



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO,  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA

COORDENAÇÃO DO CURSO SUPERIOR DE  
BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL



Geovany Ferreira Barrozo

**Estudo comparativo do dimensionamento de um pavimento composto por lajes  
maciças por meio de análises elástica, plástica e numérica**

Cajazeiras  
2020

Geovany Ferreira Barrozo

**Estudo comparativo do dimensionamento de um pavimento composto por lajes maciças por meio de análises elástica, plástica e numérica**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba-*Campus* Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Sebastião Simão da Silva

Cajazeiras  
2020

**IFPB / Campus Cajazeiras**  
**Coordenação de Biblioteca**  
**Biblioteca Prof. Ribamar da Silva**  
**Catálogo na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593**

B278e

Barrozo, Geovany Ferreira

Estudo comparativo do dimensionamento de um pavimento composto por lajes maciças por meio de análises elástica, plástica e numérica / Geovany Ferreira Barrozo; orientador Sebastião Simão da Silva.- Cajazeiras, 2020.-

90 f.: il.

Orientador: Sebastião Simão da Silva.

TCC (Bacharelado em Eng. Civil) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2020.

1. Concreto armado com aço 2. Dimensionamento de Lajes maciças  
3. Método dos elementos finitos I. Título

691.328.1(0.067)

Geovany Ferreira Barrozo

**Estudo comparativo do dimensionamento de um pavimento composto por lajes maciças por meio de análises elástica, plástica e numérica**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

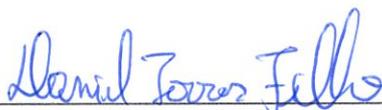
Aprovado em 28 de janeiro de 2020.

**BANCA EXAMINADORA**



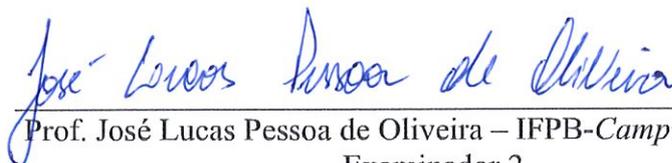
---

Prof. Dr. Sebastião Simão da Silva – IFPB-Campus Cajazeiras  
Orientador



---

Prof. Daniel Torres Filho – IFPB-Campus Cajazeiras  
Examinador 1



---

Prof. José Lucas Pessoa de Oliveira – IFPB-Campus Cajazeiras  
Examinador 2

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha mãe em especial,  
pela dedicação e apoio em todos os momentos  
difíceis.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus.

A minha mãe, Natália, por todo auxílio e esforço investido na minha formação. Aos meus irmãos, Maria Nadiana, Maria Nayara, José Weliton e José Augusto por sempre me apoiarem.

Aos meus amigos e colegas de curso, que sempre me incentivaram ao longo destes anos na Universidade, em especial, Alice, Alex, Alexandra, Alison, André, Assis, Aurélia Emanuela, Bianca, Breno e Leonardo.

Ao professor, Sebastião Simão da Silva, por suas orientações e dedicação à realização desse trabalho.

Ao Instituto Federal da Paraíba, IFPB, *Campus* Cajazeiras pela oportunidade de concretização desse trabalho, além de todo o suporte no decorrer da graduação.

## RESUMO

A elaboração do projeto de uma estrutura de concreto armado é executada com base nos resultados de uma análise estrutural, sendo a partir desta que o engenheiro define a técnica de dimensionamento mais adequada a cada tipo de edificação. Devido à grande importância delegada à análise estrutural é que este trabalho se propõe a realizar a análise, dimensionamento e detalhamento de um pavimento de lajes maciças, por meio de três metodologias distintas, consistindo estas em uma análise elástica, fundamentada na Teoria de Grelhas para apoios deformáveis, uma análise plástica baseada na Teoria das Linhas de Ruptura, e uma análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), realizada como o emprego do software SAP2000. Essa pesquisa tem como principal objetivo avaliar o consumo de aço demandado por cada metodologia de análise empregada, e estabelecer estudo comparativo acerca dos esforços solicitantes determinados pelos três métodos de análise estrutural. Desse modo, ao analisar os resultados gerados, verificou-se grandes discrepâncias entre os momentos fletores apresentados em cada metodologia de análise, sendo o modelo plástico aquele que apresentou os menores esforços. Além disso, quanto ao consumo de aço, constatou-se uma considerável economia para o modelo plástico em comparação ao modelo elástico. Realizando ainda uma comparação, tendo o modelo numérico como parâmetro, observou-se um consumo de aço 11,52% maior, para o cálculo elástico.

**Palavras-Chave:** Dimensionamento de lajes maciças; Análise elástica; Análise plástica; Método dos Elementos Finitos.

## ABSTRACT

The design of a reinforced concrete structure is carried out based on the results of a structural analysis, based on which the engineer defines the most suitable design technique for each type of building. Due to the great importance delegated to the structural analysis, this work proposes to carry out the analysis, dimensioning and detailing of a floor of solid slabs, through three different methodologies, consisting of an elastic analysis, based on the Theory of Grids for supports deformable, a plastic analysis based on the Theory of Rupture Lines, and a numerical analysis by the Finite Element Method (FEM), performed using the SAP2000 software. This research has as main objective to evaluate the steel consumption demanded by each analysis methodology used, and to establish a comparative study about the soliciting efforts determined by the three methods of structural analysis. Thus, when analyzing the results generated, there were large discrepancies between the bending moments presented in each analysis methodology, with the plastic model being the one that presented the least efforts. In addition, regarding steel consumption, there was considerable savings for the plastic model compared to the elastic model. Also making a comparison, using the numerical model as a parameter, an 11.52% higher consumption of steel was observed for the elastic calculation.

**Keywords:** Dimensioning of solid slabs; Elastic analysis; Plastic analysis; Finite Element Method.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Vão teórico .....	16
Figura 2 – Laje apoiada em contorno rígido.....	18
Figura 3 – Laje armada em cruz .....	19
Figura 4 – Laje armada em uma direção .....	19
Figura 5 – Convenção para as condições de apoio .....	20
Figura 6 – Condições de apoio das lajes armadas em uma direção.....	20
Figura 7 – Descontinuidade do diagrama de momentos fletores .....	23
Figura 8 – Aplicação da teoria de grelhas para apoios flexíveis .....	25
Figura 9 – Condições de contorno das lajes retangulares.....	25
Figura 10 – Casos de vinculação .....	30
Figura 11 – Laje para padronização .....	31
Figura 12 – Convenção de laje apoiada em linha de interrupção .....	33
Figura 13 – Seção transversal homogeneizada.....	35
Figura 14 – Malha de elementos finitos .....	39
Figura 15 – Elementos finitos para análise bidimensional .....	39
Figura 16 – Elemento <i>shell</i> .....	41
Figura 17 – Planta baixa do pavimento-tipo.....	43
Figura 18 – Forma do pavimento-tipo.....	44
Figura 19 – Seção transversal para cálculo das armaduras das lajes.....	46
Figura 20 – Distribuição da armadura na seção transversal .....	48
Figura 21 – Detalhe das armaduras negativas .....	49
Figura 22 – Momentos fletores (análise elástica).....	51
Figura 23 – Detalhamento das armaduras positivas (análise elástica) .....	52
Figura 24 – Detalhamento das armaduras negativas (análise elástica) .....	53
Figura 25 – Momentos fletores do pré-dimensionamento elástico.....	56
Figura 26 – Configuração comum dos momentos negativos .....	57
Figura 27 – Configuração eventual dos momentos negativos.....	58
Figura 28 – Momentos fletores (análise plástica).....	60
Figura 29 – Detalhamento das armaduras positivas (análise plástica) .....	61
Figura 30 – Detalhamento das armaduras negativas (análise plástica) .....	62
Figura 31 – Modelo para análise do pavimento .....	63

Figura 32 – Aproximação em apoios extremos .....	64
Figura 33 – Configuração deformada .....	65
Figura 34 – Momentos fletores na direção $x$ .....	66
Figura 35 – Momentos fletores na direção $y$ .....	67
Figura 36 – Momentos fletores máximos (análise numérica) .....	69
Figura 37 – Detalhamento das armaduras positivas (análise numérica) .....	70
Figura 38 – Detalhamento das armaduras negativas (análise numérica).....	71
Figura 39 – Momentos fletores máximos obtidos a partir das análises elástica, plástica e numérica .....	72

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficientes para o cálculo da flecha .....	22
Tabela 2 – Reações de apoio nos lados maiores da laje .....	23
Tabela 3 – Valores de K .....	38
Tabela 4 – Carregamentos atuantes sobre as lajes .....	42
Tabela 5 – Taxas mínimas da armadura de flexão $\rho_{min}$ (%) .....	48
Tabela 6 – Classificação das lajes (análise elástica).....	49
Tabela 7 – Momentos fletores e flechas (análise elástica) .....	50
Tabela 8 – Quadro de aço (análise elástica) .....	54
Tabela 9 – Resumo das barras (análise elástica) .....	54
Tabela 10 – Casos de vinculação do pré-dimensionamento elástico.....	54
Tabela 11 – Momentos obtidos no pré-dimensionamento elástico .....	55
Tabela 12 – Momentos fletores do cálculo plástico e flechas .....	59
Tabela 13 – Quadro de aço (análise plástica) .....	59
Tabela 15 – Momentos fletores e flechas pelo MEF .....	65
Tabela 16 – Quadro de aço (análise numérica) .....	68
Tabela 17 – Resumo das barras (análise numérica) .....	68
Tabela 18 – Comparativo dos momentos positivos.....	73
Tabela 19 – Comparativo dos momentos negativos.....	74
Tabela 20 – Comparativo do consumo de aço.....	76

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ELU – Estado Limite Último

MEF – Método dos Elementos Finitos

SAP2000 – Software de elementos finitos para modelagem, análise e dimensionamento de estruturas

TLR – Teoria das Linhas de Ruptura

NBR – Norma Brasileira Regulamentadora

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas

ELS-DEF – Estado Limite de Deformações Excessivas

EXCEL – Software editor de planilhas

DF – Diferença

## LISTA DE SÍMBOLOS

$h$  - espessura da laje

$l$  - vão teórico da laje

$w(x, y)$  - deslocamento transversal do plano médio da placa

$p$  - carregamento distribuído por unidade de área

$x, y$  - Direções principais do plano

$D$  - rigidez à flexão da placa

$\partial$  - notação para derivada parcial

$l_x$  - vão teórico na direção  $x$

$l_y$  - vão teórico na direção  $y$

$M_x$  - momento fletor na direção  $x$

$M_y$  - momento fletor na direção  $y$

$E$  - módulo de elasticidade longitudinal

$\nu$  - coeficiente de Poisson

$A_{sx}$  - área de aço na direção  $x$

$A_{sy}$  - área de aço na direção  $y$

$M$  - momento fletor positivo

$M_e$  - momento fletor negativo no engaste

$W_0$  - flecha inicial

$p_0$  - carregamento quase permanente

$k$  - coeficiente para cálculo da flecha

$E_{cs}$  - módulo secante de deformação longitudinal do concreto

$\alpha_i$  - coeficiente para o cálculo de  $E_{cs}$

$f_{ck}$  - resistência característica a compressão do concreto

$E_c$  - módulo de deformação longitudinal tangente do concreto

$\alpha_E$  - coeficiente do agregado graúdo

$f_{cm}$  - resistência média a compressão do concreto

$g$  - carregamento permanente

$q$  - carregamento acidental

$W_\infty$  - flecha final

$\varphi$  - coeficiente de fluência do concreto

$X$  - momento negativo da ligação entre duas lajes  
 $R_y$  - reação de apoio na direção  $y$   
 $R_{ye}$  - reação de apoio no engaste da direção  $y$   
 $\beta$  - coeficiente de redistribuição  
 $p_x$  - quinhão de carga na direção  $x$   
 $p_y$  - quinhão de carga na direção  $y$   
 $k_x, k_y$  - coeficientes para o cálculo dos quinhões de carga  
 $\lambda$  - relação entre os vãos  $l_y$  e  $l_x$   
 $w_c$  - coeficiente para cálculo da flecha  
 $m_x$  - coeficiente para cálculo do momento fletor na direção  $x$   
 $m_y$  - coeficiente para cálculo do momento fletor na direção  $y$   
 $r_x$  - coeficiente para cálculo da reação de apoio na direção  $x$   
 $r_y$  - coeficiente para cálculo da reação de apoio na direção  $y$   
 $m_{xe}$  - coeficiente para cálculo do momento fletor no engaste da direção  $x$   
 $r_{ye}$  - coeficiente para cálculo da reação de apoio no engaste da direção  $y$   
 $m_{ye}$  - coeficiente para cálculo do momento fletor no engaste da direção  $y$   
 $r_{xe}$  - coeficiente para cálculo da reação de apoio no engaste da direção  $x$   
 $W$  - flecha da laje  
 $M_{xe}$  - momento fletor no engaste da direção  $x$   
 $M_{ye}$  - momento fletor no engaste da direção  $y$   
 $R_x$  - reação de apoio na direção  $x$   
 $R_{xe}$  - reação de apoio no engaste da direção  $x$   
 $m$  - momento de plastificação positivo  
 $m'$  - momento de plastificação negativo  
 $\mu$  - índice de ortotropia  
 $u$  - coeficiente adimensional para cálculo do momento fletor  
 $a$  - flecha  
 $\alpha$  - coeficiente adimensional para cálculo da flecha  
 $r$  - reação de apoio por unidade de comprimento  
 $\rho_r$  - coeficiente adimensional para cálculo da reação de apoio  
 $a$  - menor vão  
 $b$  - maior vão

$m_1, m_2, m_3, m_4$  - momentos negativos da análise plástica

$m_e, m_d, m_s, m_i$  - momentos negativos da análise plástica dispostos dos lados esquerdo, direito, superior e inferior do painel de laje

$m_{ls}$  - momento limite superior

$m_{li}$  - momento limite inferior

$f_1, f_2$  - funções para cálculo do momento de plastificação

$a^*$  - comprimento de interrupção da armadura negativa na direção do menor vão

$b^*$  - comprimento de interrupção da armadura negativa na direção do maior vão

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_e, x_d$  - comprimentos das armaduras negativas da análise plástica na direção x

$y_1, y_2, y_3, y_4, y_s, y_i$  - comprimentos das armaduras negativas da análise plástica na direção y

$x_1$  - profundidade da linha neutra no Estádio I

$b$  - largura da seção transversal

$h$  - altura da seção transversal

$A_s$  - área de aço da armadura tracionada

$A'_s$  - área de aço da armadura comprimida

$\alpha_e$  - coeficiente para cálculo da linha neutra

$E_s$  - módulo de deformação longitudinal do aço

$I_1$  - momento de inércia no Estádio I

$d$  - altura útil

$d'$  - distância do centroide da armadura até a borda tracionada

$\rho$  - taxa de armadura

$M_r$  - momento de fissuração da laje

$I$  - momento de inércia

$f_{ctm}$  - resistência média a tração do concreto

$x_2$  - profundidade da linha neutra no Estádio II

$I_2$  - momento de inércia no Estádio II

$x_e$  - profundidade efetiva da linha neutra

$I_e$  - momento de inércia efetivo

$p_\ell$  - ação de longa duração

$g_k$  - carregamento permanente característico

$q_k$  - carregamento acidental característico

$\psi_2$  - fator de redução de combinação quase permanente para o estado limite de serviço

$a_{i\ell}$  - flecha elástica imediata proveniente das ações de longa duração  
 $a_{\ell}$  - flecha total proveniente das ações de longa duração  
 $p_i$  - ação de curta duração  
 $a_i$  - flecha elástica proveniente das ações de curta duração  
 $a_{cs}$  - flecha proveniente da retração  
 $K$  - coeficiente para cálculo de  $a_{cs}$   
 $\emptyset$  - diâmetro das barras  
 $c$  - cobrimento nominal das armaduras  
 $\gamma_f, \gamma_c, \gamma_s$  - coeficientes parciais de segurança  
 $\alpha_c$  - coeficiente de redução devido ao efeito Rüsçh  
 $f_{cd}$  - resistência a compressão de cálculo do concreto  
 $\sigma_{cd}$  - tensão normal de cálculo do concreto  
 $f_{yk}$  - tensão de escoamento característica do aço  
 $f_{yd}$  - tensão de escoamento de cálculo do aço  
 $M_k$  - momento fletor de serviço  
 $M_d$  - momento fletor solicitante de cálculo  
 $\mu_r$  - momento fletor reduzido  
 $\xi_{lim}$  - profundidade relativa da linha neutra  
 $\lambda$  - parâmetro do diagrama retangular de tensões no concreto  
 $\mu_{lim}$  - momento limite reduzido  
 $\xi$  - parâmetro adimensional  
 $A_{s,min}$  - área de aço mínima  
 $\rho_{min}$  - taxa de armadura mínima  
 $A_{s1}$  - área da seção transversal de uma barra  
 $s$  - espaçamento entre barras  
 $n$  - número de barras  
 $\Delta$  - comprimento de ancoragem da armadura negativa  
 $l_m$  - maior entre os menores vãos de lajes contíguas

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>2 REVISÃO DE LITERATURA.....</b>	<b>16</b>
2.1 GENERALIDADES.....	16
2.2 ANÁLISE ELÁSTICA.....	17
2.2.1 Cálculo de lajes armadas em uma direção.....	19
2.2.2 Cálculo das lajes armadas em cruz.....	23
2.2.2.1 Análise elástica por teoria de grelhas.....	24
2.3 ANÁLISE PLÁSTICA.....	27
2.3.1 Teoria das linhas de ruptura.....	27
2.3.2 Cálculo de lajes retangulares pela TLR.....	28
2.3.2.1 Pré-dimensionamento elástico.....	30
2.3.2.2 Cálculo dos momentos de plastificação.....	31
2.3.2.3 Comprimentos das armaduras negativas.....	33
2.3.2.4 Verificação da flecha.....	34
2.4 ANÁLISE NUMÉRICA.....	38
2.4.1 Método dos Elementos Finitos.....	38
2.4.2 Emprego do software SAP2000.....	40
<b>3 METODOLOGIA.....</b>	<b>42</b>
<b>4 ANÁLISE ESTRUTURAL E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>46</b>
4.1 PROCEDIMENTOS PARA DIMENSIONAMENTO E DETALHAMENTO.....	46
4.2 RESULTADOS DA ANÁLISE ELÁSTICA.....	49
4.3 RESULTADOS DA ANÁLISE PLÁSTICA.....	54
4.4 RESULTADOS DA ANÁLISE NUMÉRICA.....	63
4.5 COMPARAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	72

<b>5 CONCLUSÃO.....</b>	<b>77</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>79</b>
<b>APÊNDICE A – COMPRIMENTO DAS ARMADURAS NEGATIVAS DA ANÁLISE PLÁSTICA.....</b>	<b>81</b>
<b>ANEXO A – FUNÇÕES APROXIMADAS DE PINHEIRO (1988).....</b>	<b>82</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A análise estrutural constitui-se na etapa de maior relevância do processo de projeto de uma estrutura, sendo a partir dela que o engenheiro obtém os resultados necessários à aplicação da técnica de dimensionamento mais adequada. Entretanto dependendo das condições de contorno e do tipo de solicitação em que a estrutura se encontra submetida, deve-se ter cautela para a escolha do tipo de análise a se empregar.

A opção por um procedimento de análise inapropriado pode provocar um dimensionamento equivocado, acarretando uma estrutura superarmada. Segundo Gonzalez (1997) as peças superarmadas oferecem riscos à sua utilização, devendo ser evitadas e desse modo, empregam-se nas lajes usuais armaduras que normalmente não apresentam essas desvantagens. A periculosidade das peças superarmadas advém do fato destas estarem sujeitas a uma ruptura brusca, sem escoamento, em uma situação de carregamento excepcional no Estado Limite Último (ELU), além de consistir em um dimensionamento antieconômico.

Parte essencial de qualquer edifício de múltiplos pavimentos, as lajes são responsáveis por receber e suportar os esforços provenientes das cargas de utilização e transmiti-los às vigas e pilares. Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2017) sob a perspectiva da análise estrutural, as lajes são placas de concreto de superfície plana, estando principalmente sujeitas a ações normais a seu plano médio, em que a dimensão perpendicular a superfície, denominada espessura, é muito menor que as demais.

Existem variados tipos de laje, como maciças, nervuradas, lisas e pré-moldadas. A utilização de um determinado modelo está convencionada à melhor concepção estrutural empregada em função do que se delimita no projeto arquitetônico. Parâmetros como a forma de utilização da edificação e as condições impostas pelo ambiente, são preponderantes nesse processo de decisão.

As lajes maciças têm sua utilização amplamente difundida nas edificações residenciais, em função dos pequenos vãos, que corriqueiramente, nestas se empregam. De acordo com o que se descreve no trabalho de Araújo (2014), as lajes maciças podem ser definidas como placas de espessura uniforme, apoiadas ao longo do seu contorno, sendo os apoios constituídos por vigas ou alvenarias. Também pode-se atribuir o uso frequente das lajes maciças ao domínio já bastante consolidado das suas técnicas de execução, além da eficiência destas ao atender, de

maneira satisfatória, diversos requisitos de utilização do imóvel, como aqueles inerentes aos aspectos econômicos, estéticos, de conforto e segurança.

No meio acadêmico dispõe-se de vasta bibliografia, contendo diversos métodos para o dimensionamento dos pavimentos de lajes maciças, e entre estes, os mais disseminados são a teoria de grelhas, a teoria das linhas de ruptura, analogia da grelha equivalente, o método das diferenças finitas e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Neste trabalho, serão utilizadas algumas dessas metodologias, como base para o estabelecimento de um estudo comparativo.

Segundo Araújo (2014) a teoria de grelhas consiste em um método simplificado em que se admite um comportamento elástico-linear do material da laje. Na utilização deste, o cálculo dos esforços solicitantes depende das condições de apoio predefinidas. De acordo com Guessi (2017), no processo de cálculo por meio da teoria das linhas de ruptura, procede-se o dimensionamento considerando o equilíbrio da laje em seu iminente momento de colapso, ou seja, no ELU.

Com o advento da tecnologia computacional, os métodos numéricos têm sido cada vez mais utilizados, em razão do melhor desempenho destes quanto a agilidade na execução e precisão dos resultados. Segundo Oñate (2009) a diferença conceitual entre os métodos analíticos e os métodos numéricos reside em que os primeiros buscam por meio de expressões matemáticas a solução exata para um problema, no entanto estas são possíveis apenas para alguns casos particulares (que representam simplificações grosseiras da realidade), já os métodos numéricos visam fornecer uma solução aproximada para as equações que governam o problema.

O avanço da informática e popularização do computador, proporcionou o desenvolvimento de algoritmos poderosos e progressivamente mais sofisticados. Desse modo tornou-se propícia a produção de softwares comerciais que fazem uso de métodos numéricos para análise de estruturas de concreto armado, a exemplo do SAP2000, que emprega o MEF para determinação de esforços e simulação do comportamento das estruturas quando submetidas a uma situação de carregamento.

Com inúmeras aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento, o MEF vem obtendo cada vez mais destaque nas análises de estruturas de concreto armado. Segundo Kattan (2008), o método dos elementos finitos é um procedimento numérico para resolver problemas de engenharia. O processo de cálculo por meio do MEF consiste na discretização de um domínio

em elementos de dimensões reduzidas e geometria definida, ligados entre si por meio de nós, em que se calculam os esforços solicitantes a partir das interações destes.

Uma análise estrutural apropriada propicia a execução de uma estrutura que atende a todos os seus requisitos de utilização, de maneira segura, e permite melhor aproveitamento dos recursos despendidos para sua construção. Em razão da disponibilidade de diversos modelos de análise estrutural, já difundidos na literatura, cabe ao profissional responsável elencar a metodologia que melhor se adequa as condições da sua estrutura.

Cada metodologia de dimensionamento apresenta particularidades que influenciam diretamente sobre os custos de execução. Os gastos despendidos com os diversos insumos inerentes ao processo, como o consumo de aço das armaduras por exemplo, estão relacionados à magnitude dos esforços solicitantes da estrutura, sendo estes provenientes das análises estruturais e variáveis de acordo com o método de cálculo empregado. Dessa maneira, qualquer possibilidade de economia aliada a qualidade e segurança, torna-se relevante no atual contexto de crise em que se encontra o competitivo mercado de trabalho da construção civil.

Em face a essa atribuição do engenheiro quanto à escolha do modelo mais apropriado de análise estrutural, esse trabalho se propõe a promover um estudo comparativo entre algumas metodologias empregadas para o dimensionamento de um pavimento de lajes maciças. A pesquisa consistirá no confronto dos resultados obtidos a partir da análise elástica, fundamentada na teoria de grelhas para apoios flexíveis; da análise plástica, baseada na teoria das linhas de ruptura; com os encontrados na análise linear numérica pelo MEF, realizada com o auxílio do software SAP2000.

Para que se possa efetuar a comparação dessas metodologias, serão realizados o dimensionamento e detalhamento das armaduras do pavimento para todos os métodos de análise empregados nesse estudo, e com base nestes será levantado o consumo de aço despendido pelos três processos, de modo a determinar a economia de armaduras proveniente de cada método. Além disso, esse estudo promoverá uma avaliação dos esforços solicitantes em cada situação de cálculo, com o intuito de identificar as possíveis divergências entre seus resultados.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: No capítulo introdutório são abordados o tema e objetivos da pesquisa, a explanação dos fundamentos teóricos é descrita no capítulo 2, são apontados no capítulo 3 todos os procedimentos de execução das análises. Além disso no capítulo 4, são apresentados e discutidos os resultados de todos os dimensionamentos. Por fim, no capítulo 5 são expressas as conclusões acerca do estudo.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

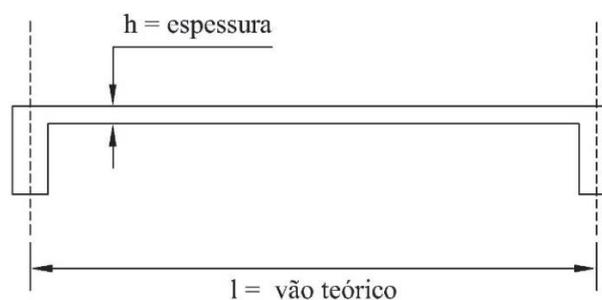
### 2.1 GENERALIDADES

As lajes de concreto armado de um modo geral podem ser analisadas como placas, isso deve-se as suas características geométricas e a forma com a qual incidem os carregamentos que sobre elas atuam. Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2017), as lajes são elementos estruturais de superfície plana, consistindo em placas de concreto, em que a dimensão perpendicular a seu plano médio, denominada de espessura, é relativamente pequena quando comparada as demais, estando sujeitas majoritariamente a ações normais ao seu plano.

Como elementos estruturais de fundamental importância nas edificações de múltiplos pavimentos, as lajes são responsáveis por receber, resistir e transmitir para as vigas todos os carregamentos provenientes de sua utilização, como equipamentos, móveis e pessoas. Desse modo, empregam-se nas construções usuais diversos tipos de lajes, como maciças, nervuradas, lisas e pré-moldadas. Este trabalho aborda apenas as metodologias de dimensionamento aplicadas às lajes maciças, sendo estas idealizadas como placas de concreto com espessura constante, totalmente ou parcialmente apoiadas.

Em qualquer edificação com mais de um nível de piso, cada pavimento é subdividido em painéis de lajes, segundo a disposição das vigas que são definidas no projeto estrutural. Todo painel retangular de laje maciça apresenta propriedades específicas como vão teórico, espessura e condições de contorno. Diante disso, seguindo as recomendações de Araujo (2014), considera-se para esse estudo, a distância entre os centros dos apoios, representados pelas vigas, como sendo o vão teórico da laje, conforme ilustra a Figura 1.

**Figura 1 – Vão teórico**



**Fonte: Araújo, 2014**

## 2.2 ANÁLISE ELÁSTICA

O dimensionamento elástico de lajes maciças consiste na aplicação dos fundamentos da teoria de flexão de placas para a determinação dos esforços solicitantes que sobre elas atuam. De acordo com as proposituras de Kirchhoff-Love exploradas no trabalho de Szilard (1974), pode-se efetuar o cálculo dos esforços, tensões e deformações que atuam sobre as lajes maciças de concreto armado, admitindo-se algumas hipóteses simplificadoras:

- A placa é constituída por material elástico linear, homogêneo e isótropo;
- A placa possui espessura muito menor que as outras duas dimensões;
- As deflexões e rotações da superfície média deformada são pequenas em relação a espessura da placa e a unidade, respectivamente;
- Seções planas permanecem planas após as deformações;
- Deflexões da placa são normais ao plano indeformado e tensões normais à superfície média são desprezíveis.

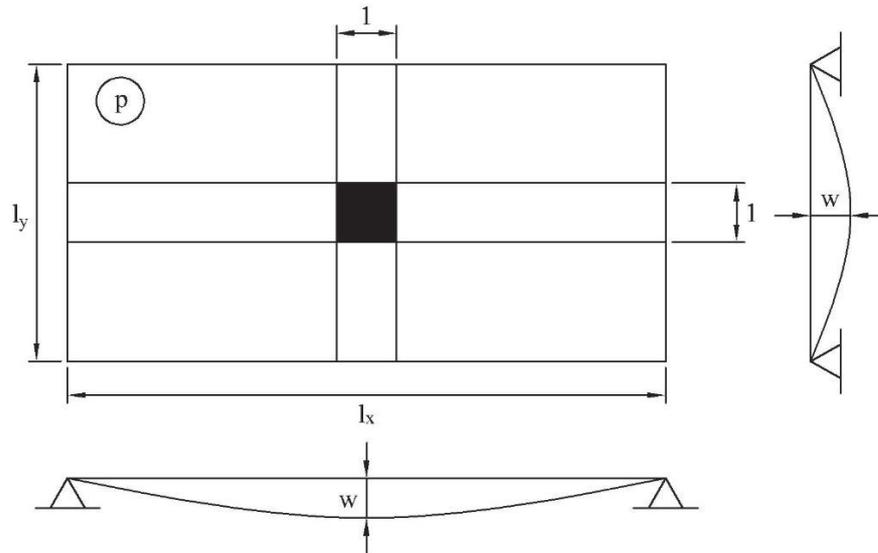
A partir da consideração dessas hipóteses e das relações entre tensões e deformações de materiais elásticos estabelecidas por meio da lei de Hooke, obtém-se a equação diferencial da placa:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (1)$$

Em que  $w = w(x, y)$  é a deformada ou deslocamento transversal do plano médio da placa, sendo  $p(x, y)$  um carregamento normal a este.

Conforme foi abordado por Araújo (2014), serão apresentadas as considerações necessárias ao cálculo elástico das lajes maciças, fundamentadas na teoria de flexão de placas. Primeiramente, analisa-se a laje representada na Figura 2, em que estão indicadas duas faixas de largura unitária nas direções  $x$  e  $y$  cruzando-se no seu centro, em que  $p$  corresponde a uma carga uniformemente distribuída por unidade de área. Desse modo admitindo-se que os apoios sejam indeformáveis em todo seu contorno, obtém-se flechas nulas sobre este.

**Figura 2 – Laje apoiada em contorno rígido**



Fonte: Araújo, 2014

Observando-se a figura acima e diante do que foi exposto, percebe-se que as flechas nas direções  $x$  e  $y$  no centro da laje são iguais, porém suas curvaturas são distintas pois  $l_x > l_y$ . No entanto, com base na teoria de flexão das placas tem-se que os momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  nas direções  $x$  e  $y$ , são expressos por meio das seguintes expressões:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

Em que

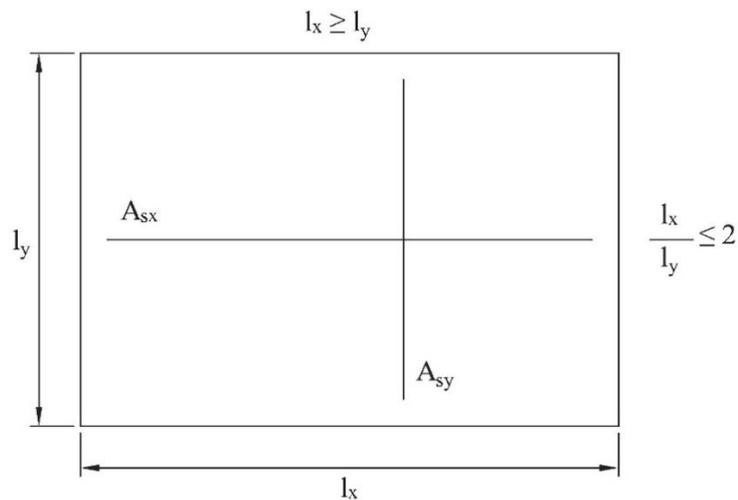
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4)$$

Tem-se para as equações anteriores,  $h$  a espessura e  $D$  a rigidez à flexão da placa, sendo  $E$  e  $\nu$  o módulo de deformação longitudinal e o coeficiente de Poisson do material, respectivamente. Além disso, os termos  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  e  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  expressam as curvaturas segundo as direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Convencionando-se que para  $l_x$  muito maior que  $l_y$ , a curvatura  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  seja desprezível, a partir das equações (2) e (3) obtém-se  $M_x = \nu M_y$ . Como para o concreto  $\nu = 0,2$ , a última expressão pode ser reescrita do seguinte modo  $M_x = M_y/5$ .

Com base nas análises realizadas no trabalho de Araújo (2014), conclui-se que o momento fletor é maior na direção do menor vão. A partir dessa constatação pode-se classificar as lajes em armadas em cruz e armadas em uma direção. Essa distinção é decorrente da relação

entre os vãos. Para lajes em que a relação entre o maior e o menor vão é inferior a 2, denomina-se como armada em cruz, conforme a figura 3.

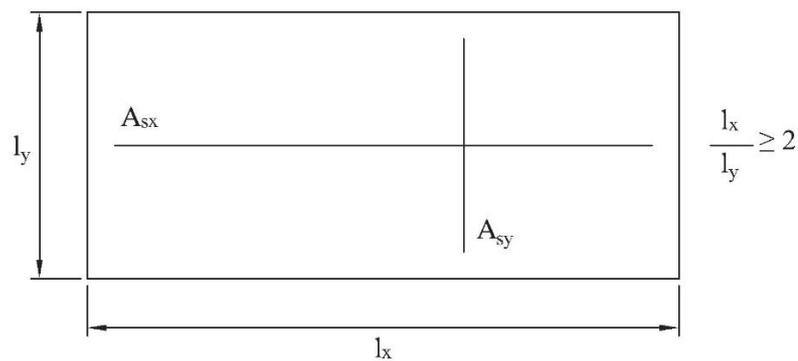
**Figura 3 – Laje armada em cruz**



Fonte: Araújo, 2014

Para as lajes armadas em cruz, calcula-se a área de aço das armaduras nas duas direções. Quanto às lajes nas quais a relação entre o maior e o menor vão é superior a 2, atribui-se a classificação de laje armada em uma direção, em que calcula-se a área de aço apenas para o momento de maior intensidade na direção do menor vão e para a outra direção define-se uma armadura de distribuição, como pode-se verificar na Figura 4.

**Figura 4 – Laje armada em uma direção**



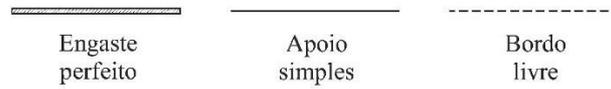
Fonte: Araújo, 2014

### 2.2.1 Cálculo de lajes armadas em uma direção

No trabalho de Araújo (2014) apresenta-se o procedimento tradicional para cálculo de lajes maciças armadas em uma direção. Para sua utilização deve-se atribuir convenções para as

condições de apoio de cada painel de laje. As simbologias adotadas e suas respectivas significações estão representadas na Figura 5.

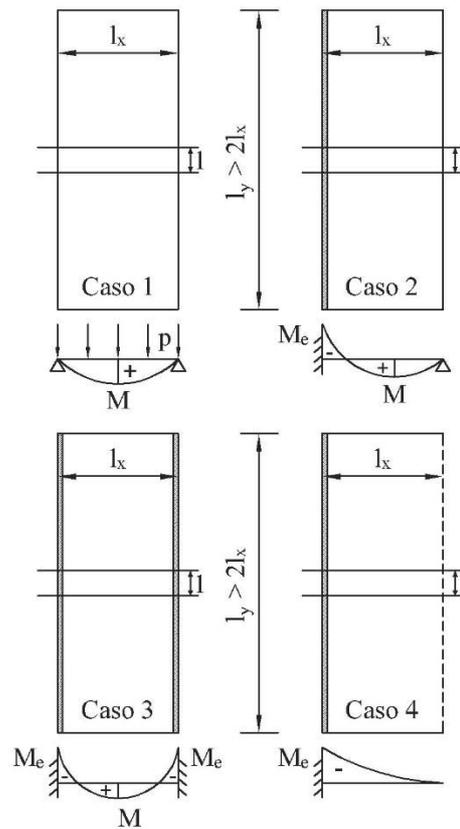
**Figura 5 – Convenção para as condições de apoio**



Fonte: Araújo, 2014

Segundo Bastos (2015), o cálculo do momento fletor de maior intensidade nas lajes armadas em uma direção é realizado de modo análogo ao de uma viga, considerando-se esta como uma faixa de largura unitária na direção do menor vão. Para realizar esse procedimento, deve-se primeiramente atentar-se às condições de contorno de cada laje. De acordo com a classificação adotada por Araújo (2014), para os apoios de cada painel de laje tem-se quatro casos de condições de apoio, como ilustrados na Figura 6.

**Figura 6 – Condições de apoio das lajes armadas em uma direção**



Fonte: Araújo, 2014

Em cada caso de condição de contorno utiliza-se uma expressão para o cálculo do momento fletor positivo  $M$  e do momento negativo no engaste  $M_e$ , conforme especifica-se a seguir:

a) Caso 1: Laje simplesmente apoiada em dois lados

$$M = \frac{pl_x^2}{8} \quad (5)$$

b) Caso 2: Laje simplesmente apoiada em um lado e engastada no outro

$$M = \frac{pl_x^2}{14,22} ; M_e = -\frac{pl_x^2}{8} \quad (6)$$

c) Caso 3: Laje engastada em dois lados

$$M = \frac{pl_x^2}{24} ; M_e = -\frac{pl_x^2}{12} \quad (7)$$

d) Caso 4: Laje em balanço

$$M_e = -\frac{pl_x^2}{2} \quad (8)$$

Nas expressões acima  $p$  representa o carregamento distribuído a que a laje está submetida, expresso em  $\text{kN/m}^2$ ; já  $l_x$  é o comprimento do menor vão da laje, dado em metros. Para os momentos fletores utiliza-se a unidade  $\text{kNm/m}$ , devido a faixa de largura unitária.

De modo análogo as considerações feitas para o cálculo dos momentos, procede-se a determinação da flecha inicial  $W_0$ , obtida a partir das considerações do Estado Limite de Serviço, por meio da expressão a seguir:

$$W_0 = \frac{k}{384} \frac{p_0 l_x^4}{D} ; D = \frac{E_{cs} h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (9)$$

Em que  $h$  é a espessura da laje e, em conformidade com a NBR 6118 (ABNT, 2014), o módulo secante de deformação longitudinal do concreto,  $E_{cs}$ , pode ser obtido com o emprego das equações a seguir:

$$E_{cs} = \alpha_i E_c \quad (10)$$

Onde,

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (11)$$

Sendo,

$$E_c = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} , \text{ MPa, se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (12)$$

$$E_c = \alpha_E 21500 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3} , \text{ MPa, se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \quad (13)$$

Na equação (10),  $E_c$  é o módulo de deformação longitudinal tangente do concreto, obtido a partir das expressões (12) e (13), e contido nestas, tem-se  $\alpha_E$  como um coeficiente relacionado ao tipo de agregado graúdo utilizado na produção do concreto, sendo  $\alpha_E = 1,0$  para o agregado granítico. Já o termo  $f_{cm}$  refere-se a resistência média a compressão do concreto, dado por:

$$f_{cm} = f_{ck} + 12,5 \text{ MPa} \quad (14)$$

Em que  $f_{ck}$  é resistência característica à compressão do concreto. Retomando a expressão (9), o coeficiente  $k$  está relacionado as condições de apoio, conforme o explicitado na Tabela 1.

**Tabela 1 – Coeficientes para o cálculo da flecha**

<b>Caso</b>	<b>k</b>	<b>Local</b>
1	5	Centro
2	2	Centro
3	1	Centro
4	48	Extremo

Fonte: Araujo, 2014

Ainda na equação (9), tem-se  $p_0$  como o carregamento proveniente da combinação quase permanente, sendo resultado da expressão abaixo:

$$p_0 = g + 0,3q \quad (15)$$

Em que,  $g$  é a carga permanente, e  $q$  a carga acidental atuante sobre a laje. Para inserir o efeito da fluência do concreto deve-se realizar o cálculo da flecha final,  $W_\infty$ , dada pela relação:

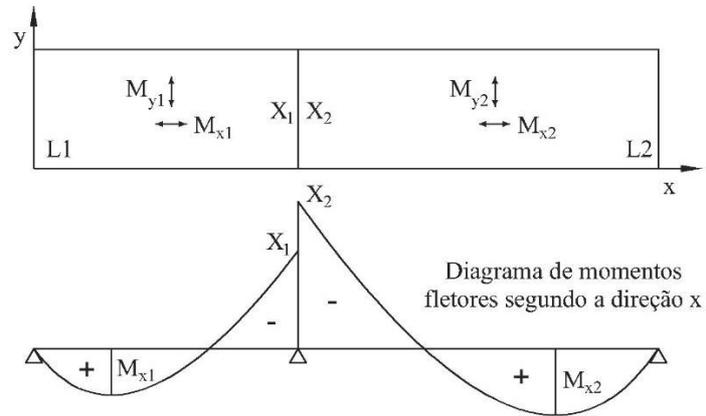
$$W_\infty = (1 + \varphi)W_0 \quad (16)$$

Em que  $\varphi$  é o coeficiente de fluência do concreto, sendo para esta pesquisa, assim como no trabalho de Araújo (2014), atribuído o valor de 2,5. Desse modo, para que se cumpram as exigências do Estado Limite de Deformações Excessivas (ELS-DEF), deve-se atender aos seguintes critérios para as flechas admissíveis:

- $W_\infty \leq l/250$ , para lajes não em balanço;
- $W_\infty \leq l/125$ , para lajes em balanço.

No caso de lajes com um bordo em comum, o procedimento de cálculo adotado conduz a momentos negativos com valores diferentes, provocando uma descontinuidade no diagrama de momentos fletores, conforme pode-se verificar na Figura 7.

**Figura 7 – Descontinuidade do diagrama de momentos fletores**



**Fonte: Araújo, 2014**

Segundo Bastos (2015), para as lajes contínuas deve ser considerado engastamento perfeito em seus apoios intermediários. Desse modo, faz-se necessária então uma compatibilização desses momentos negativos, para essa correção utiliza-se a expressão abaixo, em que adota-se o momento  $X$  para ligação entre as duas lajes, como sendo o valor da média dos momentos calculados para cada laje ou 80% do valor do maior momento encontrado.

$$X = \begin{cases} (X_1 + X_2)/2 \\ 0,8\max(X_1, X_2) \end{cases} \quad (17)$$

Conforme os casos de condições de contorno, são também definidas em Araújo (2014) as expressões para a determinação das reações de apoio nos maiores lados de cada painel de laje, a Tabela 2 apresenta essas relações.

**Tabela 2 – Reações de apoio nos lados maiores da laje**

<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>	<b>Caso 4</b>
$R_y = \frac{pl_x}{2}$	$R_y = \frac{3pl_x}{8}$	$R_{ye} = \frac{pl_x}{2}$	$R_{ye} = pl_x$
	$R_{ye} = \frac{5pl_x}{8}$		

**Fonte: Araujo, 2014**

### 2.2.2 Cálculo das lajes armadas em cruz

O cálculo das lajes armadas em cruz leva em consideração os esforços de flexão segundo a direção dos dois vãos e, desse modo, trata-se de uma formulação mais complexa. Entretanto existem várias teorias disponíveis na literatura para o dimensionamento desse tipo de estrutura, sendo mais difundidas as análises pela teoria de flexão de placas, teoria de grelhas, analogia de

grelhas, teoria das linhas de ruptura, método das diferenças finitas e Método dos Elementos Finitos.

### 2.2.2.1 Análise elástica por teoria de grelhas

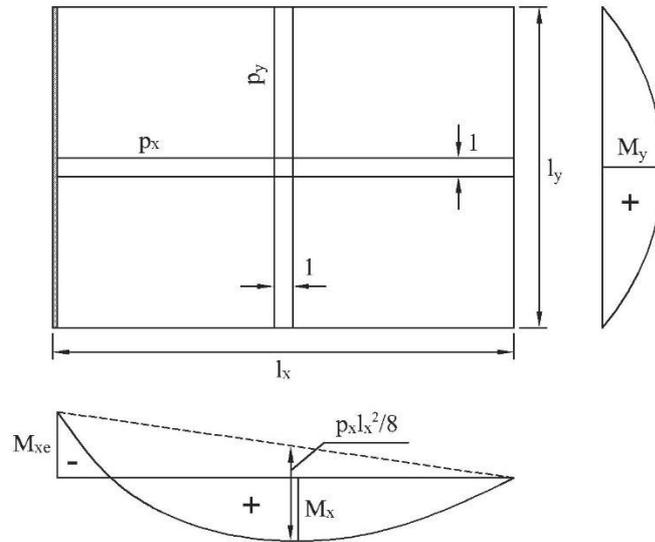
Com o intuito de representar a estrutura com um comportamento mais próximo da realidade e baseando-se em Araújo (2014), será apresentado o estudo do cálculo das lajes armadas em cruz por meio da teoria de grelhas com redistribuição de momentos, em que se considera as deformações dos apoios das lajes. O emprego dessa metodologia justifica-se pela considerável flexibilidade das vigas dos edifícios convencionais.

Para realizar o cálculo preciso dos momentos levando em consideração a redistribuição dos esforços devido a deslocabilidade dos apoios faz-se necessário uma análise mais ampla do pavimento contíguo às suas vigas de apoio, o que pode ser feito com o auxílio do MEF. Entretanto, de maneira aproximada, para que se possa considerar a redistribuição de esforços para lajes sob apoios deformáveis, realiza-se a compatibilização dos momentos negativos em lajes contínuas, adotando-se sempre para o momento no engaste o valor do maior momento positivo na direção considerada, para as duas lajes que compartilham a mesma borda.

A adoção dessa compatibilização aproximada segundo Araújo (2014), advém da impossibilidade de se estabelecer o valor correto para o coeficiente de redistribuição  $\beta$ , pois este depende da relação entre a rigidez das vigas e a rigidez das lajes, dos vãos e dos carregamentos aplicados sobre as vigas, além de outros fatores. O coeficiente é utilizado para levar em consideração as deformações das vigas de modo a promover uma redistribuição dos esforços, este deve apresentar valor menor que 1, e ser aplicado para a redução dos momentos negativos.

A análise por teoria de grelhas baseia-se no exame de duas faixas de largura unitária que se cruzam no centro do painel, sendo dispostas uma em cada direção e, desse modo, admite-se que a flecha no centro da laje é igual para as duas faixas. Considera-se que para um carregamento  $p$  aplicado sobre a laje, tenha-se a divisão deste em quinhões de carga definidos segundo cada direção, sendo aqui representados por  $p_x$  e  $p_y$  e ilustrados na Figura 8.

**Figura 8 – Aplicação da teoria de grelhas para apoios flexíveis**



Fonte: Araújo, 2014

De acordo com a fundamentação pelo qual foram propostos os quinhões de carga devem obedecer a relação abaixo.

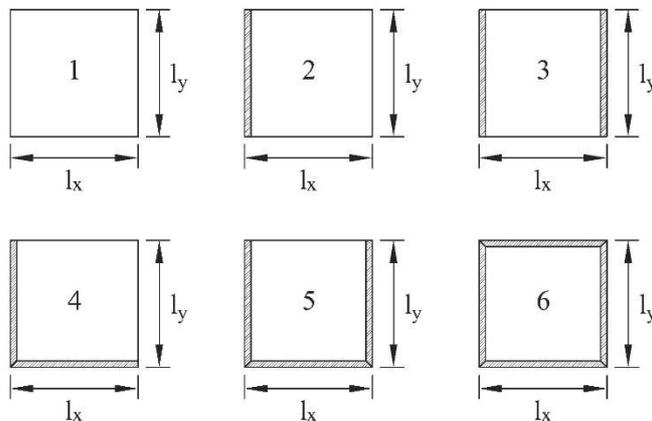
$$p = p_x + p_y \quad (18)$$

Dessa forma, cada quinhão representa uma parcela do carregamento  $p$ , o que fica explícito a partir das expressões a seguir.

$$p_x = k_x p ; p_y = k_y p \quad (19)$$

Após definir os quinhões de carga, pode-se de acordo com as condições de contorno determinar as expressões para o cálculo da flecha, momentos e reações das lajes. Para as lajes retangulares distingue-se seis casos de condições de contorno, discriminados na Figura 9.

**Figura 9 – Condições de contorno das lajes retangulares**



Fonte: Araújo, 2014

Conforme cada caso de condição de contorno, são apresentadas as expressões para o cálculo dos esforços em lajes retangulares armadas em cruz com apoios flexíveis.

Caso 1:

$$k_x = \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4}; w_c = \frac{5k_x}{384}; m_x = \frac{k_x}{8}; m_y = \frac{k_y\lambda^2}{8}; r_x = \frac{k_y\lambda}{2}; r_y = \frac{k_x}{2} \quad (20)$$

Caso 2:

$$k_x = \frac{5\lambda^4}{3 + 5\lambda^4}; w_c = \frac{3k_x}{384}; m_x = \frac{k_x}{12}; m_y = \frac{k_y\lambda^2}{8}; m_{xe} = -m_x; \quad (21)$$

$$r_x = \frac{k_y\lambda}{2}; r_y = \frac{5k_x}{12}; r_{ye} = \frac{7k_x}{12}$$

Caso 3:

$$k_x = \frac{5\lambda^4}{2 + 5\lambda^4}; w_c = \frac{2k_x}{384}; m_x = \frac{k_x}{16}; m_y = \frac{k_y\lambda^2}{8}; m_{xe} = -m_x; \quad (22)$$

$$r_x = \frac{k_y\lambda}{2}; r_y = \frac{k_x}{2}$$

Caso 4:

$$k_x = \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4}; w_c = \frac{3k_x}{384}; m_x = \frac{k_x}{12}; m_y = \frac{k_y\lambda^2}{12}; m_{xe} = -m_x; \quad (23)$$

$$m_{ye} = -m_y; r_x = \frac{5k_y\lambda}{12}; r_{xe} = \frac{7k_y\lambda}{12}; r_y = \frac{5k_x}{12}; r_{ye} = \frac{7k_x}{12}$$

Caso 5:

$$k_x = \frac{3\lambda^4}{2 + 3\lambda^4}; w_c = \frac{2k_x}{384}; m_x = \frac{k_x}{16}; m_y = \frac{k_y\lambda^2}{12}; m_{xe} = -m_x; \quad (24)$$

$$m_{ye} = -m_y; r_x = \frac{5k_y\lambda}{12}; r_{xe} = \frac{7k_y\lambda}{12}; r_y = \frac{k_x}{2}$$

Caso 6:

$$k_x = \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4}; w_c = \frac{2k_x}{384}; m_x = \frac{k_x}{16}; m_y = \frac{k_y\lambda^2}{16}; m_{xe} = -m_x; \quad (25)$$

$$m_{ye} = -m_y; r_x = \frac{k_y\lambda}{2}; r_y = \frac{k_x}{2}$$

Em que,

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x}; \quad k_y = 1 - k_x \quad (26)$$

De posse dos coeficientes calculados a partir das expressões anteriores para o respectivo caso de condição de contorno, utiliza-se das equações abaixo para, por fim, calcular os momentos fletores, reações de apoio e flecha das lajes.

Para o cálculo da flecha:

$$W = w_c \frac{pl_x^4}{D}; \quad D = \frac{E_{cs}h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (27)$$

Momentos fletores no centro da laje:

$$M_x = m_x pl_x^2; \quad M_y = m_y pl_x^2 \quad (28)$$

Momentos fletores negativos:

$$M_{xe} = m_{xe} pl_x^2; \quad M_{ye} = m_{ye} pl_x^2 \quad (29)$$

Reações nos lados apoiados:

$$R_x = r_x pl_x; \quad R_y = r_y pl_x \quad (30)$$

Reações nos lados engastados:

$$R_{xe} = r_{xe} pl_x; \quad R_{ye} = r_{ye} pl_x \quad (31)$$

## 2.3 ANÁLISE PLÁSTICA

O dimensionamento plástico de lajes maciças de concreto armado é realizado a partir do emprego da Teoria das Linhas de Ruptura (TLR) ou teoria das charneiras plásticas. Em virtude disso, serão apresentadas as principais hipóteses concernentes a fundamentação da TLR, além da adaptação de uma marcha de cálculo que foi desenvolvida no trabalho de Gonzalez (1997), com intuito de promover maior praticidade para execução do cálculo plástico.

### 2.3.1 Teoria das linhas de ruptura

Na aplicação da TLR o cálculo dos esforços solicitantes das lajes aos quais a seção de concreto armado resiste, outrora denominados momentos últimos de plastificação, é realizado no instante de iminente ruptura, ou seja, no ELU, esses momentos são obtidos a partir de uma configuração das linhas de plastificação ou linhas de ruptura.

Segundo Guessi (2017) para a aplicação da TLR admite-se que as lajes são subdivididas em painéis que quando estão sob ação da carga de ruptura, giram em torno de linhas, nas quais

atuam os momentos últimos de plastificação, segundo a sua direção normal. Desse modo, conhecendo-se a posição das linhas de ruptura, e estabelecendo-se as condições de equilíbrio estático de contorno nos painéis por elas delimitados, pode-se obter a relação entre o momento de ruptura e a carga última da laje.

Gonzalez (1997) afirma em seu trabalho que a TLR consiste na aplicação do Teorema Cinemático ou do Limite Superior do cálculo plástico que determina um valor de carga maior ou igual à carga de ruína, mas que em geral é inferior ao encontrado nos resultados experimentais, devido a reserva de resistência decorrente do endurecimento do aço e efeitos de membrana das lajes. Com base nessa idealização, devem ser admitidas algumas hipóteses de cálculo:

- O material é considerado rígido-plástico;
- As lajes devem ser subarmadas;
- Ao longo e nas vizinhanças de cada linha de ruptura o momento fletor é considerado constante e igual ao momento máximo que a laje pode resistir;
- Não ocorre ruptura prematura por cisalhamento ou punção;
- As reservas de resistência são desprezadas.

As lajes devem ser dimensionadas em sua configuração de ruína, sendo esta aquela em que ocorre o maior valor para o momento de plastificação. Para se determinar a configuração das linhas de rupturas, deve-se levar em consideração alguns fatores:

- Condições de apoio – Ao longo da extensão das bordas engastadas formam-se linhas de rupturas superiores ou negativas, que correspondem aos momentos negativos;
- Natureza e distribuição das cargas – Cargas distribuídas resultam em linhas de ruptura retilíneas, enquanto que cargas concentradas acarretam em linhas de ruptura curvas;
- Disposição das armaduras – As condições de serviço da laje são definidas de acordo com a disposição de armaduras adotada.

### **2.3.2 Cálculo de lajes retangulares pela TLR**

Apresenta-se em sequência, a marcha de cálculo desenvolvida por Gonzalez (1997), em que se realiza a determinação dos momentos de plastificação em lajes retangulares por meio da TLR, definindo também os comprimentos das armaduras negativas, bem como as verificações

para as flechas. Para aplicação desse roteiro, supõem-se conhecidos os carregamentos acidentais e permanentes.

Para os casos mais usuais de lajes retangulares, encontradas em edifícios convencionais, tem-se:

$l_x$  = lado menor;

$l_y$  = lado maior;

$p$  = carga total uniformemente distribuída.

No caso de alvenarias ou divisórias construídas sobre lajes retangulares com bordas engastadas ou simplesmente apoiadas, as cargas lineares provenientes destas devem ser convertidas em cargas uniformemente distribuídas, ressaltando-se algumas situações críticas, definidas por Langendonk (1966), em que se é preciso evitar algum tipo de ruptura localizada.

A realização dos procedimentos para o cálculo plástico exige como dados de entrada os momentos elásticos provenientes do dimensionamento executado a partir da teoria de grelhas. Neste trabalho, assim como na obra de Pinheiro (1988), serão utilizados para esse pré-dimensionamento as funções aproximadas obtidas a partir das tabelas de Czerny (1976). Para sua utilização no cálculo plástico, os valores encontrados para os momentos elásticos negativos são tomados como reduzidos pela metade.

Para o entendimento dos procedimentos da análise plástica faz-se necessário a apresentação dos conceitos de anisotropia e ortotropia. Segundo Guarda (1995), uma laje é considerada isótropa se apresentar a mesma resistência a flexão, em qualquer que seja a direção da seção transversal considerada, caso isso não ocorra a laje é denominada de anisótropa. Além disso, conceitua-se laje ortótropa, uma laje anisótropa armada em duas direções e que apresente os momentos de plastificação positivos  $m_x$  e  $m_y$  e negativos  $m'_x$  e  $m'_y$ , de tal modo que  $m_y = \mu m_x$  e  $m'_y = \mu m'_x$ , em que  $\mu$  é considerado como índice de ortotropia.

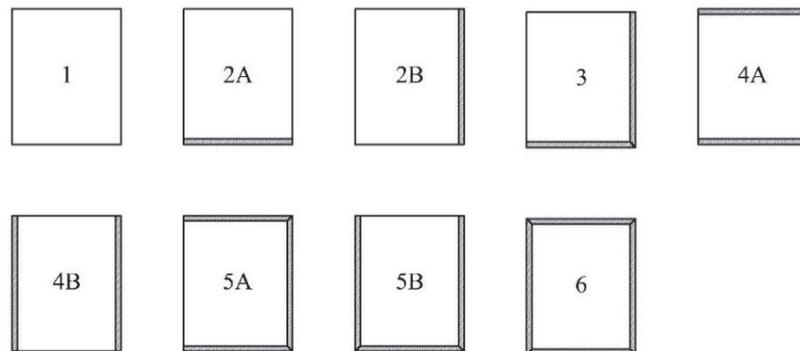
As lajes são consideradas ortótropas para o cálculo de placas retangulares de concreto por meio da TLR, porém essas lajes podem ser calculadas como se fossem isótropas, desde que suas dimensões e os carregamentos aplicados sejam corrigidos a partir de expressões em que se utilizam o índice de ortotropia, as quais não necessitam ser apresentadas aqui, pois já foram incluídas quando do desenvolvimento do roteiro de cálculo elaborado por Gonzalez (1997).

### 2.3.2.1 Pré-dimensionamento elástico

A aplicação da TLR depende de um pré-dimensionamento elástico, pelo qual se obtém os momentos negativos, que deverão ser reduzidos pela metade, e os momentos positivos para determinação do índice de ortotropia. No trabalho de Gonzalez (1997), são apresentadas as funções aproximadas desenvolvidas na obra de Pinheiro (1988) com base nas tabelas de Czerny (1976), especificadas no anexo A, para a execução do cálculo elástico que precede a análise plástica pela TLR.

Em sua pesquisa, Pinheiro (1988) define nove casos de vinculação dos painéis de laje maciça, sendo estes representados na Figura 10 de forma adaptada à notação empregada para as condições de apoio, exposta na Figura 9 (referentes ao dimensionamento pela teoria de grelhas).

**Figura 10 – Casos de vinculação**



**Fonte: Pinheiro, 1988**

Para a determinação dos momentos fletores, flechas e reações de apoio deverão ser utilizadas as expressões a seguir, nas quais empregam-se os coeficientes que são obtidos por meio das funções aproximadas compreendidas nas tabelas de Pinheiro (1988). Nesta pesquisa apenas as expressões para o cálculo dos momentos serão aplicadas.

$$m = u \frac{pl_x^2}{100}; \quad a = \alpha \frac{pl_x^4}{100Eh^3}; \quad r = \rho \frac{pl_x}{10} \quad (32)$$

Nessas equações têm-se:

$m$  = Momento fletor por unidade de largura;

$u$  = Coeficiente adimensional para o cálculo do momento fletor;

$p$  = Carga uniformemente distribuída;

$l_x$  = Menor vão;

$a$  = Flecha;

$\alpha$  = Coeficiente adimensional para o cálculo da flecha;

$E$  = Módulo de deformação longitudinal do concreto;

$h$  = Espessura da laje;

$r$  = Reação de apoio por unidade de comprimento;

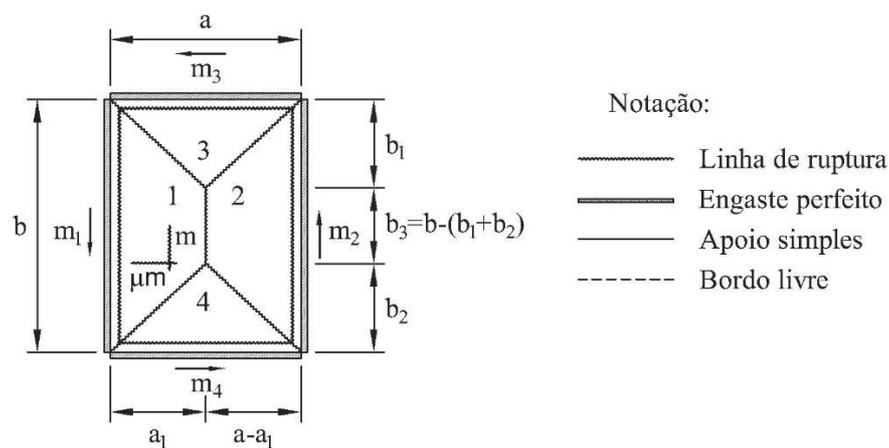
$\rho_r$  = Coeficiente adimensional para o cálculo da reação de apoio;

São utilizados ainda os índices  $x$  e  $y$  para designar as direções dos planos de flexão, além disso emprega-se o sinal plica (') para indicar os momentos e reações de apoio sobre as bordas engastadas. Na compatibilização dos momentos negativos foi utilizado o critério da expressão (17), segundo a qual adota-se o maior valor entre a média dos momentos calculados para cada laje e 80% do valor do maior momento encontrado.

### 2.3.2.2 Cálculo dos momentos de plastificação

Após a realização do pré-dimensionamento elástico, pode-se proceder ao dimensionamento plástico, a partir do roteiro desenvolvido por Gonzalez (1997) que será apresentado em seguida, em que se executa a determinação dos momentos de plastificação para lajes simplesmente apoiadas ou engastadas. Desse modo, utiliza-se a Figura 11, como base para a padronização das convenções adotadas na definição e orientação dos momentos elásticos e plásticos.

Figura 11 – Laje para padronização



Fonte: Gonzalez, 1997

Para utilização da rotina elaborada por Gonzalez (1997), o cálculo dos momentos de plastificação realiza-se a partir da consideração das suposições definidas a seguir:

- a) Linha de ruptura central na vertical (configuração comum).

$$a = l_x; b = l_y; \mu = \frac{m_y}{m_x}; m_1 = m_e; m_2 = m_d; m_3 = m_s; m_4 = m_i \quad (33)$$

Sendo  $m_y$  e  $m_x$  os momentos positivos e  $m_1, m_2, m_3, m_4$  os momentos negativos, dispostos dos lados esquerdo, direito, superior e inferior do painel ilustrado na Figura 11, provenientes do cálculo elástico. Ressalva-se ainda que todas as suposições utilizadas para os apoios engastados são válidas para apoios simples, desde que se considerem os momentos negativos nulos sobre estes.

b) Cálculo dos momentos limite superior,  $m_{ls}$ , e limite inferior,  $m_{li}$ .

$$m_{ls} = \frac{1}{\mu} \cdot \left[ \frac{1,5}{pb^2} \cdot \left( \frac{pb^2}{6} - m_3 + m_4 \right)^2 - m_4 \right] \quad (34)$$

$$m_{li} = \frac{1,5}{pa^2} \cdot \left( \frac{pa^2}{6} - m_1 + m_2 \right)^2 - m_2 \quad (35)$$

c) Cálculo do momento de plastificação,  $m$ .

A solução está compreendida dentro do intervalo:

$$m_{li} \leq m \leq m_{ls} \quad (36)$$

Conhecendo-se os momentos limites, deve-se calcular  $m$  por iteração, a partir das equações (37) e (38), de modo que  $f_1 = f_2$ , arbitrando-se valores para  $m$ .

$$f_1(m) = \sqrt{m + m_1} + \sqrt{m + m_2} \quad (37)$$

$$f_2(m) = \frac{a}{\sqrt{6b}} \cdot \sqrt{3pb - 2\sqrt{6p} \cdot (\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4})} \quad (38)$$

d) Verificação.

Para garantir que a configuração admitida esteja correta, deve ser obedecida a seguinte expressão:

$$\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_2} \leq b \cdot \sqrt{\frac{p}{6}} \quad (39)$$

Caso a inequação não se verifique, utiliza-se a configuração com a linha de ruptura central na horizontal (configuração eventual).

e) Configuração eventual.

Não sendo atendida a condição anterior, deve-se utilizar a configuração de ruína eventual, analisando-se a situação em que a linha de ruptura central é paralela ao menor lado (horizontal). Para tanto refaz-se os cálculos com:

$$a = l_y; b = l_x; \mu = \frac{m_x}{m_y}; m_1 = m_s; m_2 = m_i; m_3 = m_e; m_4 = m_d \quad (40)$$

### 2.3.2.3 Comprimentos das armaduras negativas

O cálculo do comprimento mínimo das armaduras negativas é necessário para que se evite situações de ruína, como as ilustradas na Figura 11, pois nos pontos de interrupção dessas ferragens formam-se linhas de ruptura nas quais o momento de plastificação é nulo. Desse modo, convencionou-se uma laje simplesmente apoiada na linha de interrupção que deve resistir ao novo arranjo de esforços com as armaduras referentes à laje original.

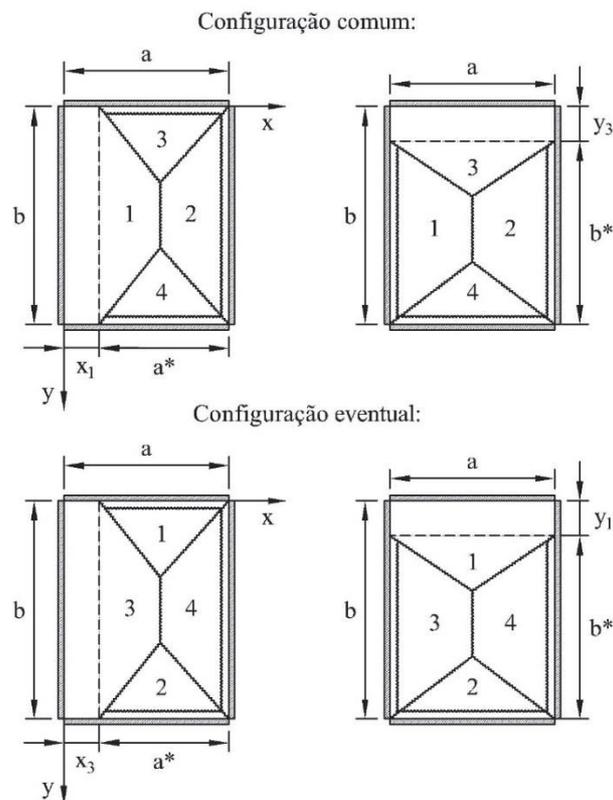
Inicialmente para o cálculo dos comprimentos das armaduras negativas, utilizam-se as expressões abaixo:

$$a^* = \frac{\sqrt{6b} \cdot (\sqrt{m + m_1} + \sqrt{m + m_2})}{\sqrt{3pb - 2\sqrt{6p} \cdot (\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4})}} \quad (41)$$

$$b^* = \frac{2a^2\sqrt{6p} \cdot (\sqrt{\mu m + m_3} + \sqrt{\mu m + m_4})}{3pa^2 - 6 \cdot (\sqrt{m + m_1} + \sqrt{m + m_2})^2} \quad (42)$$

Na Figura 12, abaixo, estão ilustrados  $a^*$  e  $b^*$ , além dos pontos de interrupção  $x$ ,  $y$  das armaduras, para as configurações comum e eventual.

**Figura 12 – Convenção de laje apoiada em linha de interrupção**



Fonte: Gonzalez, 1997

Os comprimentos das armaduras são calculados primeiramente, supondo-se a configuração comum:

$$a = l_x; b = l_y; m = m_x; \mu = \frac{m_y}{m_x}; m_1 = m_{xe}; m_2 = m_{xd};$$

$$m_3 = m_{ys}; m_4 = m_{yi}$$
(43)

Em que,

$$x_1 = a - a_1^*, a_1^* \text{ calculado com } m_1 = 0; \quad (44)$$

$$x_2 = a - a_2^*, a_2^* \text{ calculado com } m_2 = 0; \quad (45)$$

$$y_3 = b - b_3^*, b_3^* \text{ calculado com } m_3 = 0; \quad (46)$$

$$y_4 = b - b_4^*, b_4^* \text{ calculado com } m_4 = 0. \quad (47)$$

Em seguida, deve-se realizar o cálculo dos comprimentos das armaduras para a configuração eventual:

$$a = l_y; b = l_x; m = m_y; \mu = \frac{m_x}{m_y}; m_1 = m_{ys}; m_2 = m_{yi};$$
(48)

$$m_3 = m_{xe}; m_4 = m_{xd}$$

$$x_3 = b - b_3^*, b_3^* \text{ calculado com } m_3 = 0; \quad (49)$$

$$x_4 = b - b_4^*, b_4^* \text{ calculado com } m_4 = 0; \quad (50)$$

$$y_1 = a - a_1^*, a_1^* \text{ calculado com } m_1 = 0; \quad (51)$$

$$y_2 = a - a_2^*, a_2^* \text{ calculado com } m_2 = 0. \quad (52)$$

Determina-se por fim os comprimentos, adotando-se o maior valor de cada par:

$$x_e = x_1 \text{ ou } x_3 \quad (53)$$

$$x_d = x_2 \text{ ou } x_4 \quad (54)$$

$$y_s = y_3 \text{ ou } y_1 \quad (55)$$

$$y_i = y_4 \text{ ou } y_2 \quad (56)$$

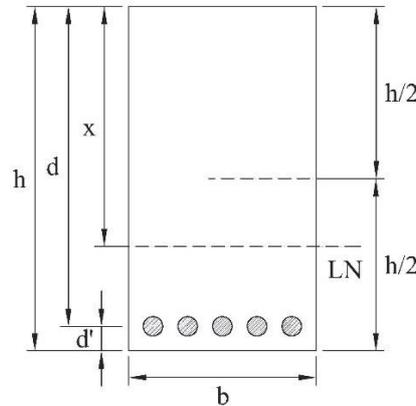
Ainda devem ser somados a estes valores os respectivos comprimentos de ancoragem.

#### 2.3.2.4 Verificação da flecha

Supondo-se que as cargas permanentes e acidentais sejam conhecidas, utiliza-se o roteiro de cálculo desenvolvido por Gonzalez (1997), para a determinação das flechas. As dimensões ilustradas na seção transversal indicada na Figura 13, em que  $x$  é a distância do centro de gravidade da seção homogeneizada à face superior e  $h/2$  é a distância do centro de

gravidade da seção de concreto à face superior são necessárias ao desenvolvimento das expressões apresentadas nas etapas a seguir.

**Figura 13 – Seção transversal homogeneizada**



**Fonte: Gonzalez, 1997**

a) Cálculo da linha neutra – ESTÁDIO I

$$x_1 = \frac{0,5bh^2 + \alpha_e(A_s d + A'_s d')}{bh + \alpha_e(A_s + A'_s)}; \quad \alpha_e = \frac{E_s}{E_c} \quad (57)$$

$A_s$  = área de armadura tracionada;

$A'_s$  = área de armadura comprimida;

$E_c$  = módulo de deformação longitudinal do concreto;

$E_s$  = módulo de deformação longitudinal do aço;

b) Cálculo do módulo de elasticidade – ESTÁDIO I

Para o concreto, o módulo de elasticidade é obtido a partir da equação (12).

$$E_s = 210000 \text{ MPa} \quad (58)$$

c) Cálculo do momento de inércia – ESTÁDIO I

O momento de inércia da seção homogeneizada é dado por:

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + bh \left( x_1 - \frac{h}{2} \right)^2 + \alpha_e A_s (d - x_1)^2 + \alpha_e A'_s (x_1 - d')^2 \quad (59)$$

Para uma taxa de armadura  $\rho < 0,5\%$ , despreza-se a influência destas, o que ocorre para as lajes em geral. Desse modo, pode-se adotar:

$$x_1 = \frac{h}{2}; \quad I_1 = \frac{bh^3}{12} \quad (60)$$

d) Cálculo do momento de fissuração:

O momento de fissuração da laje é dado pela expressão a seguir, em que a linha neutra e o momento de inércia estão no Estádio I.

$$M_r = f_{ctm} \cdot \frac{I}{h - x_1} \quad (61)$$

Em que  $f_{ctm}$ , segundo as recomendações da NBR-6118 (ABNT, 2014), pode ser obtido a partir da equação abaixo:

$$\begin{aligned} f_{ctm} &= 0,3(f_{ck})^{2/3}, \text{ se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ f_{ctm} &= 2,12 \ln(1 + 0,11f_{ck}), \text{ se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (62)$$

e) Verificação

Se  $M \leq M_r$  – Estádio I: Utilizam-se os valores calculados nos itens anteriores;

Se  $M > M_r$  – Estádio II: Adota-se os valores médios para a linha neutra e momento de inércia.

f) Cálculo da linha neutra – Estádio II

$$x_2 = \frac{-\alpha_e}{b} (A_s + A'_s) + \sqrt{\frac{\alpha_e}{2b} (A_s + A'_s) + \frac{2\alpha_e}{b} (A_s d + A'_s d')} \quad (63)$$

g) Cálculo do módulo de elasticidade – Estádio II

No Estádio II, utiliza-se o módulo de elasticidade secante, obtido a partir da equação (10). Para o aço, utiliza-se a expressão (58).

h) Cálculo do momento de inércia – Estádio II

$$I_2 = \frac{bx_2^3}{3} + \alpha_e A_s (d - x_2)^2 + \alpha_e A'_s (x_2 - d')^2 \quad (64)$$

i) Cálculo dos valores médios ou valores efetivos

$$x_e = \left(\frac{M_r}{M}\right)^{2,5} x_1 + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^{2,5}\right] x_2 \leq x_1 \quad (65)$$

$$I_e = \left(\frac{M_r}{M}\right)^3 I_1 + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M}\right)^3\right] I_2 \leq I_1 \quad (66)$$

j) Cálculo do coeficiente de fluência

$$\varphi = \frac{2x + d}{d} \quad (67)$$

O valor de  $x$  é obtido nos itens a) ou i), conforme a magnitude do momento de serviço for inferior ou superior ao momento de fissuração  $M_r$ .

k) Cálculo da flecha elástica imediata proveniente das ações de longa duração ( $\ell$ )

$$p_\ell = g_k \psi_2 q_k \quad (68)$$

Em que,  $\psi_2 = 0,3$  é obtido a partir da tabela 11.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014).

$$a_{i\ell} = \frac{\alpha b}{1200} \cdot \frac{pl_x^4}{EI} \quad (69)$$

Em que:

$\alpha$  = coeficiente obtido a partir das tabelas de Pinheiro (1993), para cálculo de flechas em laje com carga uniforme;

$b = 100$  cm;

$l_x$  = menor vão;

$E$  = módulo de elasticidade do concreto;

$I$  = momento de inércia;

$p$  = carga ( $p_\ell$ );

l) Cálculo da flecha total proveniente das ações de longa duração:

$$a_\ell = \varphi \cdot a_{i\ell} \quad (70)$$

m) Cálculo da flecha elástica proveniente das ações de curta duração (i)

$$p_i = (1 - \psi_2) \cdot q_k \quad (71)$$

$$a_i = \frac{\alpha b}{1200} \cdot \frac{pl_x^4}{EI} \quad (72)$$

Em que:

$b = 100$  cm;

$l_x$  = menor vão;

$E$  = módulo de elasticidade do concreto;

$I$  = momento de inércia;

$p$  = carga ( $p_i$ );

n) Cálculo da flecha proveniente da retração

$$a_{cs} = K \cdot 0,7 \cdot 15 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{h} \cdot l^2 ; \rho = \frac{A_s}{bd} \quad (73)$$

Em que:

$K$  = Coeficiente obtido na Tabela 3;

$\rho$  = porcentagem de armadura;

$l$  = vão;

$h$  = espessura da laje.

O cálculo é feito para as duas direções da laje, adotando-se como resultado a média desses valores.

o) Flecha total

$$a_{total} = a_{\ell} + a_i + a_{cs} \quad (74)$$

Tabela 3 – Valores de K

Vinculação	Valores de K
	0,0625
	0,0859375
	0,125
	0,5

Fonte: Gonzalez, 1997

## 2.4 ANÁLISE NUMÉRICA

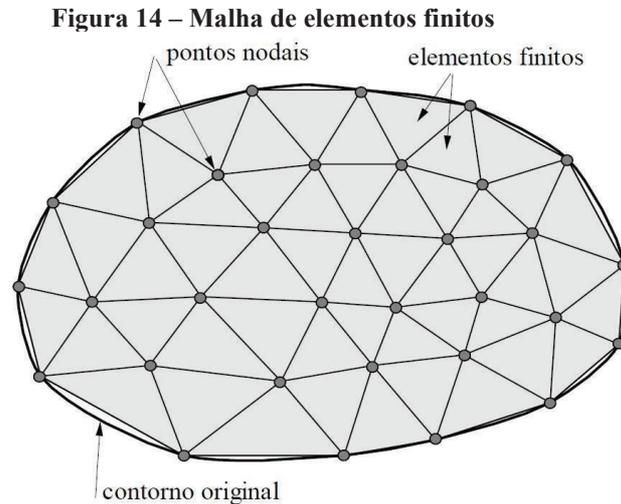
Nesta seção é apresentada a última análise abordada no presente trabalho, esta engloba os procedimentos inerentes ao cálculo numérico de lajes maciças de concreto armado. O estudo consiste na utilização do MEF, por meio do software SAP2000, para realizar a modelagem e cálculo dos esforços solicitantes de placas, nas quais são impostas as propriedades das lajes executadas em concreto.

### 2.4.1 Método dos Elementos Finitos

O cálculo exato das estruturas em geral, até mesmo as mais simples, exige a solução de equações diferenciais muito complexas e que na maioria das vezes não podem ser obtidas pelos métodos analíticos. Segundo Oñate (2009), para contornar essa situação utilizam-se simplificações grosseiras de casos particulares para a resolução de estruturas com baixo grau de complexidade.

O MEF é uma alternativa para a análise mais precisa de estruturas complexas de modo a apresentar uma solução aproximada do problema. Segundo Prazeres (2005), o método consiste na subdivisão de um domínio em partes menores, denominadas de elementos finitos, os quais são compostos por nós. A análise se dá por meio das interações nodais ao longo da malha de discretização, determinando-se os deslocamentos, tensões e deformações na estrutura, para um dado estado de carregamento e condições de contorno.

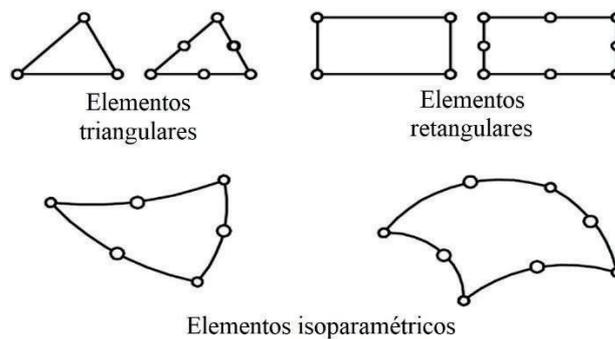
Em seu trabalho, Souza (2003) relata que o MEF tem como ideia primordial transformar um problema complexo em diversos problemas de solução simples, por meio de um processo intuitivo de discretização. Desse modo, subdivide-se meios contínuos em malhas de elementos finitos com geometria definida e dimensões limitadas, conforme ilustrado na Figura 14 a seguir.



Fonte: Souza, 2003

De acordo com Araújo (2014), o elemento finito é definido segundo o seu número de nós e geometria, existindo elementos com formas regulares (triangular, retangular, etc.) e elementos isoparamétricos, que são distorcidos para se adequarem melhor a modelagem de domínios irregulares. Na Figura 15 apresenta-se alguns elementos finitos empregados para análises bidimensionais.

**Figura 15 – Elementos finitos para análise bidimensional**



Fonte: Araújo, 2014

Cada nó de um elemento finito apresenta graus de liberdade, de translação e de rotação, o que lhe confere possibilidades de movimentação. De acordo com o tipo de análise que se deseja empregar, são impostas restrições aos graus de liberdade. Para a análise linear de estruturas reticuladas como pilares e vigas é comum o emprego de elementos unidimensionais

de barra, já para a discretização de placas, como as lajes maciças de concreto armado, pode ser utilizados elementos retangulares bidimensionais.

#### 2.4.2 Emprego do software SAP2000

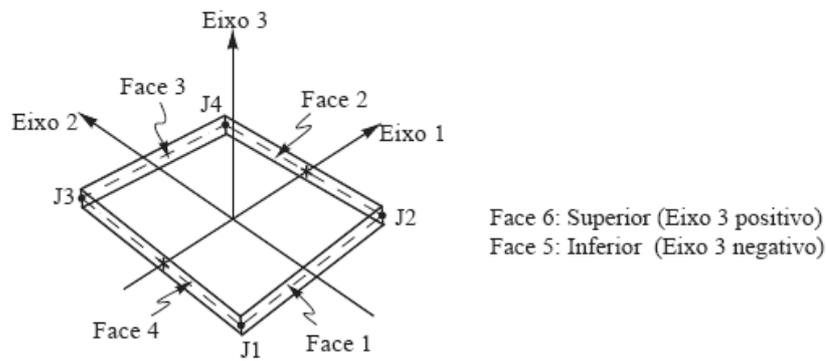
O SAP2000 é um programa desenvolvido para análise estrutural, que se baseia no MEF para realização dos seus cálculos. O software possui uma interface para a execução de todos os procedimentos de modelagem, modificação e análise da estrutura, trabalhando com a consideração de diversas situações de carregamento, esforços dinâmicos, gradientes de temperatura e pressão, sendo capaz de elaborar simulações para análises sísmicas, de vibrações e concreto protendido.

Para a realização de análises de estruturas, o SAP2000 tem como aporte diversos elementos estruturais, sendo mais relevantes para esse trabalho os elementos de barras e os elementos de cascas. Segundo Guessi (2017), estes primeiros são utilizados para a modelagem de pórticos, treliças e grelhas planas, sendo formulados com a consideração dos efeitos de torção, além de flexão e deformação axiais e biaxiais.

Guessi (2017) afirma que os elementos de cascas, também denominados *shells*, são empregados para simular o comportamento de membranas, placas e cascas, podendo ser utilizado para o cálculo de estruturas variadas, como reservatórios, cúpulas e lajes. Neste trabalho, será utilizado um modelo desenvolvido a partir do MEF, em que as lajes são modeladas por elementos cascas e os demais elementos reticulados, como vigas e pilares, são simulados com elementos de barra, chamados de *frame* no ambiente do SAP2000.

O elemento *shell*, ilustrado na Figura 16, utilizado no SAP2000 para modelagem de placas, consiste em um elemento finito retangular de quatro nós, com cinco graus de liberdade em cada nó, sendo três de translação e dois de rotação. Na realização de uma análise linear a partir desse elemento, o material pode ser homogêneo e conter camadas com diferentes espessuras, no caso das lajes maciças o material utilizado é o concreto, sendo geralmente considerado espessura constante para todas as lajes de um pavimento.

**Figura 16 – Elemento *shell***



**Fonte: SAP2000, 2006**

Para a modelagem das lajes, Melo (2016) destaca a importância da consideração das rigidezes de pilares e vigas, para que se obtenha esforços que retratem de maneira mais aproximada o real funcionamento da estrutura, sendo interessante efetuar a sua análise como um todo, implementando as devidas dimensões das vigas, lajes e pilares. Faz-se relevante também realizar estudo acerca do refinamento da malha de elementos finitos, para que se possa promover a otimização do custo computacional e do desempenho no processamento da estrutura.

### 3 METODOLOGIA

O presente trabalho restringe-se a um estudo para estabelecer comparativo entre metodologias de análise estrutural para dimensionamento de um pavimento composto por lajes maciças. Durante a execução dessa pesquisa emprega-se a forma estrutural do pavimento-tipo referente ao projeto arquitetônico utilizado no trabalho de Fiorin (1998), pois este foi desenvolvido para fins didáticos, de modo a facilitar a percepção do leitor quanto a aplicação das normativas inerentes ao dimensionamento da estrutura. Apresenta-se, respectivamente, nas Figuras 17 e 18 a planta baixa e a forma estrutural do pavimento, com todas as medidas em metros.

Para realização do dimensionamento do pavimento adotou-se, para todas as metodologias, resistência característica à compressão do concreto de 30 MPa; módulo de deformação longitudinal e módulo secante do concreto, calculados a partir das equações (12) e (10) e coeficiente de Poisson de 0,2; espessura para todas as lajes de 10cm; classe de agressividade ambiental II, para áreas urbanas de acordo com a tabela 6.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014), e ainda em conformidade com a norma utiliza-se cobrimento nominal para lajes de 25mm.

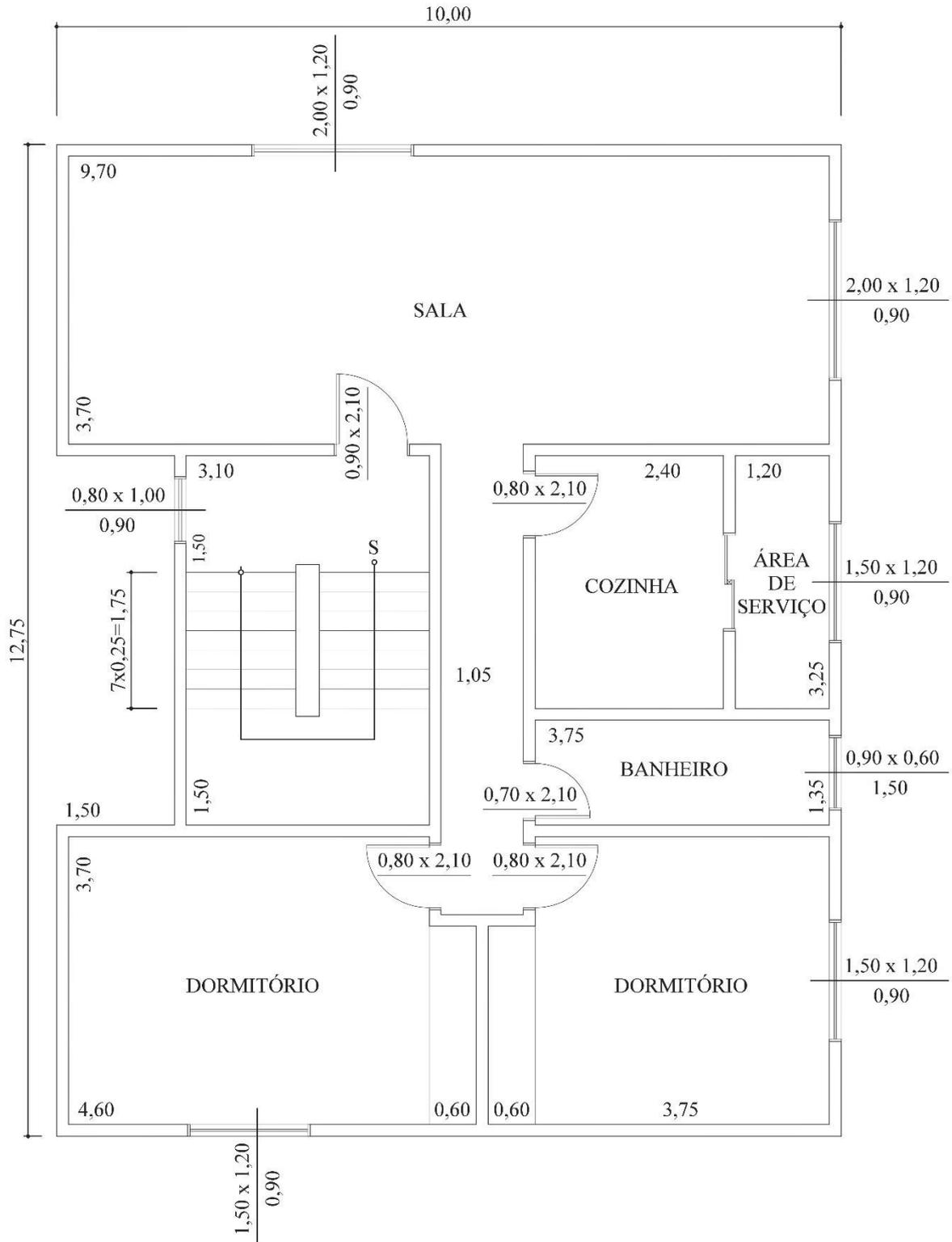
Na tabela 4, são indicados os carregamentos permanentes e variáveis que incidem sobre as lajes, os quais foram obtidos a partir do trabalho de Araújo (2014) e da NBR 6120 (ABNT, 2019), em que o peso próprio é estimado pela expressão  $25h$ , sendo  $h$  a espessura da laje em metros. As lajes L4 e L6 possuem sobrecarga localizada proveniente das paredes que sobre estas se apoiam. Neste trabalho considerou-se o peso dessas alvenarias distribuído sobre toda a área do painel de laje, sendo o peso específico destas, obtido na obra do autor supracitado.

**Tabela 4 – Carregamentos atuantes sobre as lajes**

Lajes	Peso próprio (kN/m <sup>2</sup> )	Sobrecarga (kN/m <sup>2</sup> )		
		Revestimento	Acidental	Localizada
L1	2,50	1,00	1,50	0,00
L2	2,50	1,00	1,50	0,00
L3	2,50	1,00	1,50	0,00
L4	2,50	1,00	2,00	1,80
L5	2,50	1,00	1,50	0,00
L6	2,50	1,00	1,50	1,09

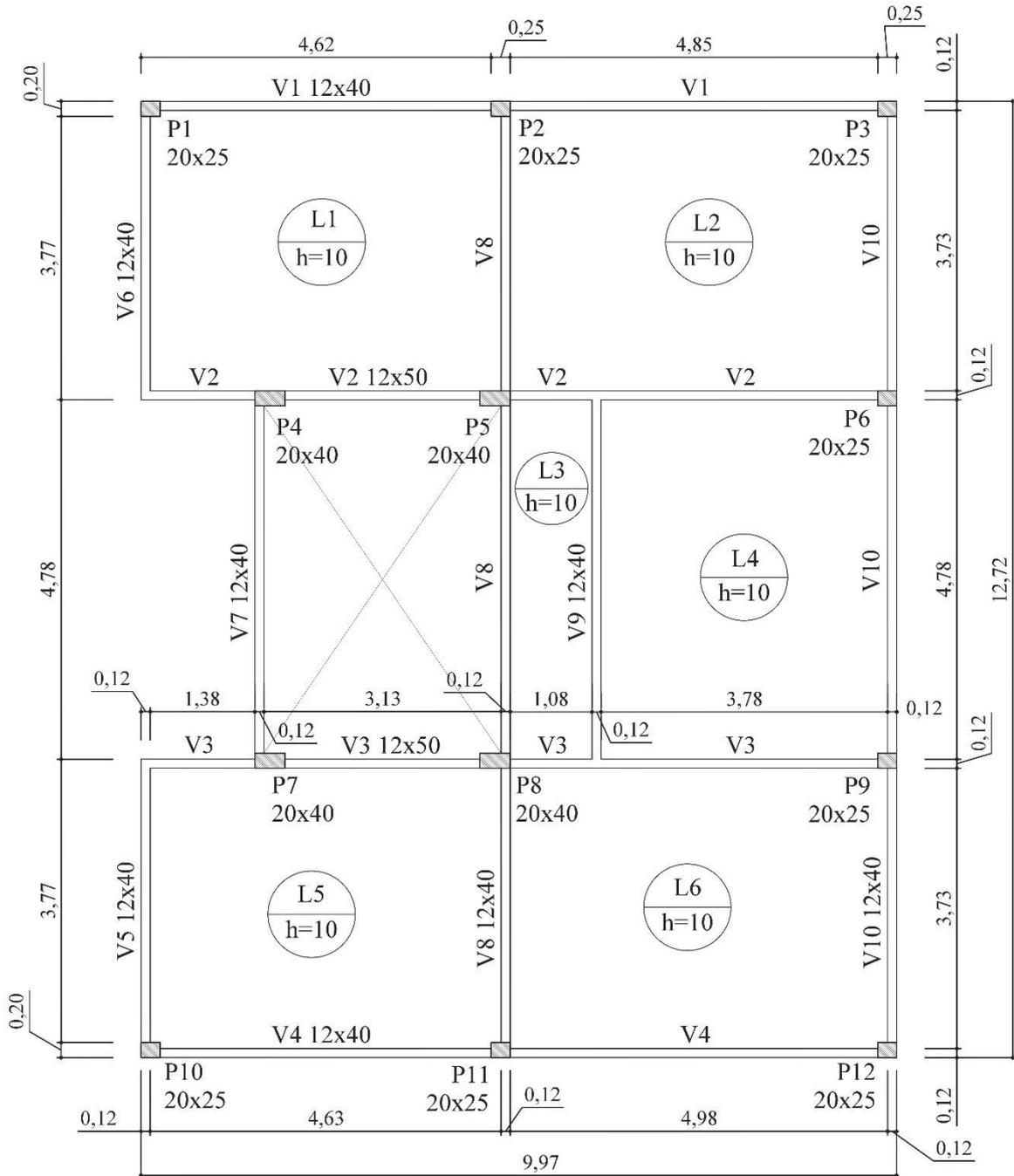
Fonte: Autor, 2020

Figura 17 – Planta baixa do pavimento-tipo



Fonte: Fiorin, 1998

Figura 18 – Forma do pavimento-tipo



Fonte: Fiorin, 1998

A realização dessa pesquisa ocorre por meio da execução de uma série de etapas. Inicialmente procede-se o dimensionamento das lajes maciças do pavimento por meio da teoria de grelhas para apoios deformáveis, com o emprego das expressões desenvolvidas no trabalho de Araújo (2014), apresentadas na secção 2.2. Para tanto, as lajes foram classificadas segundo as suas dimensões e condições de apoio, em seguida, determinou-se os esforços solicitantes a partir das equações em consonância com a classificação definida.

Finalizada a análise com base no cálculo elástico, procede-se na segunda etapa do trabalho que trata-se da análise plástica para dimensionamento das lajes do pavimento, com utilização da rotina de cálculo desenvolvida no trabalho de Gonzalez (1997) e fundamentada na TLR. Os procedimentos para o cálculo plástico são descritos na seção 2.3.2, e iniciam-se com um pré-dimensionamento elástico, sendo empregadas para a sua concretização, as funções aproximadas de Pinheiro (1988) baseadas nas tabelas de Czerny (1976). O processo continua com a determinação dos momentos de plastificação, e em seguida, o cálculo dos comprimentos para as armaduras negativas e verificação das flechas, a partir do roteiro de cálculo apresentado.

A próxima etapa do trabalho consiste na realização de uma análise numérica do pavimento com uso do MEF. Para sua execução emprega-se o software SAP2000 com a finalidade de proceder a modelagem do pavimento, utilizando-se de elementos de barras, chamados de *frames*, para pilares e vigas, e elementos de cascas, denominados *shells*, para as lajes. A classe do concreto considerado foi C30 ( $f_{ck} = 30$  MPa). Concluída a modelagem da estrutura, lançam-se os carregamentos das lajes para realização da simulação do seu comportamento, sendo a partir desta determinados os esforços solicitantes para o dimensionamento.

A última etapa desta pesquisa compreende a realização do dimensionamento das lajes a partir dos esforços solicitantes obtidos nas três análises. Em seguida determina-se as áreas de aço para as armaduras de flexão e efetua-se as verificações das flechas admissíveis em cada hipótese de cálculo. O trabalho continua com o detalhamento das armaduras e quantificação do consumo de aço despendido para cada metodologia de análise.

Por fim, realiza-se a comparação entre os esforços obtidos nos três casos de dimensionamento, apontando as particularidades de cada método, e como estas influenciam no processo de cálculo da estrutura. Também é estabelecida comparação sobre o consumo de aço requerido para cada análise, de modo a promover a avaliação do impacto deste nos custos de produção. De fato, o gasto com as armaduras varia de acordo com a magnitude dos esforços solicitantes, além disso o aumento ou decréscimo desse tipo de insumo impactará diretamente sobre o tempo de execução e despesas com mão de obra, onerando ou reduzindo os custos de execução da estrutura.

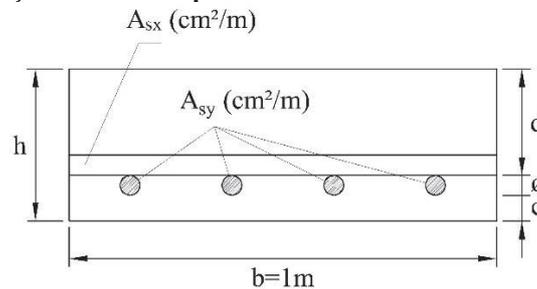
Todas as rotinas de cálculo realizadas no presente trabalho, foram executadas por meio de sua implementação no software EXCEL. As tabelas geradas serão apresentadas nas seções subsequentes de resultados.

## 4 ANÁLISE ESTRUTURAL E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

### 4.1 PROCEDIMENTOS PARA DIMENSIONAMENTO E DETALHAMENTO

Para a obtenção dos resultados requeridos, faz-se necessário a determinação das armaduras de flexão e o detalhamento das lajes maciças, que nesta pesquisa foram realizados conforme as prescrições da NBR-6118 (ABNT, 2014), que são explicitadas na obra de Araújo (2014). A Figura 19 ilustra a representação da seção transversal para definição das armaduras.

**Figura 19 – Seção transversal para cálculo das armaduras das lajes**



**Fonte: Araújo, 2014**

A altura útil da seção é definida a partir da expressão (75) abaixo:

$$d = h - \phi - c \quad (75)$$

Em que  $c$  é cobrimento nominal das armaduras e  $\phi$  é o diâmetro das barras.

Apresenta-se o roteiro para dimensionamento de seções retangulares de concreto armado, disponível no volume 1 da obra de Araújo (2014):

1) Momento solicitante de cálculo no ELU:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}, \text{ com } \gamma_c = 1,4 \quad (76)$$

$$\alpha_c = 0,85, \text{ com } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (77)$$

$$\sigma_{cd} = \alpha_c f_{cd} \quad (78)$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}, \text{ com } \gamma_s = 1,15 \text{ e } f_{yk} = 500 \text{ MPa, para o aço CA-50} \quad (79)$$

$$M_d = \gamma_f M_k, \text{ com } \gamma_f = 1,4 \quad (80)$$

Onde,

$\gamma_f, \gamma_c, \gamma_s$  = Coeficientes parciais de segurança;

$\alpha_c$  = Coeficiente de redução devido ao fenômeno da fluência (efeito Rüsck);

$f_{ck}$  = Resistência característica à compressão do concreto;

$f_{cd}$  = Resistência à compressão de cálculo do concreto;

$\sigma_{cd}$  = Tensão normal de cálculo do concreto;

$f_{yk}$  = Tensão de escoamento característica do aço;

$f_{yd}$  = Tensão de escoamento de cálculo do aço;

$M_k$  = Momento fletor de serviço;

$M_d$  = Momento fletor solicitante de cálculo.

2) Momento fletor reduzido:

$$\mu_r = \frac{M_d}{bd^2\sigma_{cd}} \quad (81)$$

Sendo,

$b$  = Largura da seção;

$d$  = Altura útil;

$\mu_r$  = Momento fletor reduzido.

3) Momento limite reduzido:

$$\xi_{lim} = 0,45, \text{ com } f_{ck} \leq 35 \text{ MPa} \quad (82)$$

$$\lambda = 0,8, \text{ se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (83)$$

$$\mu_{lim} = \lambda\xi_{lim}(1 - 0,5\lambda\xi_{lim}) \quad (84)$$

Nas expressões acima, temos:

$\xi_{lim}$  = Profundidade relativa da linha neutra;

$\lambda$  = Parâmetro do diagrama retangular de tensões no concreto;

$\mu_{lim}$  = Momento limite reduzido.

4) Área de aço:

Armadura simples  $\Rightarrow \mu_r \leq \mu_{lim}$

$$\xi = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\mu}}{\lambda} \quad (85)$$

$$A_s = \lambda\xi bd \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}} \quad (86)$$

$\xi$  = Parâmetro adimensional;

$A_s$  = Área de aço.

Após calculada a área de aço, esta deve ser comparada à área de armadura mínima definida pela equação que se segue:

$$A_{s,min} = \rho_{min}100h \text{ (cm}^2\text{/m)} \quad (87)$$

Em que  $\rho_{min}$  é a taxa mínima de armadura, que para um concreto de  $f_{ck} = 30$  MPa e aço CA-50, apresenta o valor de 0,17, segundo especificações da Tabela 5.

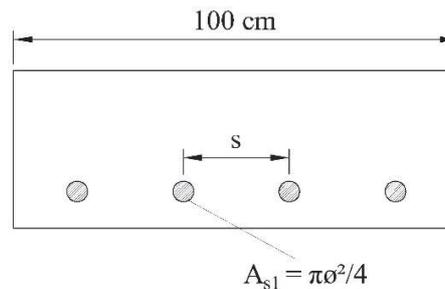
**Tabela 5 – Taxas mínimas da armadura de flexão  $\rho_{min}$  (%)**

$f_{ck}$ (MPa)	Concretos do Grupo I						
	20	25	30	35	40	45	50
CA-50	0,15	0,15	0,17	0,19	0,21	0,23	0,24
CA-60	0,15	0,15	0,15	0,16	0,18	0,19	0,20

Fonte: Araújo, 2014

Definidas as áreas de aço nas duas direções principais, faz-se necessária a escolha de um diâmetro para as barras, para que se possa calcular o espaçamento entre as mesmas e o número de vergalhões exigido à distribuição das armaduras em uma faixa de 1 metro de largura, com ilustra a Figura 20.

**Figura 20 – Distribuição da armadura na seção transversal**



Fonte: Araújo, 2014

A NBR-6118 (ABNT, 2014) estabelece que o espaçamento máximo entre as barras da armadura principal não deve ser superior a 20cm ou  $2h$ , sendo empregadas as expressões abaixo para o cálculo do espaçamento,  $s$ , e o número,  $n$ , de barras.

$$s = 100 \frac{A_{s1}}{A_s}; \quad n = \frac{l}{s} + 1 \quad (88)$$

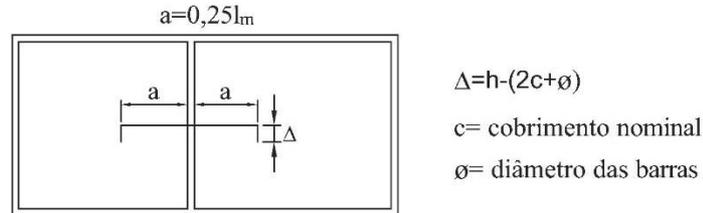
No presente trabalho adotou-se os valores abaixo para a armadura de distribuição das lajes armadas em uma direção, obtidos a partir das recomendações da NBR 6118 (ABNT, 2014):

- $A_s/s \geq 20\%$  da armadura principal;
- $A_s/s \geq 0,9$  cm<sup>2</sup>/m;
- $\rho_s \geq 0,5 \rho_{min}$

Para o detalhamento das armaduras longitudinais positivas considerou-se o comprimento das barras igual a distância compreendida pela soma do vão livre em cada direção acrescido de 20 cm, conforme recomenda Araújo (2014) para as barras de pequenos diâmetros

normalmente utilizadas nas lajes. Já o comprimento das armaduras negativas é determinado de acordo com as prescrições indicadas na Figura 21, exceto para a análise plástica, em que se empregou uma metodologia de cálculo própria.

**Figura 21 – Detalhe das armaduras negativas**



**Fonte: Araújo, 2014**

Em que,  $l_m$  representa o maior entre os menores vãos das lajes contíguas.

Os momentos solicitantes de serviço necessários ao cálculo das seções transversais são obtidos segundo cada metodologia de análise, sendo o detalhamento das armaduras possível a partir da determinação destes. Em seguida serão apresentados os resultados provenientes das análises elástica, plástica e numérica.

## 4.2 RESULTADOS DA ANÁLISE ELÁSTICA

A realização da análise elástica se deu a partir da aplicação da teoria de grelhas para apoios deformáveis, sendo os procedimentos apresentados na seção 2.2. Primeiramente efetuou-se a classificação das lajes segundo suas dimensões e condições de apoio, como pode-se observar na Tabela 6.

**Tabela 6 – Classificação das lajes (análise elástica)**

Lajes	Vão Teórico (m)		Classificação	Condições de Apoio
	Lx	Ly		
L1	4,75	3,85	Bidirecional	Caso 2
L2	5,10	3,85	Bidirecional	Caso 4
L3	1,20	4,90	Unidirecional	Caso 2
L4	4,90	3,90	Bidirecional	Caso 5
L5	4,75	3,85	Bidirecional	Caso 2
L6	5,10	3,85	Bidirecional	Caso 4

**Fonte: Autor, 2020**

O painel de laje L3, foi classificado como laje armada em uma direção, e desse modo, para determinação dos seus esforços solicitantes foram empregadas as expressões apresentadas na seção 2.2.1 para o caso 2 de condições de apoio. Para as demais lajes armadas em duas

direções empregou-se as equações explicitadas na seção 2.2.2.1, conforme o seu respectivo caso de apoio. Já para a obtenção das flechas procedeu-se de acordo com as equações (9) e (16). Além disso, verificou-se as flechas admissíveis para o ELS-DEF.

A Tabela 7 apresenta os momentos fletores, positivos e negativos compatibilizados das interfaces em que os apoios são considerados engastes, atuantes nas direções principais e as flechas calculadas para cada laje.

**Tabela 7 – Momentos fletores e flechas (análise elástica)**

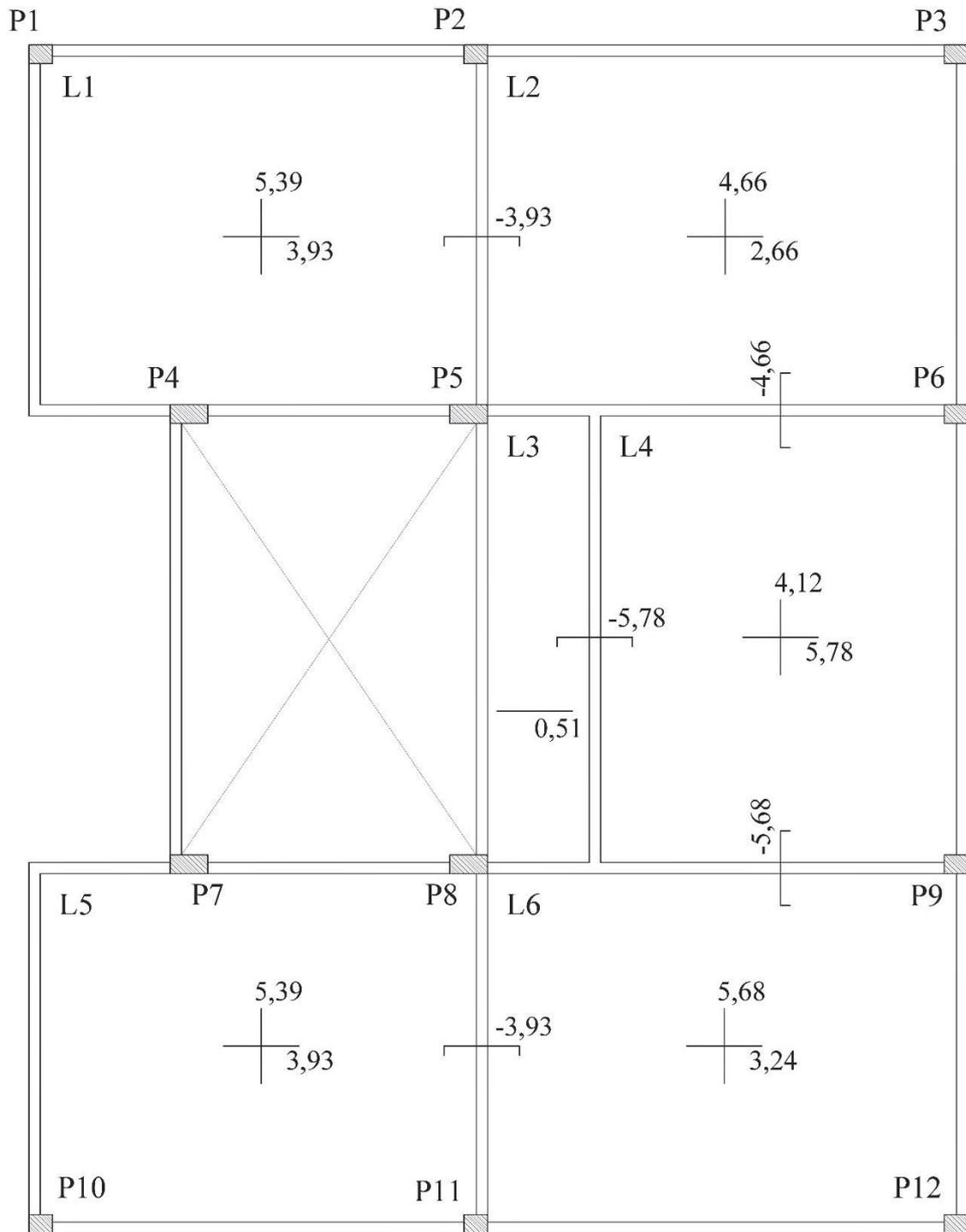
Lajes	Momentos positivos		Momentos negativos		W <sub>0</sub> (mm)	W <sub>∞</sub> (mm)	W <sub>adm</sub> (mm)
	M <sub>x</sub> (kNm/m)	M <sub>y</sub> (kNm/m)	Interface	M <sub>e</sub> (kNm/m)			
L1	3,93	5,39	L1-L2	-3,93	3,57	12,50	15,40
L2	2,66	4,66	L2-L4	-4,66	2,78	9,73	15,40
L3	0,51	-	L3-L4	-5,78	0,02	0,05	4,80
L4	5,78	4,12	L4-L6	-5,68	3,54	12,38	15,60
L5	3,93	5,39	L5-L6	-3,93	3,57	12,50	15,40
L6	3,24	5,68	-	-	3,39	11,85	15,40

Fonte: Autor, 2020

Os momentos negativos foram compatibilizados de acordo com a teoria de grelhas para apoios deformáveis, que segundo as recomendações de Araújo (2014), convencionou-se o valor do momento negativo como sendo igual ao momento positivo de maior magnitude na direção de estudo.

De posse dos momentos de serviço, foram aplicados os procedimentos de dimensionamento e detalhamento, anteriormente apresentados na seção 4.1. Na laje L3 calculou-se uma armadura de distribuição que resultou numa área de aço de 0,9cm<sup>2</sup>/m. Nas Figuras 22, 23 e 24, são apresentados as plantas baixas do pavimento contendo os momentos fletores e detalhamentos das armaduras positivas e negativas.

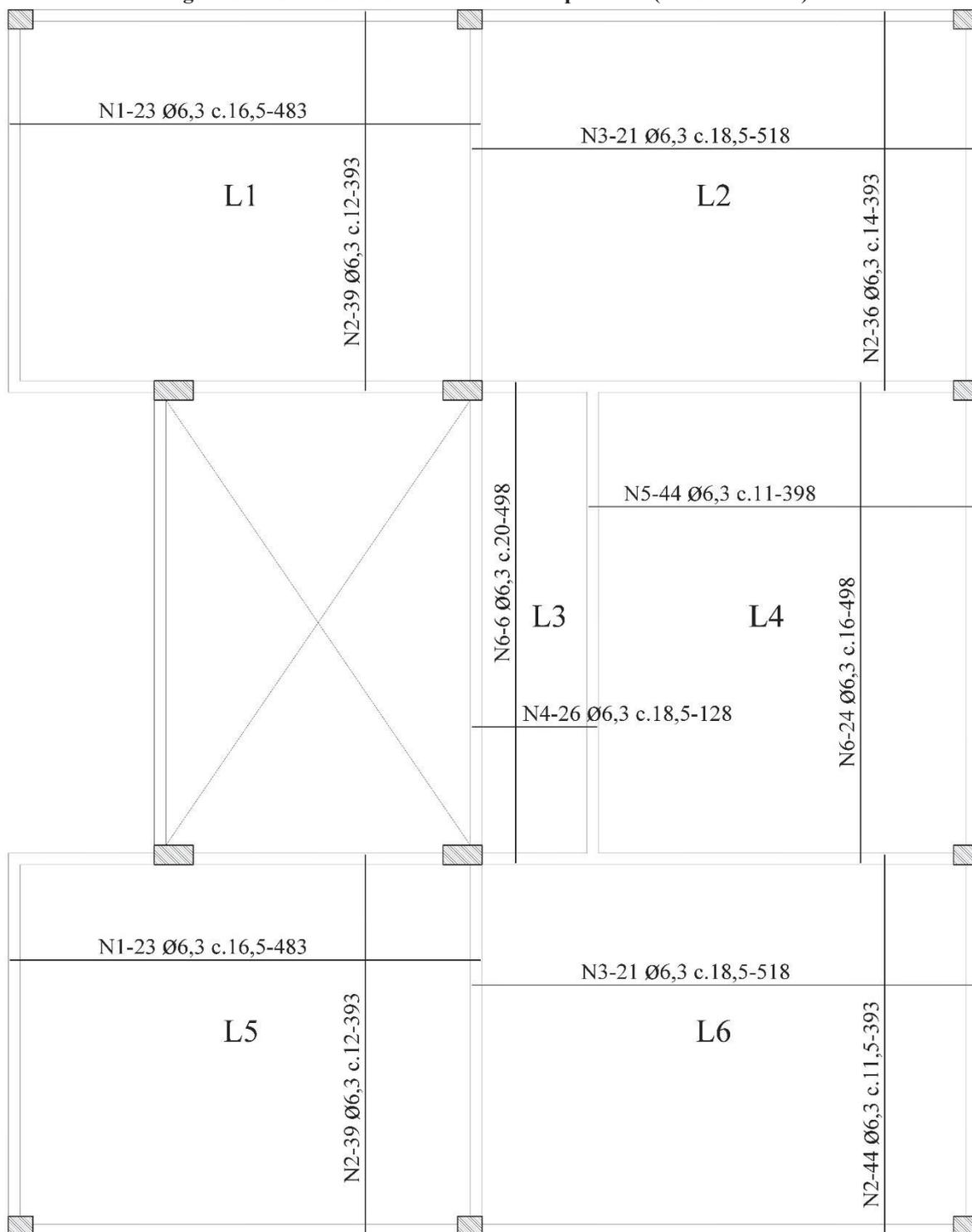
Figura 22 – Momentos fletores (análise elástica)



Momentos fletores (Análise Elástica)  
Unidade: kNm/m

Fonte: Autor, 2020

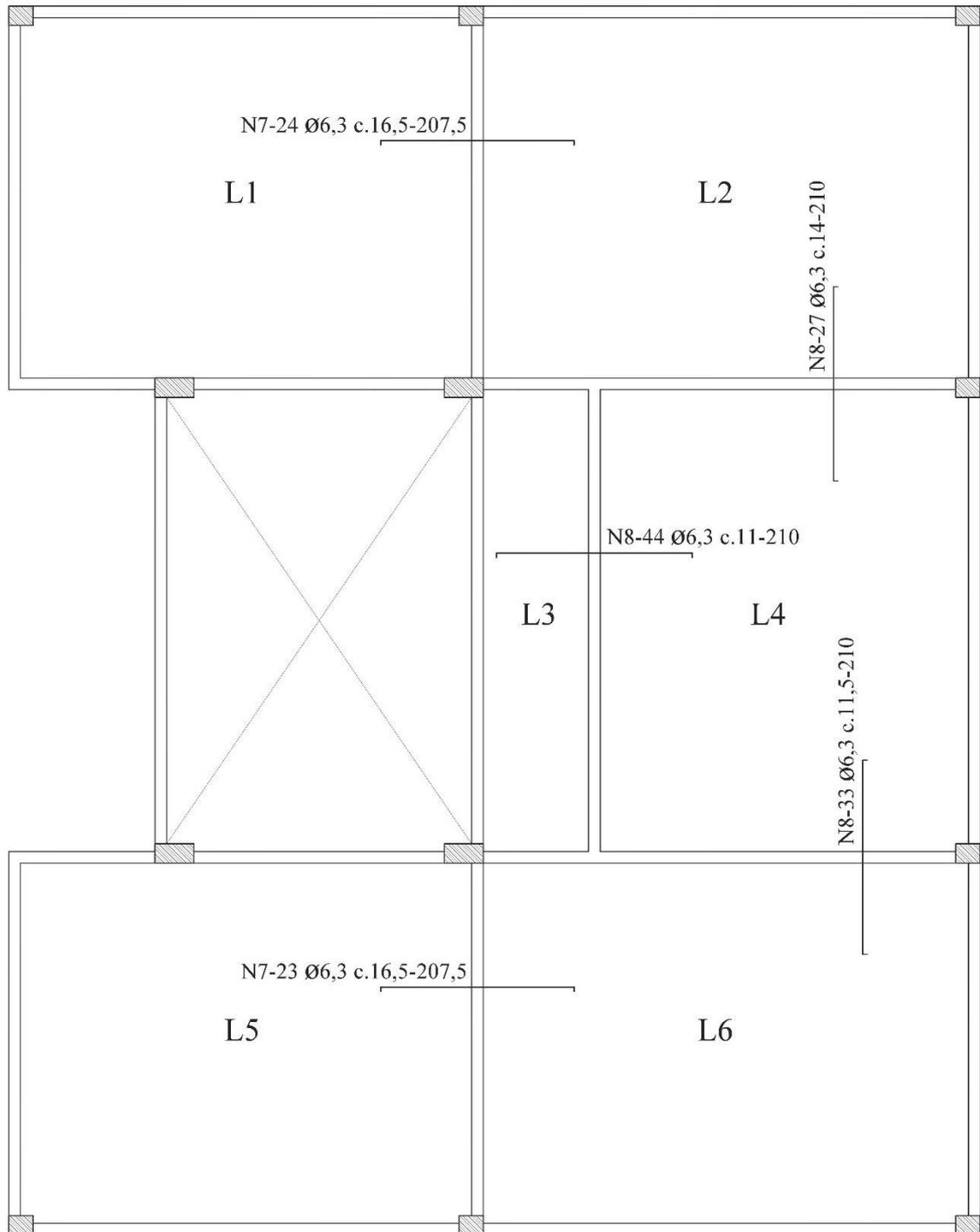
Figura 23 – Detalhamento das armaduras positivas (análise elástica)



Armadura Positiva (Análise Elástica)

Fonte: Autor, 2020

**Figura 24 – Detalhamento das armaduras negativas (análise elástica)**



**Armadura Negativa (Análise Elástica)**

**Fonte: Autor, 2020**

Após a realização dos detalhamentos, foi levantando o consumo de aço despendido pelas seis lajes. A Tabela 8 contém o quadro de aço que especifica a quantidade e o comprimento total de cada ferragem.

Tabela 8 – Quadro de aço (análise elástica)

Barra	Ø (mm)	Quantidade	Comprimento (m)	
			Unitário	Total
N1	6,30	46	4,83	222,18
N2	6,30	158	3,93	620,94
N3	6,30	42	5,18	217,56
N4	6,30	26	1,28	33,28
N5	6,30	44	3,98	175,12
N6	6,30	30	4,98	149,40
N7	6,30	47	2,08	97,53
N8	6,30	104	2,10	218,40

Fonte: Autor, 2020

Na Tabela 9 é apresentado o peso total de aço, sendo realizada a discriminação entre as armaduras positivas e negativas.

Tabela 9 – Resumo das barras (análise elástica)

Armadura	Ø (mm)	Comprimento total (m)	Massa (Kg/m)	Massa total + 10% (Kg)
Positiva	6,30	1418,48	0,245	382,28
Negativa	6,30	315,93	0,245	85,14
Peso de aço total				<b>467,42</b>

Fonte: Autor, 2020

#### 4.3 RESULTADOS DA ANÁLISE PLÁSTICA

A execução da análise plástica dos esforços no pavimento ocorreu a partir do emprego da TLR, sendo necessário inicialmente um pré-dimensionamento elástico para o cálculo posterior dos momentos de plastificação. Para a realização da análise, as lajes foram classificadas segundo sua vinculação, conforme os casos apresentados na seção 2.3.2.1, como pode-se observar na Tabela 10.

Tabela 10 – Casos de vinculação do pré-dimensionamento elástico

Lajes	Lx (m)	Ly (m)	$\lambda$	Vinculação
L1	3,73	4,63	1,24	caso 2A
L2	3,73	4,98	1,34	caso 3
L3	1,08	4,78	4,43	-
L4	3,78	4,78	1,26	caso 5B
L5	3,73	4,63	1,24	caso 2A
L6	3,73	4,98	1,34	caso 3

Fonte: Autor, 2020

Em seu trabalho Pinheiro (1988), afirmou que as lajes armadas em uma direção deveriam ser calculadas de modo análogo às vigas, assim como propôs Araújo (2014) para o cálculo elástico de lajes maciças com a relação entre seus vão superior a 2,0. Desse modo, a laje L3 foi calculada para a análise plástica de acordo com os procedimentos apresentados na

seção 2.2.1. As demais lajes foram calculadas a partir das funções aproximadas constantes no Anexo A em conformidade com seu respectivo caso de vinculação.

Os resultados do pré-dimensionamento elástico são apresentados na Tabela 11, em que estão discriminados os momentos de serviço positivos e negativos.

**Tabela 11 – Momentos obtidos no pré-dimensionamento elástico**

Lajes	Momentos positivos		Momentos negativos	
	Mx (kNm/m)	My (kNm/m)	Interface	Me (kNm/m)
L1	2,97	3,43	L1-L2	-6,20
L2	1,98	3,03	L2-L4	-6,29
L3	0,51	-	L3-L4	-6,11
L4	3,57	2,23	L4-L6	-7,01
L5	2,97	3,43	L5-L6	-6,29
L6	2,41	3,69	-	-

Fonte: Autor, 2020

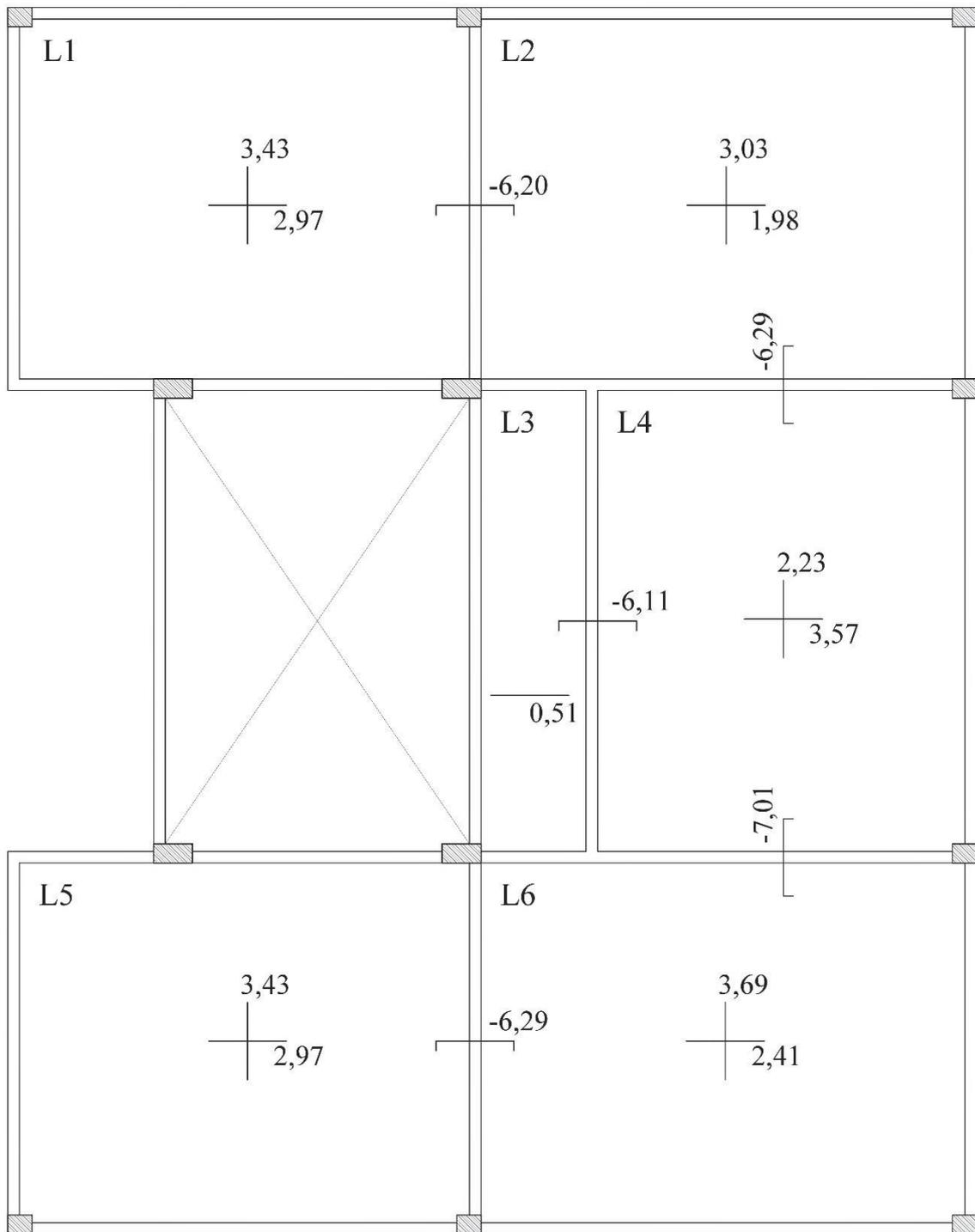
Na Figura 25, têm-se a planta baixa do pavimento contendo os esforços obtidos da análise, sendo os momentos negativos das interfaces engastadas, compatibilizados de acordo com a expressão (17) em que o momento negativo é escolhido como o maior valor entre a média dos momentos calculados para cada laje ou 80% do valor do maior momento encontrado.

Para o cálculo plástico são utilizados os momentos negativos obtidos no pré-dimensionamento elástico, sendo estes reduzidos pela metade. Já os momentos positivos são empregados no cálculo do índice de ortotropia de cada laje. O processo segue com o arranjo dos momentos através das configurações comum e eventual, ilustradas nas Figuras 26 e 27. A partir destas e com a aplicação da rotina de cálculo da seção 2.3.2.2 são determinados os momentos de plastificação das lajes.

No caso dos momentos negativos utilizados na determinação dos momentos de plastificação, considerou-se na laje L4 para obtenção dos momentos  $m_3$  e  $m_4$ , uma redução proporcional a extensão das interfaces de ligação de L4 com L2 e L6. O cálculo se deu do seguinte modo:

$$m_3 = \frac{6,29}{2} \cdot \frac{l_{x4}}{l_{x2}} = 3,15 \cdot \frac{3,78}{4,98} = 2,39 ; m_4 = \frac{7,01}{2} \cdot \frac{l_{x4}}{l_{x6}} = 3,51 \cdot \frac{3,78}{4,98} = 2,66$$

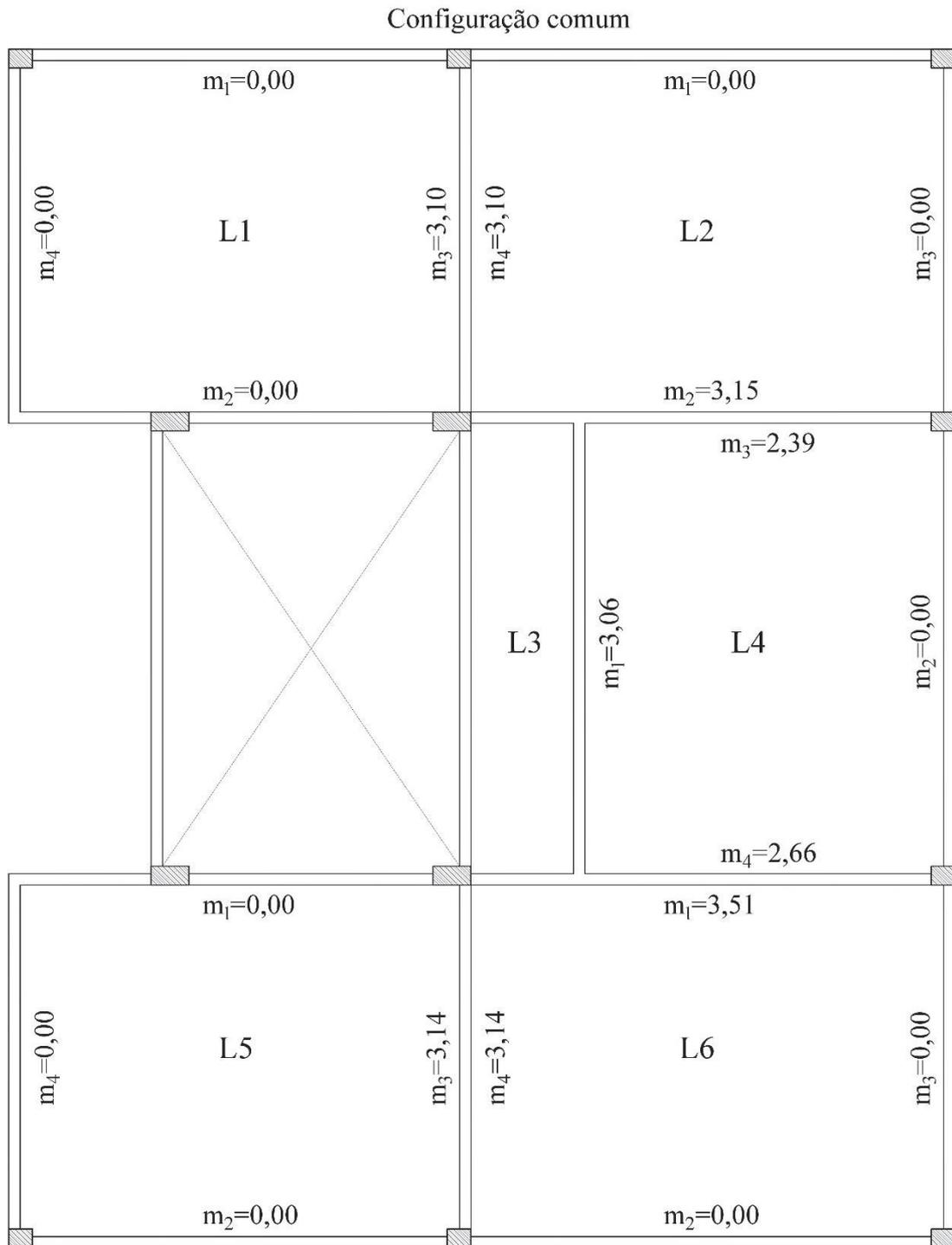
Figura 25 – Momentos fletores do pré-dimensionamento elástico



Momentos fletores (Esforços para análise plástica)  
Unidade: kNm/m

Fonte: Autor, 2020

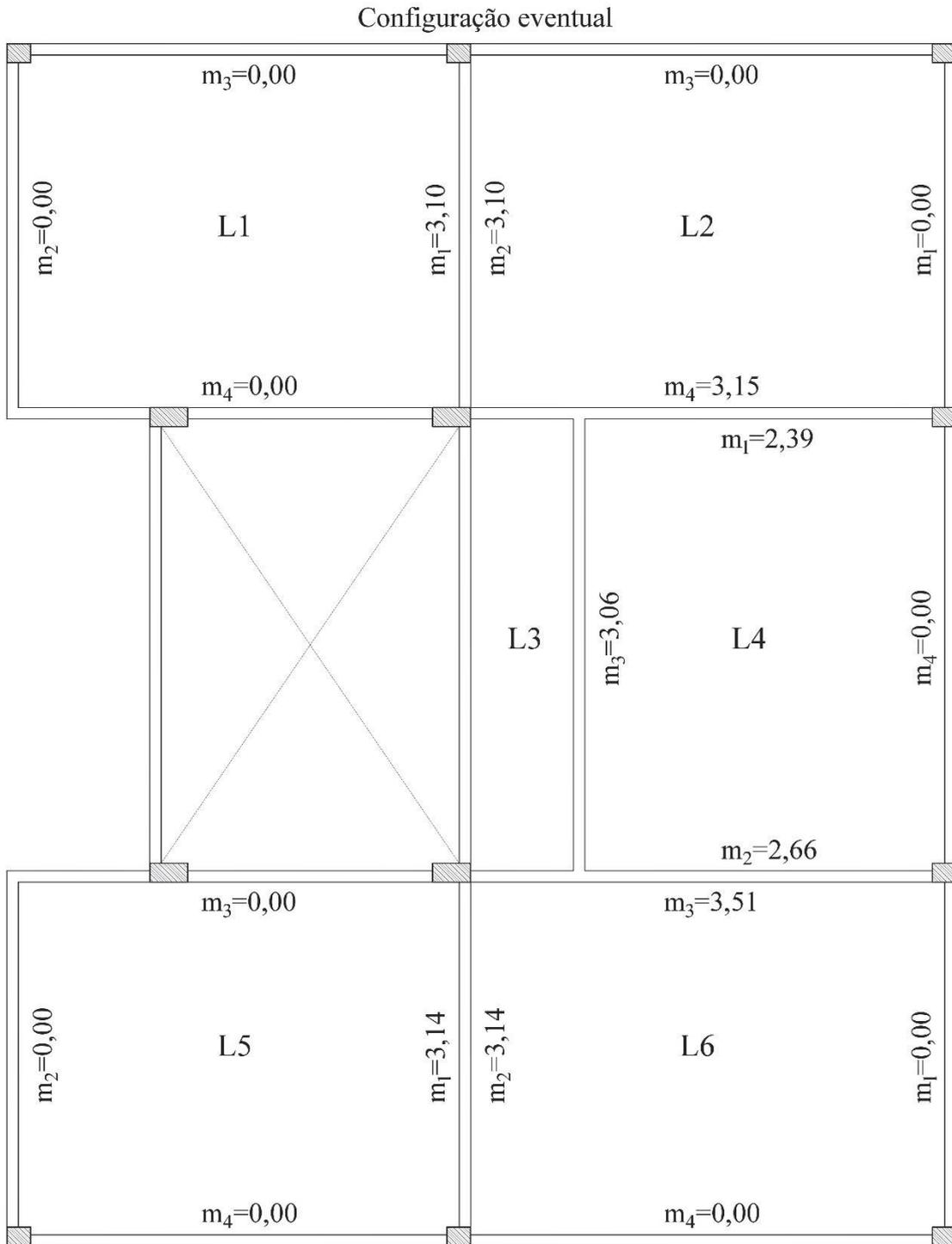
Figura 26 – Configuração comum dos momentos negativos



Momentos fletores negativos para análise plástica  
Unidade: kNm/m

Fonte: Autor, 2020

Figura 27 – Configuração eventual dos momentos negativos



Momentos fletores negativos para análise plástica  
Unidade: kNm/m

Fonte: Autor, 2020

Após o cálculo dos momentos plásticos, foram determinados os comprimentos das armaduras negativas, de acordo com o roteiro de cálculo especificado na seção 2.3.2.3, sendo os resultados deste, apresentados no Apêndice A.

A verificação das flechas no dimensionamento plástico é realizada conforme a metodologia de cálculo exposta na seção 2.3.2.4. Na Tabela 12 são apresentados os momentos de plastificação obtidos a partir da análise plástica para cada laje e as suas respectivas flechas.

**Tabela 12 – Momentos fletores do cálculo plástico e flechas**

Lajes	Momentos positivos		Momentos negativos		a <sub>i</sub> (cm)	a <sub>i</sub> (cm)	a <sub>cs</sub> (cm)	a <sub>total</sub> (cm)	a <sub>adm</sub> (cm)
	M <sub>x</sub> (kNm/m)	M <sub>y</sub> (kNm/m)	Interface	M <sub>e</sub> (kNm/m)					
L1	2,71	3,13	L1-L2	-3,10	0,29	0,11	0,11	0,51	1,49
L2	1,79	2,74	L2-L4	-3,15	0,16	0,05	0,08	0,29	1,49
L3	0,51	-	L3-L4	-3,06	-	-	-	-	-
L4	4,16	2,59	L4-L6	-3,51	0,68	0,30	0,09	1,07	1,51
L5	2,71	3,12	L5-L6	-3,14	0,28	0,10	0,11	0,50	1,49
L6	2,32	3,55	-	-	0,49	0,20	0,08	0,76	1,49

Fonte: Autor, 2020

No decorrer do cálculo plástico os momentos de plastificação são obtidos segundo uma direção principal e devem ser multiplicados pelo índice de ortotropia ( $\mu$ ), para que se tenha os momentos referentes a outra direção. Os momentos negativos são os mesmos obtidos no pré-dimensionamento elástico, após sua redução pela metade. Esses resultados podem ser melhor visualizados na Figura 28.

A análise plástica é concluída e os detalhamentos das armaduras positivas e negativas são apresentados nas Figuras 29 e 30. Para tanto, no presente trabalho utilizou-se os procedimentos detalhados na seção 4.1. Em seguida, foram elaborados o quadro de aço e o resumo das barras negativas e positivas, expostos nas Tabelas 13 e 14, a partir dos quais se obtém o consumo de aço demandado pelas lajes.

**Tabela 13 – Quadro de aço (análise plástica)**

Barra	Ø (mm)	Quantidade	Comprimento (m)	
			Unitário	Total
N1	6,30	42	4,83	202,86
N2	6,30	106	3,93	416,58
N3	6,30	42	5,18	217,56
N4	6,30	26	1,28	33,28
N5	6,30	31	3,98	123,38
N6	6,30	27	4,98	134,46
N7	6,30	21	4,66	97,86
N8	6,30	42	3,47	145,74
N9	6,30	26	2,47	64,22
N10	6,30	21	4,69	98,49

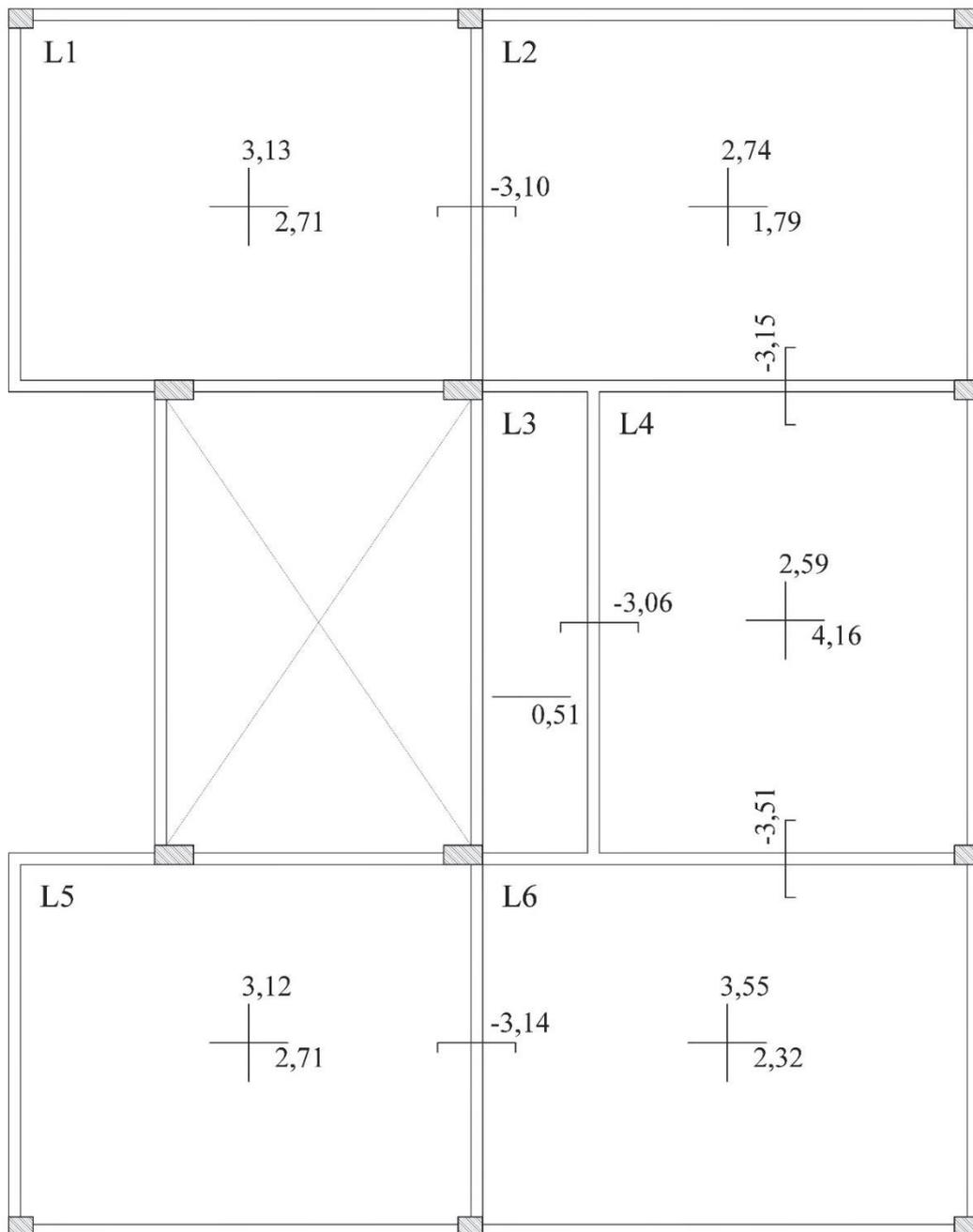
Fonte: Autor, 2020

Tabela 14 – Resumo das barras (análise plástica)

Armadura	Ø (mm)	Comprimento total (m)	Massa (Kg/m)	Massa total + 10% (Kg)
Positiva	6,30	1128,12	0,245	304,03
Negativa	6,30	406,31	0,245	109,50
<b>Peso de aço total</b>				<b>413,53</b>

Fonte: Autor, 2020

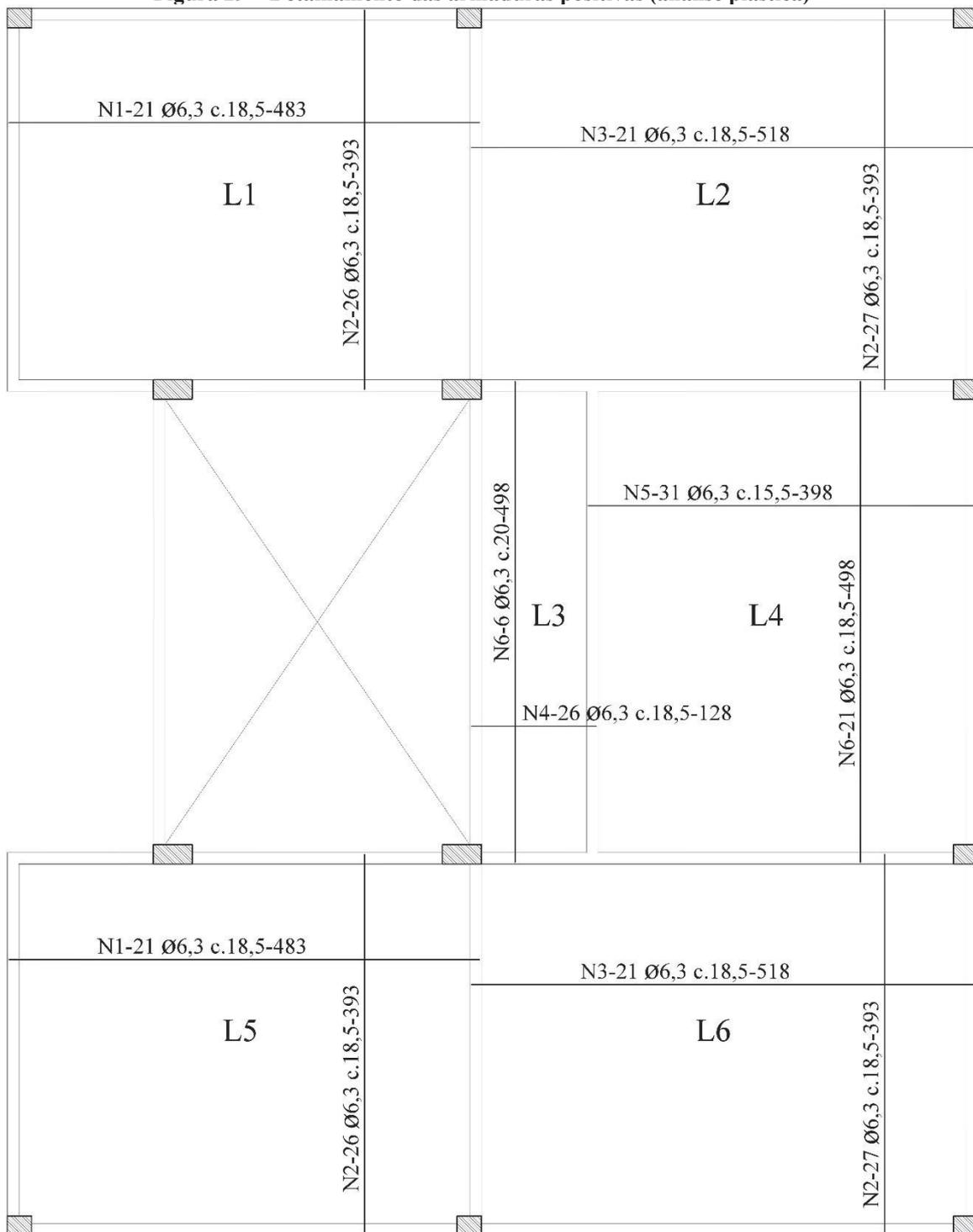
Figura 28 – Momentos fletores (análise plástica)



Momentos fletores (Análise Plástica)  
Unidade: kNm/m

Fonte: Autor, 2020

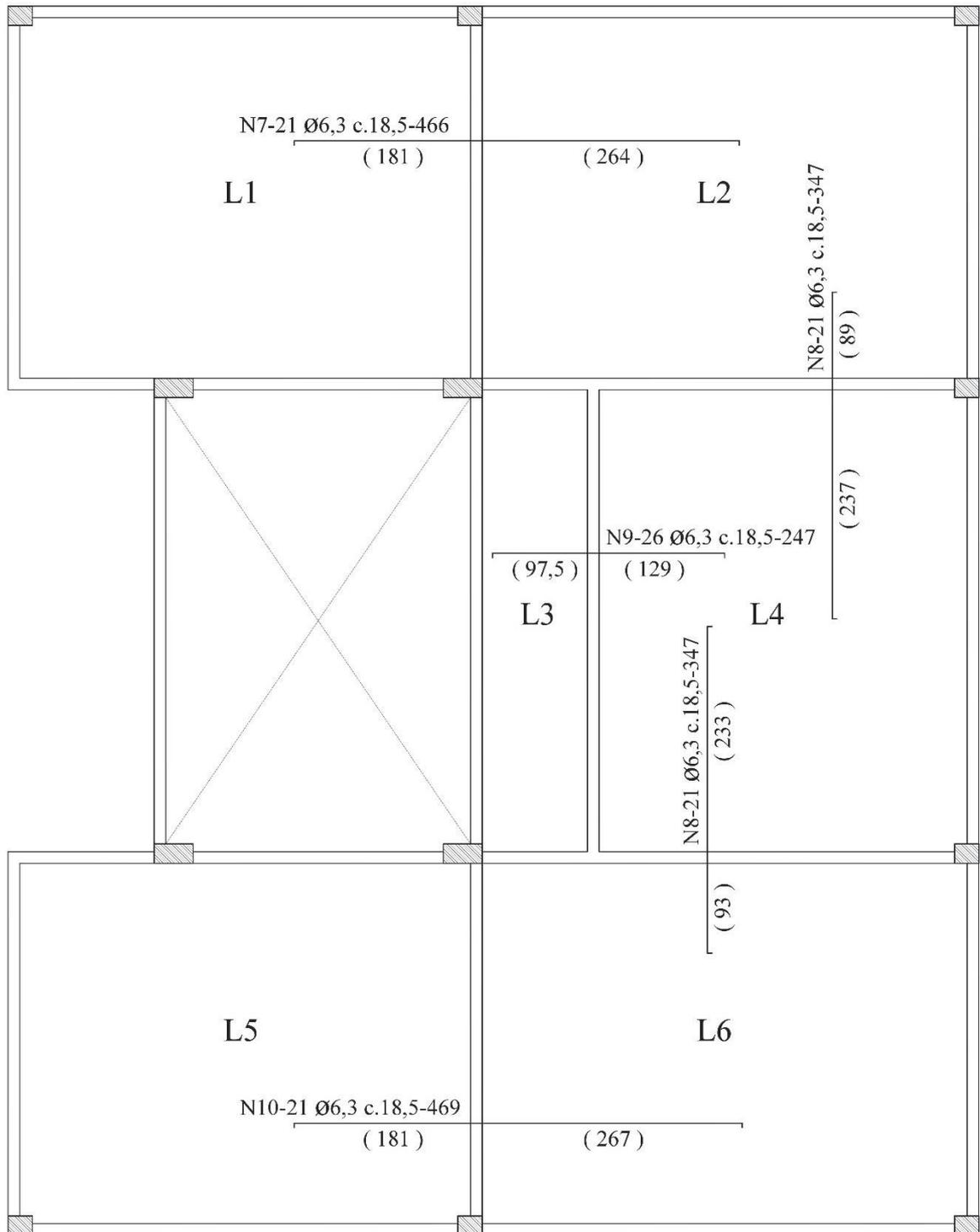
Figura 29 – Detalhamento das armaduras positivas (análise plástica)



Armadura Positiva (Análise Plástica)

Fonte: Autor, 2020

Figura 30 – Detalhamento das armaduras negativas (análise plástica)



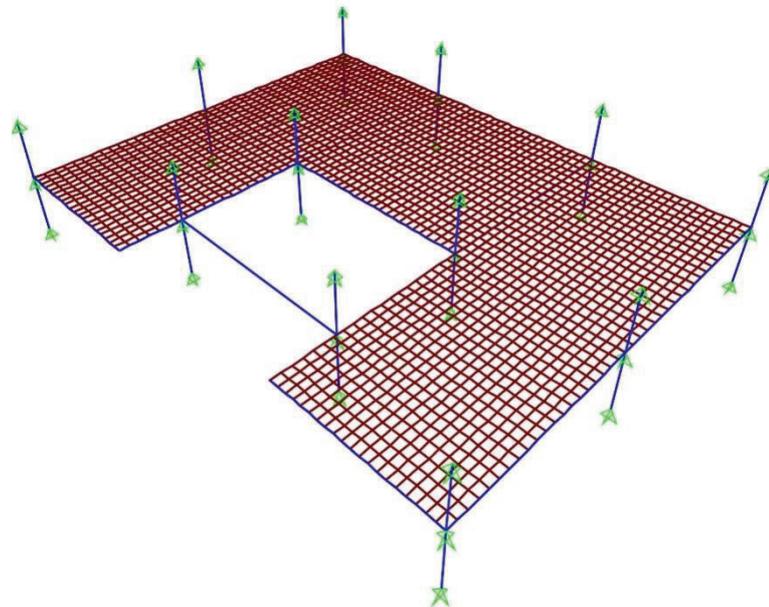
Armadura negativa (Análise Plástica)

Fonte: Autor, 2020

#### 4.4 RESULTADOS DA ANÁLISE NUMÉRICA

A efetivação da análise numérica do pavimento se deu com o auxílio do software SAP2000, que faz uso do MEF para calcular os esforços solicitantes e realizar simulações do comportamento da estrutura quando carregada. Dessa forma, com o emprego desse programa executou-se a modelagem do pavimento utilizando-se de um modelo elaborado conforme as recomendações da NBR-6118 (ABNT, 2014) para vinculação entre pilares e vigas, que está ilustrado na Figura 31.

**Figura 31 – Modelo para análise do pavimento**

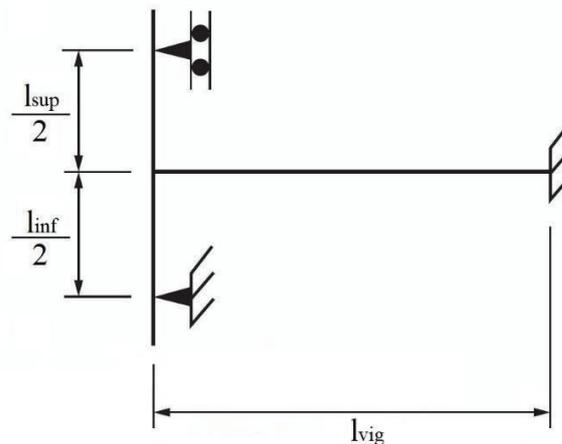


**Fonte: Autor, 2020**

O modelo simula para cada pilar metade do comprimento vão superior e inferior, conforme proposto pelo exemplar apresentado na norma, exposto na Figura 32. Na sua concepção as vigas e pilares foram modelados a partir de elementos *frames*, empregando-se as suas respectivas dimensões para a seção transversal definidas na planta de forma da Figura 18, sendo atribuído a todas as vigas 15% da rigidez à torção, de acordo com as recomendações do item 14.6.6.2 da NBR-6118 (ABNT, 2014).

Para realização da análise foram adicionados apoios fixos nas extremidades de cada pilar e em seus vínculos com as vigas, desse modo, considerou-se estas simplesmente apoiadas sobre os pilares, conforme recomenda a NBR 6118 (ABNT, 2014) em seu item 14.6.6.1 para o estudo das cargas verticais. Além disso não foi imposta restrição à deslocabilidade vertical das vigas, sendo estas consideradas como apoios flexíveis.

Figura 32 – Aproximação em apoios extremos



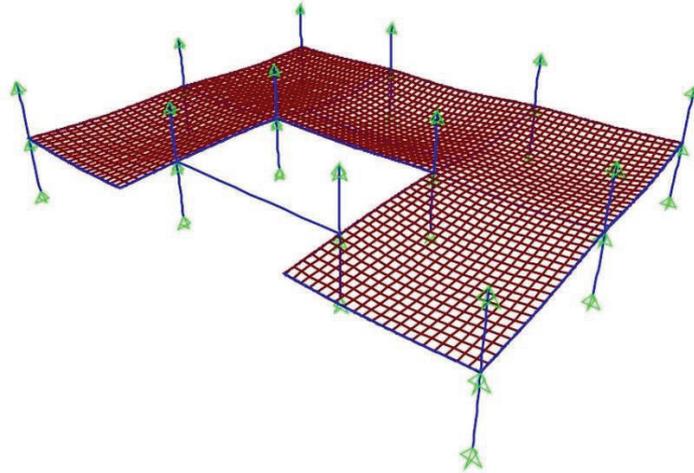
Fonte: ABNT, 2014

Para a modelagem das lajes utilizou-se os elementos de casca, que no SAP2000 apresentam a nomenclatura de *shells*. O processo se deu do seguinte modo, inicialmente foi elaborado apenas um elemento *shell* para cada painel de laje, sendo estes apoiados de tal modo, que o seu plano médio coincida com o eixo das vigas, esse procedimento foi adotado para simplificação do modelo. Em seguida, realizou-se à discretização dos elementos, atribuindo uma malha 20x20 à cada painel de laje, de acordo com o parâmetro adotado no trabalho de Guessi (2017). É importante enfatizar que foi realizado o refinamento para a discretização das lajes, adotando-se uma malha 40x40 de elementos *shells*, no entanto, não ocorreram alterações nos resultados, sendo mantida a primeira malha utilizada.

A modelagem das lajes continuou com o lançamento dos seus respectivos carregamentos permanentes e variáveis, de acordo com a Tabela 04, sendo estes distribuídos sobre os elementos *shell*. Dessa forma faz-se necessário mencionar, que a carga permanente do peso próprio é gerada automaticamente pelo software, quando são adicionadas as propriedades dos materiais com que se deseja trabalhar, que no presente estudo são o concreto C30 e o aço CA-50.

Para utilização do SAP2000 as propriedades dos materiais devem ser inseridas antes da elaboração do modelo. Desse modo, nesta análise considerou-se para o módulo de deformação longitudinal do concreto, o valor referente ao módulo secante calculado conforme a expressão (10), e ainda adotou-se,  $f_{ck} = 30$  MPa. Na Figura 33 apresenta-se a configuração deformada do pavimento após realização da simulação.

**Figura 33 – Configuração deformada**



Fonte: Autor, 2020

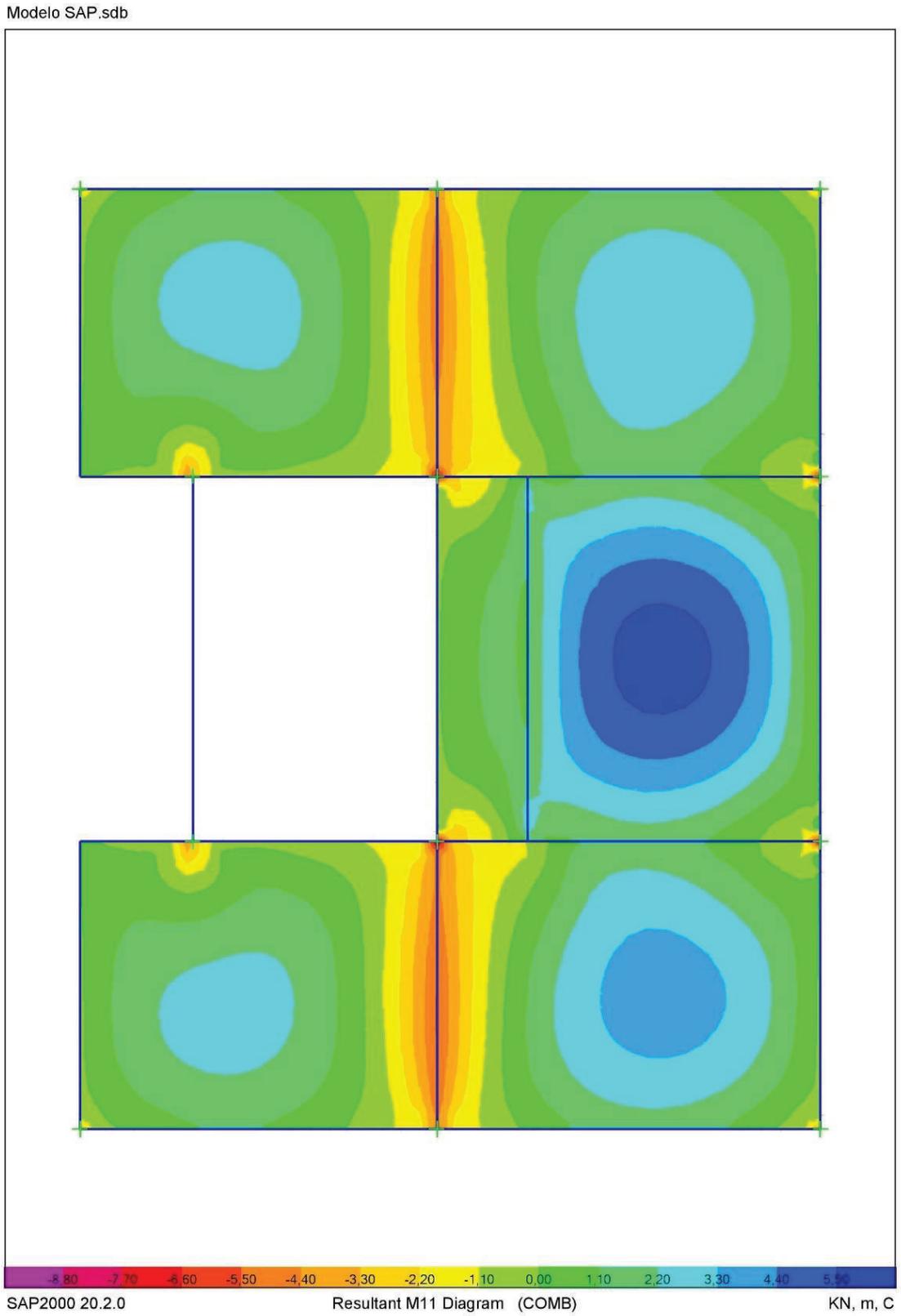
Os esforços solicitantes obtidos através da simulação podem ser visualizados nas Figuras 34 e 35, sendo que na primeira, são apresentados os momentos atuantes na direção  $x$  e na segunda os momentos atuantes na direção  $y$ . Além disso, foram selecionados os momentos máximos em cada direção principal, sendo estes dispostos na Tabela 15, que também apresenta as flechas elásticas,  $W$ , encontradas em cada laje para combinação do ELU, e suas respectivas flechas admissíveis calculadas de acordo com o ELS-DEF.

**Tabela 15 – Momentos fletores e flechas pelo MEF**

Lajes	Momentos positivos		Momentos negativos		W (mm)	Wadm (mm)
	Mx (kNm/m)	My (kNm/m)	Interface	Me (kNm/m)		
L1	2,71	3,86	L1-L2	-5,07	0,04	15,40
L2	3,10	3,15	L2-L4	-6,58	0,04	15,40
L3	1,26	2,46	L2-L3	-5,41	0,05	4,80
L4	6,02	5,20	L3-L4	-	0,09	15,60
L5	2,66	3,82	L3-L6	-5,50	0,03	15,40
L6	3,82	4,02	L4-L6	-7,18	0,05	15,40
-	-	-	L5-L6	-5,67	-	-

Fonte: Autor, 2020

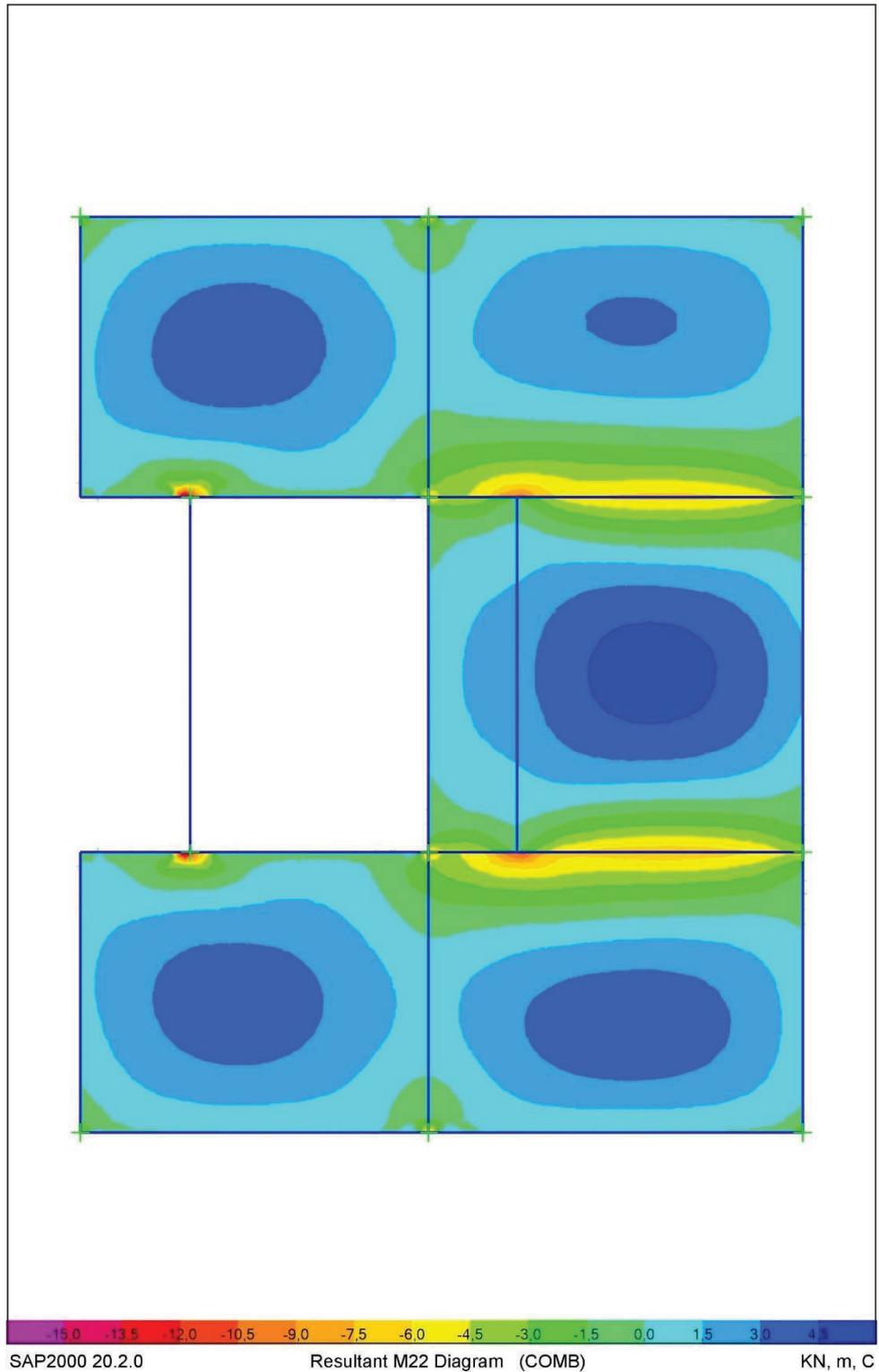
Figura 34 – Momentos fletores na direção  $x$



Fonte: Autor, 2020

**Figura 35 – Momentos fletores na direção y**

Modelo SAP.sdb

**Fonte: Autor, 2020**

Os momentos fletores máximos foram selecionados de modo a evitar os picos de concentração de esforços localizados nos pontos de apoios, caracterizados pelos pilares. Como reflexo desses picos de concentração, têm-se o surgimento de momentos fletores negativos nas

regiões que compreendem as interfaces L2-L3 e L3-L6, o que difere da metodologia, baseado no cálculo elástico, já que a laje L3 é armada em uma direção. Em virtude disso, foi calculada armadura negativa para essas duas regiões.

Observando-se a Tabela 15, verifica-se para a laje L3 que o momento fletor positivo é maior ao longo da direção do maior vão, o que contraria o cálculo elástico e plástico. Tal fato, que também pode ser observado no trabalho de Araújo (2008), é atribuído a flexão da viga V9, que faz a ligação entre as lajes L3 e L4, pois esta impõe sobre L3 grande curvatura segundo a direção  $y$ . Desse modo, como não há presença de momento negativo na interface L3/L4, adotou-se apenas a armadura negativa equivalente a área de aço mínima para essa seção.

A Figura 36 retrata a disposição dos momentos fletores máximos sobre o pavimento. De posse desses valores, aplicou-se a metodologia de dimensionamento apresentada na seção 4.1, de modo que a partir dos resultados obtidos da rotina de cálculo, foram realizados os detalhamentos das armaduras positivas e negativas, ilustrados nas Figuras 37 e 38. Na sequência são elaborados, o quadro de aço e resumo das barras, que contêm o consumo de aço requerido pela análise, conforme o disposto nas Tabelas 16 e 17.

**Tabela 16 – Quadro de aço (análise numérica)**

Barra	Ø (mm)	Quantidade	Comprimento (m)	
			Unitário	Total
N1	6,30	42	4,83	202,86
N2	6,30	115	3,93	451,95
N3	6,30	43	5,18	222,74
N4	6,30	26	1,28	33,28
N5	8,00	29	3,98	115,42
N6	6,30	37	4,98	184,26
N7	6,30	80	2,08	166,00
N8	6,30	82	2,10	172,20
N9	8,00	27	2,10	56,70

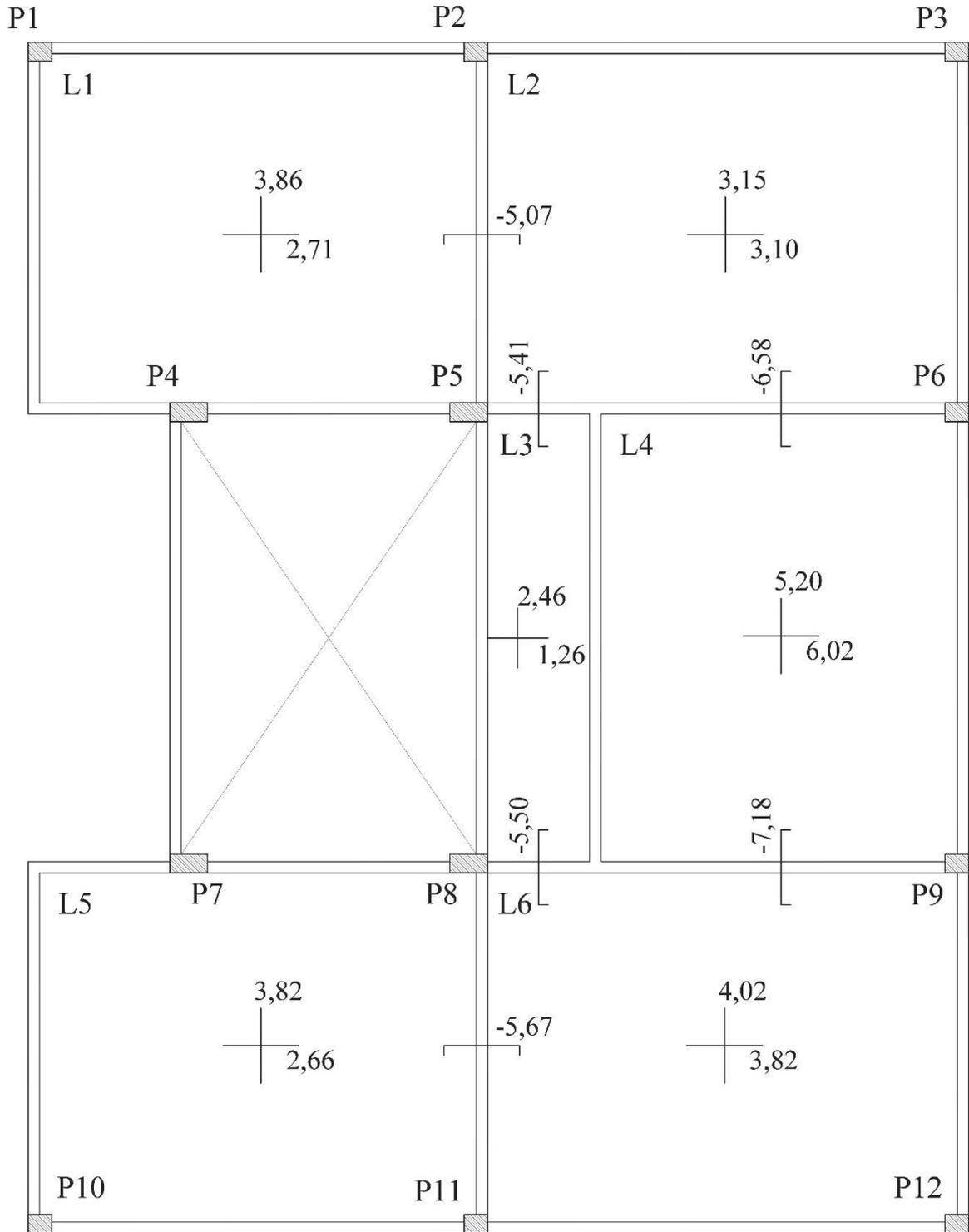
Fonte: Autor, 2020

**Tabela 17 – Resumo das barras (análise numérica)**

Armadura	Ø (mm)	Comprimento total (m)	Massa (Kg/m)	Massa total + 10% (Kg)
Positiva	6,30	1095,09	0,245	268,30
	8,00	115,42	0,395	45,59
	Subtotal			313,89
Negativa	6,30	338,20	0,245	82,86
	8,00	56,70	0,395	22,40
	Subtotal			105,26
<b>Peso de aço total</b>				<b>419,14</b>

Fonte: Autor, 2020

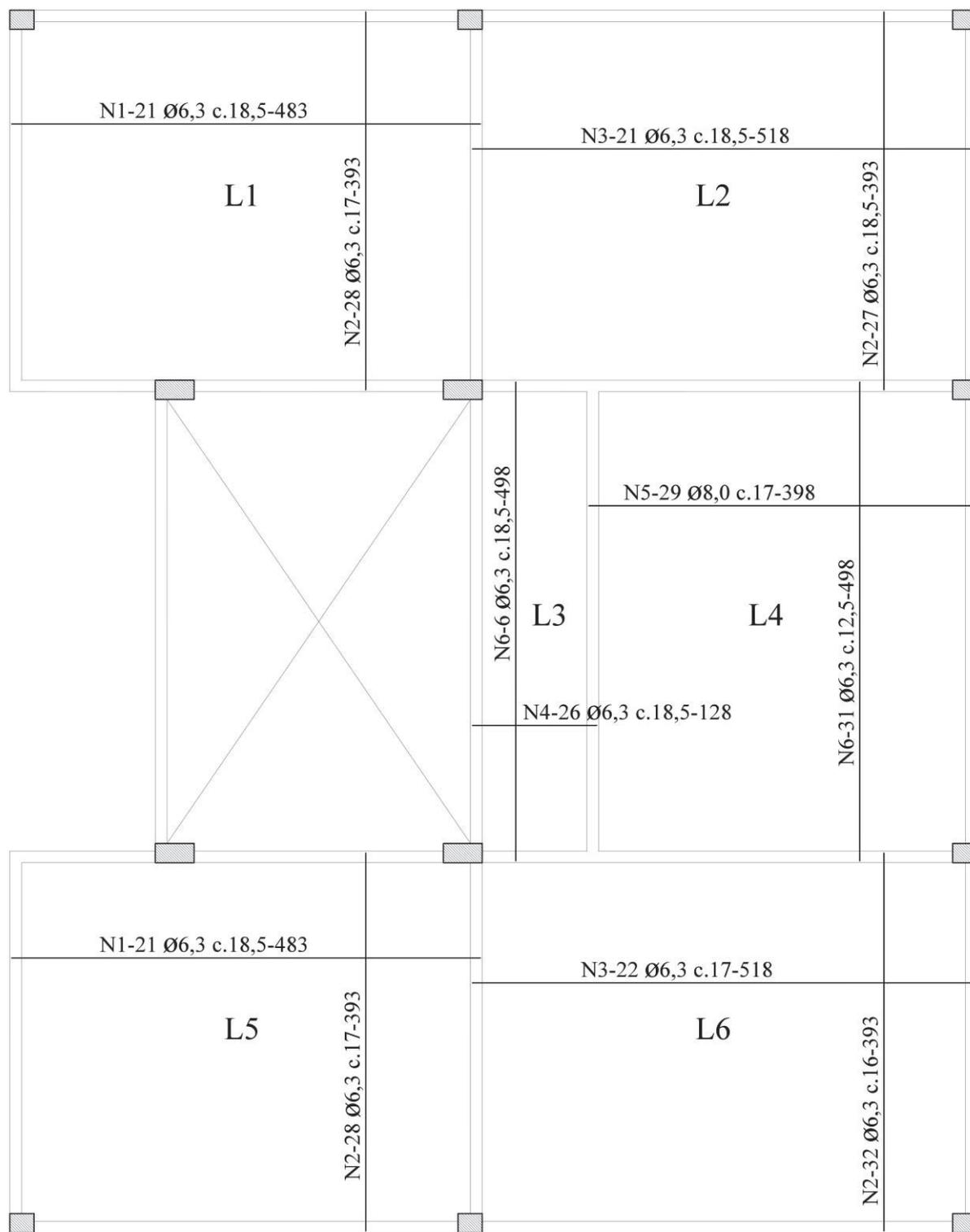
Figura 36 – Momentos fletores máximos (análise numérica)



Momentos fletores (Análise numérica)

Fonte: Autor, 2020

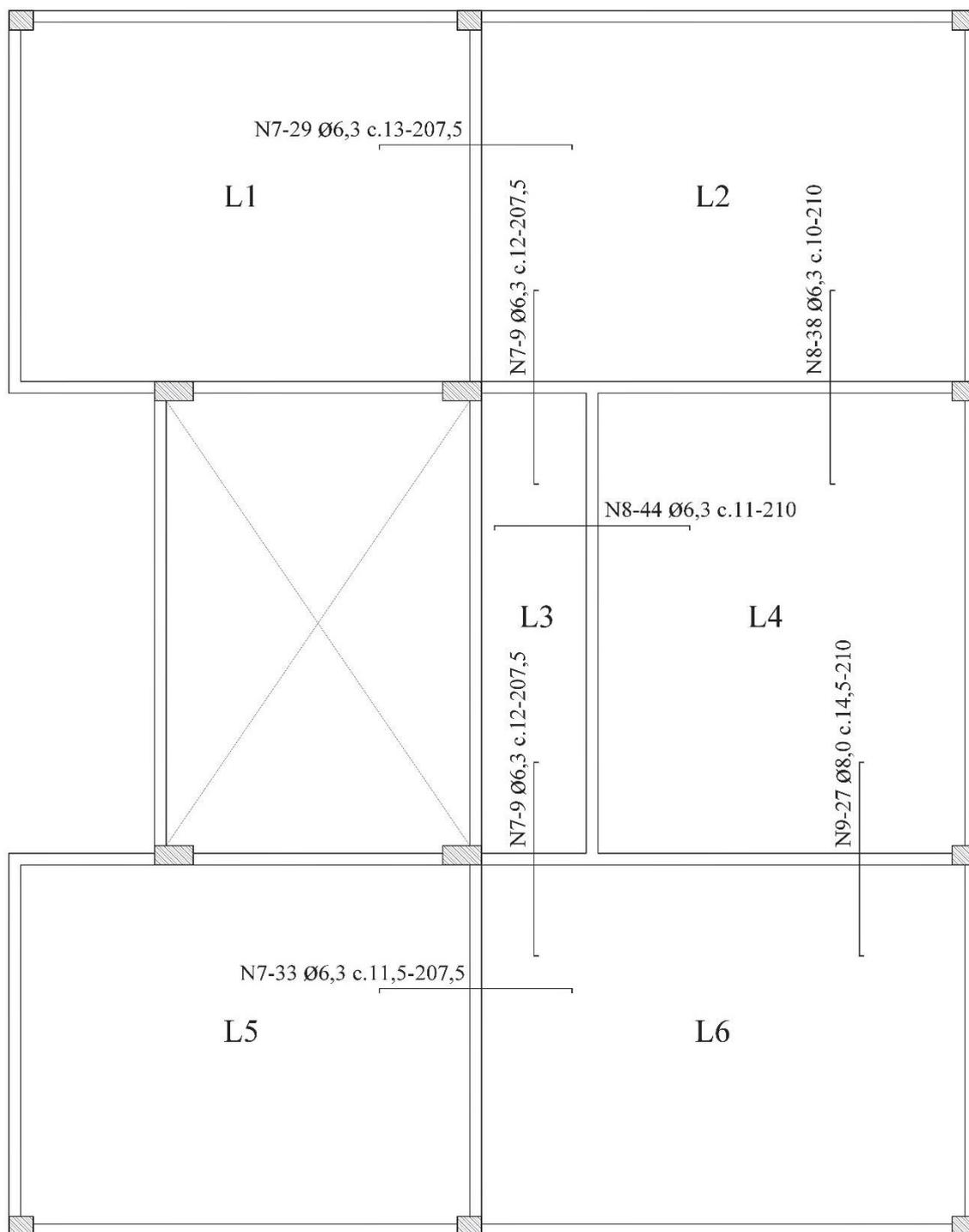
Figura 37 – Detalhamento das armaduras positivas (análise numérica)



Armadura Positiva (Análise numérica)

Fonte: Autor, 2020

Figura 38 – Detalhamento das armaduras negativas (análise numérica)



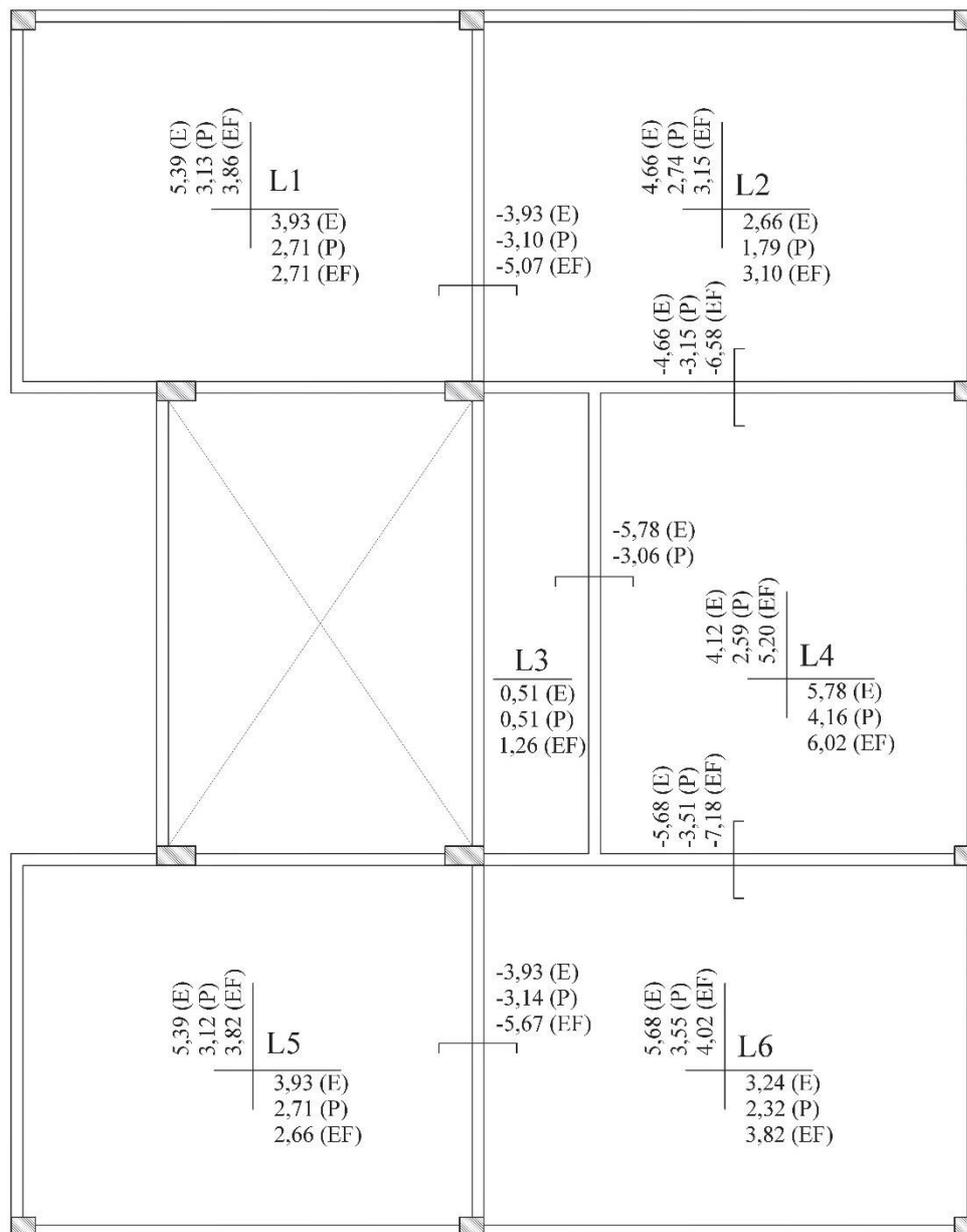
Armadura Negativa (Análise numérica)

Fonte: Autor, 2020

#### 4.5 COMPARAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesta seção serão comparados os resultados obtidos através das três metodologias de análise estrutural de um pavimento realizadas nesse trabalho. Para tanto, a Figura 39, foi elaborada com intuito de promover uma visualização mais adequada dos dados permitindo melhor confrontação dos mesmos. Essa ilustração apresenta os momentos máximos negativos e positivos obtidos em cada análise, estando estes dispostos sobre a planta baixa do pavimento.

**Figura 39 – Momentos fletores máximos obtidos a partir das análises elástica, plástica e numérica**



LEGENDA:  
 (E) - Análise elástica  
 (P) - Análise plástica  
 (EF) - Elementos Finitos

Momentos fletores máximos  
 Unidade: kNm/m

Fonte: Autor, 2020

Além da Figura 39, foi elaborada a Tabela 18, que apresenta os momentos positivos obtidos em cada análise, em que os dados são confrontados a partir da diferença percentual dos valores referentes às análises elástica e plástica frente aos momentos encontrados a partir da análise numérica.

**Tabela 18 – Comparativo dos momentos positivos**

Laje	Análise	M <sub>x</sub> (kNm/m)	DF % - MEF	M <sub>y</sub> (kNm/m)	DF % - MEF
L1	Elástica	3,93	45,02	5,39	39,80
	Plástica	2,71	0,00	3,13	-18,82
	MEF	2,71	-	3,86	-
L2	Elástica	2,66	-14,07	4,66	47,73
	Plástica	1,79	-42,18	2,74	-13,14
	MEF	3,10	-	3,15	-
L3	Elástica	0,51	-59,52	-	-
	Plástica	0,51	-59,52	-	-
	MEF	1,26	-	2,46	-
L4	Elástica	5,78	-3,95	4,12	-20,83
	Plástica	4,16	-30,87	2,59	-50,23
	MEF	6,02	-	5,20	-
L5	Elástica	3,93	47,74	5,39	41,27
	Plástica	2,71	1,88	3,12	-18,22
	MEF	2,66	-	3,82	-
L6	Elástica	3,24	-15,13	5,68	41,31
	Plástica	2,32	-39,23	3,55	-11,68
	MEF	3,82	-	4,02	-

Fonte: Autor, 2020

Pinheiro (1988) afirma em seu estudo que o custo de uma laje é aproximadamente proporcional aos momentos. Desse modo faz-se interessante a avaliação desses esforços. Diante dessa constatação e analisando a Figura 39, pode-se observar que em geral os momentos positivos obtidos através da análise plástica são consideravelmente menores que os momentos encontrados a partir das outras análises. Tal fato também pode ser verificado nos trabalhos de Pinheiro (1988) e Gonzalez (1997).

Examinando a Tabela 18 percebe-se que ao confrontar os dados, tendo como referência os resultados adquiridos a partir do MEF, observa-se grande variação percentual em comparação com os valores retirados das análises elástica e plástica, sendo essa oscilação tanto positiva em alguns casos como negativa em outros, manifestando-se de forma mais expressiva para a análise elástica, em que a discrepância é superior a 40% na maioria das confrontações.

No caso da laje L3 que é armada em uma direção, ocorre maior divergência em comparação às outras análises. Como este painel foi calculado do mesmo modo para a análise plástica e elástica, justifica-se o mesmo valor para o momento positivo na direção  $x$ . Já na

análise numérica têm-se um valor expressivo para o momento positivo na direção  $y$ . Conforme relatado na seção 4.4, tal fato não deveria ocorrer, assim como a ausência de momento negativo na interface L3-L4 e surgimento deste nas interfaces L2-L3 e L3-L6. Como explicação à essas irregularidades, pode-se atribuir a influência da concentração de esforços nas proximidades dos pilares, além da grande curvatura imposta pela flexão da viga V9, que serve de apoio as lajes L3 e L4.

Araújo (2008) explica que os procedimentos tradicionais para o cálculo lajes armadas em uma direção, baseados na teoria de placas não apresentam valores confiáveis para lajes apoiadas em vigas flexíveis, e salienta que as lajes de concreto armado possuem grande capacidade de redistribuição de esforços, o que garante a segurança do cálculo tradicional.

Neste trabalho foi adotado o procedimento proposto por Araújo (2014), para o cálculo de lajes apoiadas em vigas flexíveis, sendo encontrados resultados divergentes da análise pelo MEF, com o momento positivo, superior segundo a direção do maior vão. Porém, constatou-se que este momento não ultrapassa o valor limite para a exigência de armadura mínima. Desse modo, para o dimensionamento a partir da análise numérica, foi seguida a orientação de Araújo (2008), que recomenda armadura mínima para as armaduras de distribuição das lajes armadas em uma direção.

Para análise dos momentos negativos foi elaborada a Tabela 19, que também apresenta como parâmetro de referência no cálculo da variação percentual, os momentos obtidos a partir da análise numérica pelo MEF.

**Tabela 19 – Comparativo dos momentos negativos**

<b>Interface</b>	<b>Análise</b>	<b>Me (kNm/m)</b>	<b>DF % - MEF</b>
L1-L2	Elástica	3,93	-22,49
	Plástica	3,10	-38,86
	MEF	5,07	-
L2-L4	Elástica	4,66	-29,23
	Plástica	3,15	-52,16
	MEF	6,58	-
L3-L4	Elástica	5,78	-
	Plástica	3,06	-
	MEF	-	-
L4-L6	Elástica	5,68	-20,87
	Plástica	3,51	-51,10
	MEF	7,18	-
L5-L6	Elástica	3,93	-30,70
	Plástica	3,14	-44,63
	MEF	5,67	-

Fonte: Autor, 2020

Através de uma análise dos dados apresentados na Tabela 19, constata-se grande discrepância dos momentos negativos nas análises plásticas e elásticas em comparação com a efetuada a partir do MEF, sendo os valores encontrados para essa última, consideravelmente superior aos das demais. Tal divergência é maior para a análise plástica ficando em média acima de 45%, apesar de menor, a diferença ainda é bastante acentuada para a análise elástica estando em média acima dos 20%.

A redução dos momentos negativos da análise elástica, em comparação à análise pelo MEF, pode ser atribuída pelo fato de ter sido empregada na sua realização a teoria de grelhas para apoios deformáveis, que considera de maneira aproximada uma redistribuição dos esforços a partir dos apoios, diminuindo assim os momentos negativos. Também deve-se levar em consideração que a análise numérica neste trabalho não contemplou a redistribuição de esforços.

Quanto a análise plástica a grande discrepância dos momentos negativos face aos valores encontrados pelo MEF, pode ser justificada pelo pré-dimensionamento elástico que antecede o cálculo plástico, em que os momentos negativos são reduzidos à metade.

É importante enfatizar a constatação, mediante revisão bibliográfica, de que as discrepâncias dos esforços solicitantes encontrados a partir das três análises estão de acordo com as proporções contidas em outros trabalhos acadêmicos, como também afirmou Fava e Neves (2018), em seu trabalho que avaliou os esforços solicitantes para pavimentos de lajes maciças obtidos a partir de análise pelo MEF e teoria de grelhas.

Além disso no trabalho de Werner e Vargas (2013) em que realizou-se a comparação entre o método de Marcus, a resolução por Séries e o MEF para o dimensionamento de lajes maciças bidirecionais, verificou-se que os resultados demonstram diferenças que não apresentam um padrão definido, sendo as variações encontradas, justificadas pelos conceitos distintos em que se baseiam cada metodologia de análise estrutural.

Ainda é pertinente mencionar que verificação das flechas foi satisfeita para todas as metodologias de dimensionamento, porém na análise numérica os valores encontrados são muito inferiores àqueles apresentados nas demais análises. No entanto não será realizada uma avaliação mais aprofundada quanto ao estudo das flechas, dado que este não é o foco principal para o escopo dessa pesquisa.

A Tabela 20 apresentada a seguir foi executada para melhor comparação acerca do consumo de aço demandado por cada metodologia de dimensionamento. Nela estão tabulados os resultados obtidos para o peso de aço em cada método (tanto para as armaduras positivas

como para as negativas) e as diferenças percentuais entre as análises elástica, plástica e numérica.

**Tabela 20 – Comparativo do consumo de aço**

<b>Armadura</b>	<b>Análise</b>	<b>Consumo de Aço (Kg)</b>	<b>DF (%) - MEF</b>	<b>DF (%) - Elástica</b>	<b>DF (%) - Plástica</b>
Positiva	Elástica	382,28	21,79	-	25,74
	Plástica	304,03	-3,14	-20,47	-
	MEF	313,89	-	-17,89	3,24
Negativa	Elástica	85,14	-19,11	-	-22,25
	Plástica	109,50	4,03	28,61	-
	MEF	105,26	-	23,62	-3,88
Total	Elástica	467,42	11,52	-	13,03
	Plástica	413,53	-1,34	-11,53	-
	MEF	419,14	-	-10,33	1,36

**Fonte: Autor, 2020**

Observando a Tabela 20 é possível constatar que a análise plástica é a metodologia que apresenta menor consumo de aço, com uma economia de 13,03% em relação ao cálculo elástico e 1,36% na comparação com a análise pelo MEF. No entanto, o procedimento plástico é o que apresenta maior consumo de aço para as armaduras negativas, tal fato se deve ao elevado comprimento calculado para essas ferragens, que apesar da pequena magnitude dos momentos negativos, faz-se necessário comprimentos maiores para esses vergalhões, de modo que sejam atendidas as hipóteses de dimensionamento da TLR.

Em oposição ao dimensionamento plástico, a análise elástica é a que apresenta maior consumo de aço, sendo 11,52% superior ao encontrado pelo MEF. Entretanto, também é a metodologia que apresenta menor demanda por armaduras negativas, e conseqüentemente a que dispõe de maior consumo de aço para as armaduras positivas. Tal fato pode ser justificado pela consideração dos apoios deformáveis mediante o emprego da teoria de grelhas para o cálculo elástico, em que, como já discutido anteriormente, os momentos negativos são reduzidos, de modo a simular uma redistribuição dos esforços.

Ainda se faz relevante mencionar, que as três metodologias atendem às restrições impostas pela limitação das flechas admissíveis no ELS-DEF, mesmo obtendo-se flechas menores para a análise numérica, quando em comparação com as demais. Desse modo, pode-se afirmar que todas as metodologias poderiam ser empregadas para o dimensionamento do pavimento, munindo-se de uma razoável margem de segurança.

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi desenvolvido um estudo comparativo acerca de três metodologias para a análise, dimensionamento e detalhamento de um pavimento de lajes maciças. Estas foram a análise elástica, plástica e numérica. No cálculo elástico, empregou-se a teoria de grelhas para apoios deformáveis, já o dimensionamento plástico se deu por meio da aplicação da TLR, e por fim, a análise numérica foi elaborada a partir do MEF com a utilização do software SAP2000.

A partir dos resultados obtidos por meio da execução de cada metodologia de dimensionamento foi realizada uma confrontação de dados acerca dos momentos positivos e negativos encontrados nas três análises, em que se constatou grande discrepância dos resultados quando se toma como referência o MEF, principalmente entre os momentos positivos. O cálculo plástico foi o que de modo geral apresentou os menores valores, tanto para os momentos positivos como os negativos.

O estudo realizado nessa pesquisa também se estendeu ao comparativo entre os métodos de dimensionamento no que se refere ao consumo de aço demandado para cada análise empregada, sendo que foi observado maior economia de armaduras para o cálculo plástico, que apresentou resultados bem próximos ao do consumo determinado pelo MEF. Em contrapartida, o dimensionamento elástico foi o que apontou maior demanda por armaduras, sendo 11,52% superior, quando comparado ao MEF.

Em suma, pode-se concluir que o dimensionamento plástico apresenta uma economia considerável quanto ao consumo de aço em relação aos demais métodos, quando aplicado ao pavimento utilizado nessa pesquisa, sendo este bem representativo para os edifícios residenciais usuais. Além disso, o cálculo elástico em que se emprega a teoria de grelhas para apoios deformáveis, em alguns casos, quando comparado ao MEF, pode acarretar em superdimensionamento, baseando-se no maior consumo de aço encontrado. Desse modo, faz-se necessário um estudo mais aprofundado acerca dos efeitos da redistribuição de esforços utilizada para a consideração dos apoios flexíveis.

Além disso, torna-se relevante enfatizar que todas as metodologias de dimensionamento executadas nesse trabalho, atenderam às verificações impostas pelas limitações das flechas. Desse modo, mesmo não sendo realizado um estudo mais profundo acerca do assunto, pode-se afirmar que as análises aqui apresentadas possuem uma adequada margem de segurança, para sua aplicação no dimensionamento de lajes maciças.

Na possibilidade de trabalhos futuros, em que se realize a continuidade dessa pesquisa, é interessante a execução de uma análise numérica em que se empregue a redistribuição de esforços, de modo a reduzir os efeitos causados pelos picos de momentos encontrados nas regiões dos apoios, para que se possa traçar um comparativo com o cálculo elástico empregado neste trabalho, no qual se considerou a flexibilidade dos apoios. Além disso pode ser realizado um estudo mais detalhado sobre questão da verificação das flechas, principalmente para a análise numérica.

Um melhor aprofundamento sobre o tema análise numérica de pavimentos de concreto armado com o MEF pode ser importante, para o refinamento e entendimento do modelo (mesmo para o caso linear elástico em questão).

## REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, maio. 2014.
- \_\_\_\_\_. **NBR 6120**. Ações para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro: ABNT, nov. 2019.
- ARAÚJO, J. M. **Avaliação dos métodos simplificados para cálculo de lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis**. Teoria e prática na engenharia civil, Rio Grande – RS, n. 12, p. 1-11, out. 2008.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**. 4. ed. Rio Grande: Dunas, 2014, 303 p, vol. 1.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**. 4. ed. Rio Grande: Dunas, 2014, 420 p, vol. 2.
- BASTOS, P. S. S. **Lajes de concreto**. Bauru, Unesp, Departamento de Engenharia Civil, Notas de aula, mar. 2015, 78p., Disponível em: <http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos>.
- CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118:2014**. 4. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2017, 415 p.
- CZERNY, F. **Tafeln für vierseitig und dreiseitig gelagerte rechteckplatten (Tabelas para placas retangulares apoiadas em quatro e em três lados)**. Berlin, Betonkalender, v. 65, n. 1, p305-381, 1976 .
- FAVA, G. C.; NEVES, L. R. **Análise numérica comparativa entre o método dos elementos finitos e o método das grelhas na análise estrutural do elemento laje – estudo de Caso**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Engenharia Civil, IFGO, Aparecida de Goiânia, 2018.
- FIORIN, E. **Arranjos de armaduras em estruturas de concreto armado**. 1998. 248 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 1998.
- GONZALEZ, R. L. M. **Análise de lajes pela teoria das charneiras plásticas e comparação de custos entre lajes maciças e lajes treliçadas**. 1997. 159 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, 1997.
- GUARDA, M. C. C. **Cálculo de lajes-cogumelo pela teoria das charneiras plásticas**. 1995. 164 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, 1995.

GUESSI, D. E. **Análise de lajes maciças em concreto armado com plastificação.** 2017. 164 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2017.

KATTAN, P. I. **MATLAB Guide to finite elements an interactive approach.** 2. ed. Jordan, EUA: Springer, 2008, 429 p.

LANGENDONCK, T. **Charneiras plásticas em lajes de edifícios.** São Paulo, ABCP, 1966, 81p.

MELO, C. E. L. **Análise estrutural com o SAP2000.** Brasília, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo – UNB, Departamento de Tecnologia, Notas de aula, Nov. 2016, 49p., Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/309851471>.

OÑATE, E. **Structural analysis with the finite element method linear statics.** volume 1: basis and solids. 1. ed. Barcelona, Espanha: Springer, 2009, 472 p.

PINHEIRO, L. M. **Análise elástica e plástica de lajes retangulares de edifícios.** 1988. 303 f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, 1988.

PINHEIRO, L. M. **Concreto armado: tabelas e ábacos.** 1993. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, 1993.

PRAZERES, P. G. C. D. **Desenvolvimento de elementos finitos híbridos para a análise de problemas dinâmicos usando superposição modal avançada.** 2005. 170 f. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

SAP2000, **Integrated Software for Structural Analysis and Design.** 2006. Analysis reference Manual, v.11. Computers and Structures, Inc. Berkeley, California, USA.

SOUZA, R. M. **Método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor.** Belém, UFPA, Departamento de Engenharia Civil, Notas de aula, Mai. 2003, 41p., Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/326331671>.

SZILARD, R. **Theory and analysis of plates: Classical and numerical methods.** New Jersey: Prentice Hall, 1974, 124p.

WERNER, B. V.; VARGAS, A. **Análise comparativa entre diferentes métodos de cálculo para o dimensionamento de lajes maciças bidirecionais.** Iniciação Científica, Criciúma -SC, v. 11, n. 1, p. 5-26, 2013.

## APÊNDICE A – COMPRIMENTO DAS ARMADURAS NEGATIVAS DA ANÁLISE PLÁSTICA

Os dados apresentados a seguir, foram obtidos a partir da aplicação da rotina de cálculo especificada na seção 2.3.2.3.

		<b>L1</b>	<b>L2</b>	<b>L4</b>	<b>L5</b>	<b>L6</b>
<b>CONFIGURAÇÃO NORMAL</b>	<b>m</b>	3,43	3,03	3,57	3,43	3,69
	<b>μm</b>	2,97	1,98	2,23	2,97	2,41
	<b>m1</b>	0,00	0,00	3,06	0,00	3,51
	<b>m2</b>	0,00	3,15	0,00	0,00	0,00
	<b>m3</b>	3,10	0,00	2,39	3,14	0,00
	<b>m4</b>	0,00	3,10	2,66	0,00	3,14
	<b>a*(1)</b>	4,02	3,93	2,95	4,03	3,18
	<b>a*(2)</b>	4,02	3,24	3,49	4,03	3,81
	<b>b*(3)</b>	2,82	3,04	2,45	2,82	2,90
	<b>b*(4)</b>	3,42	2,34	2,41	3,43	2,31
	<b>x1</b>	-0,29	-0,20	0,83	-0,30	0,55
	<b>x2</b>	-0,29	0,49	0,29	-0,30	-0,08
	<b>y3</b>	1,81	1,94	2,33	1,81	2,08
<b>y4</b>	1,21	2,64	2,37	1,20	2,67	
<b>CONFIGURAÇÃO EVENTUAL</b>	<b>m</b>	2,97	1,98	2,23	2,97	2,41
	<b>μm</b>	3,43	3,03	3,57	3,43	3,69
	<b>m1</b>	3,10	0,00	2,39	3,14	0,00
	<b>m2</b>	0,00	3,10	2,66	0,00	3,14
	<b>m3</b>	0,00	0,00	3,06	0,00	3,51
	<b>m4</b>	0,00	3,15	0,00	0,00	0,00
	<b>a*(1)</b>	3,38	3,76	2,94	3,38	3,60
	<b>a*(2)</b>	4,11	2,89	2,89	4,12	2,86
	<b>b*(3)</b>	3,08	3,45	2,49	3,08	2,80
	<b>b*(4)</b>	3,08	2,84	2,94	3,08	3,36
	<b>x3</b>	0,65	0,28	1,29	0,65	0,93
	<b>x4</b>	0,65	0,89	0,84	0,65	0,37
	<b>y1</b>	1,25	1,22	1,84	1,25	1,38
<b>y2</b>	0,52	2,09	1,89	0,51	2,12	
	<b>Xe (m)</b>	0,65	0,28	1,29	0,65	0,93
	<b>Xd (m)</b>	0,65	0,89	0,84	0,65	0,37
	<b>Ys (m)</b>	1,81	1,94	2,33	1,81	2,08
	<b>Yi (m)</b>	1,21	2,64	2,37	1,20	2,67

## ANEXO A – FUNÇÕES APROXIMADAS DE PINHEIRO (1988)

Tabela 2.3 – Momentos de CZERNY: Funções aproximadas

MOMENTOS EM LAJES COM CARGA UNIFORME			
CASO	$u$	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	$u = f(\lambda)$
1	$u_x$	$1 \leq \lambda \leq 2,5$	$-2,46\lambda^2 + 13,07\lambda - 6,20$
		$2,5 < \lambda \leq 4$	$0,93\lambda + 8,78$
		$\lambda > 4$	12,50
	$u_y (*)$	$\lambda \geq 1$	4,40
2A	$u_x$	$1 \leq \lambda \leq 2,5$	$-1,78\lambda^2 + 11,53\lambda - 6,64$
		$2,5 < \lambda \leq 4$	$0,96\lambda + 8,66$
		$\lambda > 4$	12,50
	$u_y (*)$	$1 \leq \lambda \leq 1,5$	$-2,73\lambda^2 + 7,71\lambda - 1,09$
		$\lambda > 1,5$	4,33
	$u'_y$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-3,75\lambda^2 + 15,04\lambda - 2,89$
		$2 < \lambda \leq 4$	$0,5\lambda + 11,90$
$\lambda > 4$		12,50	
2B	$u_x$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-1,49\lambda^2 + 6,78\lambda - 1,40$
		$2 < \lambda \leq 4$	$0,42\lambda + 5,35$
		$\lambda > 4$	7,03
	$u'_x$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-3,54\lambda^2 + 14,27\lambda - 2,33$
		$2 < \lambda \leq 4$	$0,22\lambda + 11,61$
		$\lambda > 4$	12,50
	$u_y (*)$	$1 \leq \lambda \leq 1,25$	$-1,07\lambda + 4,18$
$\lambda > 1,25$		2,84	
3	$u_x$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-1,72\lambda^2 + 8,09\lambda - 3,38$
		$2 < \lambda \leq 2,5$	$1,21\lambda + 3,50$
		$2,5 < \lambda \leq 4$	$0,34\lambda + 5,67$
		$\lambda > 4$	7,03
	$u'_x (*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-3,87\lambda^2 + 16,53\lambda - 5,66$

		$2 < \lambda \leq 2,5$	$1,19\lambda + 9,53$
		$\lambda > 2,5$	12,50
	$u_y (*)$	$1 \leq \lambda \leq 1,5$	$-0,42\lambda + 3,41$
		$\lambda > 1,5$	2,78
	$u'_y (*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-1,88\lambda^2 + 6,83\lambda + 2,04$
		$\lambda > 2$	8,20
4A	$u_x (*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-0,78\lambda^2 + 8,61\lambda - 5,64$
		$2 < \lambda \leq 4$	$-1,02\lambda^2 + 8,02\lambda - 3,51$
		$\lambda > 4$	12,50
	$u_y$	$1 \leq \lambda \leq 1,5$	$-3,13\lambda^2 + 9,67\lambda - 3,36$
		$\lambda > 1,5$	4,10
	$u'_y$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-4,31\lambda^2 + 17,84\lambda - 6,53$
		$2 < \lambda \leq 3$	$0,59\lambda + 10,73$
		$\lambda > 3$	12,50
	4B	$u_x$	$1 \leq \lambda \leq 1,5$
$\lambda > 1,5$			4,17
$u'_x$		$1 \leq \lambda \leq 1,75$	$-3,47\lambda^2 + 11,34\lambda - 0,87$
		$\lambda > 1,75$	8,33
$u_y (*)$		$1 \leq \lambda \leq 1,25$	$-0,36\lambda + 2,55$
		$\lambda > 1,25$	2,10
5A	$u_x (*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-1,75\lambda^2 + 8,56\lambda - 4,57$
		$2 < \lambda \leq 2,5$	$1,55\lambda + 2,45$
		$2,5 < \lambda \leq 4$	$0,47\lambda + 5,15$
		$\lambda > 4$	7,03
	$u'_x$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-4,08\lambda^2 + 18,14\lambda - 8,60$
		$2 < \lambda \leq 2,3$	$1,82\lambda + 7,72$
		$2,3 < \lambda \leq 4$	$0,35\lambda + 11,10$
		$\lambda > 4$	12,50
	$u_y$	$1 \leq \lambda \leq 1,5$	$-2,39\lambda^2 + 5,95\lambda - 0,94$
		$1,5 < \lambda \leq 2$	$-1,10\lambda + 4,26$
		$\lambda > 2$	2,06

	$u'_y (*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-2,89\lambda^2 + 10,63\lambda - 1,56$
		$\lambda > 2$	8,13
5B	$u_x$	$1 \leq \lambda \leq 1,75$	$-2,02\lambda^2 + 7,60\lambda - 2,96$
		$\lambda > 1,75$	4,17
	$u'_x (*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-2,99\lambda^2 + 11,12\lambda - 1,96$
		$\lambda > 2$	8,33
	$u_y (*)$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-0,40\lambda + 2,64$
		$\lambda > 2$	1,85
	$u'_y$	$1 \leq \lambda \leq 1,25$	$\lambda + 4,46$
		$\lambda > 1,25$	5,71
6	$u_x$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-1,81\lambda^2 + 7,48\lambda - 3,56$
		$\lambda > 2$	4,17
	$u'_x$	$1 \leq \lambda \leq 2$	$-3,33\lambda^2 + 13,17\lambda - 4,69$
		$\lambda > 2$	8,33
	$u_y$	$1 \leq \lambda \leq 1,5$	$-0,73\lambda + 2,84$
		$\lambda > 1,5$	1,75
	$u'_y$	$1 \leq \lambda \leq 1,5$	$-3,46\lambda^2 + 9,76\lambda - 1,15$
		$\lambda > 1,5$	5,71
Elaborada por L.M. PINHEIRO e R.C.S. NAKAO, com base em CZERNY(1976)			
$m = u \frac{pl_x^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $l_x =$ menor vão Coef. Poisson = 0,20			
(*) Valores máximos; não se encontram necessariamente no centro			