



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO,
CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA**

**COORDENAÇÃO DO CURSO SUPERIOR DE
BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL**



ERIJOHNSON DA SILVA FERREIRA

**ANÁLISE DE PLACAS UTILIZANDO UM ELEMENTO SÓLIDO DE BAIXA
ORDEM ENRIQUECIDO COM MODOS INCOMPATÍVEIS**

Cajazeiras
2019

ERIJOHNSON DA SILVA FERREIRA

**ANÁLISE DE PLACAS UTILIZANDO UM ELEMENTO SÓLIDO DE BAIXA
ORDEM ENRIQUECIDO COM MODOS INCOMPATÍVEIS**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba-*Campus* Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Me. Sebastião Simão da Silva

Cajazeiras
2019

A ficha catalográfica deve ser inserida no verso da folha de rosto (2ª folha deste documento) e deve ser providenciada junto à Biblioteca.

Seção de Informação e Referência
Catalogação da Publicação na Fonte. IFPB / Nome da Biblioteca

X000x

Ferreira, Erijohnson da Silva.

Análise de placas utilizando um elemento de baixa ordem enriquecido com modos incompatíveis / Erijohnson da Silva Ferreira. – Cajazeiras, PB, 2019.

Orientador: Sebastião Simão da Silva.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Modos Incompatíveis. 3. Placas.

Erijohnson da Silva Ferreira

**ANÁLISE DE PLACAS UTILIZANDO UM ELEMENTO SÓLIDO DE BAIXA
ORDEM ENRIQUECIDO COM MODOS INCOMPATÍVEIS**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Coordenação do Curso de Bacharelado em
Engenharia Civil do Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba,
como parte dos requisitos para a obtenção do
Título de Bacharel em Engenharia Civil.

BANCA EXAMINADORA

(Sebastião Simão da Silva) – (IFPB – Campus Cajazeiras)
Orientador

(Jailton Ferreira Moreira) – (IFPB – Campus Cajazeiras)
Examinador 1

(José Lucas Pessoa de Oliveira) – (IFPB – Campus Cajazeiras)
Examinador 2

Cajazeiras, 17 de Abril de 2019.

Dedico este trabalho em especial a minha mãe, que me ensinou a ler antes de ir à escola. Ela foi, e continua sendo, a Partida e o Norte desta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Existem muitos motivos pelos quais agradecer. E graças a Deus, muitas pessoas a quem posso dar graças por ter chegado até aqui. A caminhada não foi nenhum pouco fácil, mas sem o encorajamento da minha família, o apoio dos meus amigos e a dedicação do meu orientador eu tenho certeza de que não conseguiria. Agradeço à minha mãe, minha amiga e pessoa que me motiva todos os dias a permanecer acreditando na vida, nas pessoas e em Deus. Agradeço ao meu orientador e mestre Prof. Sebastião Simão, que tem me dado suporte desde o início da minha graduação. Sua dedicação, integridade, responsabilidade e apreço pelas pessoas me fazem admirar além do profissional, na esfera do que realmente importa, o “ser” humano. Agradeço a amigos que fiz durante a minha graduação. Amanda, Milena, Jéssica, Werley, Lucas, dentre outros. Sem vocês tudo seria muito menos divertido. Em especial a um irmão que encontrei na engenharia, Victor. Parceiro de todos os momentos de sofrimento e alegria que esses 5 anos de curso nos proporcionaram. Sou muito feliz de levar sua amizade para a vida. Aos meus queridos professores com os quais pude aprender um pouco do universo do que é a engenharia. E a Deus por tudo e todos.

RESUMO

Este trabalho propõe-se a estudar os esforços em placas, de características de geometria e carregamentos diversos através da implementação computacional de um elemento finito sólido hexaédrico de 8 nós implementado com uma linguagem computacional de alto nível. Este elemento é aprimorado através do método dos modos incompatíveis, que tem por finalidade melhorar o desempenho do elemento em situações de esforços multiaxiais, comumente presentes em placas. A metodologia de criação do código e execução das análises é discutida. Então, são feitas análises comparativas através de exemplos numéricos de placas, com o propósito de estudar o desempenho do algoritmo desenvolvido e comparar seus resultados com os valores finais de análises feitas por outros autores, através de métodos teóricos e obtidos pela modelagem das placas em software comercial. As análises se dão no âmbito estático, linear e elástico. Verifica-se que o enriquecimento do elemento sólido hexaédrico de oito nós, de baixa ordem, melhora significativamente seu desempenho em análises de placas, o tornando uma alternativa viável para a aplicação. Atesta-se o bom desempenho do algoritmo desenvolvido, por meio da comparação de seus resultados com aqueles obtidos via software comercial.

Palavras-Chave: Método dos Elementos Finitos; Modos Incompatíveis; Placas; Estruturas.

ABSTRACT

The work proposes to study the efforts in plates, geometry characteristics and diverse loads through the computational implementation of an 8-node hexahedral solid finite element implemented with a high-level computational language. This element is improved through the method of incompatible modes, which aims to improve the performance of the element in situations of multiaxial stress, commonly present on boards. The methodology of code creation and execution of the analyzes is discussed. Then, comparative analyzes are done through numerical examples of plates, with the purpose of studying the performance of the developed algorithm and comparing its results with the final values of analyzes made by other authors, through theoretical methods and obtained by the modeling of the plates in commercial software. The analyzes take place in the static, linear and elastic range. It has been found that the enrichment of the low-order eight-node hexahedral solid element significantly improves its performance in plate analyzes, making it a viable alternative to the application. The good performance of the developed algorithm is tested by comparing its results with those obtained through commercial software.

Keywords: Finite Element Method; Incompatible Modes; Plates; Structures.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Tipos de elementos Finitos	17
Figura 2 - Elemento sólido Hexaédrico de 8 nós. a) elemento sólido hexaédrico de 8 nós; b) elemento sólido hexaédrico de 8 nós mediante a transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas naturais.....	19
Figura 3 - Viga engastada discretizada com elementos sólidos	26
Figura 4 - Graus de liberdade de um nó	28
Figura 5 - Posição das cargas atuantes sobre a viga.....	28
Figura 6 - Carga de superfície sobre viga.....	29
Figura 7 - Modelagem via ABAQUS® a) condições de contorno e carga; b) malha discretizada; c) arquivo .INP com informações acerca da malha (“mapa da análise”).....	31
Figura 8 - Fluxograma de pré-processamento e entrada de dados	32
Figura 9 - Fluxograma para cálculo da matriz de rigidez global da estrutura.....	33
Figura 10 - Fluxograma para cálculo dos deslocamentos e reações.....	34
Figura 11 - Fluxograma para cálculo das forças, tensões e deformações da estrutura.....	35
Figura 12 - Placa quadrada engastada em suas 4 bordas com carga pontual central	37
Figura 13 - Gráfico de deslocamentos versus número de elementos para os valores obtidos por Silva & Silva (2017), ABAQUS®, SolidAnalisys (H8), SolidAnalisys (H8INCOMP) e Valor Teórico.....	38
Figura 14 - Gradiente de deslocamentos para a) malha Ne = 4 (2x2x1); b) malha Ne = 16 (4x4x1); c) malha Ne = 64 (8x8x1); d) malha Ne = 256 (16x16x1).	40
Figura 15 - Tensão normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos.....	41
Figura 16 - Gradiente de tensões normais σ_{xx} para a) malha Ne = 4 (2x2x1); b) malha Ne = 16 (4x4x1); c) malha Ne = 64 (8x8x1); d) malha Ne = 256 (16x16x1).	41
Figura 17 - Deformação normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos	42
Figura 18 - Gradiente de deformações normais ϵ_{xx} para a) malha Ne = 4 (2x2x1); b) malha Ne = 16 (4x4x1); c) malha Ne = 64 (8x8x1); d) malha Ne = 256 (16x16x1).	43
Figura 19 - Placa retangular em balanço submetida a carga pontual em uma de suas arestas .	44
Figura 20 - Gráfico de deslocamentos versus número de elementos para os valores obtidos via ABAQUS® e SolidAnalisys (H8INCOMP)	44

Figura 21 - Gradiente de deslocamentos para a) malha Ne = 12 (3x4x1); b) malha Ne = 48 (6x8x1); c) malha Ne = 192 (12x16x1);.....	45
Figura 22 - Tensão normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos.....	46
Figura 23 - Gradiente de tensões normais σ_{xx} para a) malha Ne = 12 (3x4x1); b) malha Ne = 48 (6x8x1); c) malha Ne = 192 (12x16x1);.....	46
Figura 24 - Deformação normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos	47
Figura 25 - Gradiente de deformações normais ϵ_{xx} para a) malha Ne = 12 (3x4x1); b) malha Ne = 48 (6x8x1); c) malha Ne = 192 (12x16x1);.....	47
Figura 26 - Placa circular engastada submetida a carga pontual central	48
Figura 27 - Gráfico de deslocamentos versus número de elementos para os valores obtidos via ABAQUS® e SolidAnalisys (H8INCOMP)	49
Figura 28 - Gradiente de deslocamentos para a) malha Ne = 24; b) malha Ne = 48; c) malha Ne = 192;	50
Figura 29 - Tensão normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos.....	51
Figura 30 - Gradiente de tensões normais σ_{xx} para a) malha Ne = 24; b) malha Ne = 192; c) malha Ne = 432;	51
Figura 31 - Deformação normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos	52
Figura 32 - Gradiente de deformações normais ϵ_{xx} para a) malha Ne = 24; b) malha Ne = 48; c) malha Ne = 192;	52
Figura 33 - Placa quadrada engastada em suas 4 bordas submetida a carga distribuída uniforme	53
Figura 34 - Gradiente de deslocamentos para a) malha Ne = 4; b) malha Ne = 16; c) malha Ne = 64; d) malha Ne = 256;.....	54
Figura 35 - Tensão normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos.....	55
Figura 36 - Gradiente de tensões normais σ_{xx} para a) malha Ne = 4 (2x2x1); b) malha Ne = 16 (4x4x1); c) malha Ne = 64 (8x8x1); d) malha Ne = 256 (16x16x1).	56
Figura 37 - Deformação normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos	57
Figura 38 - Gradiente de deformações normais ϵ_{xx} para a) malha Ne = 4 (2x2x1); b) malha Ne = 16 (4x4x1); c) malha Ne = 64 (8x8x1); d) malha Ne = 256 (16x16x1).	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Coordenadas nodais de uma viga de dimensão 3x0.2x0.2 com $N_e = 3$	27
Tabela 2 - Conectividades nodais de uma viga de dimensão 3x0.2x0.2 com $N_e = 3$	27
Tabela 3 - Cargas nodais equivalentes para a viga sobre a qual atua carga de superfície de 1000 N/m ³	30
Tabela 4 - Valor dos deslocamentos (mm)	38
Tabela 5 - Valor de tensões normais σ_{xx} para o ponto de Gauss de referência	40
Tabela 6 - Valor de deformações normais ϵ_{xx} para o ponto de Gauss de referência	42
Tabela 7 - Valor dos deslocamentos	44
Tabela 8 - Valor de tensões normais σ_{xx} para o ponto de Gauss de referência	45
Tabela 9 - Valor de deformações normais ϵ_{xx} para o ponto de Gauss de referência	47
Tabela 10 - Valor dos deslocamentos	49
Tabela 11 - Valor de tensões normais σ_{xx} para o ponto de Gauss de referência	50
Tabela 12 - Valor de deformações normais ϵ_{xx} para o ponto de Gauss de referência	52
Tabela 13 - Valor dos deslocamentos	54
Tabela 14 - Valor de tensões normais σ_{xx} para o ponto de Gauss de referência	55
Tabela 15 - Valor de deformações normais ϵ_{xx} para o ponto de Gauss de referência	56

LISTA DE ABREVIATURAS

MEF – Método dos Elementos Finitos

CAE – *Computer-Aided Enginnering*

SUMÁRIO

RESUMO.....	3
ABSTRACT	4
LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	5
LISTA DE TABELAS	7
LISTA DE ABREVIATURAS.....	8
SUMÁRIO.....	9
1 INTRODUÇÃO	11
2 OBJETIVOS	13
2.1 OBJETIVOS GERAIS	13
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	13
3 REVISÃO DE LITERATURA.....	14
3.1 MÉTODOS ANALÍTICOS DE RESOLUÇÃO DE PLACAS.....	15
3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	16
3.2.1 Formulação do elemento hexaédrico de oito nós padrão	18
3.2.2 Formulação para modos incompatíveis	22
4 METODOLOGIAS EMPREGADAS	26
4.1 PROCESSOS DE DISCRETIZAÇÃO.....	26
4.2 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO	32
4.3 OBTENÇÃO DE RESULTADOS	36
5 ANÁLISE DE PLACAS.....	37
5.1 PLACA RETANGULAR ENGASTADA EM TODAS AS SUAS BORDAS COM CARGA CONCENTRADA CENTRAL	37
5.2 PLACA RETANGULAR EM BALANÇO SUBMETIDA A CARGA PONTUAL EM UMA DE SUAS ARESTAS	43

5.3 PLACA CIRCULAR ENGASTADA SUBMETIDA A CARGA PONTUAL CENTRAL	48
5.4 PLACA QUADRADA ENGASTADA EM SUAS 4 BORDAS SUBMETIDA A CARGA DISTRIBUÍDA UNIFORME.....	53
6 CONCLUSÃO.....	59
REFERÊNCIAS	61
APÊNDICE A – RESULTADOS COMPLETOS PARA O EXEMPLO NUMÉRICO	
4.1.3 (MALHA NE = 48)	62
APÊNDICE B – DADOS DA MALHA NE = 4, EXEMPLO 4.1.1	69

1 INTRODUÇÃO

As placas são estruturas comumente vistas em aplicações na Engenharia, desde chapas, empregadas na estrutura de máquinas, a lajes, elemento estrutural de grande importância na construção civil. Existem diversas aplicações que fazem uso de placas das mais diversas geometrias, submetidas a variadas configurações de carregamento.

São definidas como estruturas nas quais uma de suas dimensões (espessura) é muito menor que as outras (largura e comprimento). Dessa forma, uma placa pode ser vista como uma estrutura de caráter bidimensional, também referidas como estruturas de superfície.

As placas requerem soluções analíticas complexas para a obtenção de seus esforços solicitantes, essenciais para seu posterior dimensionamento, com emprego de equações diferenciais e soluções via séries, como a Solução de Navier ou Solução de Levy, entre outros métodos. A complexidade da solução analítica varia de acordo com a complexidade geométrica da placa, bem como de suas condições de contorno. Considerando que a solução analítica de placas com condições de carregamento e contorno simples já apresenta elevado grau de complexidade, a análise de placas submetidas a condições menos comuns pode se tornar ainda mais complicado.

No caso das lajes existem formas de resolução simplificadas com o auxílio de tabelas com o objetivo de facilitar a obtenção dos esforços solicitantes, o que permite ao engenheiro ter praticidade no dimensionamento dessas estruturas, desde que as mesmas estejam de acordo com os parâmetros de dimensão e condições de contorno pré-estabelecidos pelas tabelas do método em questão. Nesta classe, se encaixam os métodos de Marcus e Czerny, que fornecem parâmetros pré-calculados que permitem a obtenção de momentos e reações de acordo com a configuração das lajes. Entretanto, é importante ressaltar que em situações cujas condições da laje não estejam contempladas entre as opções pré-estabelecidas nas tabelas, torna-se impossível a utilização destes métodos simplificados para a obtenção do estado de esforços da laje.

Em casos onde métodos simplificados não podem ser aplicados restam duas opções: a complexa solução analítica ou a aplicação de métodos numéricos. Estes últimos fornecem uma solução aproximada para a análise estrutural, e são, geralmente, a melhor alternativa quando se precisa obter resultados detalhados. Dentre eles o principal tratado neste trabalho é o Método dos Elementos Finitos (MEF), que possui ampla aplicação na análise de estruturas de diferentes tipos, incluindo placas. Seu conceito consiste na discretização do domínio da

estrutura em elementos, resultando na composição de uma malha de elementos finitos. Os elementos presentes na malha interagem entre si através de seus nós, quando a estrutura é submetida a uma condição de carregamento. A interação dos elementos resulta em uma análise numérica que retorna resultados aproximados para a condição geométrica e de carregamento submetida. Desta forma, o MEF é um método numérico que entrega resultados que se aproximam das soluções obtidas através dos métodos analíticos, sendo possível obter um grande volume de informações acerca do estado de carregamento interno da estrutura.

A proposta deste trabalho é a aplicação do elemento sólido hexaédrico enriquecido com modos incompatíveis na análise de placas no âmbito linear e elástico, demonstrando sua eficácia para este tipo de aplicação. De acordo com a NBR 6118 (item 14.5.2) os resultados da análise linear são usualmente empregados para a verificação de estados limites de serviço de estruturas, sendo possível estender os resultados para verificação de estado limite último.

Para o projeto foi desenvolvido um algoritmo próprio denominado *SolidAnalisis* capaz de obter a resposta da análise estrutural linear de placas através do uso do elemento sólido hexaédrico padrão e sua versão acrescida de modos incompatíveis, utilizando linguagem de programação MATLAB®. Os processos metodológicos de construção da rotina e obtenção de resultados são discutidos. Como dados de saída da análise temos deslocamentos, reações, tensões, deformações e forças internas.

É feita a análise de exemplos numéricos de placas e seus resultados são comparados com aqueles obtidos através de modelagem CAE executada no software comercial ABAQUS®, que utiliza o MEF como método resolutivo em suas análises, fazendo uso do elemento C3D8I da biblioteca do software, também dotado de modos incompatíveis em sua formulação. Através do ABAQUS® são geradas as representações de deslocamentos, deformações e tensões em gradiente de cores. Os resultados de outros autores também são utilizados como comparativos quando disponíveis.

O capítulo 2 deste trabalho traz uma revisão bibliográfica que aborda brevemente acerca de placas e seus métodos resolutivos, e apresenta a fundamentação teórica referente ao Método dos Elementos Finitos. Posteriormente, no capítulo 3 é descrito o processo metodológico aplicado para o desenvolvimento do trabalho, acerca da rotina criada para execução das análises. O capítulo 4 apresenta casos numéricos de placas, estes são analisados através da rotina desenvolvida, tendo seus resultados comparados e discutidos. Por fim, o capítulo 5 aborda as considerações finais acerca do trabalho, seus métodos e sugestões para futuros trabalhos envolvendo a temática.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVOS GERAIS

- Implementar computacionalmente o elemento sólido hexaédrico padrão de oito nós e sua versão melhorada com modos incompatíveis na linguagem computacional de alto nível MATLAB®;
- Analisar placas no âmbito linear-elástico utilizando o elemento sólido hexaédrico de oito nós com modos incompatíveis e comparar os resultados com aqueles obtidos através da modelagem computacional em software comercial ABAQUS ®;

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Representar graficamente os estados de esforços internos solicitantes provenientes da análise computacional via ABAQUS®;
- Verificar a performance do elemento sólido hexaédrico enriquecido com modos incompatíveis para a análise de placas;

3 REVISÃO DE LITERATURA

As placas são estruturas de caráter bidimensional constituídas por dois planos paralelos entre si separados por uma espessura, com um plano equidistante a estes denominado de plano médio da placa. De acordo com a NBR 6118 (item 14.4.2.1) as placas são elementos de superfície plana sujeitos a ações normais ao seu plano, sendo as placas de concreto são usualmente denominadas lajes. Segunda a mesma norma (item 14.4.2), as placas são designadas como elementos de superfície, nos quais uma dimensão (espessura) é relativamente pequena em face das demais.

De acordo com Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), as placas podem ser classificadas como:

- a) Placas finas com pequenas deflexões:
 - Se a deflexão é pequena em relação a sua espessura;
- b) Placas finas com grandes deflexões:
 - As deflexões não são pequenas, logo devem ser consideradas no processo de derivação da equação diferencial das placas. Desta forma, obtém-se equações não lineares e a solução dos problemas se torna mais complicada;
- c) Placas espessas:
 - Quando a espessura é considerável. A teoria das placas espessas deve ser aplicada e, esta teoria, considera o problema das placas como de elasticidade tridimensional.

Existem diversas configurações de condições de contorno presentes nas diversas aplicações de placas. Estas podem estar apoiadas em suas bordas, engastadas em suas bordas e todas as diferentes combinações possíveis das duas condições anteriores. Ainda sobre as condições de contorno, as placas podem estar em balanço ao ser engastadas em uma (ou mais) de suas bordas, sendo as outras livres, ou ter, ao mesmo tempo, bordas engastadas, livres e apoiadas.

3.1 MÉTODOS ANALÍTICOS DE RESOLUÇÃO DE PLACAS

A teoria clássica para placas finas desenvolvida por Lagrange (1811), leva em consideração as hipóteses de Kirchhoff, consideradas para a dedução da equação diferencial governante da placa em termos de suas deflexões transversais $W(x,y)$. Segundo Ramos, Real e Isoldi (2018) as hipóteses são: o material da placa é homogêneo, isotrópico e linear-elástico; a placa é inicialmente reta; o plano médio da placa não sofre deformação durante a flexão; a menor dimensão lateral da placa é no mínimo dez vezes maior que a sua espessura t ; deflexões transversais $W(x,y)$ da placa são pequenas se comparadas com sua espessura t ; as inclinações do plano médio da placa (rotações) são pequenas quando comparadas com a unidade; as seções planas e normais ao plano médio da placa antes da deformação permanecem planas e normais ao plano.

Tendo em vista as equações de equilíbrio da peça, as relações entre deslocamentos e deformações e as leis constitutivas do material pode-se obter a equação fundamental de Lagrange, que rege o problema de deflexão de placas (SIMONIAN, 2009). Esta equação é dada por:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (1)$$

É importante salientar que em considerável parte dos casos não é possível determinar uma solução exata para a equação (1), desta forma o uso de métodos numéricos é essencial para obtenção de resultados.

Outros métodos simplificados são empregados na análise de placas, dentre eles os mais difundidos são aqueles utilizados para o cálculo de lajes, que nada mais são do que placas de concreto. Os métodos de Marcus e Qzerny apresentam tabelas com valores fixados para o cálculo de esforços solicitantes em placas, a fim de possibilitar o dimensionamento dessas estruturas de maneira facilitada. Isso se faz bastante prático para casos onde a estrutura tem sua geometria dentro dos parâmetros pré-estabelecidos pelo método. Entretanto para situações de placas menos convencionais, soluções simplificadas se mostram incapazes de retornar uma solução.

3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O MEF teve seu desenvolvimento paralelo à difusão dos computadores, tendo seu surgimento datado para a década de 60. Por se tratar de um método que exige uma quantidade consideravelmente grande de cálculos simultâneos envolvendo matrizes, este se torna praticamente inviável de se resolver manualmente, dado volume de dados. Segundo Simonian (2009) o MEF possibilita a solução de equações diferenciais e sua abrangência é bastante ampla, cobrindo desde a análise de vibração simples de uma estrutura até os geradores nucleares, passando por diversas áreas. De acordo com Souza (2003):

As primeiras aplicações do MEF foram em problemas de engenharia estrutural, mais especificamente, sobre análise de tensões. Neste tipo de problema, busca-se determinar as tensões, deformações e deslocamentos em um corpo sólido sujeito a determinadas ações tais como cargas (forças aplicadas) e recalques (deslocamentos impostos). Exemplos de tais aplicações compreendem o estudo do comportamento de estruturas civis, tais como edifícios, pontes, barragens, e túneis, onde os elementos finitos são utilizados na discretização de vigas, lajes, treliças, paredes, fundações, etc. O estudo de análise de tensões também é importante em outras áreas da engenharia, tais como engenharia mecânica, naval, aeronáutica, aeroespacial, onde são necessários análises das estruturas e peças mecânicas de máquinas, automóveis, caminhões, navios, aviões, espaçonaves, etc. Dentro da área de mecânica dos sólidos, podem ser realizadas: análise estática, análise modal (problemas de autovalor e auto-vetor, para estudo de vibrações e instabilidade estrutural), e análise dinâmica.

(SOUZA, 2003)

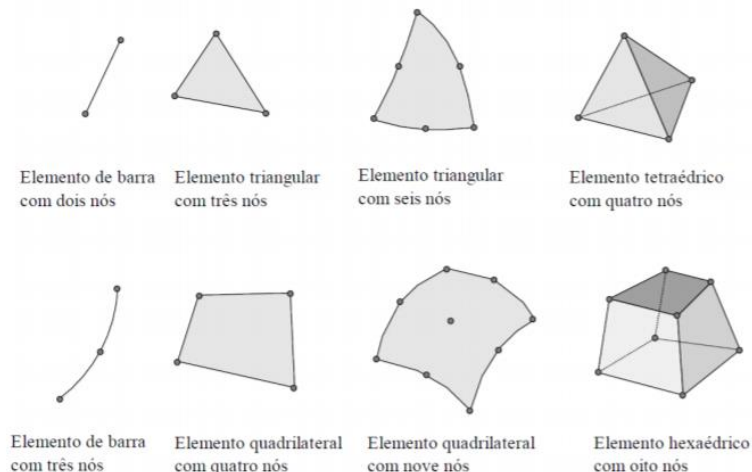
Assim, o método tem aplicabilidade em parte considerável dos problemas da Física e Engenharia, através da discretização dos domínios dos problemas em partes menores e de mais fácil resolução, os elementos. Desta forma o método executa uma emulação do que, de fato é, o mundo físico: a união de pequenos elementos (partículas fundamentais, átomos, moléculas e etc.) que estão unidas e interagem entre si formando um meio físico (matéria). Nesta conjectura se encontra a explicação para o nome do método, enquanto a matéria em si é dita como um composto de partículas virtualmente infinitas, é necessário estabelecer um número finito de elementos para que seja possível reproduzir o comportamento físico de um

objeto computacionalmente, considerando o poder de processamento da máquina e o tempo necessário para que a análise ocorra.

As interações entre os elementos se dão através dos nós que os compõe, sua geometria é definida pela posição dos mesmos em relação a um eixo de coordenadas definido e sua formulação é designada através das funções que interpolam os dados de seus nós e pontos de integração. A qualidade da análise via MEF está diretamente relacionada a dois fatores: o tipo de elemento utilizado na análise e a qualidade da malha gerada.

Há diversos tipos de elementos disponíveis a serem empregados em uma análise via MEF, sua utilização depende da geometria da estrutura a ser analisada. Dentre eles pode-se citar elementos unidimensionais como barra e viga, elementos bidimensionais como o elemento quadrilátero, e elementos tridimensionais como hexaédrico (a ser utilizado neste trabalho) e tetraédrico.

Figura 1 - Tipos de elementos Finitos



Fonte: Souza, 2003

Outro aspecto importante quando levamos em consideração o tipo de elemento para a análise é sua formulação. Elementos com uma maior quantidade de nós ou que têm em sua formulação a aplicação de alguma tecnologia de melhoramento apresentam resultados melhores dependendo do tipo de análise.

A qualidade da malha gerada é o segundo fator que implica diretamente na acurácia dos resultados. Uma malha com maior quantidade de elementos retorna resultados melhores, entretanto a um custo computacional mais elevado. Isto, aliado ao uso de elementos de ordem superior pode aumentar o custo computacional exponencialmente (SILVA & SILVA, 2017). Desta forma a geração da malha para a análise requer a escolha inteligente do tipo de

elemento (ou elementos) a ser utilizado e sua quantidade, que pode variar em pontos específicos da estrutura de acordo com a demanda de qualidade de resultados para estas áreas.

Grande parte dos softwares CAE (Computer-Aided Engineering – Software de Engenharia Auxiliada por Computador) utiliza o método dos elementos finitos como base, tendo algumas diferenças entre si, resultado de sua otimização para uma aplicação específica. Dentre eles podemos citar alguns exemplos.

- O ANSYS® é um software que executa análises em âmbito generalista, indo de análises estruturais a dinâmica dos fluidos;
- O MSC Nastran® executa análises com otimização para análise de fadigas;
- O SIMULIA® apresenta funções aprimoradas para análises dinâmicas, voltadas a situações de impacto;
- O Moldflow® apresenta soluções otimizadas para processos de moldes de injeção plástica;

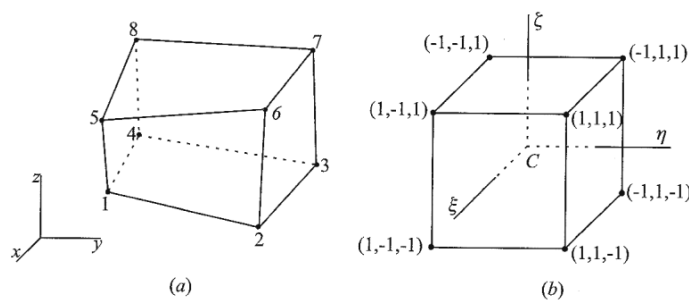
Dentre as opções disponíveis o software ABAQUS® foi escolhido para a modelagem dos exemplos numéricos deste trabalho, com a finalidade de comparar os resultados no software com aqueles obtidos através da modelagem no algoritmo próprio desenvolvido (*SolidAnalisys*). De acordo com Cunha (2005) o ABAQUS® é pré e pós-processador. Como pré-processador, gera o arquivo de entrada de dados que contém a geometria, propriedades do material, condições de contorno, carregamento aplicado e a malha de elementos finitos definidos pelo usuário. O programa ainda permite que o arquivo de entrada de dados seja alterado manualmente pelo usuário. Como pós-processador, o ABAQUS® possibilita a visualização gráfica dos resultados.

3.2.1 Formulação do elemento hexaédrico de oito nós padrão

O elemento sólido hexaédrico é caracterizado como trilinear tendo, portanto, geometria tridimensional. Em sua aplicação para este trabalho optou-se por utilizar um elemento sólido de 8 nós, localizados em cada um de seus vértices. Essa quantidade é consideravelmente baixa em relação a outros tipos de elemento, por isso ele é considerado um elemento de baixa ordem. Elementos deste tipo apresentam número de nós pequeno em sua formulação padrão, ao contrário de elementos de alta ordem, que apresentam um número de

nós elevado. Este elemento é mapeado para um hexaedro através do uso de coordenadas naturais ξ , η , e μ , o que pode ser visto na figura (2) a seguir, portanto apresenta funções de forma em termos deste sistema (KATTAN, 2008). Estas funções são lineares, portanto o elemento padrão apresenta maior rigidez quanto a representação de estados de carregamento flexionais. Para isto a inserção de modos incompatíveis melhora significativamente seu desempenho pela natureza quadrática de suas funções interpoladoras adicionais (SILVA & SILVA, 2017).

Figura 2 - Elemento sólido Hexaédrico de 8 nós. a) elemento sólido hexaédrico de 8 nós; b) elemento sólido hexaédrico de 8 nós mediante a transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas naturais



Fonte: Vázquez & López, 2001

As funções de deslocamento para um elemento isoparamétrico são dadas por,

$$u(x, y, z) = \sum N_i(\xi, \eta, \mu)u_i \quad (2a)$$

$$v(x, y, z) = \sum N_i(\xi, \eta, \mu)v_i \quad (2b)$$

$$w(x, y, z) = \sum N_i(\xi, \eta, \mu)w_i \quad (2c)$$

onde ξ , η e μ são as coordenadas para os eixos naturais. As coordenadas cartesianas em qualquer ponto do elemento são:

$$x = \sum N_i(\xi, \eta, \mu)x_i \quad (3a)$$

$$y = \sum N_i(\xi, \eta, \mu)y_i \quad (3b)$$

$$z = \sum N_i(\xi, \eta, \mu)z_i \quad (3c)$$

e suas funções de forma, também conhecidas como funções de interpolação são dadas por,

$$N_1 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \mu) \quad (4a)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \mu) \quad (4b)$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \mu) \quad (4c)$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \mu) \quad (4d)$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \mu) \quad (4e)$$

$$N_6 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \mu) \quad (4f)$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \mu) \quad (4g)$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \mu) \quad (4h)$$

O Jacobiano do elemento é expresso pela matriz,

$$[J_e] = \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix} \quad (5)$$

assim, a matriz de deformação do elemento é,

$$[B_e] = [I^\alpha][J_e^{-1}][\partial N^\alpha] \quad (6)$$

expressa de maneira explícita, como sendo

$$[B_e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{vmatrix} \quad (7)$$

temos que a matriz constitutiva para 3 dimensões [D], levando em consideração as características do material, o módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν é,

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Dito isto, a matriz de rigidez do elemento sólido hexaédrico de 8 nós é dada por,

$$[K_e] = \iiint_{-1-1-1}^{111} [B_e]^T [D] [B_e] \det(J) d\xi d\eta d\mu \quad (9)$$

Assim, pode-se calcular os deslocamentos da estrutura, onde

$$\{F\} = [K] \cdot \{U\} \quad (10)$$

sendo $\{F\}$ é o vetor contendo as forças internas em cada um dos graus de liberdade dos nós da estrutura (3 graus de liberdade por nó para o elemento hexaédrico), $\{K\}$ é a matriz de rigidez global da estrutura e $\{U\}$ é o vetor de deslocamentos dos graus de liberdade nodais.

As deformações (11a) e tensões (11b) compatíveis na estrutura são calculados através das equações,

$$[\varepsilon] = [B] \cdot \{U\} \quad (11a)$$

$$[\sigma] = [D] \cdot [\varepsilon] \quad (11b)$$

sendo o resultado da equação, seis componentes de tensão (12a) e seis componentes de deformação (12b) por ponto de integração do elemento,

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{zx}] \quad (12a)$$

$$[\sigma] = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}] \quad (12b)$$

Por fim, as forças nodais internas, por nó e por elemento, são dadas pela integral:

$$U = \int_V [B^T][\sigma]dV \quad (13)$$

3.2.2 Formulação para modos incompatíveis

A tecnologia de modos incompatíveis consiste na inserção de um campo de deslocamentos adicionais à formulação padrão do elemento sólido hexaédrico convencional. Para a aplicação em placas isto se faz necessário porque o campo de deslocamentos aproximados do elemento padrão não contém os termos necessários, quadráticos, das funções de forma (SILVA & SILVA, 2017). Assim, ao aplicar modos incompatíveis melhora-se a resposta a esforços multiaxiais presentes nas placas, aplicação principal deste trabalho.

A energia de deformação de um corpo elástico é definida por,

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{d^T B_u^T + \alpha^{*T} B_\alpha^T\} [D] \{B_u d + B_\alpha \alpha^*\} dV \quad (14)$$

que quando derivada em relação aos deslocamentos d e aos parâmetros α^* resulta nas equações de equilíbrio do elemento expressas por,

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} \\ K_{au} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \alpha^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

onde q é o vetor de forças nodais equivalentes e α^* é,

$$\{\alpha^*\} = [K_{aa}^{-1}] [K_{au}] \{d\} \quad (16)$$

Assim, as submatrizes de rigidez do sistema são definidas pelas equações,

$$[K_{uu}] = \int_V [B^T] [D] [B] dV \quad (17a)$$

$$[K_{ua}] = \int_V [B^T] [D] [B_\alpha] dV \quad (17b)$$

$$[K_{au}] = \int_V [B_\alpha^T] [D] [B] dV \quad (17c)$$

$$[K_{aa}] = \int_V [B_\alpha^T] [D] [B_\alpha] dV \quad (17d)$$

onde B_α é a matriz deformação-deslocamento para modos incompatíveis, expressa por

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial y} & \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial x} & \frac{\partial M_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & \frac{\partial M_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial z} & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} & \frac{\partial M_3}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (18)$$

para os quais M_1 , M_2 e M_3 são as funções de interpolação para modos incompatíveis, expressas por,

$$M_1 = 1 - \xi^2 \quad (19a)$$

$$M_2 = 1 - \eta^2 \quad (19b)$$

$$M_3 = 1 - \mu^2 \quad (19c)$$

estas funções de forma, juntamente com o vetor de deslocamentos generalizados da formulação incompatível são responsáveis por acrescentar aos deslocamentos no interior do elemento (u_u) uma parcela de deslocamentos incompatível (u_α). Desta forma os deslocamentos para o elemento se tornam,

$$u = u_u + u_\alpha = [N]\{d\} + [M]\{\alpha\} \quad (20)$$

Retornando à equação (14), após a derivação dos termos, temos

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} -2\xi\bar{J}_{011} & 0 & 0 & -2\eta\bar{J}_{012} & 0 & 0 & -2\mu\bar{J}_{013} & 0 & 0 \\ 0 & -2\xi\bar{J}_{021} & 0 & 0 & -2\eta\bar{J}_{022} & 0 & 0 & -2\mu\bar{J}_{023} & 0 \\ 0 & 0 & -2\xi\bar{J}_{031} & 0 & 0 & -2\eta\bar{J}_{032} & 0 & 0 & -2\mu\bar{J}_{033} \\ -2\xi\bar{J}_{021} & -2\xi\bar{J}_{011} & 0 & -2\eta\bar{J}_{022} & -2\eta\bar{J}_{012} & 0 & -2\mu\bar{J}_{023} & -2\mu\bar{J}_{013} & 0 \\ -2\xi\bar{J}_{031} & 0 & -2\xi\bar{J}_{011} & -2\eta\bar{J}_{032} & 0 & -2\eta\bar{J}_{012} & -2\mu\bar{J}_{033} & 0 & -2\mu\bar{J}_{023} \\ 0 & -2\xi\bar{J}_{031} & -2\xi\bar{J}_{021} & 0 & -2\eta\bar{J}_{032} & -2\eta\bar{J}_{022} & 0 & -2\mu\bar{J}_{033} & -2\mu\bar{J}_{013} \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde ξ , η e μ são os valores das coordenadas de Gauss para cada nó e os coeficientes J_0 são os valores do Jacobiano avaliado no centroide do elemento, onde as coordenadas ξ , η e μ assumirão valor igual a zero. Sendo assim, a matriz de rigidez do elemento será dada pela expressão:

$$[K] = [K_{uu}] - [K_{ua}][K_{ua}^{-1}][K_{au}] \quad (22)$$

$$E_{relativo} = \frac{|v_{solid} - v_{comparação}|}{v_{solid}} \quad (22)$$

Desta forma, obtidos a matriz de rigidez global da estrutura e o vetor de forças nodais, segue-se o cálculo dos deslocamentos para o elemento hexaédrico enriquecido com modos incompatíveis, de acordo com a equação (11a).

As tensões e deformações agora têm uma parcela de contribuição referente aos modos incompatíveis, que deve ser somada à parcela compatível, tendo como resultado o aprimoramento nos valores obtidos da análise. Desta forma, temos que as deformações (23) e tensões (24) para modos incompatíveis, são:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_u] + [\varepsilon_a] = [B] \cdot \{U\} + [B_a] \cdot \{a^*\} \quad (23)$$

$$[\sigma] = [C] \cdot [\varepsilon] = [C]([\varepsilon_u] + [\varepsilon_a]) \quad (24)$$

As forças nodais internas são calculadas através da integral da equação (13), tendo agora as tensões referentes aos valores incrementados com modos incompatíveis (24).

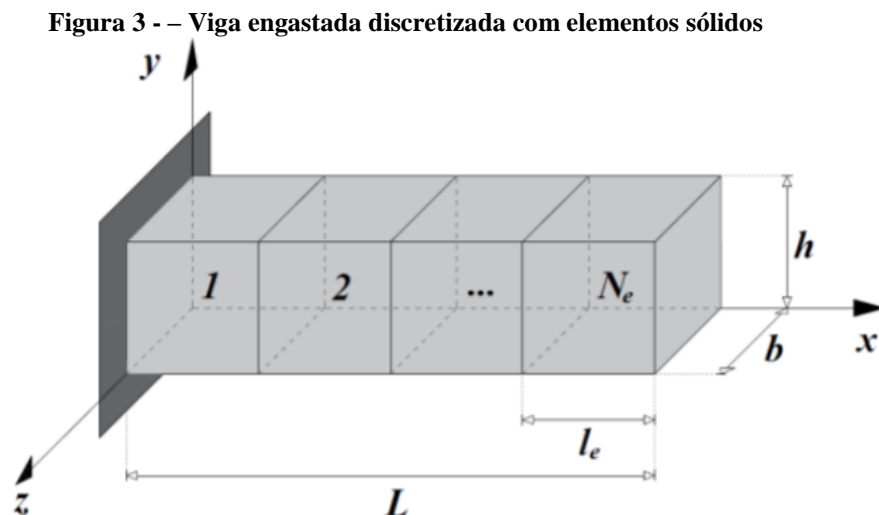
4 METODOLOGIAS EMPREGADAS

As metodologias utilizadas para a execução da análise são discutidas a seguir. Estas são referentes a entrada de dados da rotina (discretização da estrutura), processo de implementação do algoritmo e obtenção dos resultados.

4.1 PROCESSOS DE DISCRETIZAÇÃO

A discretização das estruturas é o primeiro passo da análise, sua execução correta é um passo imprescindível para a obtenção de resultados coerentes. Para este trabalho, foi executada de duas maneiras distintas. A primeira delas foi através da criação manual da malha de elementos finitos. A segunda é feita através de modelagem no software ABAQUS® e exportação dos dados.

Para a discretização manual, escolhe-se a direção do eixo de coordenadas da peça, afim de atribuir as coordenadas referentes a seus nós. Posteriormente, discretiza-se o domínio da estrutura, ao dividir suas dimensões pela quantidade de elementos ao longo de seus eixos, escolhida para a análise. A figura (3) ilustra uma viga discretizada desta forma,



Fonte: Silva & Silva, 2017

Após definida a quantidade de elementos para cada um dos eixos e suas dimensões, deve-se obter as coordenadas dos nós dos elementos. Posiciona-se a estrutura sobre os eixos e define-se a posição dos nós de cada elemento. Uma numeração destes nós é feita, fator

importante para a execução correta de cálculos executados durante o processo da análise. Para ilustrar o processo, suponha-se que a viga da figura (3) tenha de comprimento $L = 3$ m, largura $b = 0.2$ m e altura $h = 0.2$ m seja discretizada para uma malha de 3 elementos. Suas coordenadas nodais seriam representadas por,

Tabela 1 - Coordenadas nodais de uma viga de dimensão 3x0.2x0.2 com $N_e = 3$

Nó	X	Y	Z
1	0.2	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0.2
4	0.2	0	0.2
5	0.2	1	0
6	0	1	0
7	0	1	0.2
8	0.2	1	0.2
9	0.2	0.2	0
10	0	2	0
11	0	2	0.2
12	0.2	2	0.2
13	0.2	3	0
14	0	3	0
15	0	3	0.2
16	0.2	3	0.2

Fonte: Própria, 2019

O próximo passo da discretização manual consiste na determinação das conectividades nodais dos elementos, que consiste em saber quais nós fazem parte de cada elemento, com a finalidade de, posteriormente, calcular corretamente as iterações entre cada um deles. É arbitrado um sentido para a obtenção das coordenadas e a partir dele são coletadas as informações de conectividade para cada elemento. Usualmente o sentido anti-horário (começando da base para o topo do elemento) é utilizado, afim que não contribuir para um cálculo errado do volume do elemento, caso este seja executado. Para o exemplo hipotético da viga anterior, pode-se observar os resultados na tabela 2.

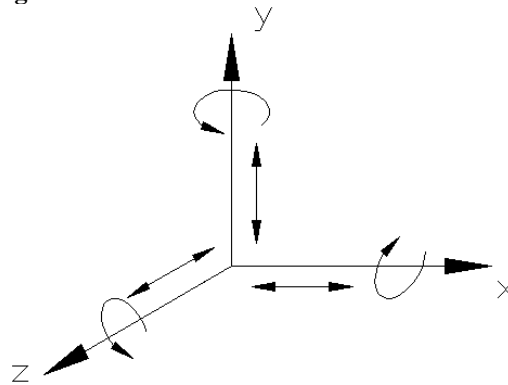
Tabela 2 - Conectividades nodais de uma viga de dimensão 3x0.2x0.2 com $N_e = 3$

Elemento	Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4	Nó 5	Nó 6	Nó 7	Nó 8
1	1	5	6	2	4	8	7	3
2	5	9	10	6	8	12	11	7
3	9	13	14	10	12	16	15	11

Fonte: Própria, 2019

Em seguida, os graus de liberdade com restrições ou deslocamentos prescritos devem ser obtidos. Os graus de liberdade consistem na direção para a qual há possibilidade de deslocamento de determinado nó. Sendo assim, cada nó, para a análise executada no projeto, tem 3 graus de liberdade, correspondentes à translação sobre cada um dos eixos cartesianos do espaço tridimensional. Há também graus de liberdade relacionados à rotação em torno dos eixos, mas estes não serão considerados para as análises. A figura 4 apresenta uma representação gráfica dos graus de liberdade de um nó.

Figura 4 - Graus de liberdade de um nó

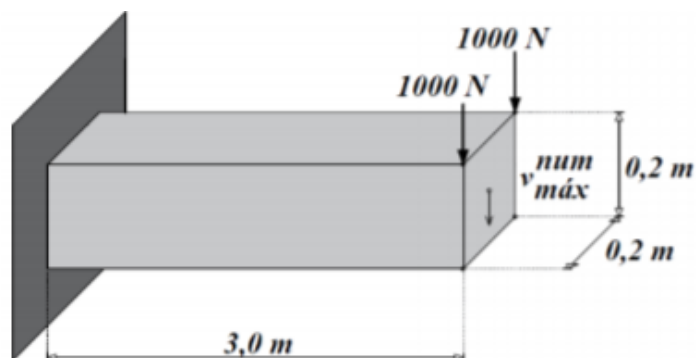


Fonte: FLORES, 2015

Continuando com o exemplo da viga, os graus de liberdade restritos pela condição de contorno (engaste), seriam os graus de 1 a 12 da estrutura, representando os nós de 1 a 4, que estão localizados exatamente na região do engaste.

Por último, as forças externas atuantes sobre a estrutura devem ser inseridas. Sua localização deve ser de acordo com o grau de liberdade sobre o qual a mesma atua, e seu sinal dirá em qual posição a mesma se encontra. Considerando que o estado de carregamento da viga seria igual ao da figura (5) a seguir,

Figura 5 - Posição das cargas atuantes sobre a viga



Fonte: Silva & Silva, 2017

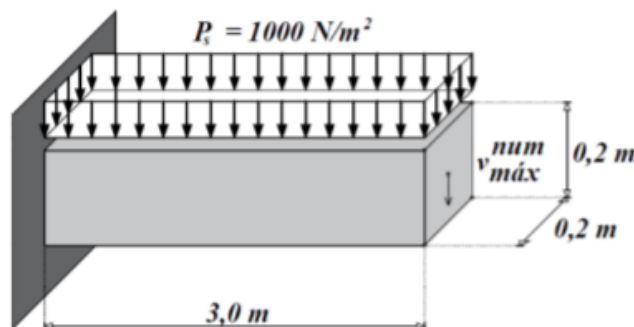
seriam consideradas duas forças de -1000 N (considerando o sentido negativo em relação ao eixo) que estariam aplicadas, respectivamente, nos graus de liberdade 45 e 48 da estrutura.

Entretanto há uma diferença quando se trata da representação de cargas pontuais e distribuídas sobre uma determinada superfície do elemento. Para o caso de carga distribuída, deve-se considerar a magnitude da carga em relação à superfície de atuação dela sobre o elemento. Tendo feito isso, é feita uma conversão da carga de superfície para cargas nodais, atuantes sobre os nós do elemento. Isto pode ser feito através da seguinte fórmula,

$$q_{nodal} = \frac{L_{el} \cdot W_{el} \cdot q_{distr.}}{4} \quad (25)$$

onde L_{el} e W_{el} são, respectivamente, o comprimento e a largura do elemento cuja superfície recebe a carga distribuída $q_{distr.}$. Deve-se levar em conta que quando a carga de superfície é convertida para uma carga nodal, nós compartilhados entre elementos terão uma carga que é a resultante da contribuição de cada elemento do qual faz parte. Assim, um nó que faz parte de dois elementos, simultaneamente, terá o dobro de carga atuante. Da mesma forma, nós presentes em 4 elementos terão 4 vezes o valor de carga atuando sobre si. Considerando agora uma carga distribuída sobre a viga do exemplo hipotético (figura 6), com a seguinte configuração,

Figura 6 - Carga de superfície sobre viga



Fonte: Silva & Silva, 2017

esta apresentaria, então, a seguinte configuração de cargas, apresentada na tabela 3:

Tabela 3 - Cargas nodais equivalentes para a viga sobre a qual atual carga de superfície de 1000 N/m³

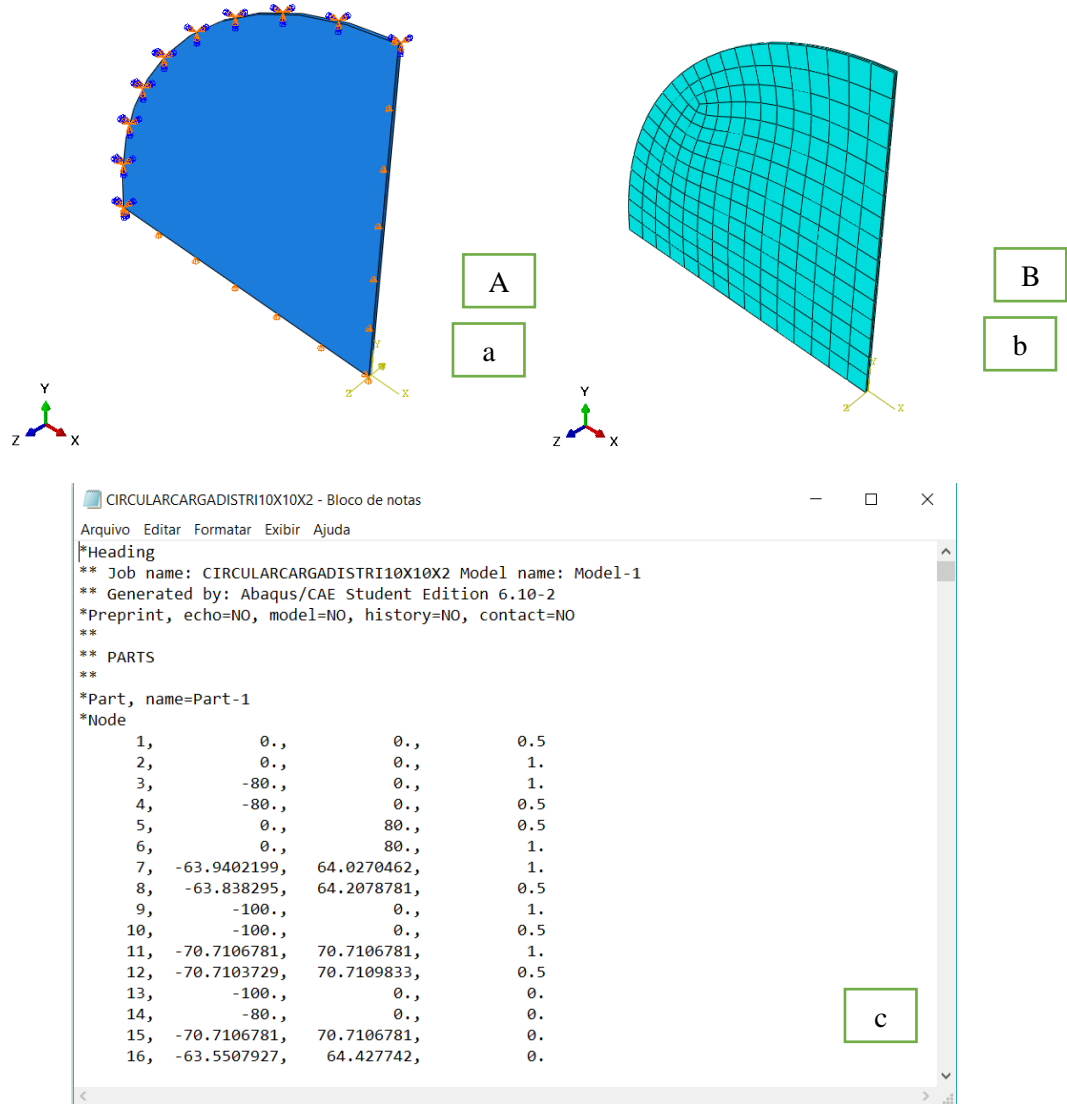
Grau de liberdade	Carga atuante
9	-50
12	-50
21	-100
24	-100
33	-100
36	-100
45	-50
48	-50

Fonte: Própria, 2019

É importante salientar que este método é efetivo apenas quando os elementos da malha não são distorcidos, ou seja, não apresentam ângulos diferentes de 90 ° nas linhas que compõe suas arestas, devido ao posicionamento seus nós em estruturas de geometria com a presença de curvas ou em malhas intencionalmente distorcidas. Nesses casos, deve-se recorrer ao Jacobiano para executar a correta correlação entre carga distribuída e carga nodal equivalente.

O segundo método de discretização citado é relativo ao aproveitamento dos dados de malha gerados pelo software ABAQUS®. Executa-se, então, a modelagem da estrutura seguindo o procedimento padrão. São selecionados a quantidade de elementos da malha, condições de contorno e carregamento, na interface do próprio software (Figuras 7a e 7b). Então, a análise é feita através do módulo *job* do programa. Ao realizar-se a análise, um arquivo de extensão .INP é gerado no diretório de trabalho da análise (Figura 7c). Este arquivo é comumente conhecido como “mapa” da análise. Nele constam as informações acerca das conectividades nodais, coordenadas nodais e condições de contorno modeladas na análise do ABAQUS®. Este método é de grande valia quando se trata de estruturas complexas, ou com uma quantidade considerável de elementos. Desta forma o processo pode ser otimizado, evitando a discretização manual de malhas extensas ou consideravelmente complexas. É importante citar que existem programas especializados apenas na geração de malhas para softwares CAE.

Figura 7 - Modelagem via ABAQUS® a) condições de contorno e carga; b) malha discretizada; c) arquivo .INP com informações acerca da malha (“mapa da análise”)



Fonte: Própria, 2019

Outro fator importante a ser discutido é acerca do recurso de utilização da simetria para a análise. Estruturas simétricas reproduzem os efeitos das cargas atuantes em cada um de seus quadrantes, resultando em quatro partes espelhadas que contém as mesmas informações de resultados. Desta forma, discretizar apenas $\frac{1}{4}$ ou determinada parte simétrica da estrutura ajuda na otimização da análise, com uso de menos recursos computacionais e a possibilidade de refinamento da malha ao acrescentar mais elementos em um espaço menor, melhorando assim os resultados. Para que o estado de tensões e deformações da parte simétrica

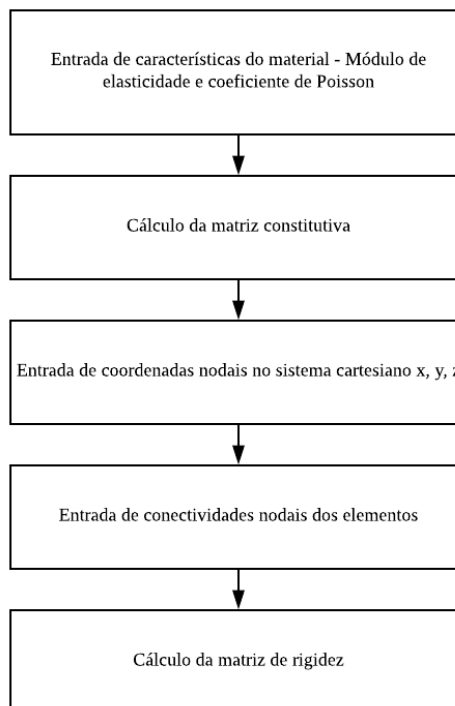
discretizada seja coerente com a estrutura completa também se faz necessário a correta distribuição das cargas atuantes.

4.2 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO

A seguir são apresentados os fluxogramas referentes à implementação da rotina computacional para o elemento sólido hexaédrico com modos incompatíveis, seguindo a metodologia executada, bem como a formulação matemática explicitada no tópico anterior.

Inicialmente, realizou-se o pré-processamento da análise, com a entrada de dados referentes aos materiais e configuração geométrica da estrutura (discretização), sua sequência é demonstrada na figura (8) a seguir.

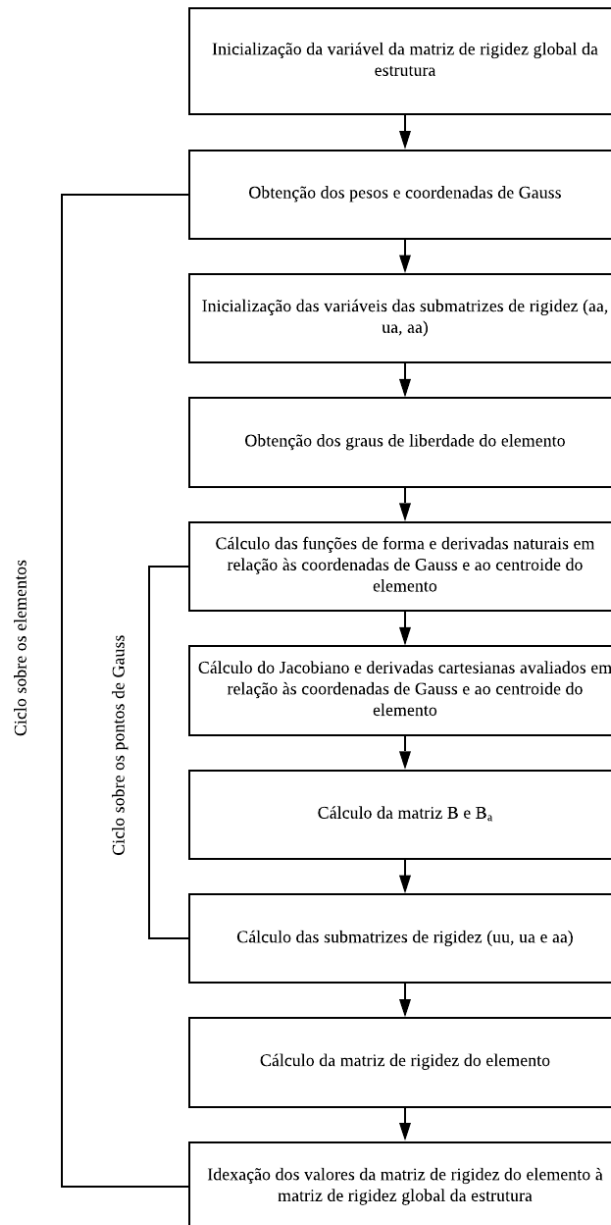
Figura 8 - Fluxograma de pré-processamento e entrada de dados



Fonte: Própria, 2019

Como passo seguinte, o cálculo da matriz de rigidez global da estrutura é feito. A figura 9 demonstra o fluxograma de sequência de execução da rotina.

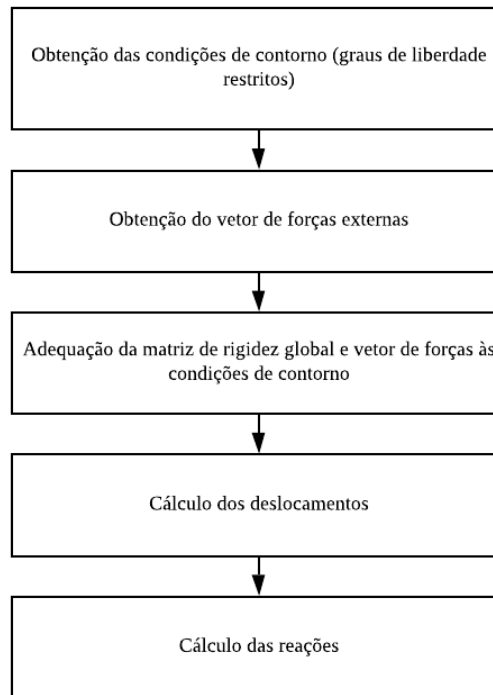
Figura 9 - Fluxograma para cálculo da matriz de rigidez global da estrutura



Fonte: Própria, 2019

Com a obtenção dos valores da matriz de rigidez global é possível executar o cálculo dos deslocamentos e reações nodais da estrutura. A figura (10) exibe o fluxograma referente à sequência da rotina para obtenção destes valores.

Figura 10 - Fluxograma para cálculo dos deslocamentos e reações



Fonte: Própria, 2019

Por fim, a figura (11) traz o fluxograma onde são calculadas as forças nodais e deformações/tensões nos pontos de integração, da estrutura.

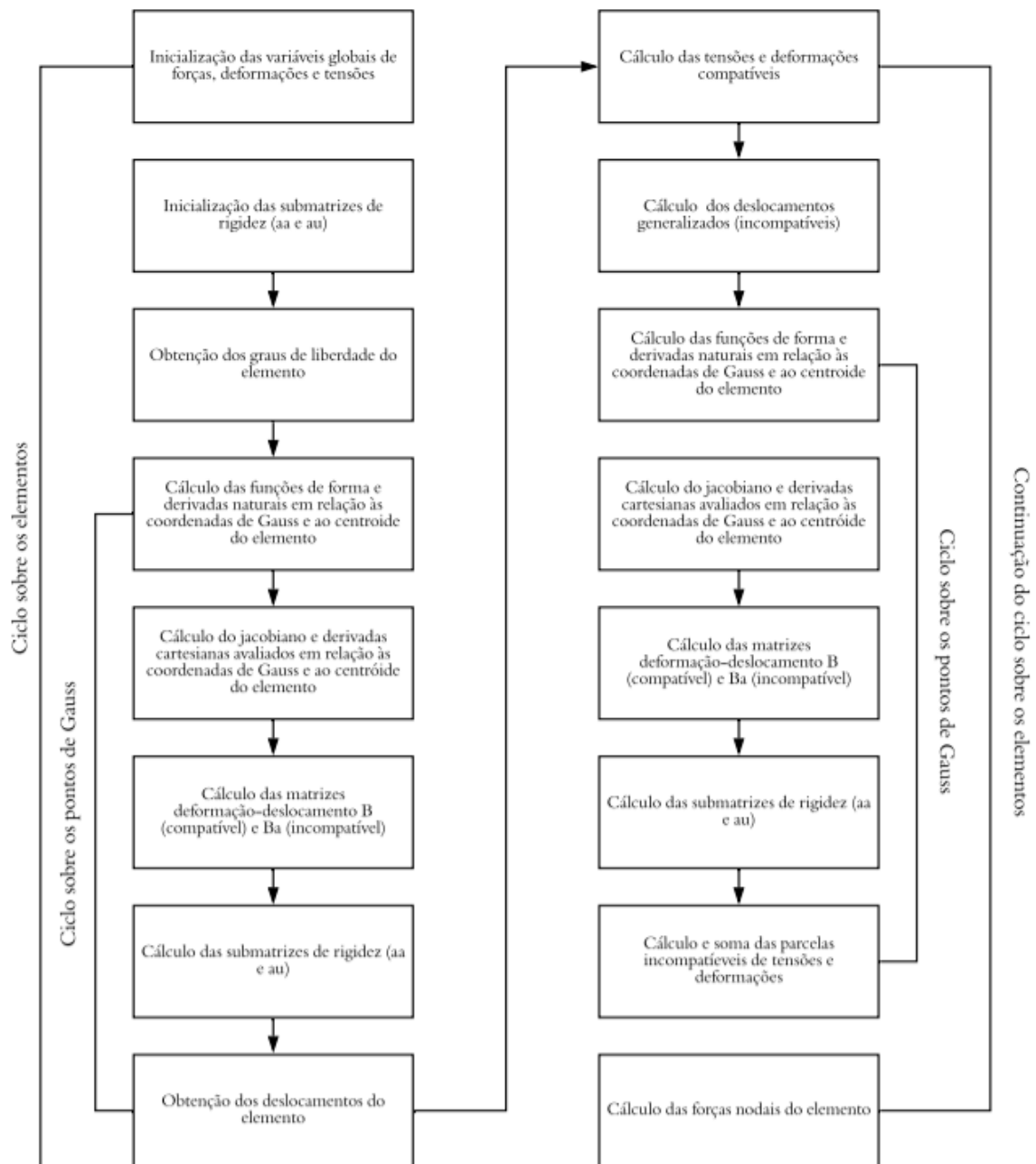


Figura 11 - Fluxograma para cálculo das forças, tensões e deformações da estrutura

Fonte: Própria, 2019

4.3 OBTENÇÃO DE RESULTADOS

Após executada a análise, são obtidos os valores referentes aos deslocamentos e reações nodais para cada elemento, tensões e deformações para cada ponto de integração dos elementos, e forças nodais para cada elemento, por grau de liberdade.

Por conta do grande volume de informações de saída, foi necessária atenção especial durante a comparação dos resultados entre *SolidAnalisys* e ABAQUS®, visto que deve ser feita uma correlação entre os elementos, nós e graus de liberdade das duas modelagens. Isto se mostrou quando foram analisados exemplos onde a discretização foi feita de forma manual para a análise, em comparação à modelagem do ABAQUS®. Por conta das diferenças nas convenções de numeração de elementos e nós, e de diferenças no arranjo dos eixos, fez-se necessário executar uma busca a fim de encontrar exatamente o mesmo elemento, nó ou ponto de integração necessário para correlacionar os resultados.

Feita esta correlação, os resultados foram comparados, tabulados e tiveram suas representações em gráfico, com o propósito de melhorar a visualização dos comparativos. Por conta do volume de dados de saída, apenas alguns pontos de Gauss de referência foram escolhidos para representar os dados da análise. Para deslocamentos foram escolhidos nós no centro das placas, onde a deflexão é, geralmente, maior. Para tensões e deformações foi escolhido um ponto de Gauss dentre os 8 presentes em um dos elementos do centro de cada placa da análise. Reações e forças internas também foram obtidos na análise, entretanto seus resultados não são discutidos para os exemplos numéricos. Porém nos Apêndice A e B deste trabalho pode-se encontrar os resultados completos para uma das malhas de um dos exemplos, bem como as informações de discretização da malha em questão, para fins de reprodutibilidade do método aplicado.

Há também a representação em gradiente de cores que apresenta os estados de esforços nas placas dos exemplos, obtidos via modelagem no software ABAQUS®.

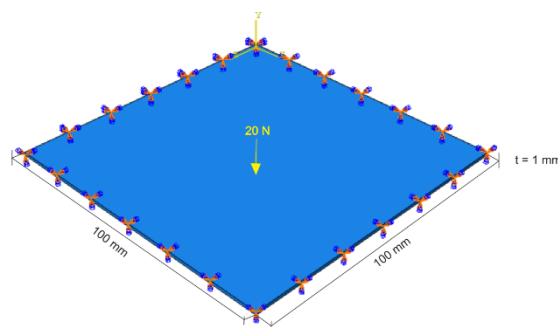
5 ANÁLISE DE PLACAS

A seguir se faz a análise de exemplos numéricos de placas de geometria, condições de contorno e carregamento distintos, com a finalidade de demonstrar a capacidade do algoritmo desenvolvido. As análises são feitas através da discretização das estruturas em diversas malhas, evidenciando a melhoria dos resultados em relação ao número de elementos empregados. Estes valores são comparados com aqueles obtidos através de outros métodos/autores e discutidos. São obtidos valores de deslocamentos, tensões e deformações para cada uma das malhas.

5.1 PLACA RETANGULAR ENGASTADA EM TODAS AS SUAS BORDAS COM CARGA CONCENTRADA CENTRAL

A placa apresenta comprimento e largura iguais sendo $L = 100$ mm. Sua espessura é $t = 1$ mm. O módulo de elasticidade do seu material é $E = 10^4$ N/mm² e seu coeficiente de Poisson é $\nu = 0.3$. A placa é submetida a uma carga pontual $P = 20$ N em seu centro. Por conta da simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da placa foi discretizado para a análise, para isto as condições de contorno necessitaram de compatibilização, restringindo os deslocamentos dos nós no eixo ortogonal aos locais de corte da estrutura, para a simetria. Foram adotadas 4 malhas com $N_e = 4$ (2x2x1), 16 (4x4x1), 64 (8x8x1) e 256 (16x16x1) elementos, como ilustrado na figura 12.

Figura 12 - Placa quadrada engastada em suas 4 bordas com carga pontual central



Fonte: Própria, 2019

A tabela 4 apresenta os valores de deslocamento no centro da placa, para cada uma das malhas. São comparados os valores obtidos por Silva & Silva (2017), análise via software *ABAQUS*®, via algoritmo próprio (*SolidAnalysis*) para o elemento sólido padrão e para o

elemento sólido com modos incompatíveis e sua solução analítica dada por Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959).

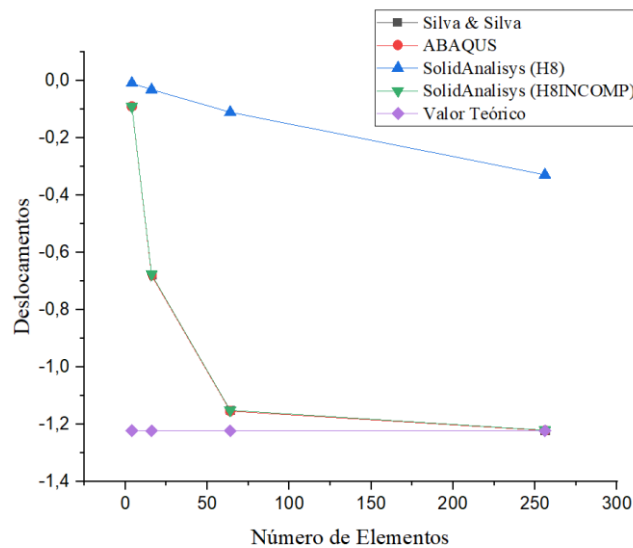
Tabela 4 - Valor dos deslocamentos (mm)

Placa quadrada engastada em suas 4 bordas com carga pontual central						
N° de elem.	Silva & Silva		ABAQUS ®	SolidAnalisys		Valor Teórico
	H8	H8INCOMP	C3D8I	H8	H8INCOMP	
4	-0.00835	-0.08972	-0.0899	-0.00835	-0.08971	-1,22304
16	-0.03076	-0.67638	-0.6802	-0.03076	-0.67638	-1,22304
64	-0.10980	-1.15123	-1.1543	-0.1098	-1.15122	-1,22304
256	-0.32825	-1.22092	-1.2221	-0.32825	-1.22092	-1,22304

Fonte: Própria, 2019

A figura (13) traz um gráfico dos resultados de deslocamento da estrutura. São comparados os valores obtidos por Silva & Silva (2017), software ABAQUS® e SolidAnalisys para o elemento com e sem modos incompatíveis.

Figura 13 - Gráfico de deslocamentos versus número de elementos para os valores obtidos por Silva & Silva (2017), ABAQUS®, SolidAnalisys (H8), SolidAnalisys (H8INCOMP) e Valor Teórico



Fonte: Própria, 2019

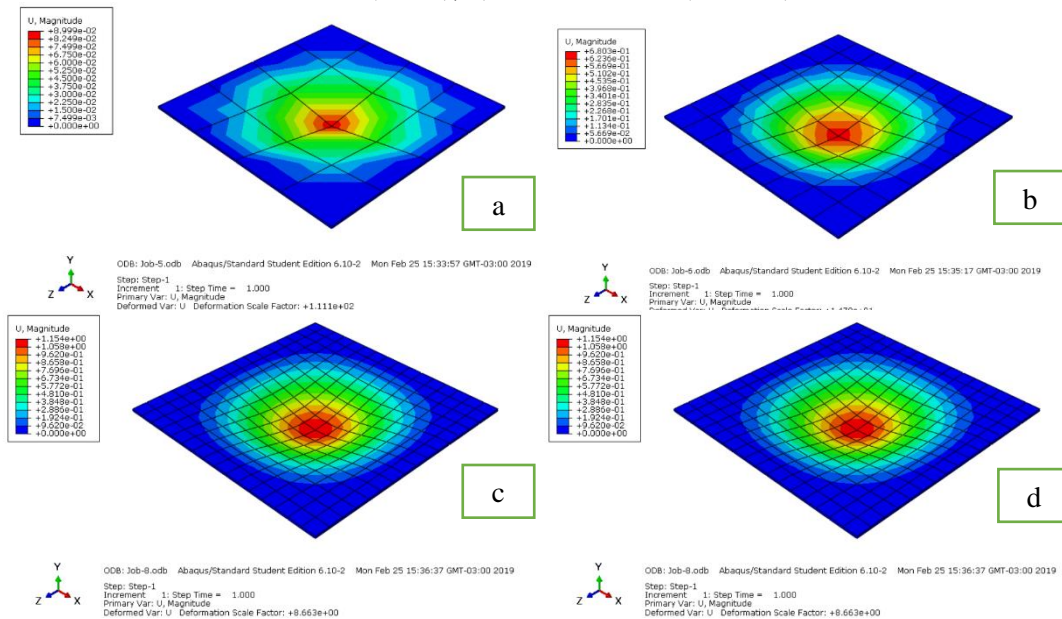
Pode-se observar que os valores obtidos via SolidAnalisys são consistentes e aproximam-se bem dos valores encontrados por Silva & Silva (2017) para o elemento sólido padrão, demonstrando a eficácia da implementação computacional executada no projeto. Entretanto, é visto que os valores obtidos para o elemento padrão são consideravelmente distantes do valor teórico obtido via método analítico, mesmo para malhas com maiores quantidades de elementos (64 e 256). O erro relativo, quando comparados o elemento padrão

e sua versão melhorada com modos incompatíveis, é de 90% para a malha de 64 elementos e de 73% para a malha de 256 elementos. Este percentual demonstra o quão distante estão os valores para os dois tipos de elementos, sendo que a versão com modos incompatíveis apresenta uma solução muito mais próxima do valor teórico calculado, apresentando um erro relativo em relação ao valor de deslocamento teórico de apenas 0.17% para a malha de 256 elementos. Isso se dá porque os resultados do elemento padrão para os deslocamentos não conseguem representar, do ponto de vista quantitativo, o comportamento físico da placa, visto que este tipo de elemento é apropriado para situações onde o elemento estrutural está sujeito apenas a tração e compressão simples (Silva & Silva, 2017).

Para os valores obtidos utilizando elemento sólido com modos incompatíveis, observa-se um alto ganho de desempenho em relação ao elemento sólido padrão, onde nas malhas com maior quantidade de elementos (64 e 256) os resultados convergem de forma satisfatória ao valor teórico encontrado. Malhas com uma menor quantidade de elementos não conseguem representar de maneira adequada o estado de esforços e deformações multiaxiais da placa, desta forma seus resultados são distantes da solução analítica. Os valores de deslocamento obtidos via *SolidAnalisis* são muito próximos daqueles obtidos por Silva & Silva e software ABAQUS®, para todas as malhas consideradas.

As figuras a seguir demonstram o estado de deformação da placa após a aplicação do esforço, para todas as malhas, obtidos via software ABAQUS®. Apesar da simetria ter sido utilizada na análise, optou-se por representar a forma deformada da placa completa para malhas menores, representando-a em apenas $\frac{1}{4}$ para a malha de 256 elementos, devido à limitação no número de elementos presente na versão estudantil do software ABAQUS®. O mesmo método será utilizado em alguns dos exemplos posteriores.

Figura 14 - Gradiente de deslocamentos para a) malha Ne = 4 (2x2x1); b) malha Ne = 16 (4x4x1); c) malha Ne = 64 (8x8x1); d) malha Ne = 256 (16x16x1).



Fonte: Própria, 2019

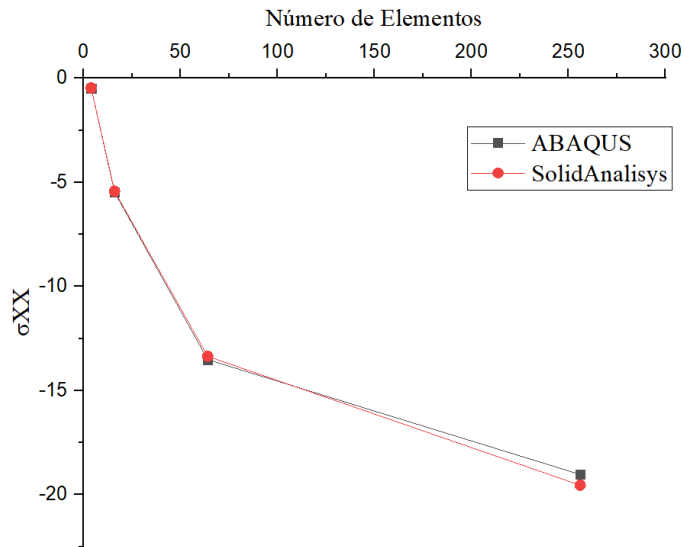
A tabela (5) apresenta valores para as tensões normais σ_{xx} para um ponto de Gauss de referência, em um dos elementos da malha. Os resultados apresentam solução próxima para as duas análises, evidenciando a qualidade da análise executada pelo *SolidAnalysis*, com erro relativo de 0.09% para a malha de 256 elementos. A seguir, a figura 15 apresenta um gráfico que relaciona os valores de tensão obtidos com a quantidade de elementos.

Tabela 5 - Valor de tensões normais σ_{xx} para o ponto de Gauss de referência

Placa quadrada engastada em suas 4 bordas com carga pontual central		
Número de Elementos	ABAQUS®	<i>SolidAnalysis</i> (H8INCOMP)
4	-0.47987	-0.47340
16	-5.47781	-5.42285
64	-13.508	-13.35012
256	-19.0244	-19.53728

Fonte: Própria, 2019

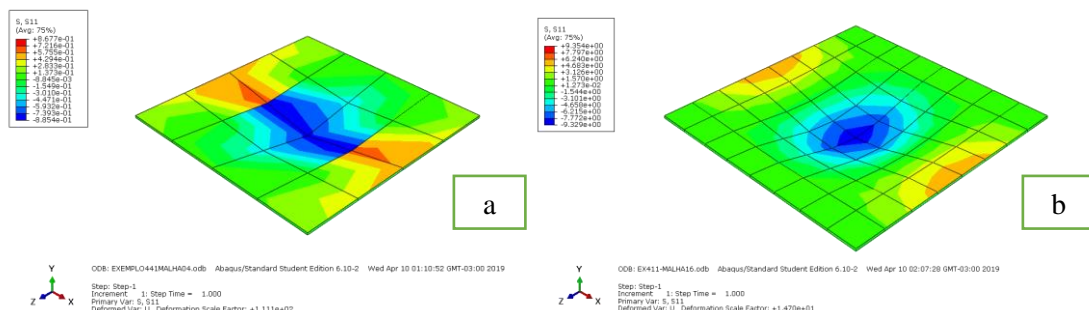
Figura 15 - Tensão normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos

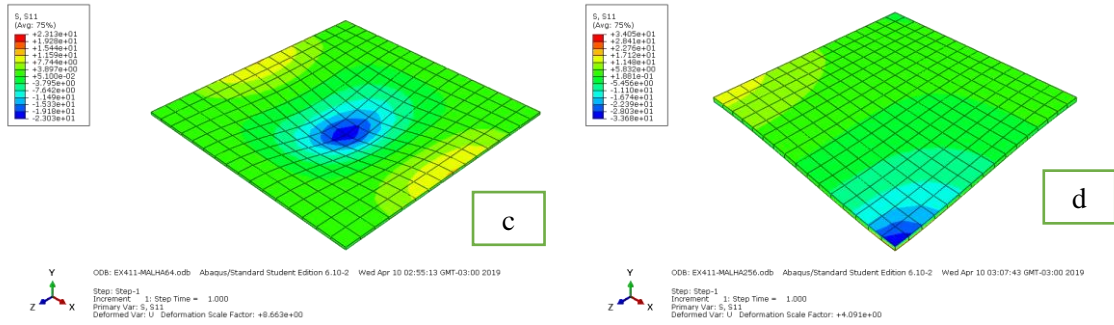


Fonte: Própria, 2019.

A figura (16) apresenta o gradiente de tensões normais, para cada uma das malhas obtidos via ABAQUS®. Essa representação não apresenta os valores de tensão nos pontos de Gauss, como obtidos pela teoria, mas uma representação geral do estado de tensão da placa em relação à componente de tensão σ_{xx} . As zonas de cores frias apresentam os locais onde a tensão é menor, enquanto que as zonas do gradiente onde as cores são mais quentes apresentam maiores valores de tensão σ_{xx} . Para a malha de 256 elementos tem-se um erro relativo de 2.69%, comparando-se o elemento H8INCOMP com os resultados obtidos via ABAQUS®.

Figura 16 - Gradiente de tensões normais σ_{xx} para a) malha Ne = 4 (2x2x1); b) malha Ne = 16 (4x4x1); c) malha Ne = 64 (8x8x1); d) malha Ne = 256 (16x16x1).





Fonte: Própria, 2019.

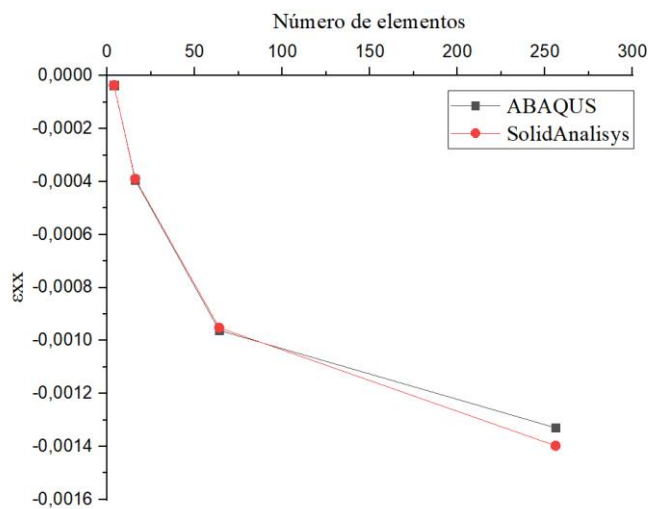
A tabela (6) exibe os valores para as deformações normais ϵ_{xx} o mesmo ponto de Gauss de referência utilizado na obtenção do valor de tensão normal. Os resultados também apresentam solução próxima para as duas análises, com erro relativo de 5.3% para a malha de 256 elementos. A seguir, a figura (17) apresenta um gráfico que relaciona os valores de deformação obtidos com a quantidade de elementos.

Tabela 6 - Valor de deformações normais ϵ_{xx} para o ponto de Gauss de referência

Placa quadrada engastada em suas 4 bordas com carga pontual central		
Número de Elementos	ABAQUS®	SolidAnalisisys (H8INCOMP)
4	-3.57122E-05	-3.60654E-05
16	-0.00039	-0.00038
64	-0.00096	-0.00095
256	-0.00132	-0.00139

Fonte: Própria, 2019

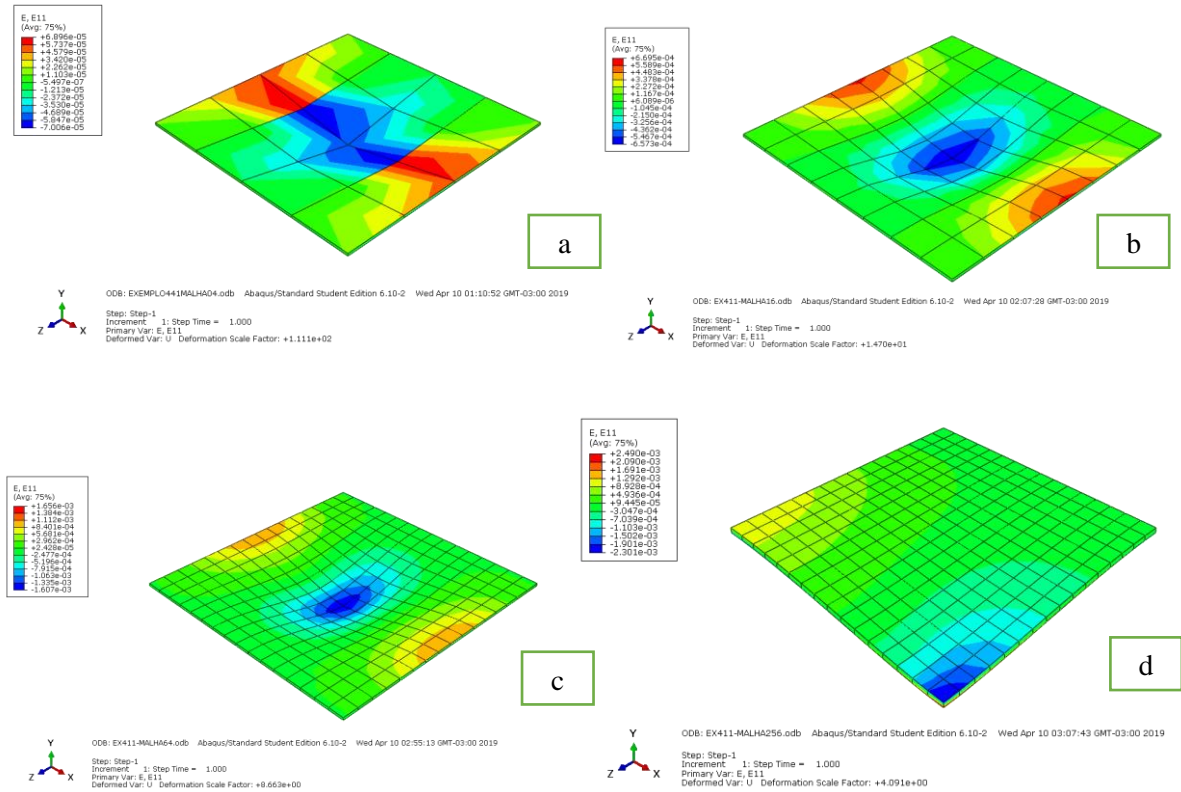
Figura 17 - Deformação normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos



Fonte: Própria, 2019.

A figura (18) apresenta o gradiente de deformações normais ϵ_{xx} , para cada uma das malhas obtidos via ABAQUS®.

Figura 18 - Gradiente de deformações normais ϵ_{xx} para a) malha $N_e = 4$ (2x2x1); b) malha $N_e = 16$ (4x4x1); c) malha $N_e = 64$ (8x8x1); d) malha $N_e = 256$ (16x16x1).

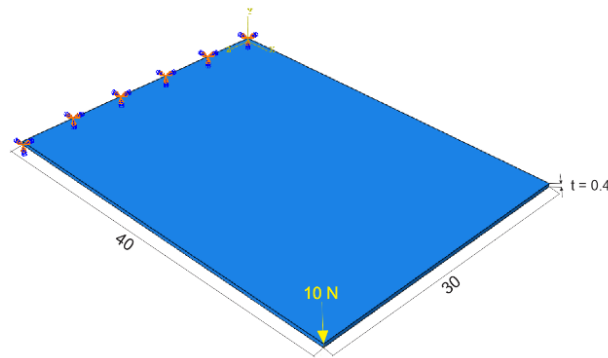


Fonte: Própria, 2019.

5.2 PLACA RETANGULAR EM BALANÇO SUBMETIDA A CARGA PONTUAL EM UMA DE SUAS ARESTAS

A placa apresenta comprimento $L = 40$ cm e largura $W = 30$ cm. Sua espessura é $t = 0.4$ cm. O módulo de elasticidade do seu material é $E = 1.2 \times 10^8$ N/cm² e seu coeficiente de Poisson é $\nu = 0.3$. Foram adotadas 4 malhas com $N_e = 12$ (4x3x1), 48 (8x6x1) e 192 (16x12x1) elementos. Está submetida a uma carga $P = 10$ em uma de suas pontas livres e está engastada em uma de suas bordas. Uma ilustração da placa é vista na figura 19.

Figura 19 - Placa retangular em balanço submetida a carga pontual em uma de suas arestas



Fonte: Própria, 2019

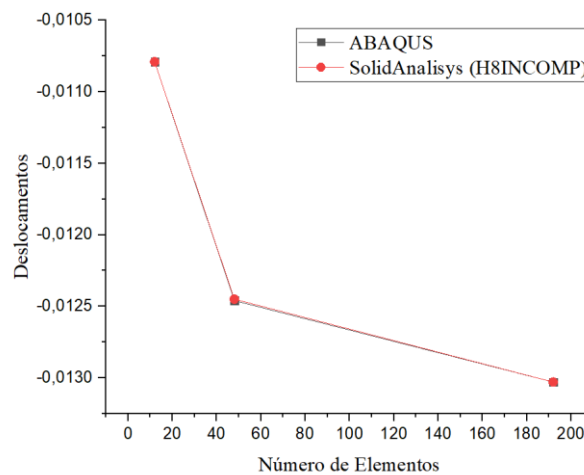
A tabela abaixo apresenta os valores de deslocamento na ponta da placa onde a carga é aplicada, para cada uma das malhas. São comparados os valores obtidos por análise via software *ABAQUS*® e via algoritmo próprio (*SolidAnalysis*) para o elemento sólido com modos incompatíveis. Posteriormente, a figura (20) expõe o gráfico que relaciona os deslocamentos obtidos ao número de elementos das análises.

Tabela 7 - Valor dos deslocamentos

Placa retangular em balanço submetida a carga pontual em uma de suas arestas		
Número de elementos	ABAQUS ® (C3D8I)	<i>SolidAnalysis</i> (H8INCOMP)
12	-0.01079	-0.01079
48	-0.01246	-0.01245
192	-0.01303	-0.01303

Fonte: Própria, 2019

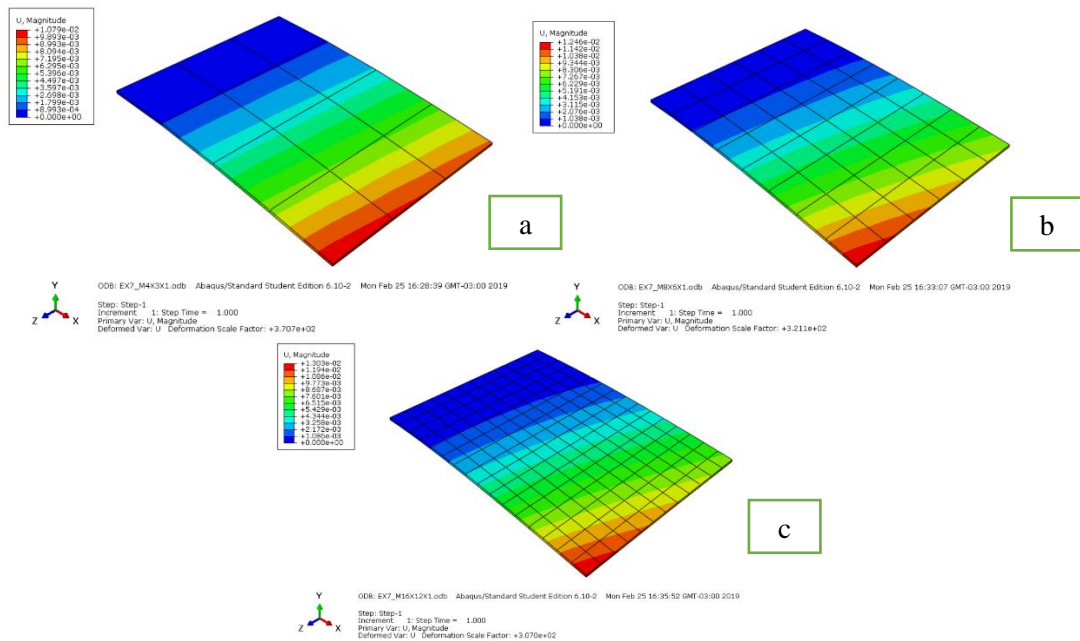
Figura 20 - Gráfico de deslocamentos versus número de elementos para os valores obtidos via ABAQUS® e SolidAnalysis (H8INCOMP)



Fonte: Própria, 2019

Os resultados da análise são quantitativamente próximos para todas as malhas, nas análises feitas via *ABAQUS*® e via *SolidAnalisys*, chegando a um erro relativo de 0% para a malha de 92 elementos. A figura 21 a seguir demonstram o gradiente de deslocamentos da placa após a aplicação do esforço, para todas as malhas, obtidos via software *ABAQUS*®.

Figura 21 - Gradiente de deslocamentos para a) malha Ne = 12 (3x4x1); b) malha Ne = 48 (6x8x1); c) malha Ne = 192 (12x16x1);



Fonte: Própria, 2019

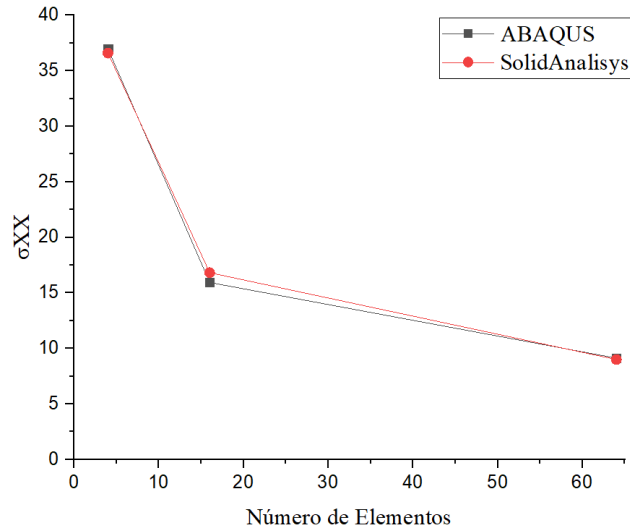
A tabela (8) apresenta valores para as tensões normais σ_{xx} para um ponto de Gauss de referência, no ponto de Gauss da extremidade do elemento no qual a carga está sendo aplicada. O erro relativo obtido para os dois métodos é de 1.35% para a malha de 92 elementos. A seguir, a figura (22) apresenta um gráfico que relaciona os valores de tensão obtidos com a quantidade de elementos e a figura (23) traz o gradiente de tensões normais, para cada uma das malhas obtidos via *ABAQUS*®.

Tabela 8 - Valor de tensões normais σ_{xx} para o ponto de Gauss de referência

Placa retangular em balanço submetida a carga pontual em uma de suas arestas		
Número de Elementos	ABAQUS®	<i>SolidAnalisys</i> (H8INCOMP)
12	36.97586	36.58928
48	15.93220	16.82039
192	9.12498	9.00126

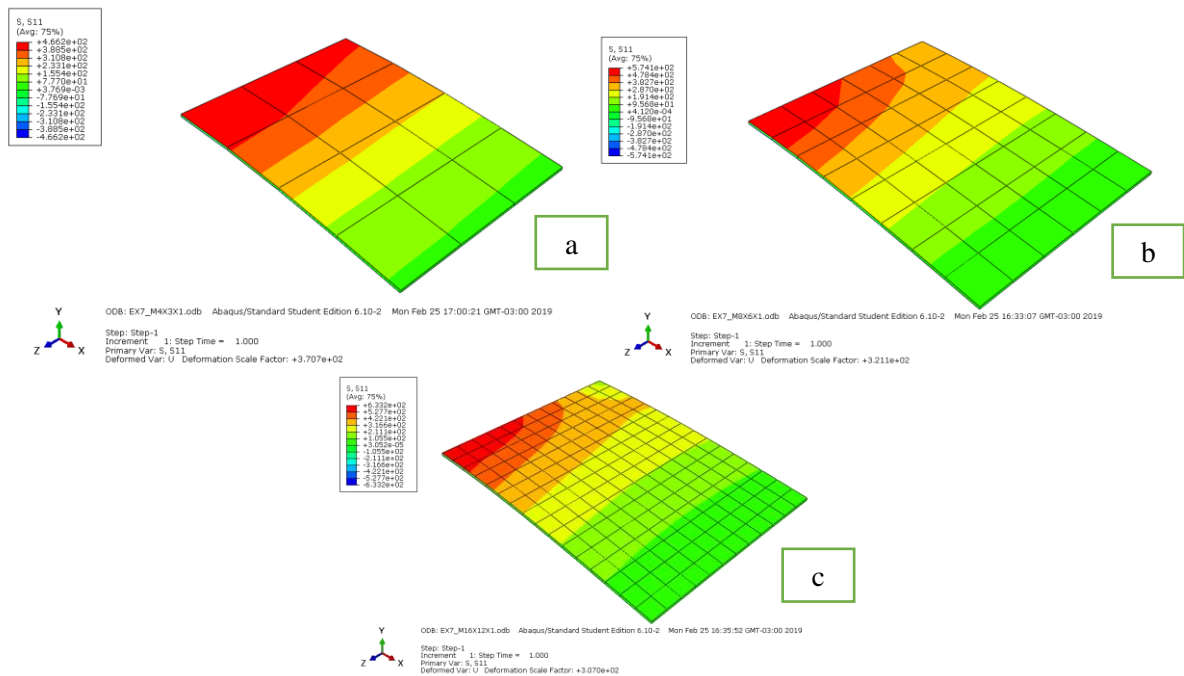
Fonte: Própria, 2019

Figura 22 - Tensão normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos



Fonte: Própria, 2019

Figura 23 - Gradiente de tensões normais σ_{xx} para a) malha Ne = 12 (3x4x1); b) malha Ne = 48 (6x8x1); c) malha Ne = 192 (12x16x1);



Fonte: Própria, 2019

A tabela (9) exibe os valores para as deformações normais ϵ_{xx} , a figura (24) apresenta um gráfico que relaciona os valores de deformação obtidos com a quantidade de elementos.

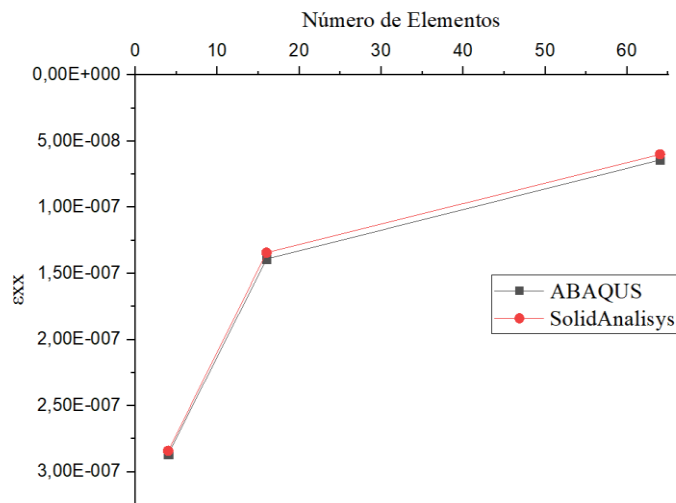
Têm-se um erro relativo de 6.2% para a malha de 92 elementos, o que acaba sendo aceitável por conta da pequena magnitude dos valores de esforços. A figura (25) mostra o gradiente de deformações normais ϵ_{xx} , para cada uma das malhas obtidos via ABAQUS®.

Tabela 9 - Valor de deformações normais ϵ_{xx} para o ponto de Gauss de referência

Placa retangular em balanço submetida a carga pontual em uma de suas arestas		
Número de Elementos	ABAQUS®	SolidAnalisis (H8INCOMP)
12	2.87E-07	2.84105E-07
48	1.39054E-07	1.34239E-07
192	6.42238E-08	5.99061E-08

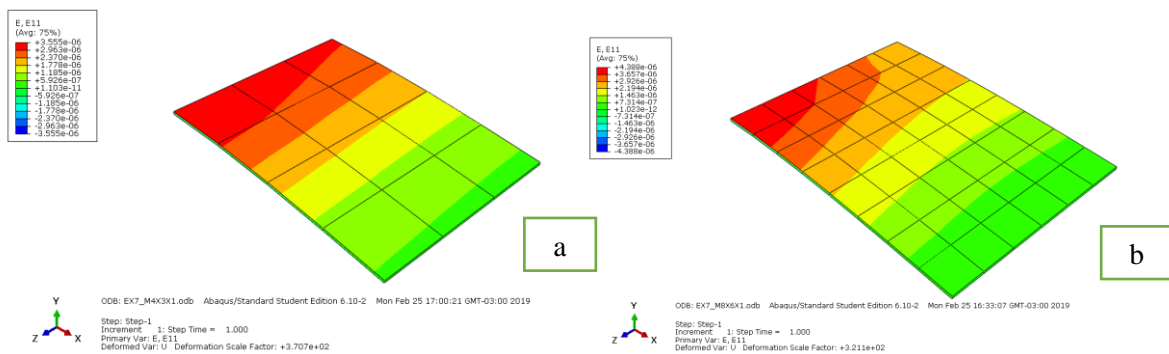
Fonte: Própria, 2019

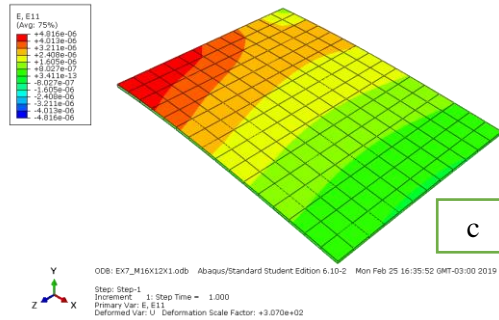
Figura 24 - Deformação normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos



Fonte: Própria, 2019

Figura 25 - Gradiente de deformações normais ϵ_{xx} para a) malha Ne = 12 (3x4x1); b) malha Ne = 48 (6x8x1); c) malha Ne = 192 (12x16x1);



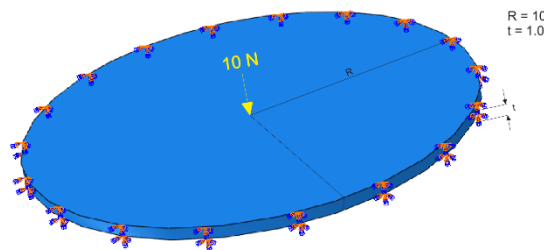


Fonte: Própria, 2019

5.3 PLACA CIRCULAR ENGASTADA SUBMETIDA A CARGA PONTUAL CENTRAL

A placa apresenta raio $R = 100$ e espessura $t = 1.0$. O módulo de elasticidade do seu material é $E = 1 \cdot 10^7$ e seu coeficiente de Poisson é $\nu = 0.3$. Por conta da simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da placa foi discretizado para a análise. Foram adotadas 4 malhas com $N_e = 48, 192$ e 432 elementos. Está submetida a uma carga $P = 10$ N em seu centro. Por conta da maior complexidade geométrica, optou-se por inserir mais elementos nas malhas afim de melhorar seus resultados.

Figura 26 - Placa circular engastada submetida a carga pontual central



Fonte: Própria, 2019

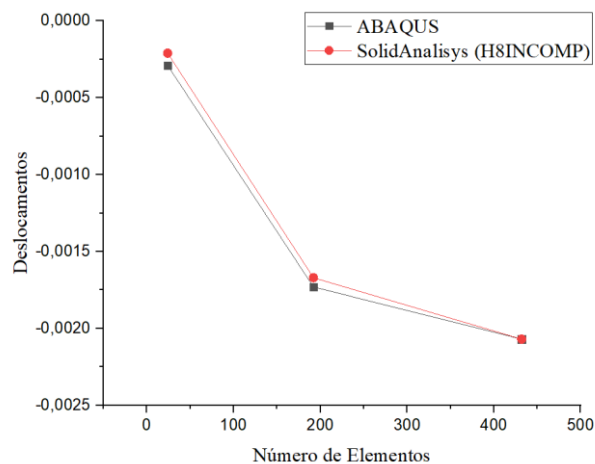
A tabela abaixo apresenta os valores de deslocamento no centro da placa, para cada uma das malhas. São comparados os valores obtidos por análise via software ABAQUS® e via algoritmo próprio (*SolidAnalysis*) para o elemento sólido com modos incompatíveis. Posteriormente, a figura (27) expõe o gráfico que relaciona os deslocamentos obtidos ao número de elementos das análises.

Tabela 10 - Valor dos deslocamentos

Placa circular engastada submetida a carga pontual central		
Número de elementos	ABAQUS® (C3D8I)	SolidAnalisys (H8INCOMP)
48	-0.00029	-0.00021
192	-0.00173	-0.00167
432	-0.00207	-0.00207

Fonte: Própria, 2019

Figura 27 - Gráfico de deslocamentos versus número de elementos para os valores obtidos via ABAQUS® e SolidAnalisys (H8INCOMP)



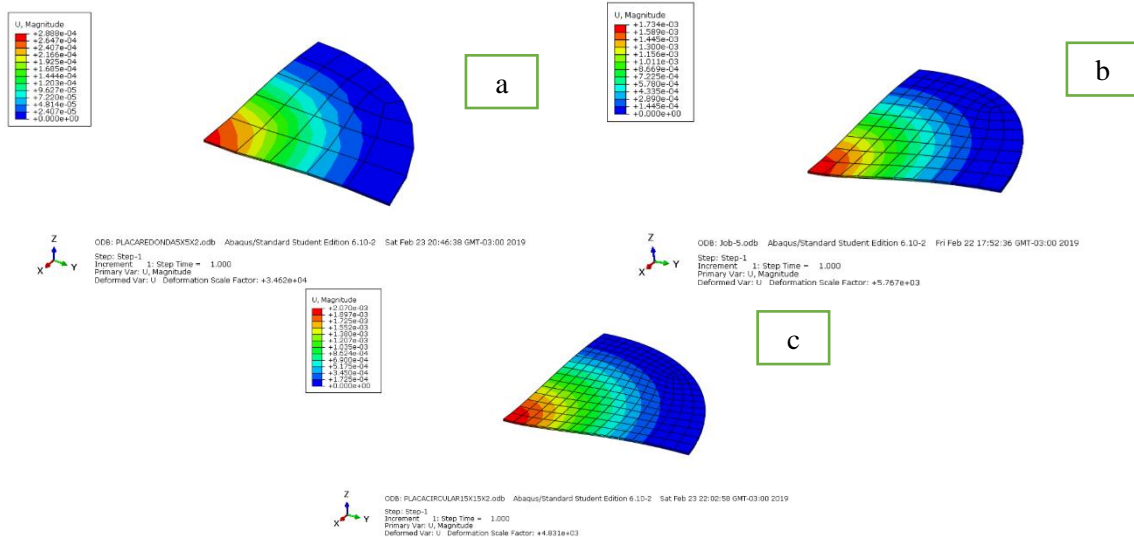
Fonte: Própria, 2019

Os resultados apresentam boa convergência, representada pela proximidade dos valores dos resultados, em ambos os métodos, tornando-se mais aproximados conforme a quantidade de elementos na malha aumenta. De acordo com Duarte (2002), o resultado teórico de deslocamento no centro da placa é de $w = 0.00217525$. Assim, os resultados da análise via ABAQUS® e SolidAnalisys são razoáveis para as malhas de 192 e 432 elementos, resultando em uma boa aproximação, com erro relativo nulo para a malha de 432 elementos. Por conta da geometria desta placa se faz necessário o uso de uma malha com uma maior quantidade de elementos para obter uma boa representação, visto que a estrutura apresenta uma circunferência que é melhor representada ao inserir uma quantidade maior de elementos sólidos em sua composição. Optou-se por inserir mais um elemento ao longo da altura da estrutura, totalizando 2, com o mesmo propósito.

As figuras a seguir demonstram o estado de deformação após a aplicação do esforço para $\frac{1}{4}$ da placa, em todas as malhas, obtidos via software ABAQUS®. Posteriormente, a

figura (28) expõe o gráfico que relaciona os deslocamentos obtidos ao número de elementos das análises.

Figura 28 - Gradiente de deslocamentos para a) malha Ne = 24; b) malha Ne = 48; c) malha Ne = 192;



Fonte: Própria, 2019

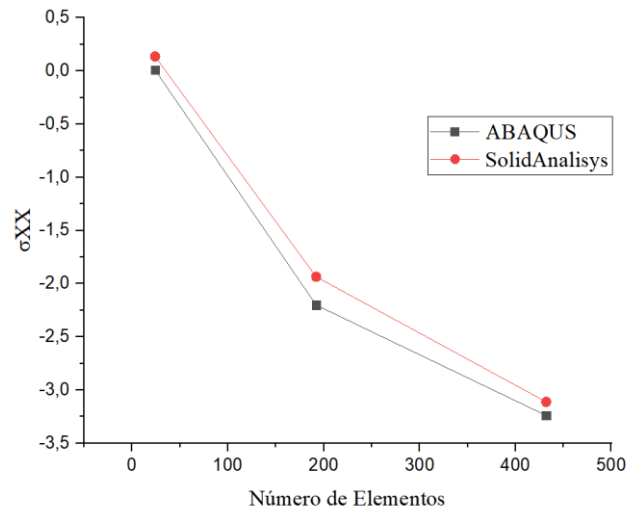
A tabela (11) apresenta valores para as tensões normais σ_{xx} para um ponto de Gauss de referência, em um dos elementos da malha. A seguir, a figura (29) apresenta um gráfico que relaciona os valores de tensão obtidos com a quantidade de elementos e a figura (30) traz o gradiente de tensões normais, para cada uma das malhas obtidas via ABAQUS®.

Tabela 11 - Valor de tensões normais σ_{xx} para o ponto de Gauss de referência

Placa circular engastada submetida a carga pontual central		
Número de Elementos	ABAQUS®	<i>SolidAnalisis</i> (H8INCOMP)
48	0.00821	1.36E-01
192	-2.20095	-1.94
432	-3.23995	-3.11161

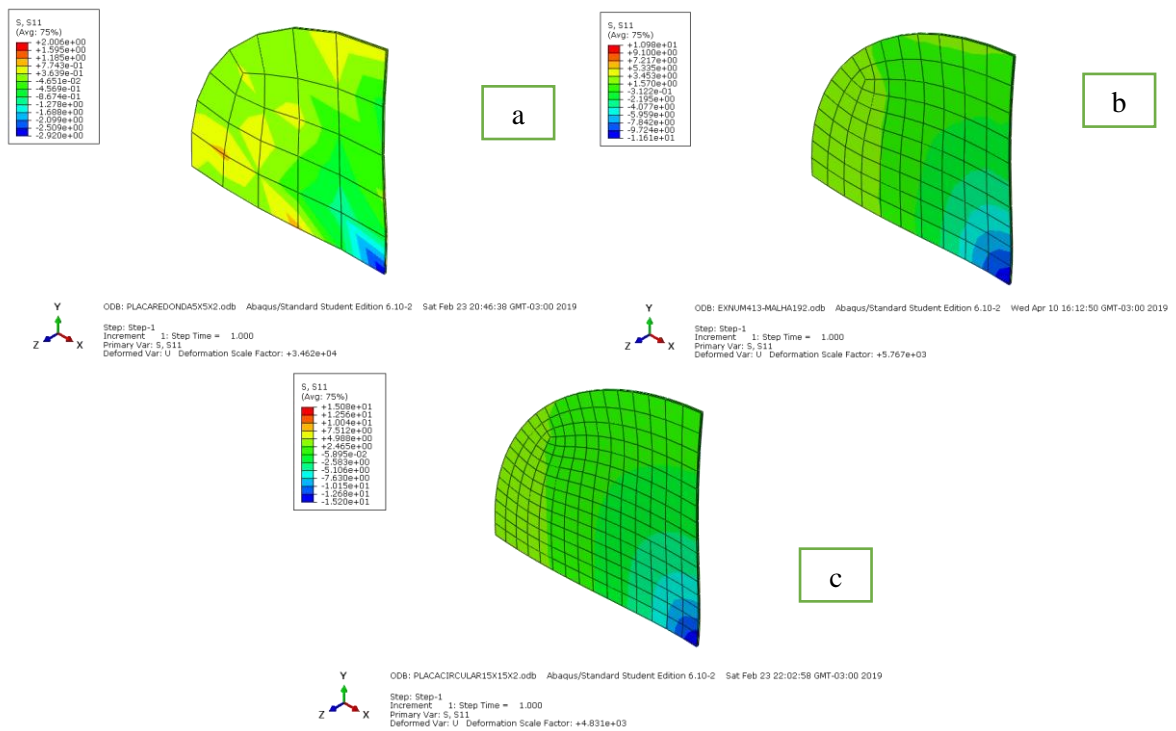
Fonte: Própria, 2019

Figura 29 - Tensão normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos



Fonte: Própria, 2019

Figura 30 - Gradiente de tensões normais σ_{xx} para a) malha $N_e = 24$; b) malha $N_e = 192$; c) malha $N_e = 432$;



Fonte: Própria, 2019

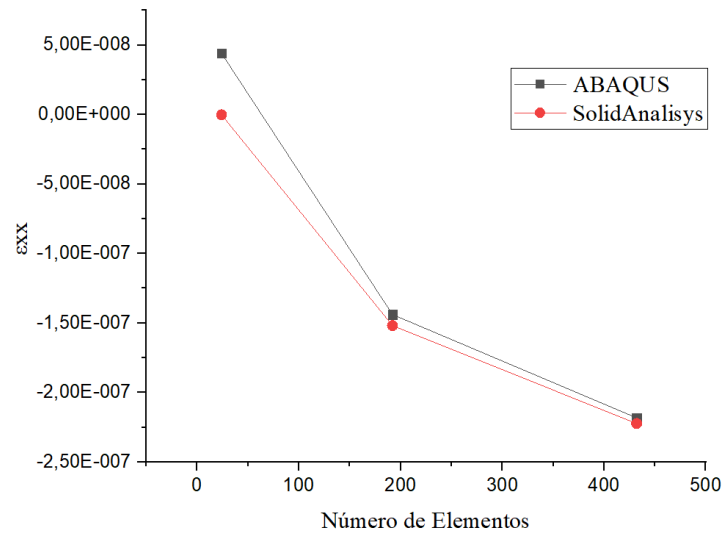
A tabela 12 exibe os valores para as deformações normais ϵ_{xx} , a figura (3) apresenta um gráfico que relaciona os valores de deformação obtidos com a quantidade de elementos e a figura (32) mostra o gradiente de deformações normais ϵ_{xx} , para cada uma das malhas obtidos via ABAQUS®.

Tabela 12 - Valor de deformações normais ϵ_{xx} para o ponto de Gauss de referência

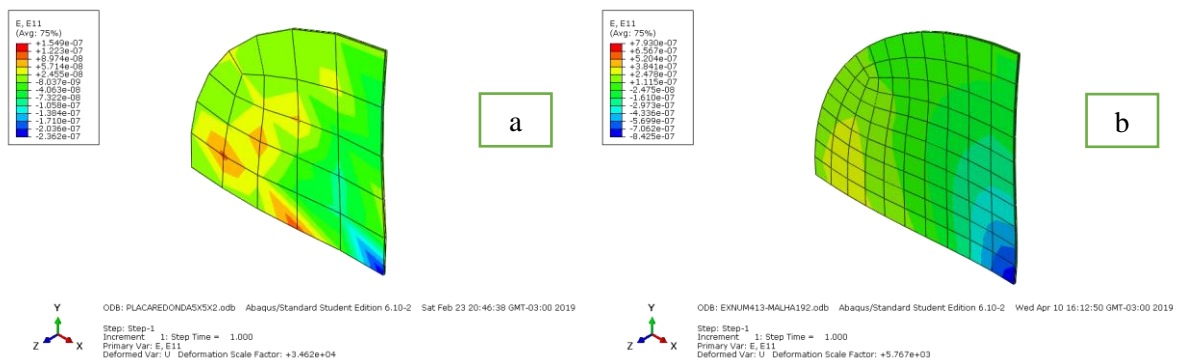
Placa circular engastada submetida a carga pontual central		
Número de Elementos	ABAQUS®	SolidAnalisys (H8INCOMP)
48	4.40307E-08	-2.70E-10
192	-1.43874E-07	-1.51863E-07
432	-2.18305E-07	-2.22308E-07

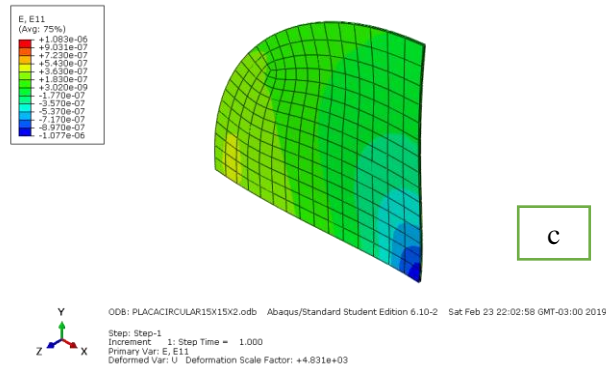
Fonte: Própria, 2019

Figura 31 - Deformação normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos



Fonte: Própria, 2019

Figura 32 - Gradiente de deformações normais ϵ_{xx} para a) malha Ne = 24; b) malha Ne = 48; c) malha Ne = 192;

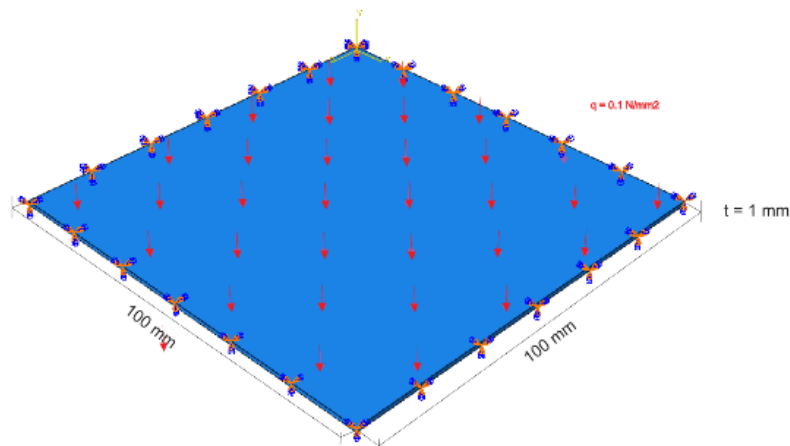


Fonte: Própria, 2019

5.4 PLACA QUADRADA ENGASTADA EM SUAS 4 BORDAS SUBMETIDA A CARGA DISTRIBUÍDA UNIFORME

A placa possui as mesmas dimensões da placa apresentada no exemplo 4.1, com mudança apenas em sua configuração de cargas, sendo agora $q = 0.1 \text{ N/mm}^2$. Apresenta comprimento e largura iguais sendo $L = 100 \text{ mm}$. Sua espessura é $t = 1 \text{ mm}$. O módulo de elasticidade do seu material é $E = 104 \text{ N/mm}^2$ e seu coeficiente de Poisson é $\nu = 0.3$. Por conta da simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da placa foi discretizado para a análise. Foram adotadas 4 malhas com $N_e = 4$ ($2 \times 2 \times 1$), 16 ($4 \times 4 \times 1$), 64 ($8 \times 8 \times 1$) e 256 ($16 \times 16 \times 1$) elementos.

Figura 33 - Placa quadrada engastada em suas 4 bordas submetida a carga distribuída uniforme



Fonte: Própria, 2019

A tabela abaixo apresenta os valores de deslocamento no centro da placa, para cada uma das malhas. São comparados os valores obtidos por análise via software ABAQUS® e via algoritmo próprio (SolidAnalisis) para o elemento sólido com modos incompatíveis.

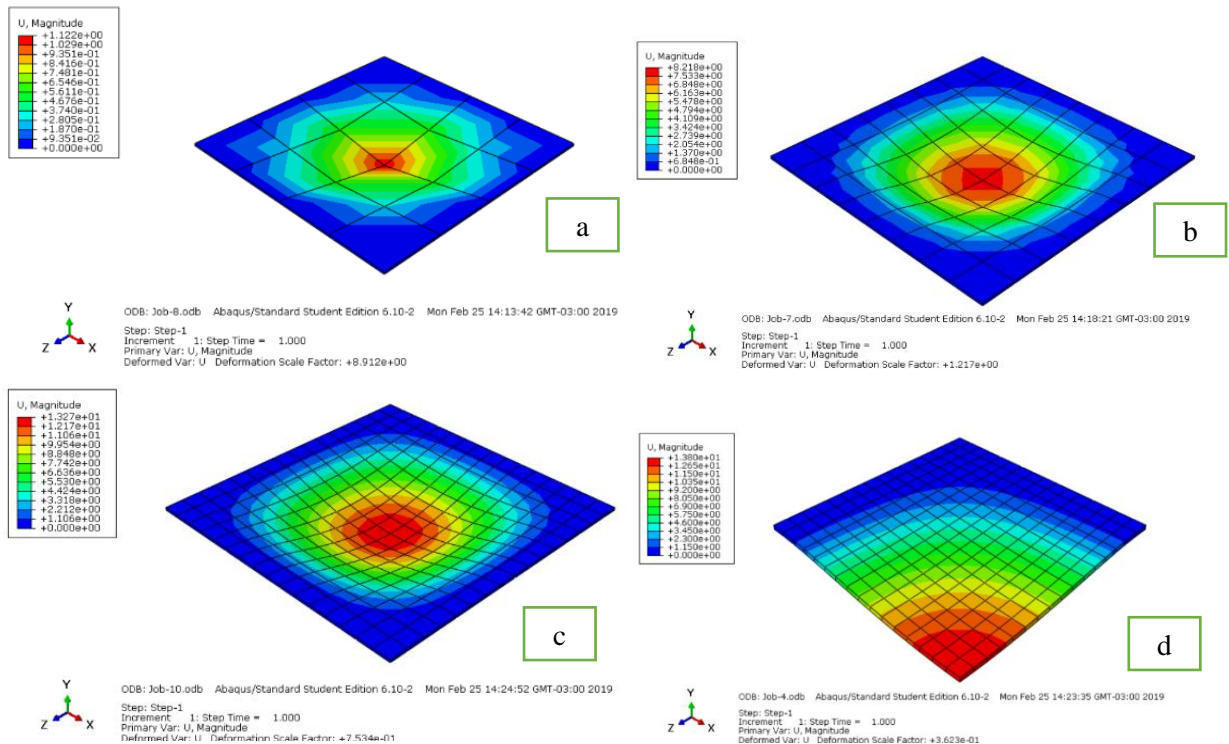
Tabela 13 - Valor dos deslocamentos

Placa quadrada engasada em suas 4 bordas submetida a carga distribuída uniforme		
Número de elementos	ABAQUS® (C3D8I)	SolidAnalisis (H8INCOMP)
4	-1.12214	-1.11874
16	-8.21769	-8.17216
64	-13.2725	-13.24335
256	-13.8002	-13.79233

Fonte: Própria, 2019

Os resultados da análise são quantitativamente próximos para todas as malhas, nas análises feitas via ABAQUS® e via SolidAnalisis, reforçando a eficácia do algoritmo desenvolvido, com erro relativo de 0.30% para os deslocamentos. A figura a seguir demonstram o gradiente de deslocamentos da placa após a aplicação do esforço, para todas as malhas, obtidos via software ABAQUS®.

Figura 34 - Gradiente de deslocamentos para a) malha Ne = 4; b) malha Ne = 16; c) malha Ne = 64; d) malha Ne = 256;



Fonte: Própria, 2019

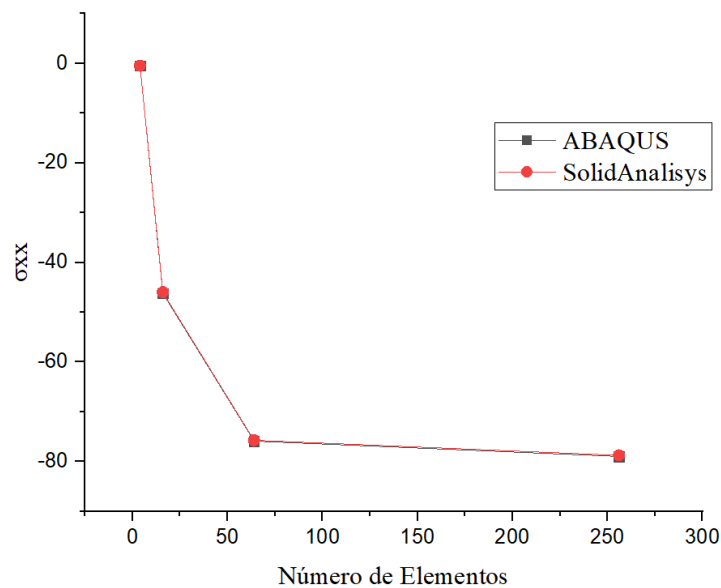
A tabela 14 apresenta valores para as tensões normais σ_{xx} para um ponto de Gauss de referência, em um dos elementos da malha. A seguir, a figura (35) apresenta um gráfico que relaciona os valores de tensão obtidos com a quantidade de elementos e a figura (36) traz o gradiente de tensões normais, para cada uma das malhas obtidos via ABAQUS®.

Tabela 14 - Valor de tensões normais σ_{xx} para o ponto de Gauss de referência

Placa quadrada engastada em suas 4 bordas submetida a carga distribuída uniforme		
Número de Elementos	ABAQUS®	SolidAnalisys (H8INCOMP)
4	-0.47987	-0.47340
16	-46.23817	-45.97794
64	-75.88675	-75.71861
256	-78.97318	-78.73466

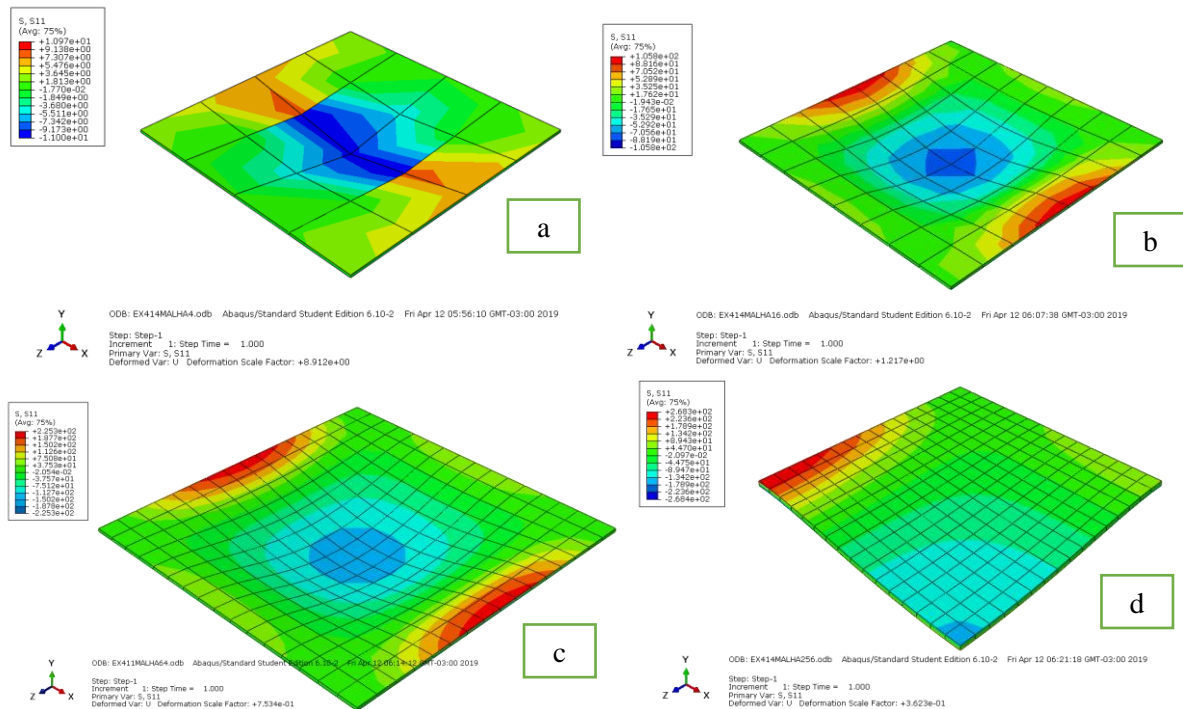
Fonte: Própria, 2019

Figura 35 - Tensão normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos



Fonte: Própria, 2019

Figura 36 - Gradiente de tensões normais σ_{xx} para a) malha Ne = 4 (2x2x1); b) malha Ne = 16 (4x4x1); c) malha Ne = 64 (8x8x1); d) malha Ne = 256 (16x16x1).



Fonte: Própria, 2019

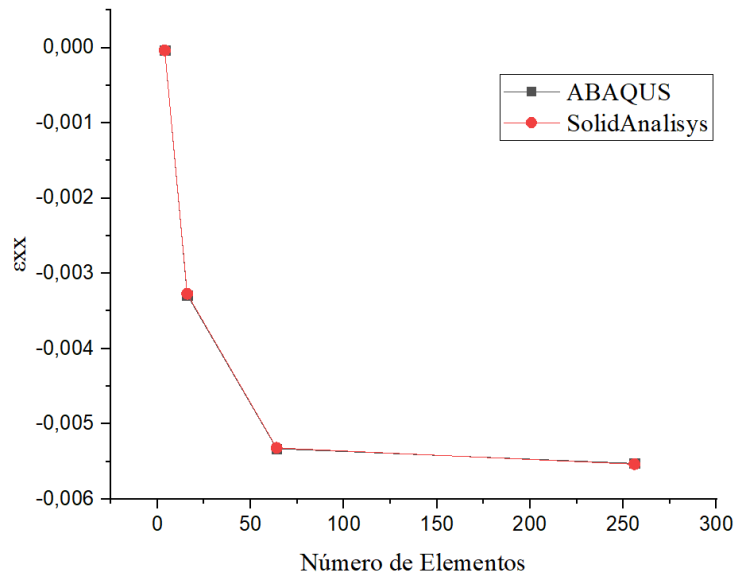
A tabela 15 exibe os valores para as deformações normais ϵ_{xx} , a figura (37) apresenta um gráfico que relaciona os valores de deformação obtidos com a quantidade de elementos e a figura (38) mostra o gradiente de deformações normais ϵ_{xx} , para cada uma das malhas obtidos via ABAQUS®.

Tabela 15 - Valor de deformações normais ϵ_{xx} para o ponto de Gauss de referência

Placa quadrada engastada em suas 4 bordas submetida a carga distribuída uniforme		
Número de Elementos	ABAQUS®	<i>SolidAnalysis</i> (H8INCOMP)
4	-3.57122E-05	-3.60654E-05
16	-0.00328	-0.00327
64	-0.00533	-0.00531
256	-0.00552	-0.00553

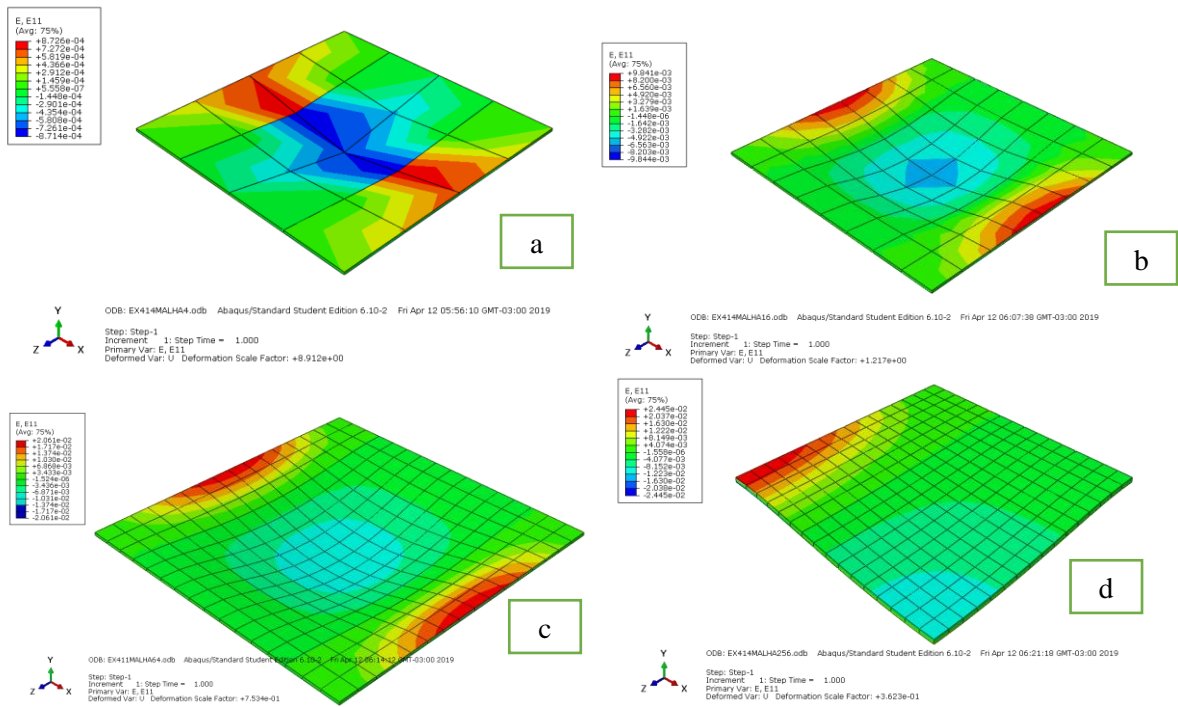
Fonte: Própria, 2019

Figura 37 - Deformação normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos



Fonte: Própria, 2019

Figura 38 - Gradiente de deformações normais ϵ_{xx} para a) malha $N_e = 4$ ($2 \times 2 \times 1$); b) malha $N_e = 16$ ($4 \times 4 \times 1$); c) malha $N_e = 64$ ($8 \times 8 \times 1$); d) malha $N_e = 256$ ($16 \times 16 \times 1$).



Fonte: Própria, 2019

Pode-se observar boa convergência em todos os resultados comparativos, o que demonstra a eficácia da rotina computacional desenvolvida para na análise de placas, em comparação direta com o software comercial ABAQUS®.

6 CONCLUSÃO

Comprova-se que a adição de modos incompatíveis ao elemento sólido hexaédrico de oito nós melhora de forma significativa o desempenho do elemento e, conseqüentemente, os resultados de sua aplicação na análise de placas. É correto afirmar que no estudo de superfícies, a utilização de elementos sólidos pode ser vantajosa dada a simplicidade de sua formulação (em relação a outros elementos como *casca/shell*), afinal a aplicação de um elemento mais simples acarreta um menor custo computacional, principalmente quando se trata de análises mais complexas. Além disso, em análises em que processos iterativos estão presentes (não-linearidades geométricas e dos materiais), elementos com menos graus de liberdade são preferíveis.

O desenvolvimento de ferramentas computacionais aprimoradas continua relevante, sobretudo, em problemas complexos que seriam inviáveis de solucionar analiticamente, ou que teriam uma solução analítica relativamente complexa, como no caso das placas estudadas aqui. A criação de algoritmos agrega grande praticidade na resolução de problemas extensos: que envolvem o tratamento de uma quantidade relativa de variáveis, deste modo, tornando possível a obtenção de resultados consistentes em uma quantidade de tempo baixa, se comparada à possível tentativa de resolução analítica

O algoritmo próprio, denominado *SolidAnalisis* apresenta ótimos resultados nos comparativos com os resultados obtidos via software ABAQUS®, demonstrando sua capacidade e a qualidade de sua implementação. Tendo em vista que softwares comerciais cobram um preço relativamente elevado para a compra de uma licença, ter um algoritmo próprio que executa as mesmas análises a um preço baixo é economicamente viável. A versão estudantil do ABAQUS® apresenta uma limitação de 1000 nós por análise e que outros softwares apresentam limitações de forma parecida ao usuário estudante, enquanto que na rotina desenvolvida não há essa limitação, permitindo a discretização de estruturas sem limites no número de nós ou elementos. Sendo assim, a rotina pode ser empregada de maneira didática, ao expor a metodologia de implementação do método e permitir a execução de análise estrutural de forma educacional.

O estudo de estruturas utilizando métodos numéricos, como o MEF, é de extrema importância no desenvolvimento das Engenharias. Com a difusão dos conhecimentos acerca das formulações e aplicação dos métodos é possível fomentar o desenvolvimento tecnológico

da área e melhorar de forma significativa o desempenho das análises e ferramentas disponíveis.

A rotina desenvolvida não está apenas restrita à análise de placas, mas se estende para todos os tipos de estrutura que possam ser discretizadas através do uso de elementos sólidos. Desta forma, estruturas como vigas, blocos e cascas podem ser analisadas. Há muitas formas de aprimoramento passíveis de implementação como a análise não-linear física e geométrica de estruturas, dentre outras tecnologias que podem aumentar a capacidade do algoritmo, permitindo-o executar análises ainda mais amplas. A implementação de outros elementos também pode ser executada como os elementos tetraédrico, de casca e outras formulações do elemento sólido hexaédrico. Existem muitas possibilidades de expansões e trabalhos futuros, em virtude da vasta gama de aplicações nas quais o Método dos Elementos Finitos pode ser empregado.

REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, mar. 2004.
- CUNHA, P. C. **Comportamento crítico e Pós-Crítico de Placas Dobradas**. PUC-RIO. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro, 2005.
- DA SILVA, S. S.; SILVA, W. T. M. **Aplicação do Método dos Modos Incompatíveis na Análise de Peças Fletidas**. Science & Engineering Journal. ISSN 1983 – 4071. Jan. – jun., 2017.
- DUARTE, L. A. F. **Análise Estática e Dinâmica, Linear e Não-Linear Geométrica, através de Elementos Hexaédricos de Oito Nós com um Ponto de Integração**. Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRS. Dissertação de Mestrado. Porto Alegre, 2002.
- FLORES, J. P. F. **Análise cinemática e dinâmica de mecanismos com recurso a meios computacionais**. Universidade do Minho. Guimarães, fev. 2000.
- KATTAN, P. **Matlab guide for finite elements: an interactive approach**. Second Edition. Springer. Berlin, 2008.
- RAMOS, A. P. REAL, M. V. ISOLDI, L. A. **Estudo numérico aplicado à melhoria do comportamento mecânico de placas finas de aço com enrijecedores submetidas à flexão**. V. 3, N. 3. Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão. Paranaguá, 2018.
- SIMONIAN, D. **Análise estrutural de lajes de concreto armado em edifícios**. Trabalho de conclusão de curso. Universidade Presbiteriana Mackenzie. São Paulo, 2009.
- SOUZA, R. M. **O método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor**. UFP. Belém, 2003.
- TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. McGraw-hill, 1959.

APÊNDICE A – RESULTADOS COMPLETOS PARA O EXEMPLO NUMÉRICO

4.1.3 (MALHA Ne = 48)

- a) Deformações para cada ponto de Gauss, em cada um dos elementos. Cada linha representa um elemento. A cada 6 colunas são representadas as 6 componentes de tensões (ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , ϵ_{xy} , ϵ_{yz} , ϵ_{zx}) para cada ponto de Gauss do elemento da linha.

showdef =

1.0e-03 *

Columns 1 through 3

```
-0.004438511662971 -0.004438511662873 0.008970204087446
0.004471240648125 -0.024895019355320 0.008505750469574
-0.024895019355389 0.004471240648207 0.008505750469563
0.024727498127136 0.024727498127122 -0.025924521154225
```

Columns 4 through 6

```
-0.008855737752506 0.153659584726549 0.153659584728117
-0.020584381324629 -0.147961968171716 0.128901176661747
-0.020584381324750 0.128901176661641 -0.147961968175127
-0.029687347113702 -0.140873444178191 -0.140873444177729
```

Columns 7 through 9

```
0.004415525434052 0.004415525433960 -0.008985975938637
-0.004382796448669 0.024895706364510 -0.008475899415271
0.024895706364462 -0.004382796448602 -0.008475899415290
-0.025063227592708 -0.025063227592710 0.025994958641475
```

Columns 10 through 12

```
0.008852336441112 0.153660761955124 0.153660761956692
0.020352307298303 -0.147969766990740 0.128893377842722
0.020352307298290 0.128893377842617 -0.147969766994152
0.029226600371975 -0.140831253751925 -0.140831253751464
```

Columns 13 through 15

```
-0.016534333137081 -0.004416244215547 0.008948659298694
0.016567062122391 -0.024996474918776 0.008546527767983
-0.035810026191547 0.004383515230177 0.008648478763684
0.035642504963283 0.025163996147109 -0.026021262005212
```

Columns 16 through 18

```
-0.020950577352707 -0.141949281091251 -0.148711405276893
-0.031366382033113 0.163197408695474 -0.140648841050347
-0.008489541724542 -0.188708045750713 0.154409021830085
-0.018905346405215 0.070491164437410 0.128676573534467
```

Columns 19 through 21

```
0.016509383160217 0.004437792881286 -0.009007520727389
```

-0.016476654174840 0.024794250801054 -0.008435122116863
 0.035544700945277 -0.004470521866632 -0.008333171121169
 -0.035712222173539 -0.024626729572723 0.025898217790488

Columns 22 through 24

0.020947176041312 -0.141950458319826 -0.148710228048318
 0.031134308006787 0.163205207514498 -0.140656639869371
 0.008257467698081 -0.188700246931688 0.154401223011060
 0.018444599663487 0.070448974011146 0.128718763960732

Columns 25 through 27

-0.004416244215666 -0.016534333137002 0.008948659298702
 0.004383515230123 -0.035810026191539 0.008648478763706
 -0.024996474918829 0.016567062122408 0.008546527767982
 0.025163996147112 0.035642504963304 -0.026021262005225

Columns 28 through 30

-0.020950577352644 -0.148711405276901 -0.141949281091602
 -0.008489541724411 0.154409021833745 -0.188708045750977
 -0.031366382033236 -0.140648841050518 0.163197408694806
 -0.018905346405214 0.128676573534032 0.070491164437559

Columns 31 through 33

0.004437792881356 0.016509383160232 -0.009007520727381
 -0.004470521866671 0.035544700945259 -0.008333171121139
 0.024794250801022 -0.016476654174818 -0.008435122116868
 -0.024626729572732 -0.035712222173503 0.025898217790477

Columns 34 through 36

0.020947176041250 -0.148710228048326 -0.141950458320177
 0.008257467698085 0.154401223014720 -0.188700246931953
 0.031134308006776 -0.140656639869543 0.163205207513831
 0.018444599663486 0.128718763960297 0.070448974011294

Columns 37 through 39

-0.016512065689777 -0.016512065689675 0.008868253081209
 0.016479336704390 -0.035911481754995 0.009079197013336
 -0.035911481754987 0.016479336704378 0.009079197013345
 0.036079002983259 0.036079002983291 -0.028227524169485

Columns 40 through 42

-0.033045416952845 0.160421708912198 0.160421708913408
 -0.019271542432895 -0.139173581309987 0.080841971961116
 -0.019271542433028 0.080841971961447 -0.139173581310405
 -0.008123345696726 -0.199058853274811 -0.199058853274636

Columns 43 through 45

0.016531650607522 0.016531650607558 -0.009087926944874
 -0.016564379592841 0.035443245381803 -0.007902452871511
 0.035443245381837 -0.016564379592848 -0.007902452871512
 -0.035275724153563 -0.035275724153516 0.023691955626225

Columns 46 through 48

0.033042015641450	0.160420531683624	0.160420531684833
0.019039468406568	-0.139165782490962	0.080849770780141
0.019039468406567	0.080849770780472	-0.139165782491380
0.007662598954998	-0.199101043701077	-0.199101043700902

- b) Tensões para cada ponto de Gauss, em cada um dos elementos. Cada linha representa um elemento. A cada 6 colunas são representadas as 6 componentes de tensões (σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx}) para cada ponto de Gauss do elemento da linha.

showten =

Columns 1 through 3

```
-0.033604816090528 -0.033604816089777 0.069539151220371
-0.034363696385317 -0.260258004104120 -0.003329005451093
-0.260258004104640 -0.034363696384670 -0.003329005451164
0.325964265016619 0.325964265016509 -0.063666652532312
```

Columns 4 through 6

```
-0.034060529817332 0.590998402794421 0.590998402800450
-0.079170697402421 -0.569084492968137 0.495773756391333
-0.079170697402885 0.495773756390927 -0.569084492981258
-0.114182104283471 -0.541820939146889 -0.541820939145113
```

Columns 7 through 9

```
0.033071781777560 0.033071781776851 -0.070016690320045
0.035730472513525 0.260949724922598 0.004245065078127
0.260949724922228 0.035730472514043 0.004245065077981
-0.332014230774348 -0.332014230774360 0.060741047950139
```

Columns 10 through 12

```
0.034047447850429 0.591002930596632 0.591002930602661
0.078278104993474 -0.569114488425923 0.495743760933547
0.078278104993421 0.495743760933141 -0.569114488439046
0.112410001430673 -0.541658668276636 -0.541658668274861
```

Columns 13 through 15

```
-0.196429012904084 -0.103212944276896 -0.000405994167351
0.128114602700694 -0.191604913000591 0.066418184589864
-0.406873464152389 -0.097692376292974 -0.064884964496767
0.474857186862830 0.394253272892258 0.000520517874411
```

Columns 16 through 18

```
-0.080579143664257 -0.545958773427890 -0.571966943372666
-0.120639930896589 0.627682341136437 -0.540957080962872
-0.032652083555929 -0.725800175964279 0.593880853192633
-0.072712870789287 0.271119863220808 0.494909898209488
```

Columns 19 through 21

```
0.195877881890797 0.103019495129787 -0.000405994167711
-0.127421525329428 0.190046974485137 -0.065563586421915
0.404618899333730 0.096809493088275 0.067096806514916
-0.473405943387461 -0.388132923381181 0.000520517874283
```

Columns 22 through 24

```
0.080566061697354 -0.545963301230101 -0.571962415570455
```

0.119747338487642 0.627712336594222 -0.540987076420658
 0.031759491146466 -0.725770180506492 0.593850857734845
 0.070940767936489 0.270957592350560 0.495072169079738

Columns 25 through 27

-0.103212944278007 -0.196429012903662 -0.000405994167480
 -0.097692376293533 -0.406873464152469 -0.064884964496741
 -0.191604913001222 0.128114602700602 0.066418184589635
 0.394253272892344 0.474857186863053 0.000520517874368

Columns 28 through 30

-0.080579143664017 -0.571966943372694 -0.545958773429240
 -0.032652083555427 0.593880853206710 -0.725800175965297
 -0.120639930897063 -0.540957080963532 0.627682341133871
 -0.072712870789283 0.494909898207816 0.271119863221382

Columns 31 through 33

0.103019495130856 0.195877881891439 -0.000405994167119
 0.096809493087810 0.404618899333423 0.067096806514976
 0.190046974484796 -0.127421525329358 -0.065563586422049
 -0.388132923381167 -0.473405943387094 0.000520517874288

Columns 34 through 36

0.080566061697114 -0.571962415570483 -0.545963301231451
 0.031759491146480 0.593850857748924 -0.725770180507511
 0.119747338487600 -0.540987076421319 0.627712336591659
 0.070940767936485 0.495072169078065 0.270957592351131

Columns 37 through 39

-0.266376726257375 -0.266376726256593 -0.071143504942097
 0.067035582126442 -0.335970713714976 0.010111430656798
 -0.335970713714884 0.067035582126384 0.010111430656901
 0.530975879469669 0.530975879469919 0.036310285987027

Columns 40 through 42

-0.127097757510942 0.617006572739224 0.617006572743877
 -0.074121317049595 -0.535283005038410 0.310930661388909
 -0.074121317050108 0.310930661390179 -0.535283005040020
 -0.031243637295099 -0.765610974133891 -0.765610974133217

Columns 43 through 45

0.265486010078280 0.265486010078562 0.068412336598317
 -0.064092845421183 0.335965808229923 0.002537360127508
 0.335965808230342 -0.064092845421082 0.002537360127656
 -0.541694951263110 -0.541694951262746 -0.088097414495506

Columns 46 through 48

0.127084675544038 0.617002044937014 0.617002044941666
 0.073228724640648 -0.535253009580624 0.310960656846695
 0.073228724640644 0.310960656847968 -0.535253009582232
 0.029471534442301 -0.765773245004143 -0.765773245003469

- c) Forças nodais internas. Cada linha representa um elemento. A cada 3 colunas são representadas as forças nodais de um dos 8 nós do elemento, em cada um dos eixos.

showforces =

Columns 1 through 3

```
-32.017324167378405 -32.017324167966152 -0.133775595636607
27.672535572426458 -16.201945264089858 0.134674178590472
-16.201945264063731 27.672535574146014 0.134674178676955
36.946087312831274 36.946087312595616 1.179840480946261
```

Columns 4 through 6

```
27.907260544072546 26.063166488236810 -0.009770890194821
-33.220975343901614 54.301151442774952 0.887326873127162
36.026905325388739 -36.945005595370652 -0.855355651598731
-14.322560024174848 2.242855387176659 1.465964978008859
```

Columns 7 through 9

```
-36.027987042122206 -36.027987042578708 0.530870822313167
24.181617814980253 -2.242855387175730 -1.465964978005895
-2.242855387308198 24.181617815659688 -1.465964978034804
59.727703550933811 59.727703550798680 -0.000000000000308
```

Columns 10 through 12

```
26.063166488387246 27.907260543804739 -0.009770890144702
-36.945005596098831 36.026905325354129 -0.855355651643356
54.301151442655609 -33.220975342126550 0.887326873057413
2.242855387308909 -14.322560024405222 1.465964978021804
```

Columns 13 through 15

```
32.020148609685783 32.020148610271931 -0.241554649092538
-27.670550533108440 16.211150987322824 0.391946413126163
16.211150987303917 -27.670550534830191 0.391946413181505
-36.929064755452259 -36.929064755216849 0.587686417207017
```

Columns 16 through 18

```
-27.909921461793648 -26.059214897260414 -0.177894232216167
33.230147709695444 -54.300589391004557 1.461382779830741
-36.024953643510635 36.930146471676018 -0.403738042167390
14.327688752455806 -2.231135930294039 0.150271572884495
```

Columns 19 through 21

```
36.023871926554236 36.023871927016039 0.219789667179453
-24.177916096402182 2.231135930293492 -0.150271572848259
2.231135930423711 -24.177916097083351 -0.150271572865974
-59.761574293479242 -59.761574293341297 -4.99999999969010
```

Columns 22 through 24

```
-26.059214897405568 -27.909921461524224 -0.177894232207785
36.930146472408921 -36.024953643475257 -0.403738042177030
-54.300589390889428 33.230147707929021 1.461382779751025
-2.231135930423461 14.327688752686438 0.150271572900886
```

- d) Deslocamentos nodais. Cada linha apresenta um grau de liberdade de um dos nós dos elementos da estrutura. A cada 3 colunas são apresentados os deslocamentos nos 3 eixos para um nó.

	0	-0.044681508277712
showdesloc =	0	-0.000000000000000
	0.000000000000000	0
0.000000000000004	-0.000000000000000	-0.000000000000000
0.000000000000001	-0.000000000000000	-0.000000000000000
0.000000000000005	-0.000000000000001	0
-0.000000000000004	0.000000000000002	0
0.000000000000000	0	-0.001721564873815
0.000000000000023	-0.000907155486407	0
-0.000000000000003	-0.000907155486407	-0.044682501516251
-0.000000000000002	-0.022384978367360	0.001709961172493
0.000000000000000	0.000907070453627	0
0.000000000000004	0.000907070453627	-0.044681508277702
-0.000000000000002	-0.022385154951664	-0.000000000000000
0.000000000000000	0.000000000000000	-0.000000000000000
-0.000000000000005	-0.001721564873816	-0.089714440731020
-0.000000000000001	-0.044682501516261	-0.000000000000000
-0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
0	0.001709961172491	-0.089718606233557

- e) Reações nodais. Cada linha apresenta um grau de liberdade de um dos nós dos elementos da estrutura. A cada 3 colunas são apresentados os deslocamentos nos 3 eixos para um nó.

	0	-0.000000000000000
showreactions =	0.000000000000000	0
	-0.000000000000000	-0.000000000000000
0.000000000000001	-0.000000000000000	-0.000000000000000
0.000000000000005	-0.000000000000001	0
-0.000000000000004	0.000000000000002	0
0.000000000000000	0	0.0000000000000936
0.000000000000023	-0.000000000000726	0
-0.000000000000003	0.000000000000639	-0.000000000010446
-0.000000000000002	0.000000000002052	0.000000000000058
0.000000000000000	0.000000000000049	0
0.000000000000004	-0.000000000000024	0.000000000015162
-0.000000000000002	0.000000000016709	-0.000000000000000
0.000000000000000	0.000000000000000	-0.000000000000000
-0.000000000000005	0.000000000000936	0.000000000002341
-0.000000000000001	-0.000000000012500	-0.000000000000000
-0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
0	-0.000000000000709	-4.99999999996207
0	-0.000000000004612	

APÊNDICE B – DADOS DA MALHA $N_e = 4$, EXEMPLO 4.1.1

a) Coordenadas Nodais

```
nodeCoordinates = [0    0    0 ;
  0    0    1 ;
  25   0    0;
  25   0    1;
  50   0    0;
  50   0    1;
  0    25   0;
  0    25   1;
  25   25   0;
  25   25   1;
  50   25   0;
  50   25   1;
  0    50   0;
  0    50   1;
  25   50   0;
  25   50   1;
  50   50   0;
  50   50   1];
```

b) Conectividades Nodais

```
elementNodes = [ 1  3  9  7  2  4  10  8;
  3  5  11  9  4  6  12  10;
  7  9  15  13  8  10  16  14;
  9  11  17  15  10  12  18  16];
```

c) Vetor de forças externas

```
ff(54)=-5;
```

d) Condições de contorno – Deslocamentos restritos

```
Bcdof = [ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
  23 24 25 26 27 28 29 30 21 32 33 34 35 36 37 38];
```