seção serão usadas curvas no plano xt , denominadas curvas características para resolver equações do tipo (3.1), para leis de conservação lineares e não lineares, com uma condição inicial $u(x, 0)$. A geometria das soluções geradas por curvas características permite resolver a equação do tipo (3.1) mesmo nos casos não lineares que, em geral, são de tratamento difícil.

3.1.1 Leis de Conservação Lineares

Para leis de conservação lineares, isto é, com fluxo f linear ($f(u) = c \cdot u$), reescreve-se a equação (3.1) na forma não conservativa:

$$u_t + f(u)_u \cdot u_x = 0. \quad (3.2)$$

Como $f(u)_u = \frac{d}{du}f(u) = c$, pode-se escrever a equação (3.2) como:

$$u_t + c \cdot u_x = 0, \quad (3.3)$$

onde c é uma velocidade constante, independente de x e t .

A equação (3.3) no domínio $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$ em conjunto com a condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

pode ser escrita como um "Problema de Cauchy", que consiste em solucionar o sistema

$$\begin{cases} u_t + c \cdot u_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}, \quad -\infty < x < \infty, t \geq 0 \quad (3.4)$$

A equação (3.4) é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) escalar, linear, de coeficientes constantes do tipo hiperbólica, cuja solução pode ser obtida pelo método das curvas características, que será descrito a seguir.

Seja $\gamma(t) = (x(t), t)$ uma curva parametrizada com um ponto inicial $(x_0, 0)$ sobre o eixo- x . Se restringirmos a função $u(x, t)$ à curva $\gamma(t)$, isto é, se considerarmos a função $\gamma(t) = u(x(t), t)$, tem-se que a variação de $u(x, t)$ ao longo da curva $\gamma(t)$ será dada por:

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \frac{d}{dt}u(x(t), t) \quad (3.5)$$

Usando a regra da cadeia, obtêm-se:

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t) \frac{d}{dt}x(t) \quad (3.6)$$

Comparando o lado direito desta equação com a equação (3.4) obtêm-se $\frac{d}{dt}\gamma(t) = 0$, ou seja, $\gamma(t) = u(x(t), t) = \text{constante}$. Logo, o valor de $u(x(t), t)$ em cada ponto desta curva é o mesmo de $u(x_0, 0)$. Então $u(x, t)$ é constante ao longo de trajetórias $x(t)$ que se propaga com a velocidade característica $c = \frac{d}{dt}x(t)$.

Como $\frac{d}{dt}x(t) = c$, as trajetórias $x(t)$ são as retas $x = x_0 + c \cdot t$, sendo $u(x(t), t)$ constante sobre essas retas. Essas trajetórias são chamadas curvas características da equação diferencial parcial (3.4).

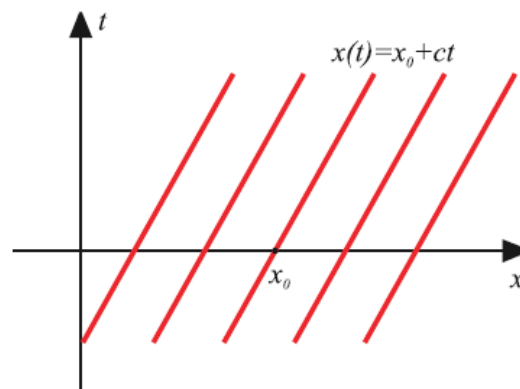
Desse modo, a construção geométrica da solução de um problema de valor inicial, como

a equação (3.4), pode ser obtida através do estudo das curvas características.

Com isso, pode-se obter uma forma da solução do problema (3.4), onde x_0 é a intersecção da curva característica que passa pelo ponto (x, t) com o eixo- x . Assim, considerando que no caso linear a inclinação de todas as características é constante, igual a $\frac{1}{c}$, a solução $u(x, t)$ satisfaz:

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x_0) \\ x = x_0 + c \cdot t \end{cases} \quad (3.7)$$

FIGURA 3.1 – Curvas Características



Fonte: Notas de Aula: Equações Diferenciais Parciais I/II. Professor Biezuner (2010)

Logo, a solução geral do problema (3.4) pode ser representada por uma função suave da forma:

$$u(x, t) = u_0(x - c \cdot t), x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (3.8)$$

Com isso, à medida que o tempo evolui, os dados iniciais se propagam sem deformação para a direita (se $c > 0$) ou para esquerda (se $c < 0$) com a velocidade constante c . A solução $u(x, t)$ é constante ao longo de cada reta $x = x_0 + c \cdot t$, que são conhecidas como as curvas características da equação.

Verifica-se então, que as características são as curvas no plano xt que satisfazem as equações diferenciais ordinárias $\frac{d}{dt}x(t) = c, x(0) = x_0$. Derivando $u(x, t)$ ao longo de uma destas curvas para encontrar a taxa de variação de $u(x, t)$ ao longo da característica, descobre-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t) \cdot \frac{d}{dt}x(t) \\ &= u_t + u_x \cdot c \\ &= u_t + c \cdot u_x = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

confirmando que $u(x, t)$ é constante ao longo destas curvas características.

Para um primeiro problema sobre advecção linear, utilizaremos o seguinte dado inicial:

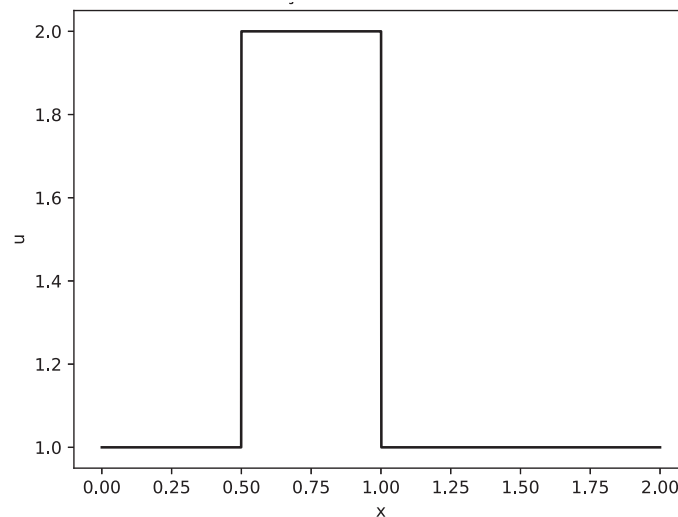
$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 0,5 \\ 2, & \text{se } 0,5 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases} ,$$

cujo gráfico é exibido na Figura (3.2). Assim, estudaremos as condições acima para a equação:

$$u_t + c u_x = 0$$

com $c = 1$.

FIGURA 3.2 – Curva Inicial - Advecção Linear (Caso 01)



Fonte: Própria

As curvas características planas podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c \Rightarrow x(t) = ct + k_1 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Assim,

$$x(0) = x_0 = 0 + k_1 \Rightarrow k_1 = x_0 \Rightarrow x = ct + x_0$$

Logo, teremos que:

$$x = ct + x_0 \Rightarrow x_0 = x - ct$$

Dessa forma, fazendo $u(x, t) = u_0(x_0)$ e $c = 1$, a solução do problema será:

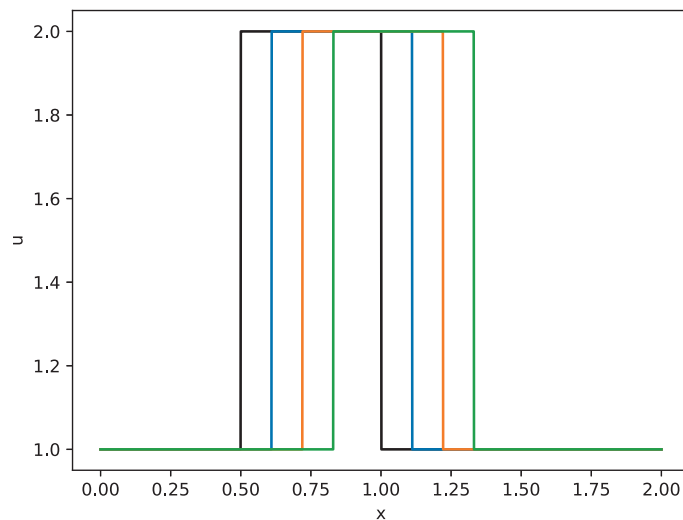
$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x - t \leq 0,5 \\ 2, & \text{se } 0,5 < x - t \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x - t \leq 2 \end{cases}$$

Reescrevendo-a, temos:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t < x \leq t + 0,5 \\ 2, & \text{se } t + 0,5 < x \leq t + 1 \\ 1, & \text{se } t + 1 < x \leq t + 2 \end{cases}$$

A Figura (3.3) traz o gráfico da solução u para alguns valores de t :

FIGURA 3.3 – Solução - Advecção Linear



Fonte: Própria

3.1.2 Leis de Conservação Não Lineares

Para leis de conservação não lineares, o seguinte resultado é análogo ao obtido em (3.8). Se $u(x, t)$ é uma solução suficientemente suave do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

então $u(x, t)$ satisfaz:

$$u(x, t) = u_0(x - f'(u(x, t)) \cdot t), x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

De fato, diferenciando $u(x, t)$ ao longo de uma característica,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u_x \cdot f'(u) + u_t \\ \frac{du}{dt} &= 0,\end{aligned}$$

isto é, u é constante ao longo das curvas características.

Como u é constante ao longo de qualquer curva característica e as curvas características devem satisfazer

$$\frac{d}{dt}x(t) = f'(u(x(t), t)),$$

então as características são retas com equação $x(t) = f'(u_0) \cdot t + x_0$, onde u_0 é o valor constante que u assume nesta característica.

Para ambos os casos linear e não linear, as curvas características são retas. No caso linear, a inclinação de todas as curvas características são constantes e iguais a $\frac{1}{c}$. No caso não linear, as inclinações serão $\frac{1}{f'(u_0)}$ para cada valor de u_0 , isto é, as inclinações serão diferentes. Considera-se então a equação não-linear escalar:

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (3.10)$$

onde $f(u)$ é uma função não-linear de u . Assumindo que $f(u)$ é convexa com $f''(u) \geq 0$, para todo u (ou, igualmente, f é não convexa com $f''(u) < 0$, para todo u).

O modelo mais famoso para leis de conservação não-lineares é a Equação de Burgers, em que $f(u) = \frac{1}{2}u^2$. Neste caso, pode-se escrever a equação (3.10) como:

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = u_t + u \cdot u_x = 0. \quad (3.11)$$

Esta equação foi introduzida originalmente por J. M. Burgers em seus estudos sobre turbulência em fluidos, aparecendo como um modelo básico em diversos outros fenômenos, onde efeitos de advecção não-linear e difusão linear desempenham papel importante.

Note que a equação (3.11) é similar a uma equação de convecção do tipo $u_t + c \cdot u_x = 0$, onde c foi substituída por u . As características então satisfazem:

$$\frac{d}{dt}x(t) = u(x(t), t) \quad (3.12)$$

e ao longo de cada característica, $u(x(t), t)$ é constante, já que:

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t) \cdot \frac{d}{dt}x(t)$$

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t + u \cdot u_x$$

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = 0.$$

Além disso, pela equação (3.12), a inclinação $\frac{d}{dt}x(t)$ também é constante. Assim, as características são linhas retas, determinadas pelos dados iniciais.

Se os dados iniciais são suaves, então estes podem ser usados para determinar a solução $u(x(t), t)$ para t suficientemente pequeno, de maneira que as características não se cruzem.

3.2 Soluções Descontínuas e Formação de Choque

Esta seção será iniciada com um exemplo que procura ilustrar a existência de uma ampla classe de soluções para problemas de Cauchy (ver o sistema (3.4)).

Exemplo: É considerado o problema de valor inicial referente à Equação de Burgers,

$$\begin{cases} u_t + u \cdot u_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}, -\infty < x < \infty, t \geq 0 \quad (3.13)$$

onde a condição inicial é:

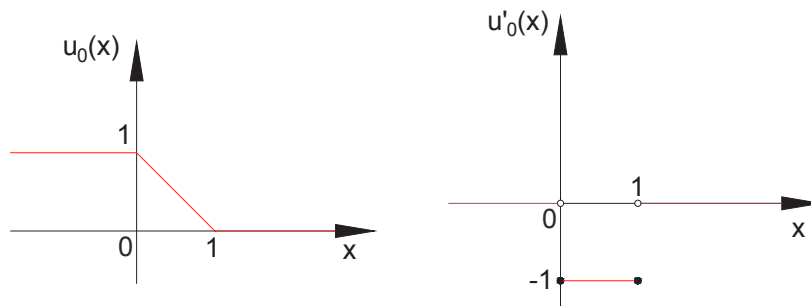
$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ 1 - x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

A derivada da Função (3.14) é dada por:

$$u'_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ -1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

O esboço das funções $u_0(x)$ e $u'_0(x)$ são mostrados abaixo:

FIGURA 3.4 – Gráfico das Funções $u_0(x)$ e $u'_0(x)$



Fonte: Própria

As curvas características podem ser determinadas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.16)$$

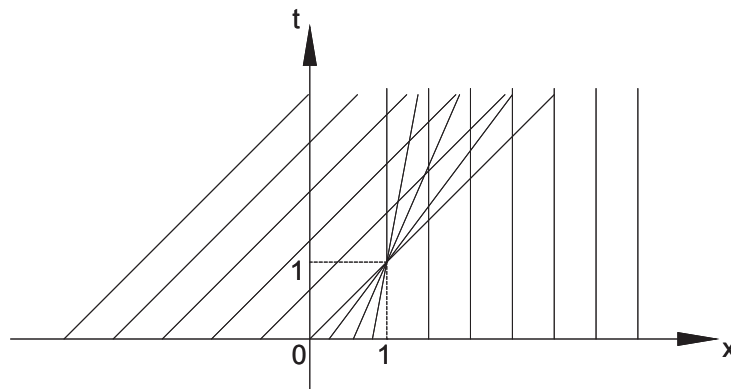
Portanto, teremos:

$$x = u_0(x_0)t + x_0 \quad (3.17)$$

Com isso, podemos aplicar as condições iniciais do exemplo em questão para obtermos as curvas características planas, conforme Eq. 3.17. Vejamos:

$$\begin{cases} x = 1t + x_0 = t + x_0, \text{ se } x_0 < 0 \\ x = (1 - x_0)t + x_0, \text{ se } 0 \leq x_0 \leq 1, \\ x = 0t + x_0 = x_0, \text{ se } x_0 > 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

FIGURA 3.5 – Curvas Características Planas do Problema



Fonte: Própria

Sobre as retas características, temos que:

$$u(x, t) = u_0(x_0)$$

Assim,

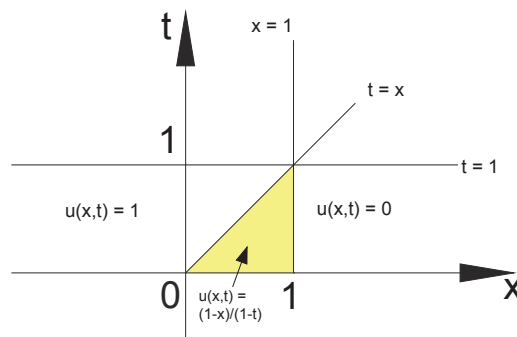
$$\begin{cases} x_0 < 0 \Rightarrow u(x, t) = 1, \text{ em } x - t < 0 \text{ (} x < t \text{)} \\ x_0 > 1 \Rightarrow u(x, t) = 0, \text{ em } x > 1 \\ 0 \leq x_0 \leq 1 \Rightarrow u(x, t) = u_0(x_0) = 1 - x_0 = \frac{1 - x}{1 - t} \end{cases}$$

Logo, a solução será:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < t \\ \frac{1 - x}{1 - t}, \text{ se } 0 \leq x_0 = \frac{x - t}{1 - t} \leq 1 \\ 0, \text{ se } x > 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

Veja uma ilustração dessa solução na Figura (3.6):

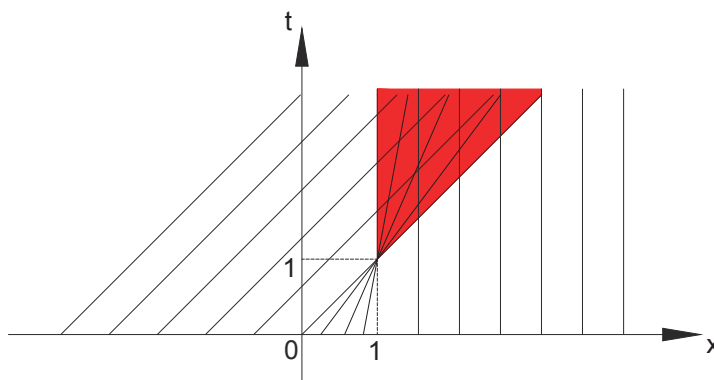
FIGURA 3.6 – Solução em cada subconjunto considerado



Fonte: Própria

Apesar da expressão na Equação (3.19) representar uma função contínua no subdomínio D , não se tem uma solução contínua para todo $t \geq 1$. Na realidade, será obtida mais adiante uma solução descontínua em toda a curva no semiplano superior aberto. Para construir essa solução necessita-se conhecer a curva de descontinuidade, ou seja, conhecer o caminho onde a descontinuidade, iniciada no ponto $(1, 1)$, se propaga para todo $t \geq 1$.

FIGURA 3.7 – Curvas Características - Região do Choque



Fonte: Própria

Tendo como motivação o exemplo acima, serão consideradas soluções que satisfazem a EDP $u_t + uu_x = 0$, no sentido clássico, em cada lado de uma ou mais curvas diferenciáveis do tipo $x = \xi(t)$, mas que são descontínuas ao longo dessa reta.

A solução de uma lei de conservação pode ser suave em todo o domínio ou apenas em parte dele. O surgimento de descontinuidades pode estar relacionado aos dados iniciais descontínuos ou à inclusão de efeitos não lineares na equação ao longo do tempo. Esse efeito é conhecido como a formação de choque.

Para grandes valores de t da equação de Burgers (3.11) pode não haver uma solução única. Isso acontece quando as características se interceptam (ou cruzam), uma vez que $u(x, 0)$ pode ser negativo em qualquer ponto.

O tempo para o qual as características se interceptam primeiro será denotado por $t = Tb$, onde o ponto de interseção é denominado como o ponto de quebra (ou ruptura).

Para encontrar o caso geral para Tb , serão usados os resultados obtidos na seção anterior, onde define-se a seguinte curva característica:

$$x(t) = c(x_0) \cdot t + x_0$$

Considera-se então, duas curvas características que partem da vizinhança de $x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \forall \delta > 0$. Então pode-se escrever:

$$\begin{cases} x_1(t) = c(x_0 + \delta) \cdot t + (x_0 + \delta) \\ x_2(t) = c(x_0 - \delta) \cdot t + (x_0 - \delta) \end{cases} \quad (3.20)$$

O choque ocorre quando $x_1(t)$ é igual a $x_2(t)$, ou seja, quando as duas curvas características da equação 3.20 se interceptam. Logo,

$$x_1(t) = x_2(t) \quad (3.21)$$

$$c(x_0 + \delta) \cdot t + (x_0 + \delta) = c(x_0 - \delta) \cdot t + (x_0 - \delta)$$

$$[c(x_0 + \delta) - c(x_0 - \delta)] \cdot t = -2 \cdot \delta$$

$$t = \frac{-2 \cdot \delta}{[c(x_0 + \delta) - c(x_0 - \delta)]}$$

Tomando o limite, em ambos os lados da equação 3.21, quando $\delta \rightarrow 0$, tem-se :

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} t &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \delta}{[c(x_0 + \delta) - c(x_0 - \delta)]} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-1}{\frac{[c(x_0 + \delta) - c(x_0 - \delta)]}{2 \cdot \delta}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Das diferenças centradas, tem-se que $c'(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{[c(x_0 + \delta) - c(x_0 - \delta)]}{2 \cdot \delta}$. Substituindo $c'(x_0)$ em 3.22 obtêm-se:

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{c'(x_0)} \\ \Rightarrow T_b &= -\frac{1}{\min c'(x_0)} \end{aligned}$$

O resultado desta interseção das características é que nesse ponto a solução terá mais de um valor. Com isso, quando ocorre a formação do choque, não se tem solução clássica ao longo da curva de descontinuidade da EDP.

3.3 Problema de Riemann

Segundo Rispoli, Riemann no meio do século XIX fez um experimento utilizando um tubo cilíndrico, longo e fino, contendo dois gases separados por uma membrana bem fina, onde esses gases deveriam ter pressões e densidades diferentes de ambos os lados da membrana. Com esse experimento, ele pretendia determinar o movimento dos gases quando a membrana fosse rompida. Este tipo de problema ficou conhecido como Problema de Riemann.

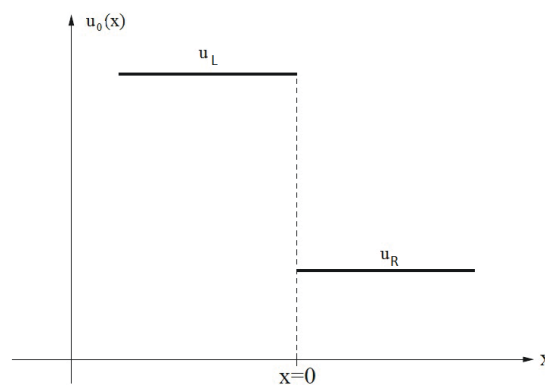
O Problema de Riemann consiste da equação (3.1) em conjunto com a condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$,

$$\begin{cases} u(x, t)_t + f(u(x, t))_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.23)$$

onde:

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L, & \text{se } x < 0 \\ u_R, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

FIGURA 3.8 – Condição inicial para o Problema de Riemann



Fonte: Própria

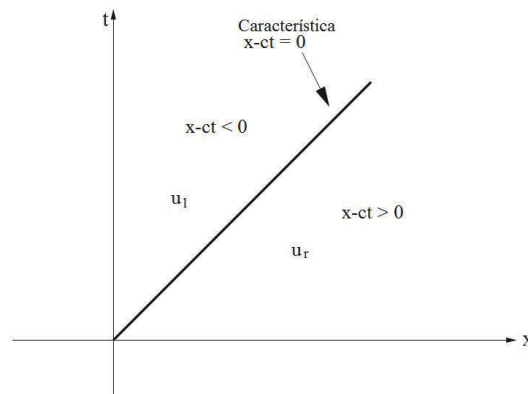
A forma da solução do Problema de Riemann dependerá da relação entre os estados à direita, u_R , e à esquerda, u_L .

A condição inicial 5.3 tem uma descontinuidade em $x = 0$, sendo que o caso trivial acontece quando $u_L = u_R$. Assim, a descontinuidade inicial em $x = 0$ se propaga para

o interior do domínio $x > 0$ percorrendo uma distância $d = ct$ depois de um tempo t . Essa curva característica particular $x = ct$ separa as curvas características à esquerda, nas quais a solução tem valor u_L , daquelas curvas à direita, nas quais a solução tem valor u_R , veja figura abaixo.

$$u(x, t) = u_0(x - ct) = \begin{cases} u_L, & \text{se } x - ct \leq 0 \\ u_R, & \text{se } x - ct > 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

FIGURA 3.9 – Solução do problema de Riemann no plano xt .



Fonte: Própria

Observe que a função 3.25 não pode ser solução de 3.4 em todo o plano $x-t$, por não ser diferenciável ao longo da reta $x = ct$. A uma função da forma de 3.25 que satisfaz a equação diferencial em parte do domínio chama-se de solução fraca de 3.4. E uma função que satisfaz 3.4 em todo o domínio chama-se de solução clássica.

A solução é procurada em todo o domínio e não apenas em parte dele, logo a análise matemática do choque formado envolve a generalização da solução da lei de conservação ao longo da descontinuidade. Surge então a teoria das soluções fracas.

3.4 Condição de Salto de Rankine-Hugoniot

A lei de conservação na forma diferencial é dada por:

$$u_t + [F(x, t, u)]_x = 0$$

Para deduzirmos a equação que rege a condição de salto de Rankine-Hugoniot, precisamos considerar a lei de conservação na forma integral. Para isto, temos que:

$$u_t = -[F(x, t, u)]_x$$

$$\int_a^b u(x, t) dx = - \int_a^b [F(x, t, u)]_x dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = - [F(x, t, u(x, t))] \Big|_a^b$$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = - [F(b, t, u(b, t)) - F(a, t, u(a, t))]$$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = F(a, t, u(a, t)) - F(b, t, u(b, t))$$

$$\frac{d}{dt} \int_a^{g(t)} u(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{g(t)}^b u(x, t) dx = F(a, t, u(a, t)) - F(b, t, u(b, t))$$

Pela regra de Leibniz, para derivar em relação a t uma integral em que ambos o integrando e o limite de integração dependem do parâmetro t , temos:

$$\frac{d}{dt} \int_a^{g(t)} u(x, t) dx = \int_a^{g(t)} u_t(x, t) dx + u(g(t)^-, t) g'(t)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{g(t)}^b u(x, t) dx = \int_{g(t)}^b u_t(x, t) dx - u(g(t)^+, t) g'(t)$$

Portanto,

$$\int_a^{g(t)} u_t(x, t) dx + \int_{g(t)}^b u_t(x, t) dx + [u(g(t)^-, t) - u(g(t)^+, t)] g'(t) = F(a, t, u(a, t)) - F(b, t, u(b, t))$$

Tomando o limite quando $a \rightarrow g(t)^-$ e quando $b \rightarrow g(t)^+$, segue que:

$$[u(g(t)^-, t) - u(g(t)^+, t)] g'(t) = F(g(t)^-, t, u(g(t)^-, t)) - F(g(t)^+, t, u(g(t)^+, t))$$

Para simplificar a equação, vamos estabelecer as seguintes notações:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^+ = u(g(t)^+, t) \\ u^- = u(g(t)^-, t) \\ [u] = u^+ - u^- \\ [F(u)] = F(g(t)^+, t, u^+) - F(g(t)^-, t, u^-) \end{array} \right.$$

Assim, podemos reescrever a equação como:

$$(u^- - u^+)g'(t) = F(g(t)^-, t, u^-) - F(g(t)^+, t, u^+)$$

$$(u^+ - u^-)g'(t) = F(g(t)^+, t, u^+) - F(g(t)^-, t, u^-)$$

$$[u]g'(t) = [F(u)]$$

Portanto, a condição de Rankine-Hugoniot é:

$$g'(t) = \frac{[F(u)]}{[u]} \quad (3.26)$$

Onde $[u]$ mede o salto que a solução u dá ao cruzar a curva de descontinuidade $x = g(t)$ e $[F(u)]$ mede o salto que o fluxo dá ao cruzar esta curva. Desta forma, a condição relaciona as condições à frente da descontinuidade e atrás da descontinuidade com a velocidade da descontinuidade. Assim, as principais definições relacionadas com a equação são:

Onda de Choque: Descontinuidade em u que se propaga ao longo da curva $x = g(t)$;

Caminho do Choque ou Choque: A própria curva $x = g(t)$;

Velocidade do Choque: $g'(t)$;

Força do Choque: Magnitude do salto $[u]$;

Em princípio, a condição do salto permite encontrar o caminho do choque.

A classe de soluções fracas que obedecem à relação (3.26) é ainda relativamente grande, de forma que em geral não há unicidade. Para garantir a unicidade, é necessário impor mais uma condição, conhecida como princípio da entropia, que será vista mais adiante.

De posse dos novos conceitos e teorias abordadas para Leis de Conservação Não-Lineares, vamos resolver a Equação de Advecção Não-Linear utilizando o mesmo dado inicial do primeiro exemplo (Caso Linear). Assim, temos:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 0,5 \\ 2, & \text{se } 0,5 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

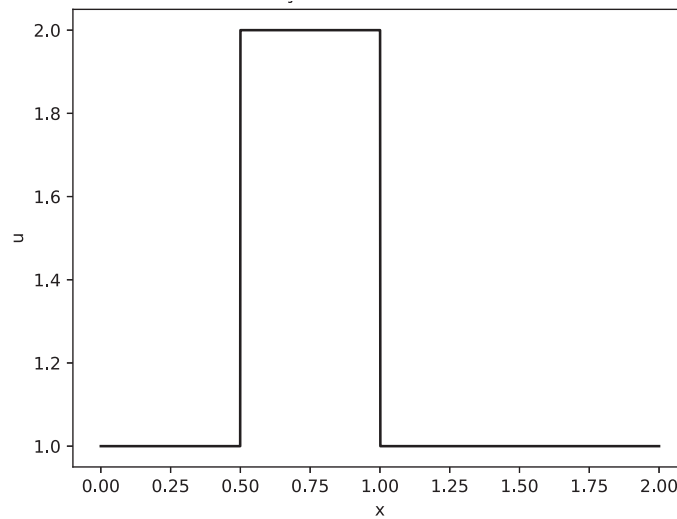
No entanto, a expressão da EDP será dado por:

$$u_t + c u_x = 0$$

com $c = u(x, t)$ não mais constante e proveniente da derivada da Função de Fluxo de Burgers ($F(u) = \frac{1}{2}u^2$).

A Figura (3.10) mostra a curva com base nas condições iniciais impostas acima:

FIGURA 3.10 – Curva Inicial - Advecção Não-Linear - Equação de Burgers



Fonte: Própria

As curvas características planas podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \Rightarrow x(t) = t + k_1 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Assim,

$$x(0) = x_0 = u \cdot 0 + k_1 \Rightarrow k_1 = x_0 \Rightarrow x = u \cdot t + x_0$$

Logo, teremos que:

$$x = u \cdot t + x_0 \Rightarrow x_0 = x - u \cdot t$$

Dessa forma, fazendo $u(x, t) = u_0(x_0)$, a solução do problema será:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x - u \cdot t \leq 0,5 \\ 2, & \text{se } 0,5 < x - u \cdot t \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x - u \cdot t \leq 2 \end{cases}$$

Reescrevendo-a, temos:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } u \cdot t < x \leq u \cdot t + 0,5 \\ 2, & \text{se } u \cdot t + 0,5 < x \leq u \cdot t + 1 \\ 1, & \text{se } u \cdot t + 1 < x \leq u \cdot t + 2 \end{cases}$$

Portanto,

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t < x \leq t + 0,5 \\ 2, & \text{se } 2 \cdot t + 0,5 < x \leq 2 \cdot t + 1 \\ 1, & \text{se } t + 1 < x \leq t + 2 \end{cases}$$

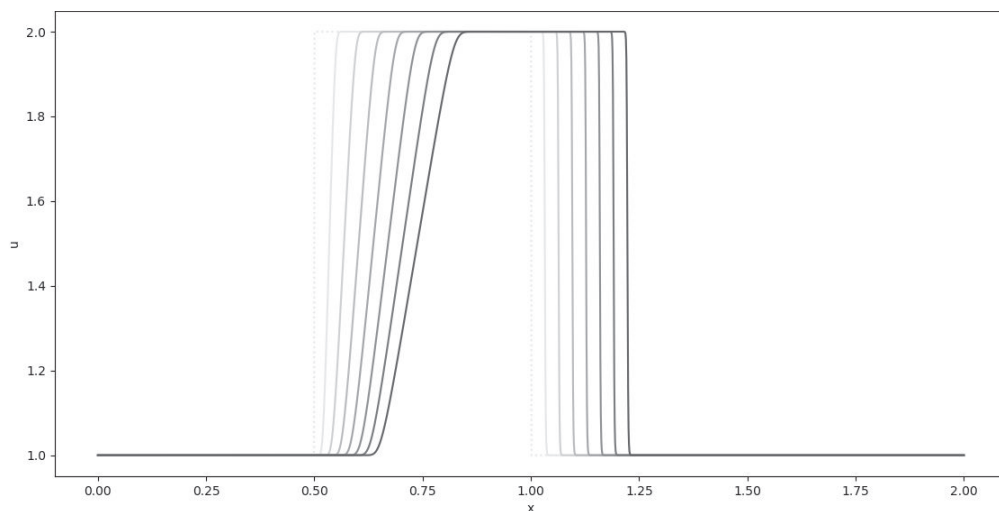
Como o problema é não-linear, precisamos usar a Teoria de Rankine-Hugoniot para calcularmos a velocidade da descontinuidade no ponto de choque. Assim, a velocidade do choque será dada por:

$$g'(t) = v_{choque} = \frac{[F(u)]}{[u]} = \frac{\frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{2}(1)^2}{2 - 1} = \frac{3}{2}$$

A posição do choque é dada ao integrarmos a velocidade acima:

$$x = \frac{3}{2}t + c$$

FIGURA 3.11 – Solução - Equação de Burgers (Caso Não-Linear)



Fonte: Própria

De volta ao exemplo inicial, vamos achar a solução do Problema de Burgers para valores de $t > 1$. Para isto, devemos calcular a velocidade do choque e o seu caminho. Assim, temos:

$$g'(t) = \frac{dx}{dt} = s = \frac{\frac{(u^2)_L}{2} - \frac{(u^2)_R}{2}}{u_L - u_R} = 1/2$$

Portanto, ao integrarmos temos que o caminho do choque é:

$$x = \frac{1}{2}t + c$$

Como a curva de descontinuidade passa pelo ponto $(1, 1)$, encontra-se $c = 1/2$. Assim, a curva de descontinuidade é a reta:

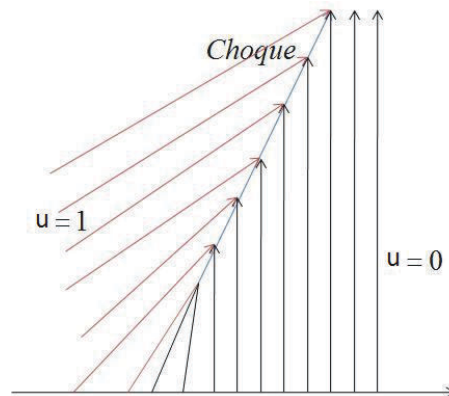
$$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, \quad t \geq 1 \tag{3.27}$$

Logo, para $t \geq 1$, temos:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ 0, & \text{se } x > \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.28}$$

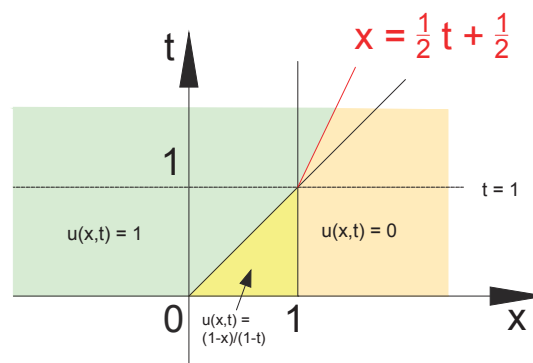
Finalmente, a solução completa do problema descrito para o Exemplo 4.1 é a união das expressões definidas na Equação (3.19), para $t < 1$, com as relações mostradas na Equação (3.28), para $t \geq 1$, veja a Figura . Como se pode observar, ao contrário da Figura , a ilustração na Figura 3.11 enfatiza a intercepção das características apenas na curva de descontinuidade.

FIGURA 3.12 – Esboço da solução fraca do problema do Exemplo 4.1



Fonte: Adaptada de Barbosa (2010)

FIGURA 3.13 – Esboço da Solução do Problema



Fonte: Própria

3.5 Rarefações

Vimos nas seções anteriores que as curvas características podem se cruzar ou não. Se não houver o cruzamento das curvas características e existir regiões do plano $x - t$ onde essas curvas características não estão definidas, ocorrerá o fenômeno conhecido como ondas de rarefação, que são soluções contínuas da equação abaixo:

$$u_t + (f(u))_x = 0 \quad (3.29)$$

da forma,

$$u(\xi), \xi = \frac{x}{t}$$

Portanto, elas devem satisfazer a EDO:

$$-\xi u_\xi + f(u)_\xi = 0$$

Precisamos então encontrar uma solução por rarefação para a região $0 < x < t, t > 0$. Substituindo $u = u(\xi) = u\left(\frac{x}{t}\right)$ na Equação (3.29), temos:

$$\begin{aligned} u_t + (f(u))_x u_x &= 0 \\ -u_\xi \frac{x}{t^2} + f'(u(\xi)) u_\xi \frac{1}{t} &= 0 \\ u_\xi \left(-\frac{x}{t^2} + f'(u(\xi)) \frac{1}{t} \right) &= 0 \\ u_\xi &= 0 \end{aligned}$$

Ou

$$-\frac{x}{t^2} + f'(u(\xi)) \frac{1}{t} = 0$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} f'(u(\xi)) &= \frac{x}{t^2} t \\ f'(u(\xi)) &= \frac{x}{t} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para ilustrar a situação acima, vamos considerar a Equação de Burgers com os seguintes dados iniciais:

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

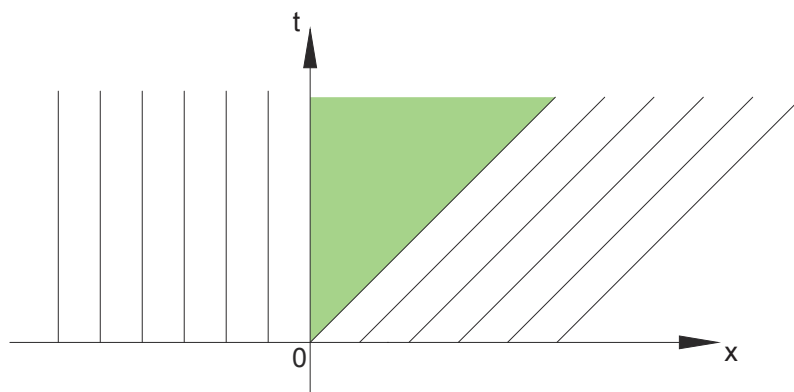
onde:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

As curvas características são:

$$\begin{cases} x = x_0, & \text{se } x_0 < 0 \\ x = t + x_0, & \text{se } x_0 > 0 \end{cases}$$

FIGURA 3.14 – Curvas Características no Plano xt .



Fonte: Própria

Como neste caso, a solução é constante ao longo das retas características, temos para $t > 0$:

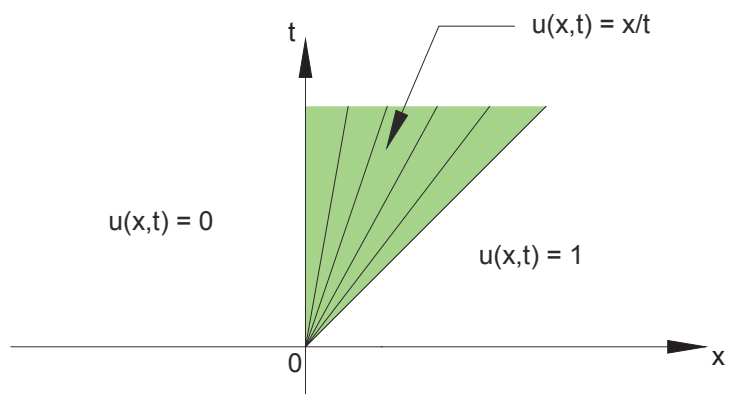
$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, t \geq 0 \\ 1, & \text{se } t < x, x > 0 \end{cases}$$

De acordo com a Figura (3.14), é possível observar que há uma região do plano xt onde as curvas características não estão definidas e, portanto, a solução não está definida.

Para obter soluções em todo plano xt , vamos usar as ondas de rarefação apresentadas acima. Vimos que $u_\xi = 0$ ou $u\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t}$. Descartamos $u_\xi = 0 \Rightarrow u\left(\frac{x}{t}\right) = k$, pois queremos soluções que façam uma "transição suave" entre $u(x, t) = 0$ e $u(x, t) = 1$. Portanto, a solução do problema é:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{t}, & \text{se } 0 \leq x \leq t, t > 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \text{ e } x > t \end{cases}$$

FIGURA 3.15 – Solução do Problema por Rarefação



Fonte: Própria

4 MODELAGEM NUMÉRICA DO PROBLEMA

Tendo em vista os tópicos apresentados, muitos conceitos da engenharia geotécnica foram usados para estudar e pesquisar sobre o fluxo multifásico no meio poroso, a fim de melhorar o desempenho da produção de petróleo. Com o intuito de modelar numericamente o fluxo no reservatório, é importante discutir sobre a condição de estabilidade e as discretizações que permitem elaborar a solução das equações diferenciais.

4.1 Condição de CFL (Courant, Friedrichs e Lewy)

Richard Courant, Kurt Friedrichs e Hans Lewy em um artigo escrito em 1928, com uma tradução em inglês em 1967, usaram o método de diferenças finitas como uma ferramenta analítica para provar a existência de soluções de determinadas equações diferenciais parciais.

Conforme apresenta (ESCHENAZI, 2011), a ideia básica do trabalho deles é definir uma sequência de soluções aproximadas, provar que elas convergem quando a malha é refinada, e então mostrar que a função limite deve satisfazer a equação diferencial parcial, obtendo a existência de uma solução. No momento em que Courant, Friedrichs e Lewy estavam provando a convergência dessas sequências eles identificaram que uma condição necessária para estabilidade é que o domínio de dependência do esquema numérico deve conter o domínio de dependência da equação diferencial parcial quando se diminui os passos Δt e ΔX .

Segundo Leveque, a condição de CFL exige que a distância percorrida durante um intervalo de tempo, deve ser menor do que uma célula, ou seja, $|f'(s) \cdot \Delta t| \leq \Delta X$. A quantidade $\alpha_{CFL} = \max \left| f'(s) \frac{\Delta t_{cfl}}{\Delta X} \right|$ é conhecido como número de Courant ou número CFL. Uma condição necessária para que um método numérico explícito seja estável é que o número de CFL seja no máximo 1. Neste trabalho, o número de CFL será definido por:

$$\alpha_{CFL} = \max \left| f'(s) \frac{\Delta t_{cfl}}{\Delta X} \right| \leq 1 \quad (4.1)$$

onde Δt_{cfl} é um passo de tempo restrito à condição CFL.

4.2 Método das Diferenças Finitas

Os esquemas numéricos abordados neste trabalho são baseados nos métodos de diferenças finitas: O método de Lax-Friedrichs (LXF), que é um método de primeira ordem no tempo e no espaço e difusivo em regiões de descontinuidades, o método de Upwind (UPW) e o método Lax-Wendroff (LXW) que é um método de segunda ordem oscilatório em regiões descontínuas.

Esses esquemas conservativos são na verdade esquemas numéricos desenvolvidos para resolver leis de conservação do tipo hiperbólico. Para isto, às vezes, se utilizam os métodos numéricos de primeira e segunda ordens, como os esquemas de Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff, respectivamente, os quais serão vistos com detalhes mais adiante. Os métodos de primeira ordem têm a vantagem de aproximar a solução de leis de conservação sem oscilações ao redor da descontinuidade. Entretanto necessitam de uma malha muito refinada para produzir uma solução aproximada que seja satisfatória. Por outro lado, os esquemas de segunda ordem convergem para a solução buscada em uma malha menos refinada, porém pelo seu caráter oscilatório faz com que as soluções obtidas apresentem severas oscilações ao redor das ondas de choque. Os métodos de alta resolução são esquemas numéricos que unificam em um só algoritmo os benefícios dos métodos de primeira e segunda ordem, de tal maneira que aproximam melhor a solução nas proximidades das descontinuidades, enquanto que nas regiões suaves a solução se comporta como a de um método de segunda ordem. (BARBOSA, 2010).

A ideia central dos métodos numéricos é a discretização do contínuo que torna finito o problema, e portanto, viabiliza sua solução através de computadores. Esta discretização é realizada inicialmente pela discretização do domínio e em seguida pela discretização das derivadas que aparecem na equação diferencial e nas condições adicionais. Esta discretização permite que se possa passar de um problema contínuo, a equação diferencial e suas condições adicionais, para um problema de dimensão finita. O método das diferenças finitas é um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação das derivadas presentes na equação por diferenças finitas. Essa aproximação da derivada é feita pela utilização da série de Taylor da função. Ao substituir esses esquemas na EDP original, tem-se como resultado um MDF.

4.2.1 Fórmulas de Diferenças Finitas

Usaremos a notação $u_i^n = u(x_n, t_i)$. Sabe-se que a expansão de Taylor da função u no tempo em u_i^{n+1} é:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u_i^n}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u_i^n}{\partial t^4} + \frac{\Delta t^5}{120} \frac{\partial^5 u_i^n}{\partial t^5} + O(\Delta t^6) \quad (4.2)$$

Truncando essa expressão no segundo termo, é obtida a formula avançada de diferenças finitas:

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u_i^n}{\partial t^3} + O(\Delta t^3), \quad (4.3)$$

Portanto,

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (4.4)$$

Fazendo a expansão de Taylor de u no tempo em u_i^{n-1} , obtemos:

$$u_i^{n-1} = u_i^n - \Delta t \frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u_i^n}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u_i^n}{\partial t^4} - \frac{\Delta t^5}{120} \frac{\partial^5 u_i^n}{\partial t^5} + O(\Delta t^6) \quad (4.5)$$

Truncando essa expressão no segundo termo, é obtida a formula atrasada de diferenças finitas:

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u_i^n}{\partial t^3} + O(\Delta t^3) \quad (4.6)$$

Portanto,

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} \approx \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \quad (4.7)$$

Subtraindo (4.2) por (4.5) obtém-se a fórmula centrada de diferenças finitas (4.8) para a primeira derivada:

$$u_i^{n+1} - u_i^{n-1} = 2\Delta t \frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^3}{3} \frac{\partial^3 u_i^n}{\partial t^3} + O(\Delta t^5)$$

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u_i^n}{\partial t^3} + O(\Delta t^4)$$

Portanto,

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} \quad (4.8)$$

Somando (4.2) e (4.5) obtém-se a formula centrada de diferenças finitas (4.9) para a

segunda derivada.

$$u_i^{n+1} + u_i^{n-1} = 2u_i^n + \Delta t^2 \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^4}{12} \frac{\partial^4 u_i^n}{\partial t^4} + O(\Delta t^6)$$

$$\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u_i^n}{\partial t^4} + O(\Delta t^4)$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (4.9)$$

Pode-se subtrair a expansão de Taylor em u_i^{n+2} :

$$u_i^{n+2} = u_i^n + 2\Delta t \frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} + \frac{(2\Delta t)^3}{6} \frac{\partial^3 u_i^n}{\partial t^3} + \frac{(2\Delta t)^4}{24} \frac{\partial^4 u_i^n}{\partial t^4} + O(\Delta t^5)$$

pela a expansão em u_i^{n-2} :

$$u_i^{n-2} = u_i^n - 2\Delta t \frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u_i^n}{\partial t^2} - \frac{(2\Delta t)^3}{6} \frac{\partial^3 u_i^n}{\partial t^3} + \frac{(2\Delta t)^4}{24} \frac{\partial^4 u_i^n}{\partial t^4} + O(\Delta t^5)$$

para gerar uma aproximação da primeira derivada:

$$u_i^{n+2} - u_i^{n-2} = 4\Delta t \frac{\partial u_i^n}{\partial t} + \frac{8\Delta t^3}{3} \frac{\partial^3 u_i^n}{\partial t^3} + O(\Delta t^5)$$

Portanto,

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} = \frac{u_i^{n+2} - u_i^{n-2}}{4\Delta t} - \frac{2\Delta t^2}{3} \frac{\partial^3 u_i^n}{\partial t^3} + O(\Delta t^4) \quad (4.10)$$

Devido à semelhança entre as expressões, subtraindo (4.8) por um quarto de (4.10), elimina-se o termo (Δt^2) e com isso é obtida uma formula de diferença finita de quarta ordem para a primeira derivada (4.11):

$$\frac{3}{4} \frac{\partial u_i^n}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_i^{n+2} - u_i^{n-2}}{16\Delta t} + O(\Delta t^4)$$

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} = \frac{2(u_i^{n+1} - u_i^{n-1})}{3\Delta t} - \frac{u_i^{n+2} - u_i^{n-2}}{12\Delta t} + O(\Delta t^4)$$

Portanto,

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} \approx \frac{2(u_i^{n+1} - u_i^{n-1})}{3\Delta t} - \frac{u_i^{n+2} - u_i^{n-2}}{12\Delta t} \quad (4.11)$$

As mesmas deduções podem ser feitas para qualquer outra variável, como x , gerando formulas análogas.

4.2.2 MDF para a Equação de Advecção Não-Linear de Buckley Leverett

4.2.2.1 Método Upwind

O método Upwind, também conhecido como método de Courant - Issacson - Rees, pode ser obtido aplicando a formula avançada (4.4) no tempo e a atrasada (4.7) no espaço, por exemplo, com $f'(u) > 0$. Assim, temos:

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

Portanto,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Uma vantagem de usar a fórmula avançada no tempo é que isso torna o método explícito, ou seja, é possível obter os valores em um instante posterior u^{n+1} diretamente em função de valores no instante atual u^n . Basta separar os valores do instante atual para o lado direito da equação para obter essa relação.

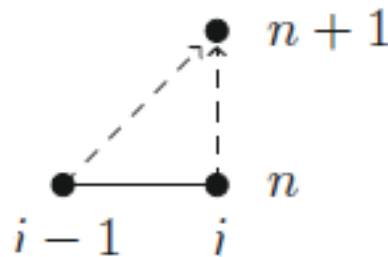
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_i^n - f_{i-1}^n) \quad (4.12)$$

Dessa forma, aplicando a Função de Fluxo de Stone para a Equação de Buckley-Leverett, obtemos:

$$s_i^{n+1} = s_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{(s_i^n)^2}{(s_i^n)^2 + \frac{\mu_w}{\mu_o} (1 - s_i^n)^2} - \frac{(s_{i-1}^n)^2}{(s_{i-1}^n)^2 + \frac{\mu_w}{\mu_o} (1 - s_{i-1}^n)^2} \right) \quad (4.13)$$

O MDF descrito em (4.13) é conhecido por Upwind. Uma notação que permite visualizar como ocorre a propagação de informação pelo método na malha é a molécula do método. A molécula do método liga os pontos da malha que são usados em uma iteração com aquele que é estimado nessa iteração. A molécula do esquema Upwind, por exemplo, pode ser observada na Figura (4.1) abaixo:

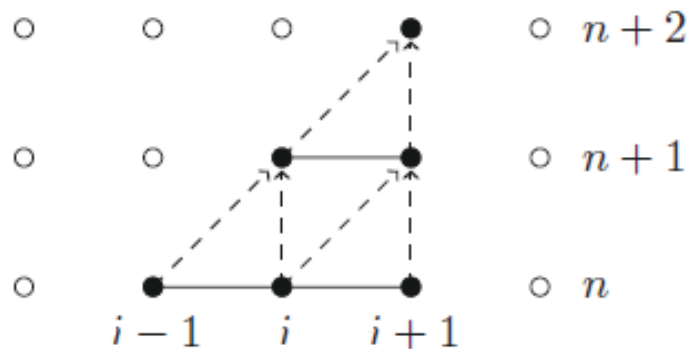
FIGURA 4.1 – Molécula do Esquema Upwind



Fonte: Domingues (2017)

Para visualizar a propagação do método, basta repetir a molécula em iterações consecutivas, como foi feito na Figura (4.2):

FIGURA 4.2 – Propagação pelo Esquema Upwind



Fonte: Domingues (2017)

4.2.2.2 Método Lax-Friedrichs

Usando a fórmula centrada (4.8) para a posição e a avançada (4.4) para o tempo, temos:

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Isolando os termos do instante atual no lado direito da equação, ficamos com:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)$$

Para chegar na formula explícita de Lax-Friedrichs, é feita a aproximação $u_i^n \approx \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2}$, fornecendo assim:

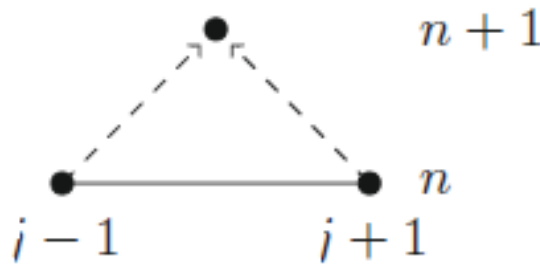
$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)$$

Dessa forma, aplicando a Função de Fluxo de Stone para a Equação de Buckley-Leverett, obtemos:

$$s_i^{n+1} = \frac{1}{2}(s_{i+1}^n + s_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{(s_{i+1}^n)^2}{(s_{i+1}^n)^2 + \frac{\mu_w}{\mu_o}(1 - s_{i+1}^n)^2} - \frac{(s_{i-1}^n)^2}{(s_{i-1}^n)^2 + \frac{\mu_w}{\mu_o}(1 - s_{i-1}^n)^2} \right) \tag{4.14}$$

A molécula do esquema Lax-Friedrichs pode ser representada conforme a Figura (4.3) abaixo:

FIGURA 4.3 – Molécula do Esquema Lax-Friedrichs

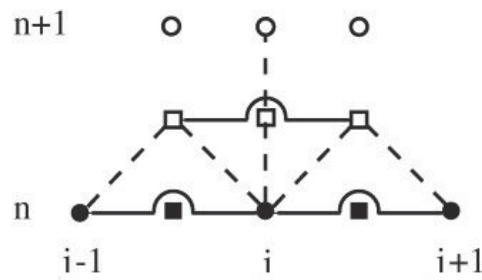


Fonte: Domingues (2017)

4.2.2.3 Esquema Lax-Wendroff

O método de Lax-Wendroff é um esquema de diferenças finitas com acurácia de segunda ordem no espaço, obtido por Peter Lax e Burton Wendroff, sendo utilizado para solucionar equações diferenciais parciais hiperbólicas. Como já dito antes, esse método apresenta oscilações na vizinhança de um choque e sua expressão pode ser obtida calculando valores para $f(u(x, t))$ em intervalos de meio tempo, $t_{n+1/2}$ e pontos médios da grade, $x_{i+1/2}$, conforme podemos ver a molécula do método na Figura (4.4) abaixo:

FIGURA 4.4 – Molécula do Esquema Lax-Wendroff



Fonte: Domingues (2017)

A expressão resultante das aproximações por Série de Taylor e aplicando os conceitos anteriores fica da seguinte forma:

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)), \quad (4.15)$$

Aplicando a Função de Fluxo de Stone para a Equação de Buckley-Leverett, temos que:

$$s_i^{n+1} = \frac{1}{2}(s_{i+1}^n + s_i^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{(s_{i+1}^n)^2}{(s_{i+1}^n)^2 + \frac{\mu_w}{\mu_o}(1 - s_{i+1}^n)^2} - \frac{(s_i^n)^2}{(s_i^n)^2 + \frac{\mu_w}{\mu_o}(1 - s_i^n)^2} \right) \quad (4.16)$$

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos para a Equação de Buckley-Leverett, que é baseada no problema de Cauchy para lei de conservação não-lineares. Conforme visto nos capítulos anteriores, a equação pode ser derivada da conservação em massa e da Lei de Darcy. Assim, ela pode ser escrita como:

$$s_t + (f(s))_x = 0 \quad (5.1)$$

onde a Função de Fluxo de Stone é dada por:

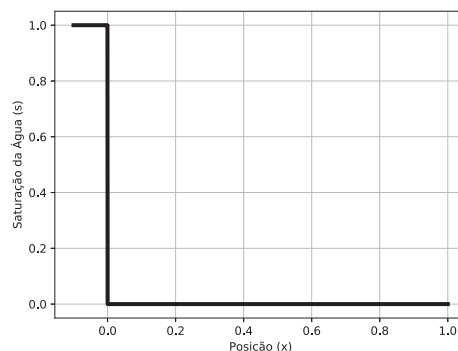
$$f(s) = \frac{s^2}{s^2 + a(1-s)^2} \quad (5.2)$$

A notação $s(x, t)$ descreve a saturação da água na posição x e no tempo t . O valor de $s(x, t)$ é definido no intervalo $0 \leq s(x, t) \leq 1$. Considerando que apenas dois fluidos (água e óleo) fluem no meio poroso, assim $[1 - s(x, t)]$ denota a saturação do óleo na posição x e no tempo t . Portanto, a condição inicial pode ser usada da seguinte forma:

$$s(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 0 \\ 0, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

A Figura (5.1) mostra a curva com base nas condições iniciais impostas acima:

FIGURA 5.1 – Curva Inicial da Equação de Buckley Leverett



Fonte: Própria

Os valores iniciais $s(x, 0) = 1 = s_L$ e $s(x, 0) = 0 = s_R$ significam que o meio poroso consiste em água pura e em óleo puro, respectivamente. De acordo com a condição inicial (5.3), a posição da água é à esquerda do óleo e, cada vez que o tempo passa, mais a água vai empurrando o óleo para a direita, de forma a fluir através da produção do poço.

A constante de notação a representa a relação da viscosidade da água e do óleo, $a = \frac{\mu_w}{\mu_o}$. Portanto $a < 1$ significa que a água flui mais facilmente que o óleo, $a > 1$ significa que o óleo pode fluir mais facilmente do que a água, e $a = 1$ significa que ambos os fluidos têm a mesma resistência ao fluxo através do meio poroso.

A condição de contorno entre a água pura ($s(x, t) = 1$) e o óleo puro ($s(x, t) = 0$) é esperado que conserve e mova com velocidade constante. No entanto, haverá uma região de óleo-água com saturação $s(x, t) = s(x, t)^* < 1$. Matematicamente será visto como onda de choque seguida de onda de rarefação.

Neste trabalho, o problema com a condição inicial pode ser visto como problema de Riemann com fluxo não convexo. Sua solução será construído com base no estudo das curvas características.

Diante do exposto nos capítulos anteriores, as curvas características planas para o problema de Buckley-Leverett pode ser calculado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f'(s) \Rightarrow x(t) = f'(s)t + k_1 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Assim,

$$x(0) = x_0 = 0 + k_1 \Rightarrow k_1 = x_0 \Rightarrow x = f'(s)t + x_0$$

Sabemos que a derivada da função de fluxo de B.L. é dada por:

$$f'(s) = \frac{2as(1-s)}{[s^2 + a(1-s)^2]^2} \quad (5.4)$$

Aplicando as condições iniciais de injeção na Equação (5.4), temos que:

$$f'(s_L = 1) = 0$$

e

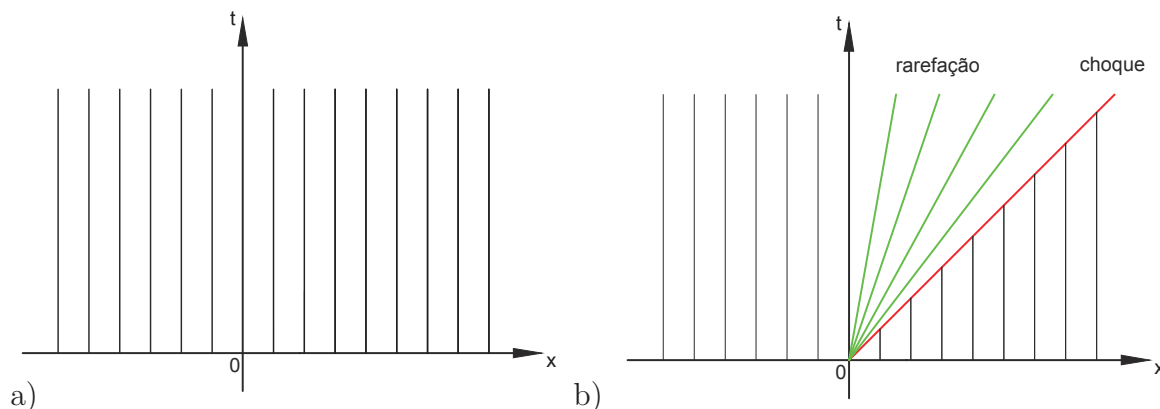
$$f'(s_R = 0) = 0$$

Portanto, as curvas características serão:

$$x = \begin{cases} x_0, & x_0 < 0 \\ x_0, & x_0 > 0 \end{cases}$$

O gráfico abaixo mostra tais curvas:

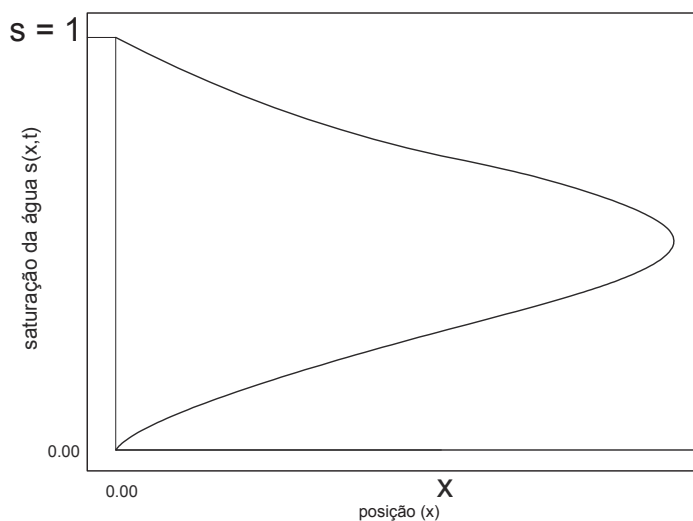
FIGURA 5.2 – a) Curvas Características da Equação de Buckley-Leverett e b) Curvas de Rarefação e Choque



Fonte: Própria

Podemos calcular a que distância do ponto de injeção se encontra qualquer valor de saturação, após um certo tempo de injeção de água. Na verdade, pode-se associar qualquer posição dentro do meio poroso (ou qualquer seção) com um valor de saturação de água. Assim, segue abaixo o traçado do diagrama de distribuição de saturação versus distância.

FIGURA 5.3 – Diagrama de distribuição de saturação da água versus distância do ponto de injeção



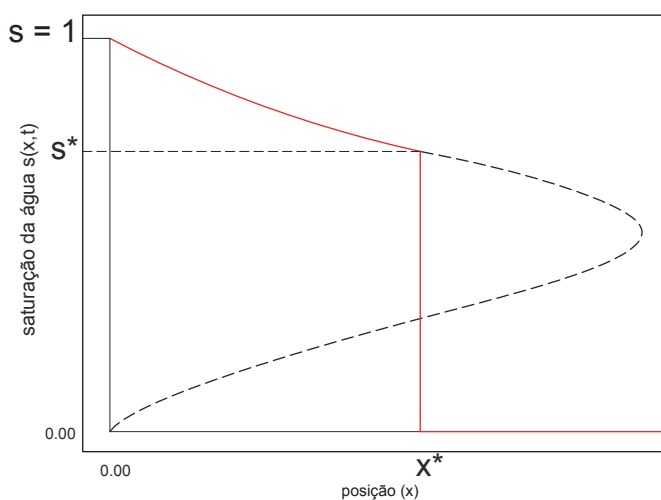
Fonte: Própria

A observação da Figura (5.3), no entanto, mostra que existe uma certa discordância

entre o resultado matemático e o comportamento físico real. Existem posições que apresentam, segundo o gráfico, mais de um valor de saturação para uma mesma posição, o que é fisicamente impossível. Entretanto, existe uma interpretação do gráfico que pode levar a algumas conclusões interessantes. Diz-se que a curva tem uma parte real, que é a região que interessa, e uma parte imaginária. A parte real começa no ponto de coordenadas $x = 0$ e $s = 1$ e vai até o ponto de coordenadas $x = x^*$ e $s = s^*$, onde existe uma descontinuidade. Essa descontinuidade, que recebe o nome de frente de avanço da água (representada pelo $*$), corresponde à parte dianteira da zona invadida pela água, ou seja, a posição mais avançada que a água de injeção alcançou até então. As coordenadas x^* e s^* desse ponto recebem respectivamente os nomes de posição da frente de avanço e saturação da frente de avanço.

A Figura (5.4) mostra como os parâmetros x^* e s^* podem ser encontrados.

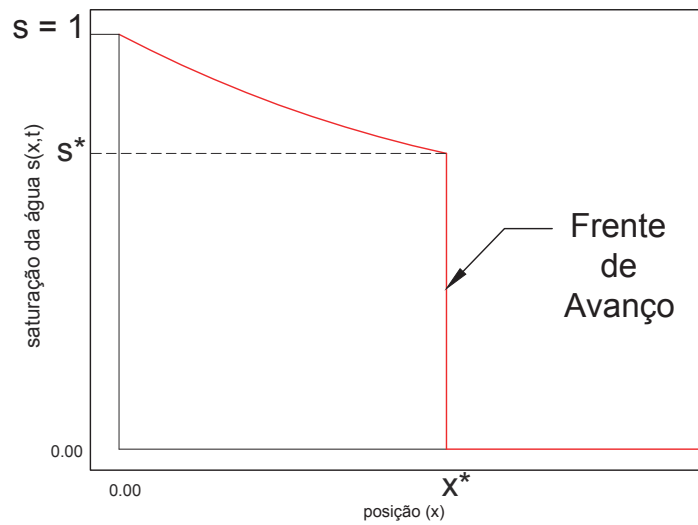
FIGURA 5.4 – Construção da solução da Equação de Buckley-Leverett



Fonte: Própria

Traça-se uma linha vertical definindo-se duas regiões, áreas hachuradas, limitadas pela curva, conforme está mostrado na figura. Se a linha vertical for colocada na posição correta, isto é, na posição exata da frente de avanço, as áreas definidas por ela e pela curva serão iguais. A saturação da frente de avanço corresponde ao ponto em que essa linha vertical intercepta a parte superior da curva. O resultado final está apresentado na Figura (5.5).

FIGURA 5.5 – Solução da Equação de Buckley-Leverett - Posição da Frente de Avanço da Água



Fonte: Própria

A fim de obter a solução analiticamente, um critério deve ser definido onde a onda de choque pode ser aceita. Assim, para todo $s_L \leq s(x, t) \leq 1$, o critério é dado da seguinte forma:

$$\frac{f(s) - f(s_L)}{s - s_L} \geq g'(t) \geq \frac{f(s) - f(s_R)}{s - s_R} \quad (5.5)$$

onde $g'(t)$ satisfaz a Condição de Rankine-Hugoniot:

$$g'(t) = \frac{f(s^*) - f(s_R)}{s^* - s_R} = \frac{f(s^*) - 0}{s^* - 0} \quad (5.6)$$

Como $g'(t)$ é a velocidade de choque, temos:

$$g'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{f(s^*)}{s^*}$$

Integrando, obtemos:

$$x = \frac{f(s^*)}{s^*}t + k \quad (5.7)$$

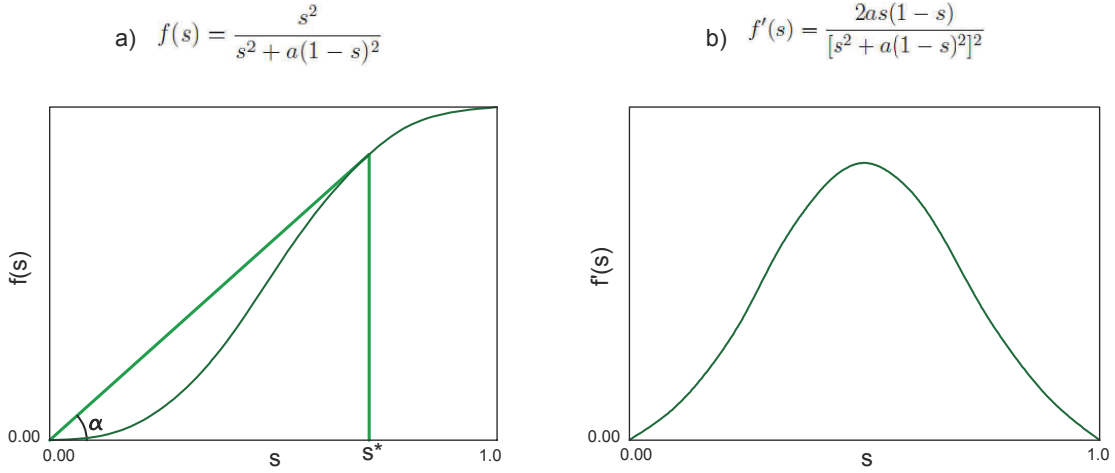
Como o choque inicia no ponto $(0, 0)$, tem-se que $k = 0$.

Portanto, a curva de choque é dada por:

$$x = \frac{f(s^*)}{s^*}t \quad (5.8)$$

O valor de s^* (saturação pós-choque), pode ser calculado observando o gráfico (5.6) abaixo:

FIGURA 5.6 – Obtenção da saturação pós-choque. (a) Função de Fluxo $f(s)$ e (b) Derivada $f'(s)$



Fonte: Própria

Assim, temos:

$$s^* = \frac{f(s^*)}{f'(s^*)} \tag{5.9}$$

Nesse sentido, desenvolvendo a expressão obtida acima, temos:

$$s^* = \frac{\frac{s^{*2}}{s^{*2} + a(1-s^*)^2}}{\frac{2as^*(1-s^*)}{[s^{*2} + a(1-s^*)^2]^2}}$$

$$s^* = \frac{s^{*2}}{s^{*2} + a(1-s^*)^2} \frac{[s^{*2} + a(1-s^*)^2]^2}{2as^*(1-s^*)}$$

$$s^* = \frac{s^{*2}[s^{*2} + a(1-s^*)^2]}{2as^*(1-s^*)}$$

$$1 = \frac{s^{*2} + a(1-s^*)^2}{2a(1-s^*)}$$

$$2a - 2as^* = s^{*2} + a(1 - 2s^* + s^{*2})$$

$$2a - 2as^* = s^{*2} + a - 2as^* + as^{*2}$$

$$-2a + 2as^* + s^{*2} + a - 2as^* + as^{*2} = 0$$

$$(1 + a)s^{*2} - a = 0$$

$$s^{*2} = \frac{a}{1 + a}$$

Portanto, a saturação pós-choque é dada por:

$$s^* = \sqrt{\frac{a}{a + 1}} \quad (5.10)$$

A Equação (5.9) mostra que o valor pós-choque é constante no tempo, bem como a velocidade de choque

$$g'(t) = \frac{f(s^*)}{s^*} = f'(s^*) \quad (5.11)$$

Então a solução exata para a equação de Buckley-Leverett, equação (5.1) e (5.2), com condição inicial (5.3) será:

- Onda de rarefação entre s_L e s^* para

$$f'(s_L) < \frac{x}{t} < f'(s^*)$$

A solução analítica por rarefação será dada por:

$$f'(s) = \frac{2as(1-s)}{[s^2 + a(1-s)^2]^2} = \frac{x}{t} = \xi$$

$$\frac{2as(1-s)}{s^4 + 2as^2(1-s)^2 + a^2(1-s)^4} = \xi$$

$$s^4 + 2as^2(1-2s+s^2) + a^2(1-4s+6s^2-4s^3+s^4) - \frac{2as(1-s)}{\xi} = 0$$

Reorganizando a expressão acima, chega-se a um polinômio de grau 4 conforme

apresentado abaixo:

$$[(1 + 2a + a^2)\xi]s^4 + [(-4a - 4a^2)\xi]s^3 + [(2a + 6a^2)\xi + 2a]s^2 + (-4a^2\xi - 2a)s + a^2\xi = 0 \quad (5.12)$$

- Onda de choque entre s^* e s_R com velocidade de choque

$$g'(t) = \frac{dx}{dt} = f'(s^*) = \frac{f(s^*)}{s^*}$$

A solução de Buckley Leverett significa que depois que a água é injetada no meio poroso, ela substitui um pouco de óleo presente s^* . Atrás da linha de choque, existe uma região de mistura com quantidade de óleo que está diminuindo. Na produção do poço, ou seja, na posição $x = L$, algum fluxo de óleo até que a linha de choque atinja a posição seguida pela região de mistura.

5.1 Resultados Numéricos para a Equação de Buckley-Leverett

Para estudarmos o comportamento do perfil de saturação obtida de forma analítica com as aproximações numéricas, adotamos para fins de simplificação matemática, sem perda de generalidade, o valor de $a = 1$. Dessa forma, a solução analítica por rarefação (Equação (5.12)) fica:

$$(4\xi)s^4 - (8\xi)s^3 + (8\xi + 2)s^2 - (4\xi + 2)s + \xi = 0 \quad (5.13)$$

Empregando a biblioteca SymPy presente no Python, ideal para problemas de matemática simbólica, chegou-se as seguintes raízes do polinômio de grau 4:

- Raiz 01

$$s_1 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{-1 - \frac{\sqrt{4\xi + 1}}{\xi} - \frac{1}{\xi}} \right) + \frac{1}{2}$$

- Raiz 02

$$s_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{-1 - \frac{\sqrt{4\xi + 1}}{\xi} - \frac{1}{\xi}} \right) + \frac{1}{2}$$

- Raiz 03

$$s_3 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{-1 + \frac{\sqrt{4\xi + 1}}{\xi} - \frac{1}{\xi}} \right) + \frac{1}{2}$$

- Raiz 04

$$s_4 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{-1 + \frac{\sqrt{4\xi + 1}}{\xi} - \frac{1}{\xi}} \right) + \frac{1}{2}$$

Das quatro raízes apresentadas, observa-se que apenas a Raiz 04(s_4) satisfaz a solução para o problema físico a qual estamos estudando, isto é, $s \geq 0$.

Portanto, rearrumando a expressão correspondente a solução para s_4 , temos:

$$s_4 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{4\xi + 1} - 1}{\xi} - 1 + 2 - 2} \right) + 1$$

$$s_4 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{-2\xi + \sqrt{4\xi + 1} - 1}{\xi} + 1} \right) + 1$$

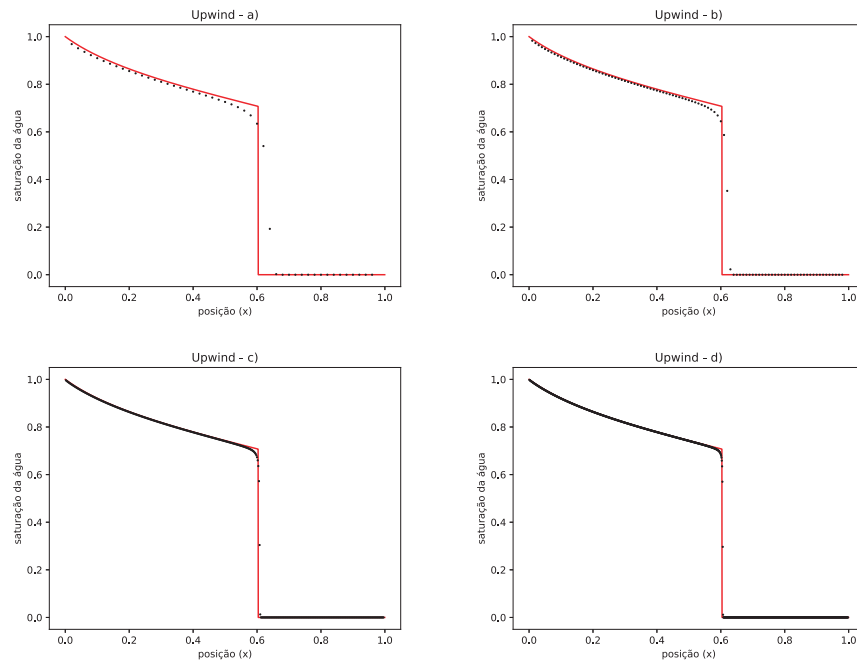
Logo, com obtenção da expressão acima, chegamos que a solução analítica da Equação de Buckley Leverett é dada por:

$$s(x, t) = s(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{-2\xi + \sqrt{4\xi + 1} - 1}{\xi} + 1} \right) + 1, & \xi < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) \\ 0, & \xi > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) \end{cases} \quad (5.14)$$

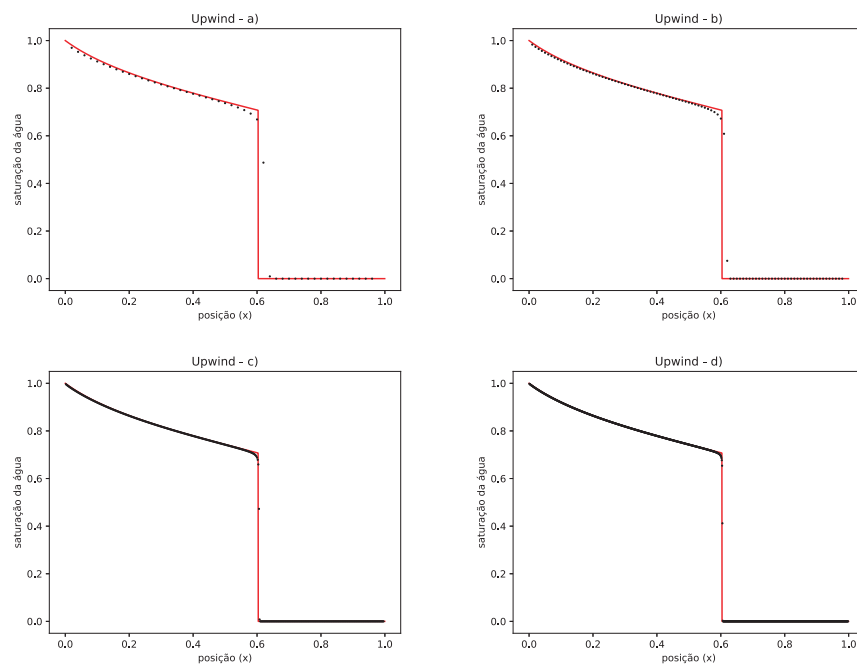
Nos gráficos ilustrados nas subseções seguintes, são apresentados os resultados obtidos com os esquemas numéricos clássicos através dos métodos de Upwind, Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff, para a simulação do problema de Buckley-Leverett.

5.1.1 Resultados - Método Upwind

Primeiramente, simulamos o comportamento do perfil de saturação considerando $t = 0.5$ e $CFL = 0.5$. O gráfico abaixo mostra o comportamento do perfil:

FIGURA 5.7 – Solução Clássica Descontínua - Método Upwind com $CFL = 0.5$ para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$ 

Fonte: Própria

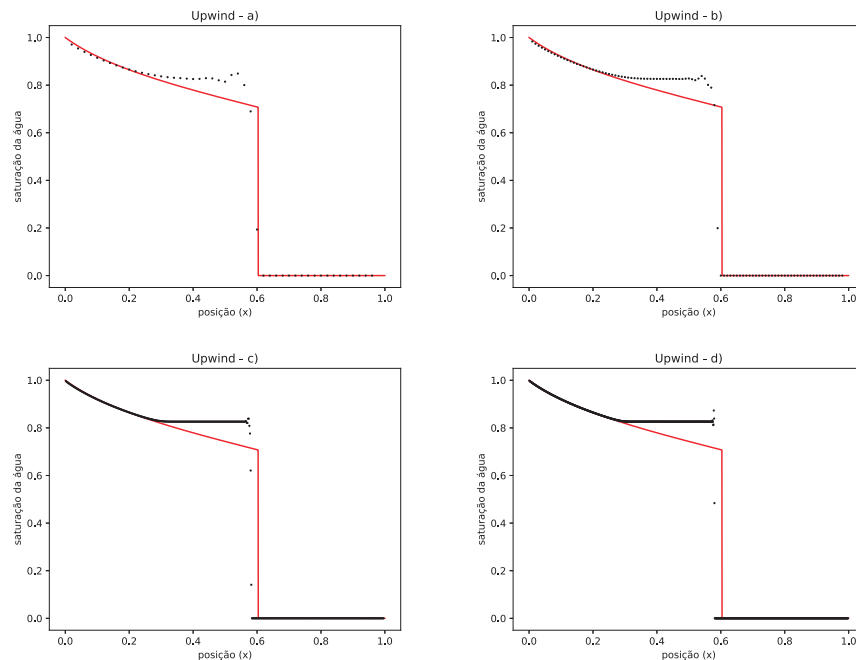
FIGURA 5.8 – Solução Clássica Descontínua - Método Upwind com $CFL = 1$ para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$ 

Fonte: Própria

Os gráficos acima apresentados são simulações considerando pontos da malha de 50, 100, 500 e 1000. Assim, pode-se constatar que quanto maior o número de pontos na malha, mais aproximada se torna a solução numérica. Vale salientar também que a condição de CFL foi atendida para os dois primeiros exemplos, sendo que o valor máximo ($CFL = 1$) se tornou mais aproximado, embora o $CFL = 0.5$ apresente uma aproximação muito boa para o problema em questão.

Para a próxima simulação, consideramos $t = 0.5$ e $CFL = 1.5$, obtendo os seguintes resultados:

FIGURA 5.9 – Solução Clássica Descontínua - Método Upwind com $CFL = 1.5$ para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$



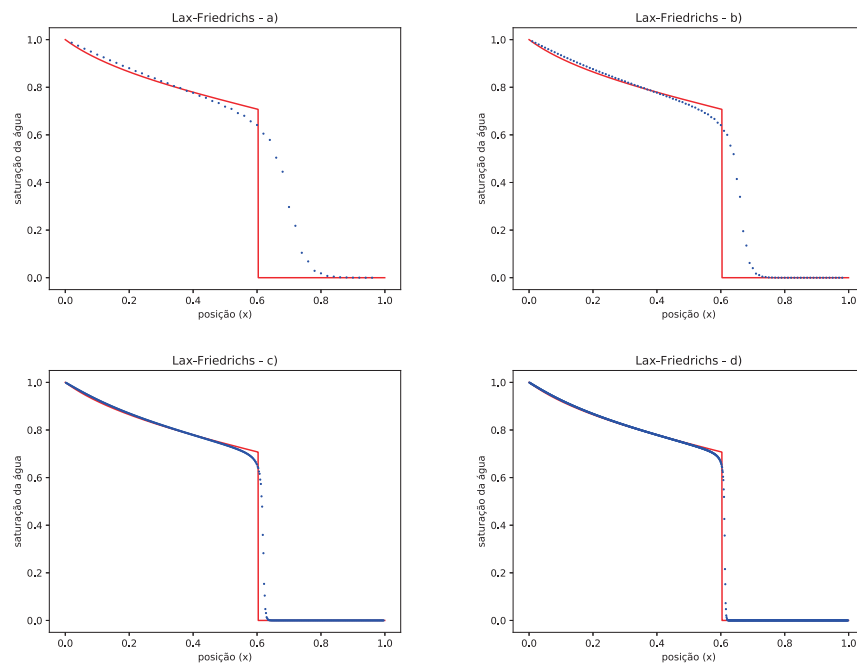
Fonte: Própria

De acordo com os gráficos apresentados nesta última simulação, observa-se que houve uma oscilação na aproximação da solução pelo método Upwind. Nesse caso, tal oscilação se deve pelo fato de considerarmos o valor de $CFL = 1.5$, em contrário com a definição apresentada no capítulo anterior, devendo o CFL ser inferior ou igual a 1. Dessa forma, a solução numérica não convergiu satisfatoriamente.

5.1.2 Resultados - Método de Lax-Friedrichs

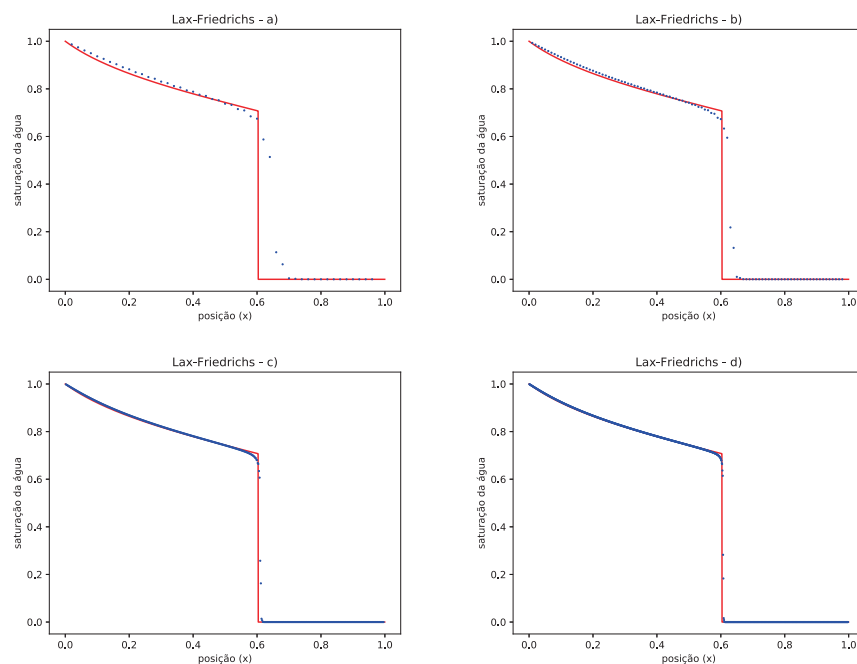
Primeiramente, simulamos o comportamento do perfil de saturação considerando $t = 0.5$ e $CFL = 0.5$. O gráfico abaixo mostra o comportamento do perfil:

FIGURA 5.10 – Solução Clássica Descontínua - Método Lax-Friedrichs com CFL = 0.5 para: a) N = 50, b) N = 100, c) N = 500, d) N = 1000



Fonte: Própria

FIGURA 5.11 – Solução Clássica Descontínua - Método Lax-Friedrichs com CFL = 1 para: a) N = 50, b) N = 100, c) N = 500, d) N = 1000

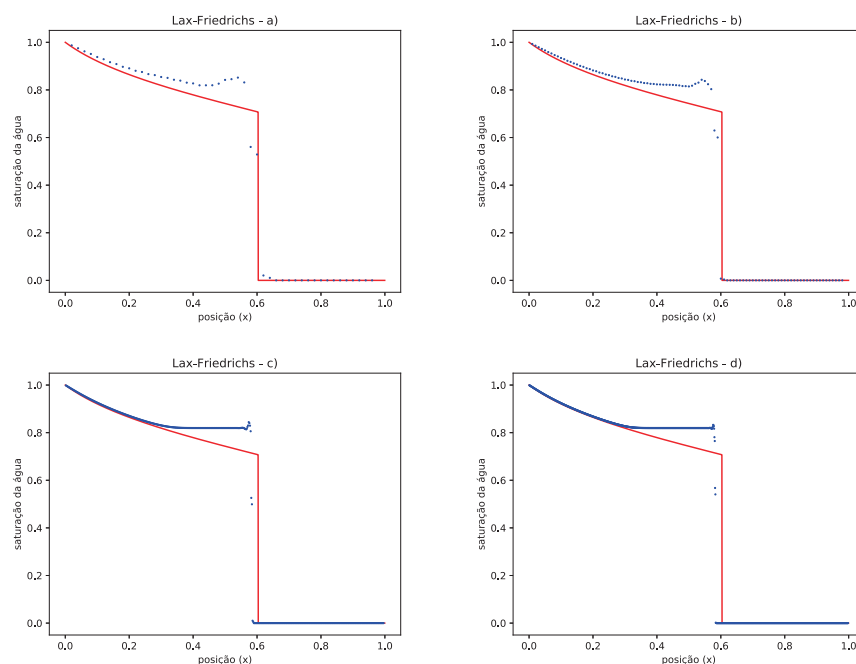


Fonte: Própria

Os gráficos acima apresentados são simulações considerando pontos da malha de 50,

100, 500 e 1000. Assim, pode-se constatar que quanto maior o número de pontos na malha, mais aproximada se torna a solução numérica. Vale salientar também que a condição de CFL foi atendida, sendo que o valor máximo ($CFL = 1$) apresentou resultados mais favoráveis e com uma convergência mais rápida para a solução, embora o $CFL = 0.5$ apresente uma aproximação muito boa para o problema em questão para valores maiores de N na malha. Para a próxima simulação, consideramos $t = 0.5$ e $CFL = 1.5$, obtendo os seguintes resultados:

FIGURA 5.12 – Solução Clássica Descontínua - Método Lax-Friedrichs com $CFL = 1.5$ para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$



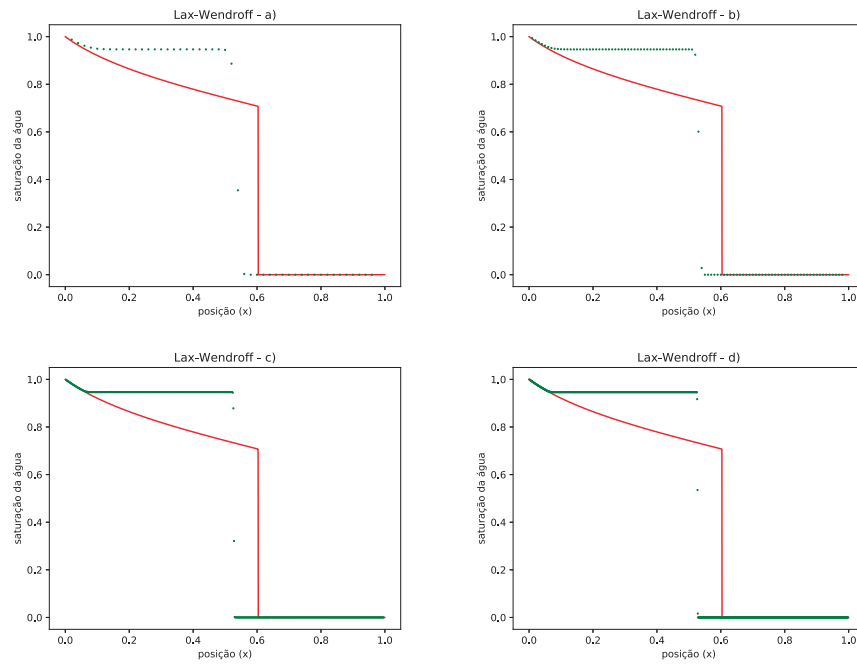
Fonte: Própria

De acordo com os gráficos apresentados nesta última simulação, observa-se que houve uma oscilação na aproximação da solução pelo método de Lax-Friedrichs. Nesse caso, tal oscilação se deve pelo fato de considerarmos o valor de $CFL = 1.5$, em contrário com a definição apresentada no capítulo anterior, devendo o CFL ser inferior a 1. Dessa forma, a solução numérica não convergiu satisfatoriamente.

5.1.3 Resultados - Método de Lax-Wendroff

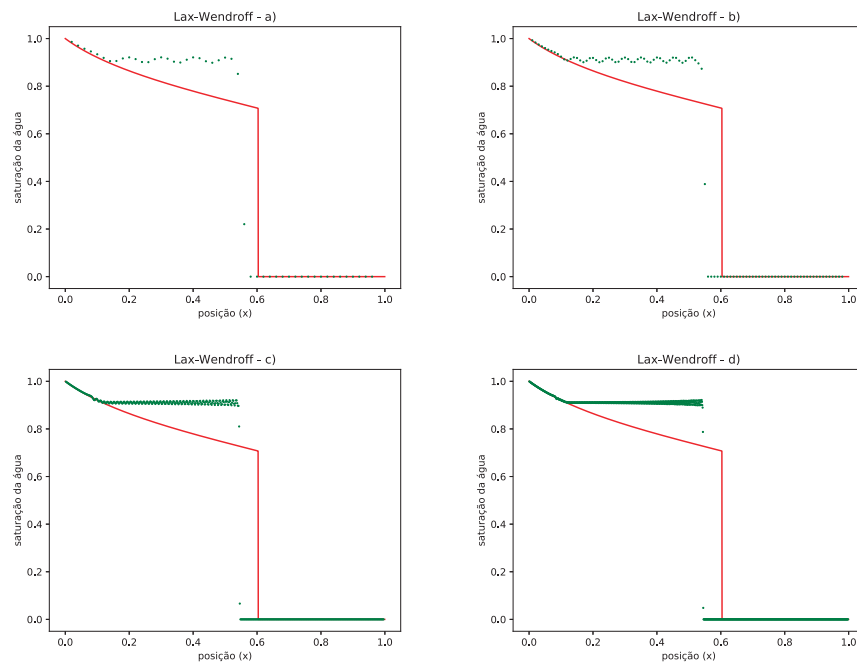
Primeiramente, simulamos o comportamento do perfil de saturação considerando $t = 0.5$ e $CFL = 0.5$. O gráfico abaixo mostra o comportamento do perfil:

FIGURA 5.13 – Solução Clássica Descontínua - Método Lax-Wendroff com CFL = 0.5 para: a) N = 50, b) N = 100, c) N = 500, d) N = 1000



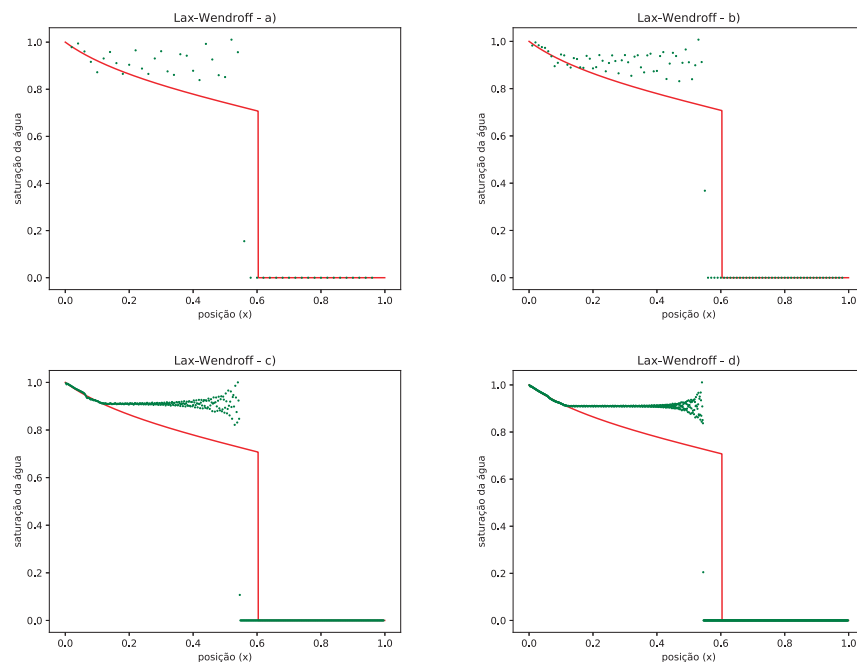
Fonte: Própria

FIGURA 5.14 – Solução Clássica Descontínua - Método Lax-Wendroff com CFL = 1 para: a) N = 50, b) N = 100, c) N = 500, d) N = 1000



Fonte: Própria

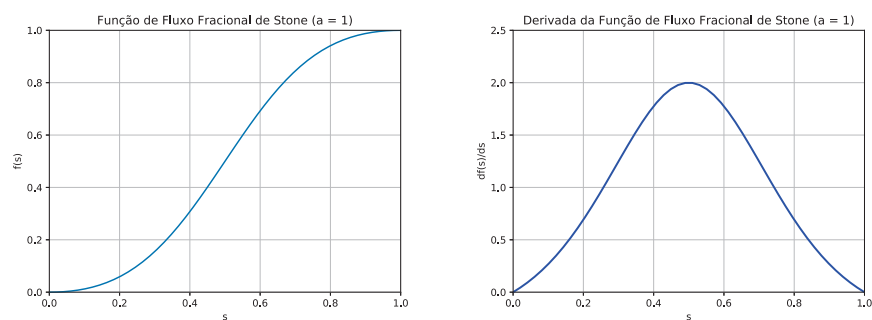
FIGURA 5.15 – Solução Clássica Descontínua - Método Lax-Wendroff com CFL = 1.5 para: a) $N = 50$, b) $N = 100$, c) $N = 500$, d) $N = 1000$



Fonte: Própria

Observa-se que, mesmo para a condição de CFL sendo atendida, o método de Lax-Wendroff não apresentou muitas oscilações próxima à região de choque. Dessa forma, após estudarmos as variações no CFL, bem como a quantidade de pontos na malha, realizamos experimentos computacionais considerando valores de a (razão entre as viscosidades) iguais a 1, 0.1, 0.01 e 0.001, apenas aplicando os métodos de Upwind e Lax-Friedrichs, por se apresentarem esquemas convergentes para a solução exata nas primeiras simulações. Assim, segue abaixo as demais simulações supracitadas, inclusive com variação do tempo da solução:

FIGURA 5.16 – Função de Fluxo e sua Derivada para $a = 1$



Fonte: Própria

FIGURA 5.17 – Soluções Numéricas (UPW + LXF) com $a = 1$

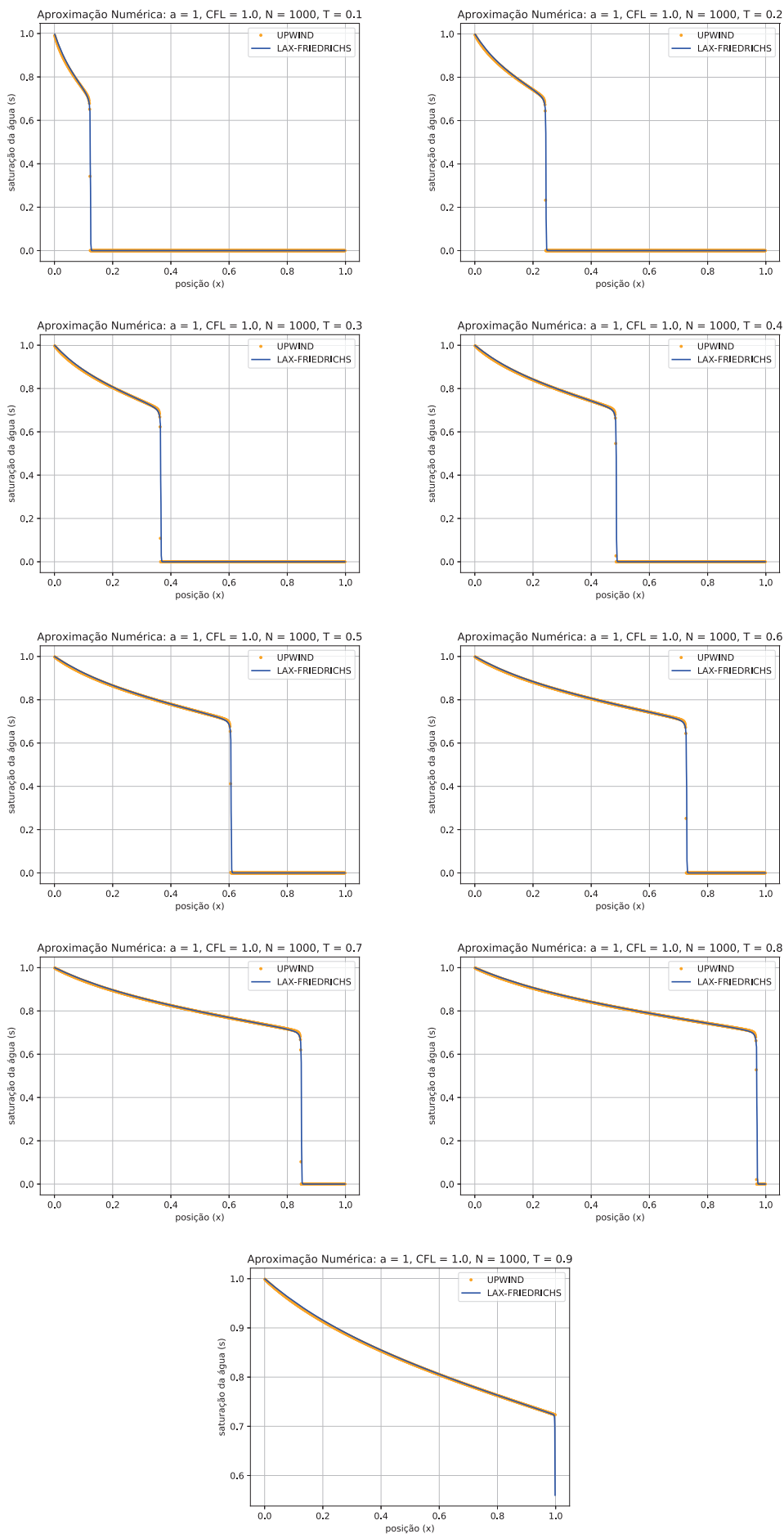
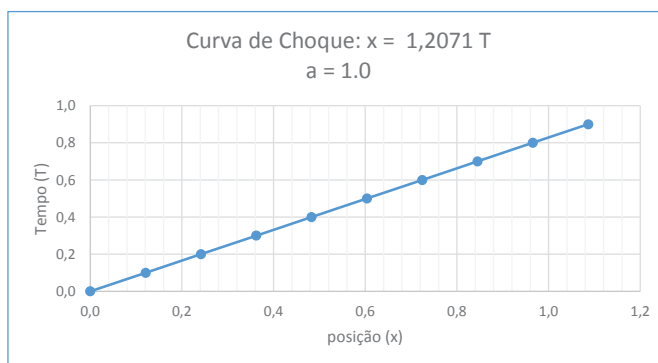


TABELA 5.1 – Tabela com $a = 1$ e T variando

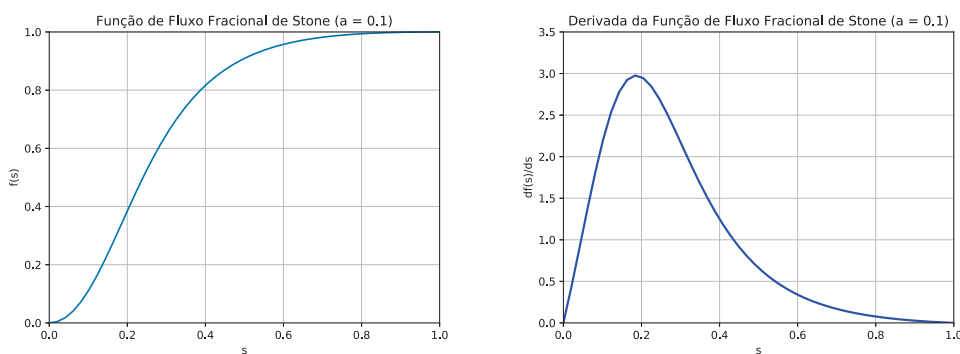
a	s^*	$f(s^*)$	$f'(s^*) = \frac{f(s^*)}{s^*}$	T	x
				0,0	0,0000
				0,1	0,1207
				0,2	0,2414
				0,3	0,3621
1,0	0,7071	0,8536	1,2071	0,4	0,4828
				0,5	0,6036
				0,6	0,7243
				0,7	0,8450
				0,8	0,9657
				0,9	1,0864

FIGURA 5.18 – Curva de Choque com $a = 1$



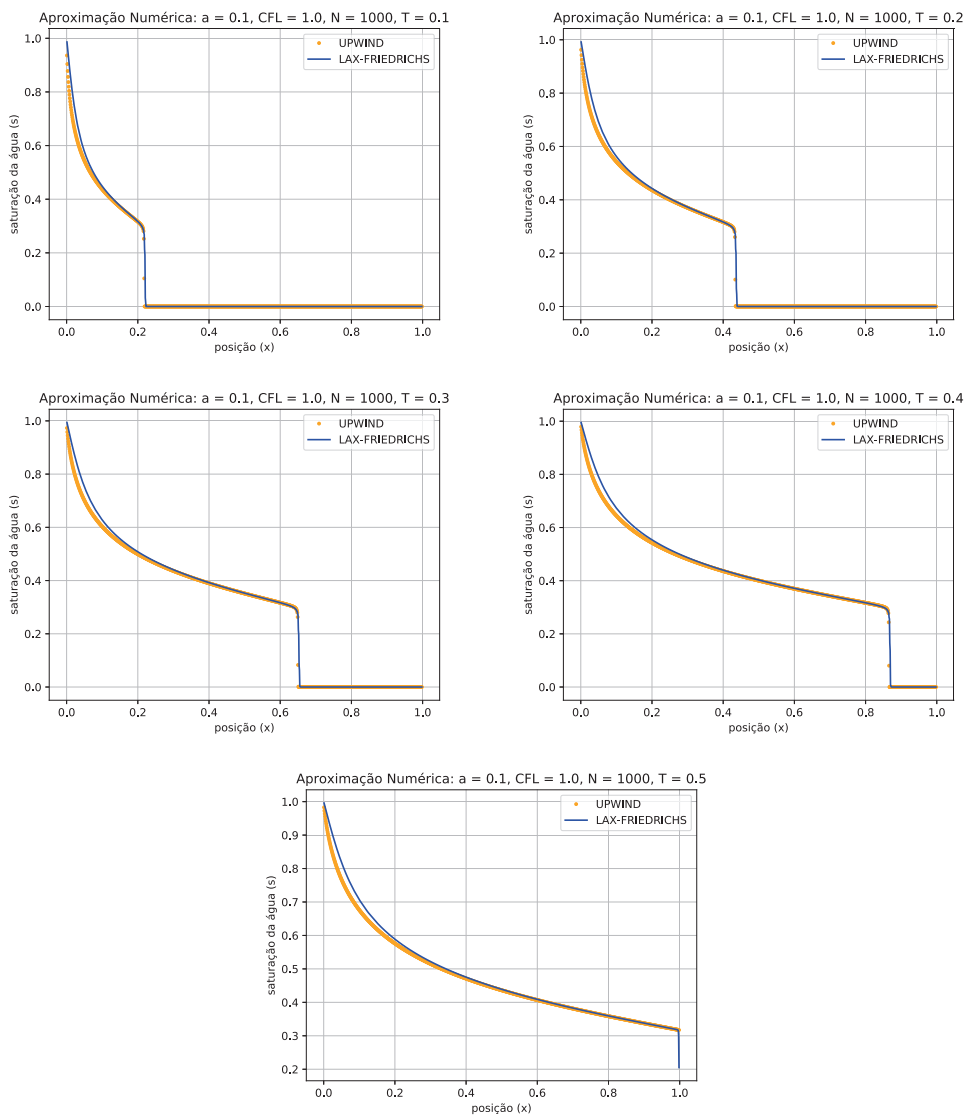
Fonte: Própria

FIGURA 5.19 – Função de Fluxo e sua Derivada para $a = 0.1$



Fonte: Própria

FIGURA 5.20 – Soluções Numéricas (UPW + LXF) com $a = 0.1$

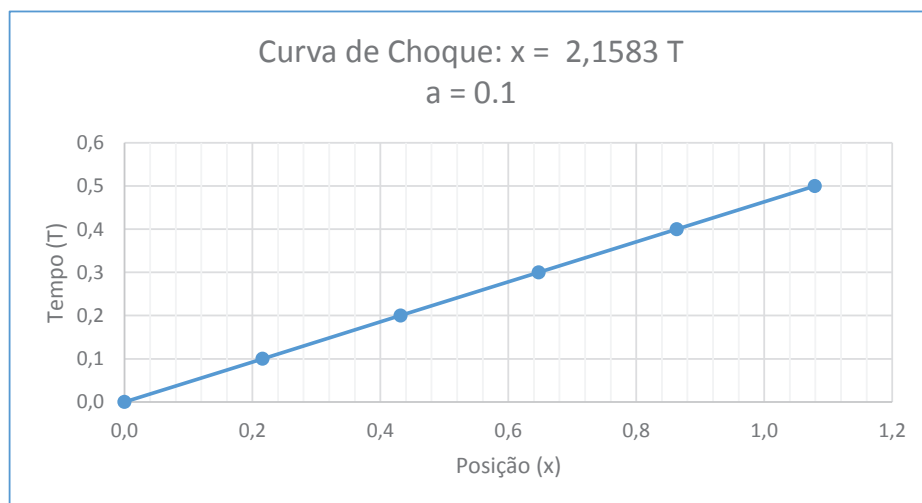


Fonte: Própria

TABELA 5.2 – Tabela com $a = 0.1$ e T variando

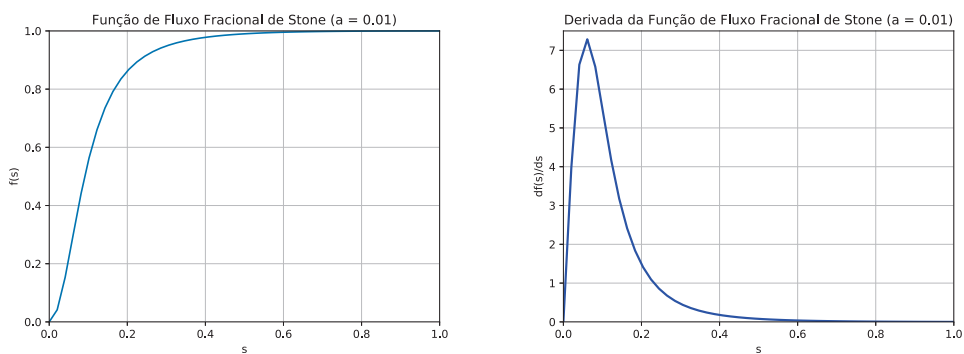
a	s^*	$f(s^*)$	$f'(s^*) = \frac{f(s^*)}{s^*}$	T	x
0,1	0,3015	0,6508	2,1583	0,0	0,0000
				0,1	0,2158
				0,2	0,4317
				0,3	0,6475
				0,4	0,8633
				0,5	1,0792

FIGURA 5.21 – Curva de Choque com $a = 0,1$



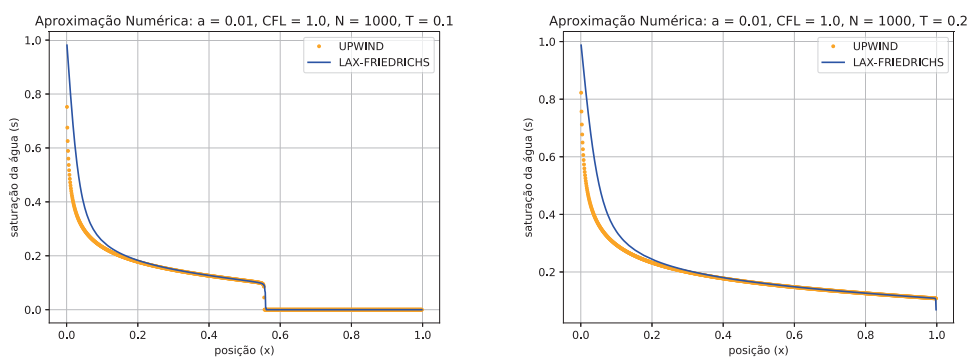
Fonte: Própria

FIGURA 5.22 – Função de Fluxo e sua Derivada para $a = 0.01$



Fonte: Própria

FIGURA 5.23 – Soluções Numéricas (UPW + LXF) com $a = 0.01$

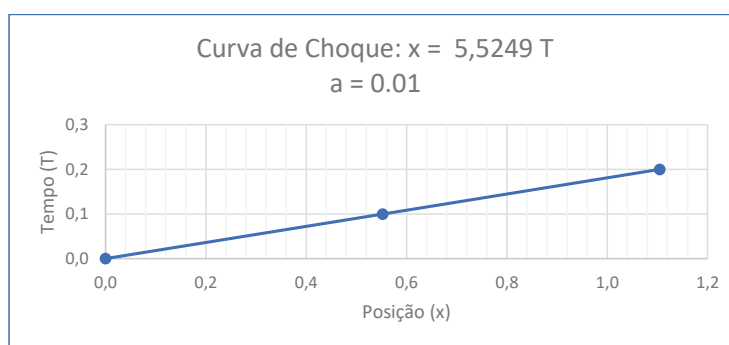


Fonte: Própria

TABELA 5.3 – Tabela com $a = 0.01$ e T variando

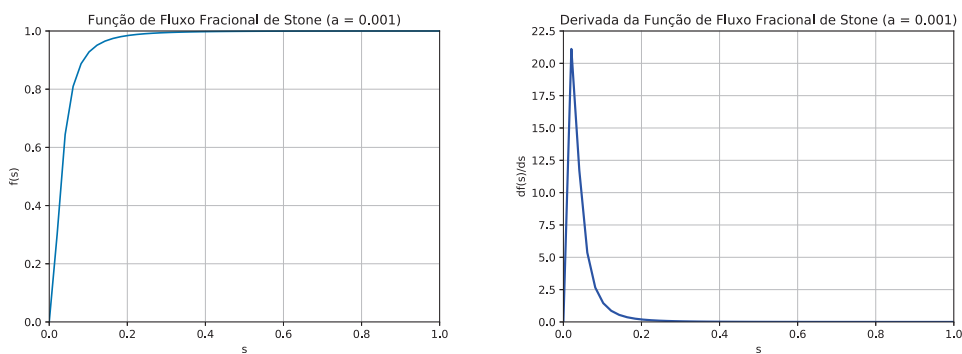
a	s^*	$f(s^*)$	$f'(s^*) = \frac{f(s^*)}{s^*}$	T	x
				0,0	0,0000
0,01	0,0995	0,5498	5,5249	0,1	0,5525
				0,2	1,1050

FIGURA 5.24 – Curva de Choque com $a = 0,01$



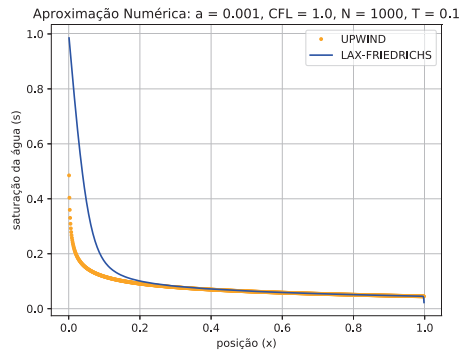
Fonte: Própria

FIGURA 5.25 – Função de Fluxo e sua Derivada para $a = 0.001$



Fonte: Própria

FIGURA 5.26 – Soluções Numéricas (UPW + LXF) com $a = 0.001$

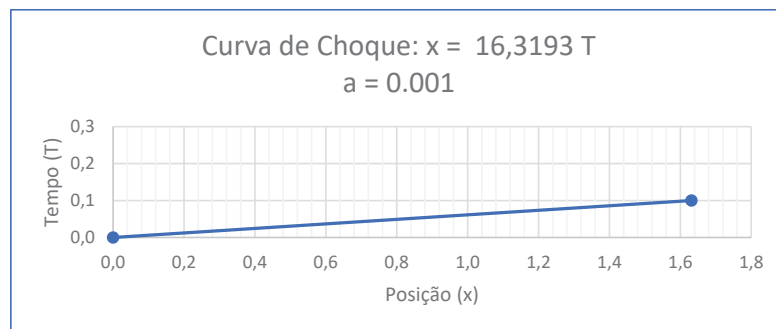


Fonte: Própria

TABELA 5.4 – Tabela com $a = 0.001$ e T variando

a	s^*	$f(s^*)$	$f'(s^*) = \frac{f(s^*)}{s^*}$	T	x
0,001	0,0316	0,5158	16,3193	0,0	0,0000
				0,1	1,6319

FIGURA 5.27 – Curva de Choque com $a = 0,001$



Fonte: Própria

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, vimos que grande parte do petróleo utilizado mundialmente é produzido por recuperação primária, através da própria diferença do gradiente de pressão, ou por recuperação secundária pela injeção de água em alguns poços para manutenção da pressão elevada, e conseqüente deslocamento do petróleo para poços produtores. Daí a importância de se estudar modelos matemáticos, mesmo para situações simplificadas, e desenvolver simuladores numéricos para poder prever a viabilidade de uso de um ou outro método de recuperação.

Nesse sentido, abordamos métodos de diferenças finitas para equações hiperbólicas de primeira ordem. Estudamos as propriedades de três métodos clássicos, Upwind, Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff e os exemplificamos através de testes numéricos com as simulações e os gráficos desenvolvidos no programa Python.

Fizemos um estudo dos métodos numéricos supracitados, onde apresentamos as condições de convergência desses esquemas e os valores de CFL para cada um deles. Resolvemos numericamente a Equação de Buckley-Leverett, com a condição CFL satisfeita em algumas situações e em outras não, onde constatamos que: quando a condição CFL é satisfeita com valor menor do que 1, os métodos UPW e LXF se aproximaram bem da solução exata do problema; quando a condição CFL é maior do que 1, maiores foram as oscilações que ocorreram em todos os métodos apresentados; quando CFL é exatamente igual a 1, então a solução numérica se aproximou mais da solução exata. É interessante notar que o esquema de Lax-Wendroff (LXW) não apresentou resultados favoráveis, mesmo sendo satisfeito a condição CFL e aumentando os números de pontos da malha.

Finalmente, sugerimos para a continuidade deste trabalho um estudo de convergência dos Métodos de Diferenças Finitas, assim como uma extensão para os Métodos dos Volumes Finitos e Elementos Finitos. Tais métodos podem ser aplicados à modelagens mais reais do problema de Buckley-Leverett, levando-se em consideração, por exemplo, o escoamento imiscível trifásico (água, óleo e gás), bem como a heterogeneidade do meio poroso.

Referências

- AMORIM, E. P. dos S. **Ajuste Automático de Histórico em Reservatórios de Petróleo Utilizando o Método TSVD**. 2009. Dissertação (Mestrado em Métodos Computacionais) — UFJF/MMC, Juiz de Fora, 2009.
- BARBOSA, N. M. **Resolução numérica de equações diferenciais parciais hiperbólicas não lineares: um estudo visando a recuperação de petróleo**. 2010. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) — Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2010.
- ESCHENAZI, C. S. **Leis de Conservação e Aplicações ao Tráfego nas Cidades**. 2011. Dissertação (1º Colóquio da Região Sudeste) — UFMG, Minas Gerais, 2011.
- FORTUNA, A. de O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações**. 3rd. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- FREEZE, R. A.; CHERRY, J. **Groundwater**. [S.l.]: Ed. Prentice Hall, 1979.
- KARLSEN, K. H.; LIE, K. A.; RISEBRO, N. H. **A Fast Marching Method for Reservoir Simulation**. 185-206 f. Dissertação (Mestrado) — Computational Geosciences, 2000.
- LABASTIE, A. Increasing recovery factors: a necessity. **Journal of petroleum technology**, 2011.
- LEVEQUE, R. J. **Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002.
- LIMA, G. H. de. **Modelagem e simulação numérica de escoamento sólido-fluido sobre meio poroso heterogêneo**. 2016. 36 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Tecnológica Federal Do Paraná, Curitiba, 2016.
- NAVEIRA, L. P. **Simulação de Reservatórios de Petróleo utilizando o Método de Elementos Finitos para Recuperação de Campos Maduros e Marginais**. 2007. 36 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2007.
- OLIVEIRA, D. **Técnicas de Otimização da Produção para Reservatórios de Petróleo - Abordagens Sem Uso de Derivadas para Alocação Dinâmicas das**

Vazões de Produção e Injeção. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal do Pernambuco, UFPE, 2006.

PEÇANHA, A. S. R. **Simulação de Escoamento Multifásico em Meios Porosos.** 2014. 125 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2014.

SANTOS, P. E. S.; ARAUJO, R. B.; LIMA, A. M. C.; SANTANA, A. P. **Métodos de Recuperação Secundária Convencionais.** v. 12. [S.l.]: Cadernos de Graduação, Ciências Exatas e Tecnológicas, 2010.

SCHUBERT, D. L. T. . G. **GeoDynamics.** 3rd. ed. Cambridge University: Press, 2002.

STEFFENS, L. M.; LIMA, R. R. de; TEZZA, F. B.; LANZMASTER, D. **Modelagem e Simulação Computacional em Reservatórios de Petróleo.** 2014. 36 f. Dissertação (Seminário de Iniciação Científica. 24º SIC UDESC) — Universidade do Estado de Santa Catarina, Santa Catarina, 2014.

TRISTÃO, D. S. de C. **Esquemas Centrais para Leis de Conservação em Meios Porosos.** 2013. Dissertação (Mestrado em Métodos Computacionais) — UFJF/MMC, Juiz de Fora, 2013.