INSTITUTO FEDERAL

Paraíba

Campus

Cajazeiras

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

CAMPUS CAJAZEIRAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FRANCISCO BEZERRA RODRIGUES

ELIPSE: PROPRIEDADE REFLETORA E APLICAÇÕES

CAJAZEIRAS-PB

2021

FRANCISCO BEZERRA RODRIGUES

ELIPSE: PROPRIEDADE REFLETORA E APLICAÇÕES

Monografia apresentada junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do Instituto Federal da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Orientador(a): Me. Kissia Carvalho

CAJAZEIRAS-PB

2021

FRANCISCO BEZERRA RODRIGUES

ELIPSE: PROPRIEDADE REFLETORA E APLICAÇÕES

Monografia apresentada junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do Instituto Federal da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 10/06/2021

Banca Examinadora

Kissia Carvalho

Prof(a). Me. Kissia Carvalho
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

Stanley Borges de Oliveira

Prof(a). Me. Stanley Borges de Oliveira
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

Barbara Kaline de Sousa

Prof(a). Esp. Barbara Kaline de Sousa
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

R696e

Rodrigues, Francisco Bezerra

Elipse: propriedade refletora e aplicações / Francisco Bezerra Rodrigues; orientadora Kissia Carvalho.- 2021.
61 f. : il.

Orientadora: Kissia Carvalho.
TCC(Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2021.

1. Elipses 2. Cônicas 3. Propriedade refletora I. Título

CDU 531.322.243(0.067)

Dedico esse trabalho aos meus familiares por todo o apoio, à minha orientadora e a todos que me ajudaram durante a graduação.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus por ter me guiado em todo o trajeto da graduação, me capacitando todos os dias. Sou eternamente grato por todas as coisas que o Senhor me proporciona.

Quero agradecer a minha mãe Maria e a minha vó Tereza, por terem sido as mulheres que batalharam a vida toda por mim, e me apoiaram em todas as minhas decisões.

Também quero agradecer a minha orientadora Prof.ª Me.ª Kissia Carvalho, por todo o conhecimento e conselhos para que esse trabalho fosse realizado.

Agradeço também aos membros da banca examinadora o Prof. Me. Stanley Borges de Oliveira e a Prof.ª. Esp.ª Barbara Kaline de Sousa pela disponibilidade e carinho em aceitar o convite.

Por fim agradeço a todos que contribuíram na minha jornada acadêmica e na construção do meu trabalho.

“Felizes são os que ouvem a palavra de Deus e a guardam”

(BIBLIA, Lucas, 11:28)

RESUMO

O estudo das cônicas é um assunto bastante explorado, há muitos trabalhos que estudam cônicas, demonstram suas fórmulas, muito embora poucos destes exploram suas propriedades de simetria e reflexão. Na escola, seja no ensino médio ou superior, dificilmente estas propriedades são abordadas. Sendo assim, este trabalho tem como tema: A Elipse: Propriedades Refletoras e Aplicações, em que buscamos responder as seguintes questões como funciona a propriedade refletora da elipse no nosso cotidiano, quais foram os benefícios da sua utilização? É possível utilizar essas propriedades como recurso de ensino? Diante disso o objetivo principal foi compreender as propriedades da elipse e suas aplicações. Para isso foi desenvolvida uma pesquisa qualitativa em que fizemos uma pesquisa de natureza exploratória com um levantamento bibliográfico em livros, artigos, teses, dissertações e TCC. Utilizamos os livros clássicos como nossos norteadores dos seus conceitos iniciais que são abordados na maioria dos livros, não esquecendo de explorar a história da cônica, assim como conceitos mais gerais. Estudamos as propriedades de simetria da elipse para compreendermos as propriedades reflexivas que geram a grande maioria das aplicações. Aqui apresentamos aplicações na área da construção civil e saúde, que exploram as propriedades reflexivas. Apresentamos duas sequencias didáticas que podem ser utilizadas em sala de aula ou como trabalhos de extensão, infelizmente devido a pandemia do COVID-19 foi impossível testar a da mesa de sinuca por não termos acesso ao LABEM. Concluímos que a exploração destas propriedades pode despertar no aluno maior interesse, e pode ser utilizado como trabalho complementar à disciplina de geometria analítica ou em trabalhos interdisciplinares. Pessoalmente este trabalho ampliou meus conhecimentos a respeito das cônicas, além de proporcionar o desenvolvimento habilidades de pesquisa e escrita.

Palavras-chave: Cônicas. Propriedade Refletora. Elipse.

ABSTRACT

The study of conics is a very explored subject, there are many studies that study conics, demonstrate their formulas, although few of them explore their properties of symmetry and reflection. At school whether in high school or higher, these properties are hardly addressed. Therefore, this work has as its theme: Ellipse: Reflective Properties and Applications, in which we seek to answer the following questions about how the reflective property of ellipse works in our daily lives, what were the benefits of its use? Is it possible to use these properties as a teaching resource? Therefore, the main objective was to understand the properties of the ellipse and its applications. For this, a qualitative research was developed in which we did an exploratory research with a bibliographic survey of books, articles, theses, dissertations and term paper. We use classic books as our guiding principles for their initial concepts, which are covered in most books, not forgetting to explore the history of the conic, as well as more general concepts. We studied the symmetry properties of the ellipse to understand the reflective properties that generate the vast majority of applications. Here we present applications in the area of construction and health, which explore the reflective properties. We present two didactic sequences that can be used in the classroom or as extension work, unfortunately due to the COVID-19 pandemic, it was impossible to test the one on the pool table because we did not have access to LABEM. We conclude that the exploration of these properties can arouse a greater interest in the student, and can be used as a complementary work to the discipline of analytical geometry or in interdisciplinary work. Personally, this work has broadened my knowledge about conics, in addition to providing the development of research and writing skills.

Keywords: Conics. Reflective Properties. Ellipse.

LISTA DE FIGURAS

Sumário

Introdução

A necessidade de explicar o porquê das coisas acontecerem levou o ser humano a buscar cada vez mais por conhecimento, e muitos deles envolvendo conceitos matemáticos, o estudo das cônicas também surgiu por tal necessidade. Segundo Katia Frensel e Jorge Delgado (2011), o primeiro matemático a utilizar conceitos sobre as cônicas foi Menaecmus que viveu por volta do século III a.C, o matemático estava buscando a resolução da duplicação do cubo. Um dos estudos que ficou mais conhecido e que teve maior relevância até os dias de hoje, é o de Apolônio mostrando que poderíamos obter os três tipos de cônicas em um cone de duas folhas, apenas mudando a sua angulação Eves (2011).

O presente trabalho foi pensando como uma forma de auxiliar professores e alunos na compreensão da cônica elipse, mesmo sendo um conteúdo estudado em sala de aula, não é muito explorado suas propriedades. Esse trabalho reúne informações importantes para a compreensão da elipse, como desenvolvimento ao longo da história, suas principais equações, e as formas de como é introduzida no nosso cotidiano.

Segundo Silva (2001) uma forma de melhorar essa compreensão em relação ao conteúdo é da seguinte forma.

> É preciso que o professor vivencie um ambiente de ação reflexiva conjunta, pois nesses ambientes surgem discussões onde ele passa a estabelecer uma relação mais direta com a sua prática pedagógica, fala sobre ela, produzindo novos saberes, assim como motivações para novas práticas. A forma como a reflexão sobre as experiências passadas e presentes se realiza, desempenha um importante papel para o seu desenvolvimento profissional. Assim, o professor passa a ser um profissional reflexivo e investigador da sua prática pedagógica.

Nessa perspectiva de aprofundamento no conhecimento, este estudo está diretamente voltado a propriedade refletora da elipse, pois é a partir dessa propriedade que se deriva diversas aplicações tanto no ramo da construção civil, da saúde, entre outros.

Com base no que foi discutido e em diversas pesquisas em relação ao conteúdo de cônicas, surgiu a pergunta para a formulação desse trabalho: Como funciona a propriedade refletora da elipse no nosso cotidiano, quais foram os benefícios da sua utilização? É possível aproveitar de alguma forma esse conteúdo em uma aplicação em sala de aula?

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo em relação a elipse, como funciona a sua propriedade refletora e como ela age nas nossas vidas, criando um entendimento maior a respeito dessa cônica e da sua importância.

Para tanto, foram delineados os seguintes objetivos específicos: fazer um levantamento bibliográfico a respeito da história das cônicas, onde o foco é a elipse; descrever sua construção como lugar geométrico, seu tratamento analítico, suas propriedades de simetria; estudar a propriedade reflexiva da elipse bem como sua funcionalidade e importância no cotidiano.

Parte-se da hipótese que esse conhecimento é pouco explorado em sala de aula ao longo da formação do aluno, dessa maneira não o tornando atraente, nem despertando o lado investigativo dos alunos, então vem se demonstrar que a elipse também aparece em muitas situações do cotidiano, e que contribuem para o desenvolvimento do ser humano.

Esse trabalho se divide em quatro capítulos, fizemos um levantamento histórico sobre as cônicas, dando mais ênfase para a elipse, e também falamos sobre os elementos da elipse e sua construção geométrica, no capítulo seguinte temos a construção analítica da elipse, mostrando suas equações com centro na origem e fora, e apenas comentamos sobre as equações para o caso especial da circunferência, além disso demonstramos a propriedade de simetria da elipse e as propriedades de tangencia que serão de grande apoio aos conceitos que virão em seguida. Falamos sobre a propriedade refletoras das cônicas, em especial da elipse, e demonstramos como ela ocorre, trazemos também algumas aplicações onde vemos essa propriedade atuando, também propormos uma sequência didática para trabalhar tal propriedade.

Capítulo 1

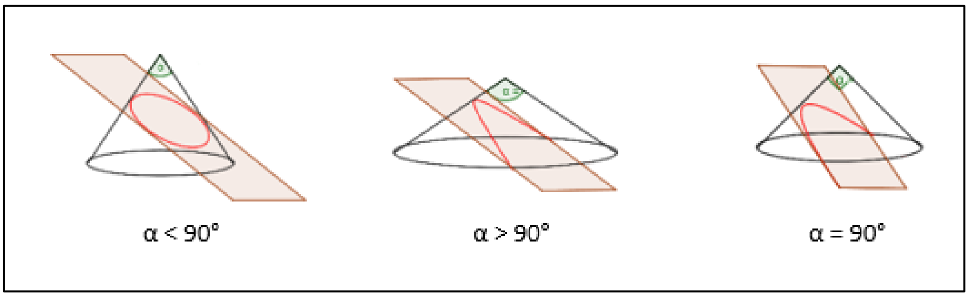
Neste primeiro capítulo, teremos duas seções, na primeira sessão iremos abordar um pouco da história das cônicas, destacando a elipse, que é nosso material de estudo, também veremos como o estudo da elipse desenvolveu ao longo do tempo. Na segunda sessão vamos tratar da construção geométrica da elipse, apresentar os elementos da elipse, bem como sua construção por diversas maneiras.

1.1 História e Evolução da Elipse

Começamos a falar sobre a origem das cônicas, segundo Katia Frensel e Jorge Delgado (2011) isso nos leva a Menaecmus (380 - 320 a.C.) que foi o primeiro matemático a utilizar a parábola e hipérbole como ferramentas na resolução da duplicação do cubo, o que o levou a descobrir o que conhecemos hoje como secções cônicas. Outro matemático que estudou as cônicas foi Euclides (325 - 265 a.C), que escreveu um trabalho sobre cônicas composto de quatro volumes, porém muitos de seus trabalhos foram perdidos, vindo a ser de conhecimento por comentários posteriores. Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) dedicou um pouco da sua vida ao estudo das cônicas, tendo calculado a áreas da elipse. Mas o trabalho que trata sobre Cônicas, que até hoje é conhecido como o de maior relevância foi escrito por Apolônio de Perga (262 - 190 a.C.), cuja vida pessoal não se sabe muito, e que juntamente a Euclides e Arquimedes de Siracusa formavam uma tríade dos maiores matemáticos da Grécia antiga.

Segundo Eves (2011), antes dos estudos de Apolônio, os estudiosos utilizavam os conhecimentos e descobertas de Menaecmus, em que, cada uma dessas curvas (Hipérbole, Elipse ou Parábola), era obtida a partir da secção de um tipo específico de cone circular reto, dependendo da angulação do vértice do cone ser aguda, obtusa ou reta (Figura 1.1).

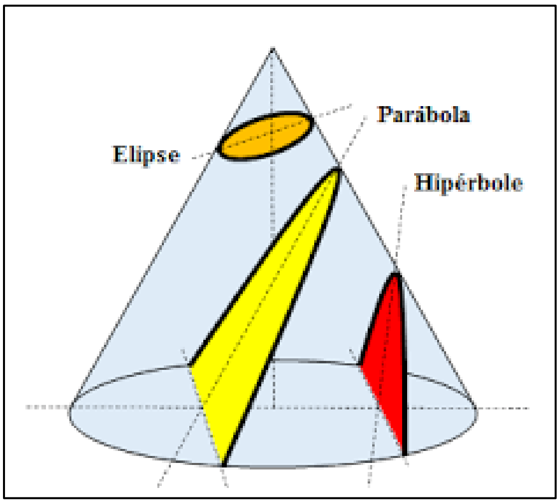
Figura 1.1: Corte nos cones formando cônicas



Fonte: O autor (2020)

Os estudos de Apolônio mostraram que os cones não precisariam ser diferentes, nem apenas retos, podendo ser oblíquos. Ele percebeu que as propriedades continuariam sendo validas mesmo para diferentes tipos de cone, sendo necessário apenas a modificação na angulação dos planos em relação ao cone, como mostra a (Figura 1.2).

Figura 1.2: Cone com os três cortes das cônicas.

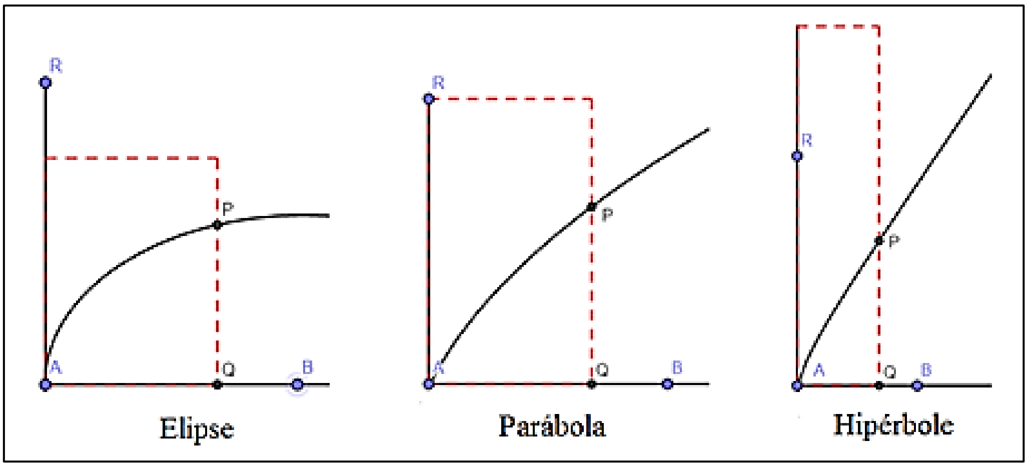


Fonte: Trabalho de Moacir Carvalho Alves Junior[1].

Essas descobertas de Apolônio foram registradas em 8 livros, chamados de "secções cônicas", utilizando representações geométricas que se tem hoje (Eves, 2011). Os nomes elipse, parábola e hipérbole foram introduzidos por Apolônio e foram tomados da terminologia pitagórica antiga referente à aplicação de áreas. Quando os pitagóricos aplicavam um retângulo a um segmento de reta (isto é, colocavam a base do retângulo ao longo do segmento de reta, com um vértice do retângulo sobre uma extremidade do segmento), eles diziam que se tinha um caso de "*ellipsis*" conforme a base do retângulo ficava aquém do segmento de reta, "*parabole*" se coincidisse ou "*hyperbole*", com ela excedendo (veja figura 1.3). Apolônio estabelecia um parâmetro AR para as seções cônicas, que é o que chamamos de *latus rectum*, esse sendo perpendicular ao eixo AB da cônica, e com Q sendo a projeção de um ponto P da cônica no eixo, e área igual a $(PQ)^2$. Com esse retângulo, dependendo de como ele excedesse, se igualasse ou ficasse aquém do parâmetro AR, eram chamados respectivamente de hipérbole, parábola e elipse.

[1]Disponível em: https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/18879/1/2015_Moacir Carvalho AlvesJunior.pdf. Acesso em: 03/08/2020

Figura 1.3: Demonstração da aplicação pitagórica.



Fonte: Introdução à história da matemática / Howard Eves; tradução Hygino H.

É notável como os estudos de Apolônio atravessaram o tempo e se fizeram presentes na nossa vida. O estudo da elipse levou a resultados significativos no nosso cotidiano, mudando completamente o entendimento das coisas. Uma delas foi a influência sobre os estudos de Johannes Kepler (1571 - 1630) que, inicialmente provou que a orbita do Planeta Marte movimentava-se em uma elipse, posteriormente demonstrando para o resto dos planetas do sistema solar, não descartando as trajetórias circulares, pois a circunferência é um caso específico de elipse.

Porém bem antes de Kepler, diversos outros matemáticos estudavam a teoria heliocêntrica, (Eves, 2011). Platão, Aristarco entre outros, esses por sua vez, faziam esse estudo acreditando que os movimentos dos astros se davam de forma circular. Com isso começamos a falar sobre Hipátia, uma astrônoma, matemática, e professora da academia de Alexandria, que se dedicou fortemente à compreensão dos astros e de seus estudos o que a levou a compreender que a teoria heliocêntrica era verdadeira, porém mostrando que o trajeto dos astros era elíptico diferentemente do que acreditavam outros estudiosos. Infelizmente em vida não conseguiu provar que sua teoria estava certa. Mas seus trabalhos ganharam muito prestígio na astronomia pelas suas descobertas.

Posteriormente no início da geometria analítica, como descreve Sato (2005), Pierre de Fermat ($1601 - 1665$), mostrou que as secções cônicas de Apolônio podem ser escritas como equações do segundo grau nas coordenadas (x, y). Os estudos de Fermat deram origem a sete equações que podem obter formas irredutíveis a partir da equação geral do segundo grau com duas variáveis, que atualmente escrevemos:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Essa equação é dita completa quando possui todos os seus A, B, C, D, E, F não nulos, dependendo de como esses coeficientes estão organizados, vamos obter diferentes características para as cônicas como aponta Venturi (2019).

I. Podemos destacar que se o coeficiente $B \neq 0$, o eixo focal da cônica será obliquo aos eixos cartesianos, sendo assim uma cônica rotacionada.

II. Se $F = 0$, a cônica irá passar pela origem, isto é o $P(0, 0)$, satisfaz a equação.

Vale ressaltar ainda que essa equação pode ser identificada como elipse, hipérbole ou parábola, dependendo do valor do discriminante.

III. $B^2 - 4AC = 0$, temos uma parábola.

IV. $B^2 - 4AC < 0$, temos uma elipse.

V. $B^2 - 4AC > 0$, obtemos uma hipérbole.

Temos ainda um caso especial onde a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, irá representar uma circunferência quando $B = 0$, e $A = C$.

Estamos interessados no caso em que $B^2 - 4AC < 0$, pois a elipse é nosso objeto de estudo, por exemplo se $x^2 + 0xy + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$, então

$$x^2 - 4x + 4y^2 + 8y = -4$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (4y^2 + 8y + 4) = -4 + 4 + 4$$

$$(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 4$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$$

É uma elipse com centro em (2, -1). Eixo maior igual a 2 e paralelo ao eixo dos x, e eixo menor igual a 1 e paralelo ao eixo dos y. Os elementos da elipse bem como suas equações serão abordadas respectivamente da seção 1.2 e no capítulo 2.

A abordagem por meio da geometria analítica é predominante, resumindo-se de modo geral, a obtenção das equações canônicas das curvas.

Ainda sobre as características das cônicas, devemos saber que elas podem ser classificadas como cônicas degeneradas e não degeneradas (Venturi, 2019). Assim uma cônica não degenerada (ou regular), é quando o plano que intercepta o cone não passa pelo seu vértice. Já as cônicas degeneradas são construídas quando o plano corta o cone em seu vértice, podemos citar como exemplo, um ponto, uma reta, retas concorrentes, retas paralelas. Há também o caso particular do vazio em que o plano não corta o cone, alguns autores não consideram o vazio como uma cônica, porém o livro “Geometria Analítica” de Reis e Silva (2013), demonstra que uma equação do segundo grau que possui duas variáveis descreve uma cônica, desta forma se uma equação do tipo $ax^2 + by^2 + c = 0$ representar um conjunto vazio, também irá representar uma cônica, logo o conjunto vazio também é uma cônica.

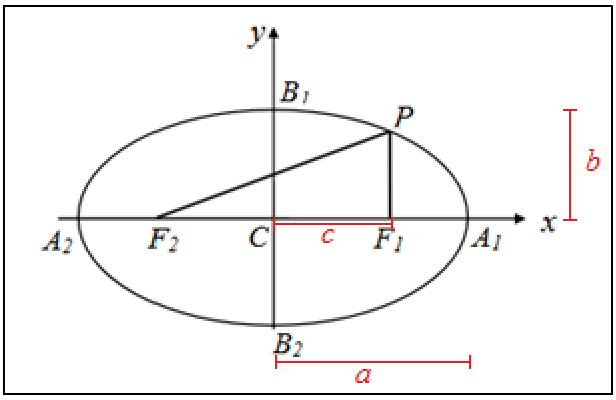
1.2 Construção geométrica da elipse

Essa seção é referente ao estudo da construção geométrica da elipse e seus elementos, ao identificarmos esses elementos obteremos uma melhor compreensão das equações nos capítulos seguintes, vamos abordar diferentes formas de construir uma elipse utilizando diferentes recursos.

Definição 1.2: Segundo Venturi (2019) chamamos de elipse o conjunto de pontos P(x, y) do plano cartesiano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2, do mesmo plano, é constante. Seja $c \in$ R, tal que $dist(F_1, F_2) = \pm 2c$ e seja a ∈ R+, tal que $2a > 2c$. Então, um ponto P do plano pertence à elipse se, e somente se.

$$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = 2a \qquad (1.2)$$

Figura 1.4: Elipse.



Fonte: Prof. Jorge Costa e Profa. Maria Silvia. (2016).

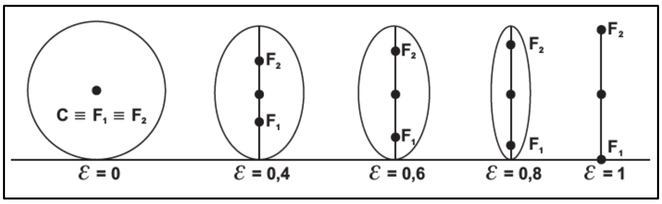
Elementos da Elipse.

- Centro da Elipse: C
- Focos: F_1 e F_2
- Eixo focal ou eixo maior: A_1 e A_2

- Eixo transverso ou eixo menor: B_1 e B_2
- Raios focais: PF_1 e PF_2
- Vértices: A_1, A_2 e B_1, B_2
- Distância focal ($2c$): dist(F_1, F_2)

Temos também $\varepsilon = \frac{c}{a}$ que chamamos de excentricidade da elipse. Esse valor varia entre $0 \leq e \leq 1$. Quanto mais ela se aproxima de 1, a forma da elipse será mais achatada. E quanto mais próxima de 0, mais arredondada ela irá ficar. Quando $\varepsilon = 0$ teremos o caso particular em que a elipse se torna um círculo, e quando $\varepsilon = 1$ teremos apenas o segmento F_1F_2. (Veja figura 1.5). Observe que para $\varepsilon = 0$, tem-se $c = 0$ pois os focos coincidem com o centro por isso, temos o círculo.

Figura 1.5: Excentricidade da Elipse.



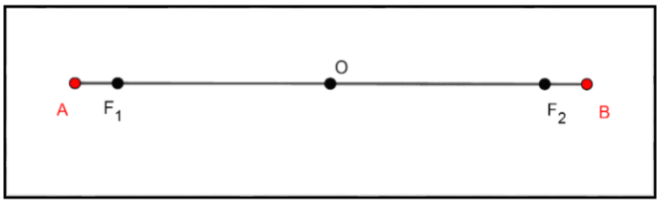
Fonte: Venturi (2019).

Agora tendo definido o lugar geométrico da Elipses, iremos trabalhar sua construção por diferentes maneiras.

Uso da Régua e do Compasso

Essa construção foi feita com base no site “O baricentro da mente”, de onde foi retirada a ideia de construção e adaptada para o presente trabalho. Com o auxílio de uma régua, trace o eixo maior da elipse com vértices A e B, marcando os focos F_1 e F_2, e centro O. Onde d(A, F_1) = d(B, F_2).

Figura 1.6: Construção da elipse régua e compasso, primeiro passo.

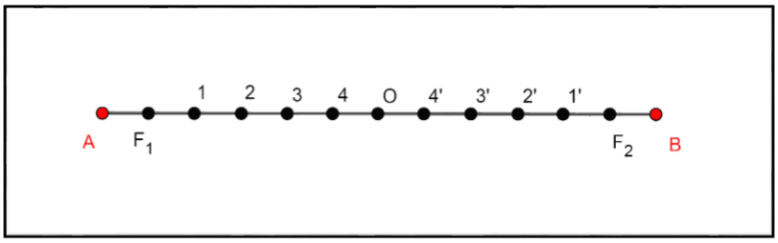


Fonte: O Baricentro da Mente, adaptado pelo autor.[2]

[2] Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2011/06/construcao-geometrica-de-uma-elipse-com.html. Acesso em 18/08/2020

A partir de F_1 e F_2, marque pontos de distância igual, n vezes de sua escolha, 1, 2, 3, ..., n. Veja a figura a 1.7.

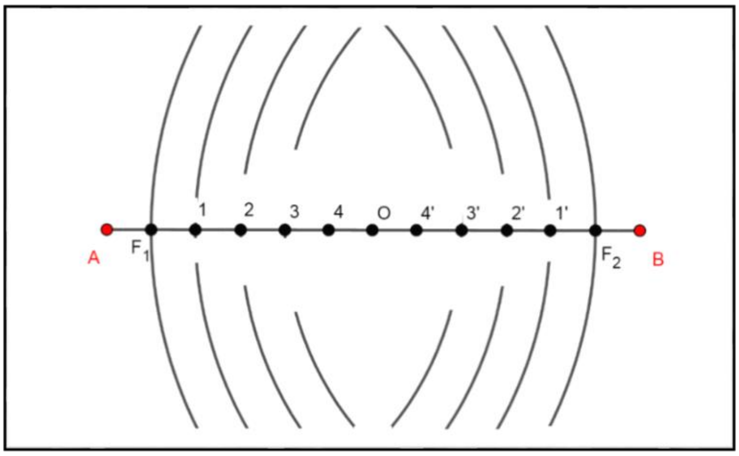
Figura 1.7: Construção da elipse régua e compasso, segundo passo.



Fonte: O Baricentro da Mente, adaptado pelo autor.[3]

Agora, com a ponta seca do compasso em F_1 abra o compasso com distancias iguais a A1', A2', A3' e A4' e depois com centro em F_2 abra o compasso com distancias iguais a B1, B2, B3 e B4, em seguida trace arcos, como apresentado na figura 1.8.

Figura 1.8: Construção da elipse régua e compasso, terceiro passo.



Fonte: O Baricentro da Mente, adaptado pelo autor.[4]

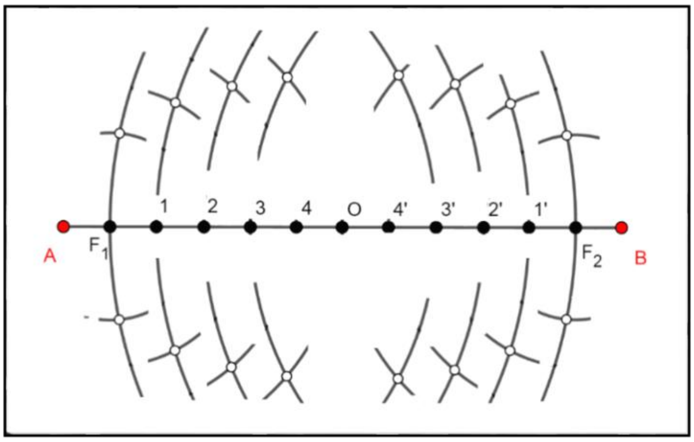
Seguindo o mesmo passo anterior só que agora com centro em F_1 e raios A1, A2, A3 e A4 e depois com centro em F_2 e raios B1', B2', B3' e B4', trace arcos de modo a interceptarem os primeiros, como apresentado na figura 1.9.

---

[3] Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2011/06/construcao-geometrica-de-uma-elipse-com.html. Acesso em 18/08/2020

[4] Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2011/06/construcao-geometrica-de-uma-elipse-com.html. Acesso em: 18/08/2020

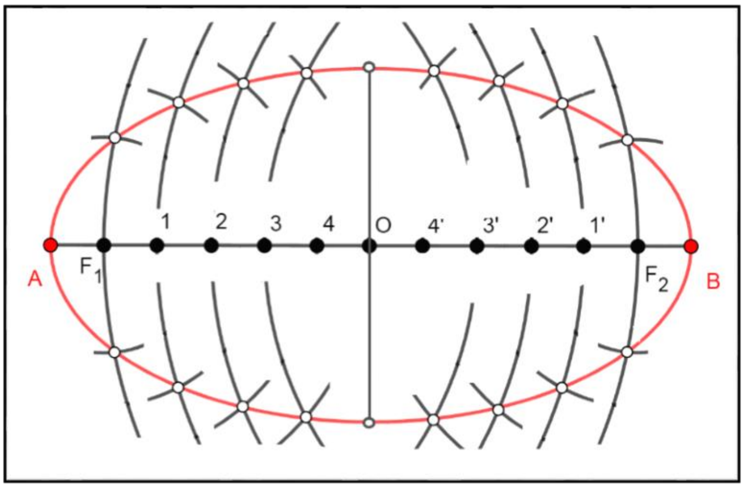
Figura 1.9: Construção da elipse régua e compasso, quarto passo.



Fonte: O Baricentro da Mente, adaptado pelo autor.[5]

Logo você percebera que, as curvas formam intersecções e, ligando os pontos iremos obter uma elipse de centro O, com os focos F_1 e F_2, com o eixo maior formado pelo segmento AB, e o eixo menor pela perpendicular que passa pelo centro O, como apresentado na figura 1.10.

Figura 1.10: Construção da elipse régua e compasso, último passo.



Fonte: O Baricentro da Mente, adaptado pelo autor.[6]

O próximo tópico, abordaremos a construção de uma elipse com o uso do programa Geogebra.

---

[5] Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2011/06/construcao-geometrica-de-uma-elipse-com.html. Acesso em: 18/08/2020

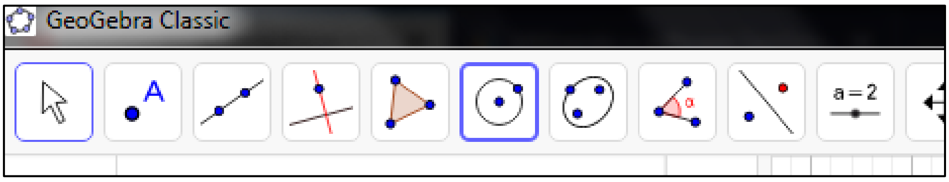
[6] Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2011/06/construcao-geometrica-de-uma-elipse-com.html. Acesso em: 18/08/2020

Uso do Geogebra

Com o Geogebra[7] vamos construir uma elipse a partir de seus focos, sem o uso da ferramenta de elipses, a ideia é simularmos o uso da régua e do compasso, porém de uma forma mais sofisticada. O Geogebra foi concebido inicialmente como um software de geometria dinâmica, atualmente é um sistema bem mais completo que pode ser utilizado para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, folhas de cálculo, gráficos, estatística e cálculo de derivadas e integrais.

De início, clique na ferramenta círculo dados centro e um de seus pontos, como mostra na figura 1.11.

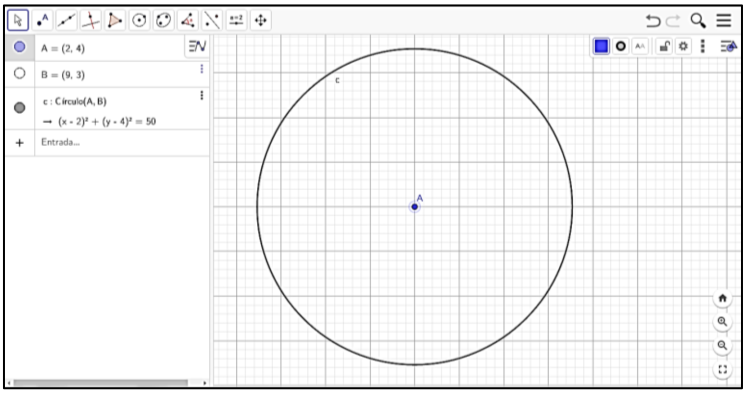
Figura 1.11: Construção da elipse Geogebra, primeiro passo.



Fonte: O autor (2020).

Em seguida faça o círculo de tamanho da sua preferência. Alguns dos pontos das imagens vão estar escondidos e renomeados para melhor visualização e compreensão da imagem, como mostra a figura 1.12.

Figura 1.12: Construção da elipse Geogebra, segundo passo.



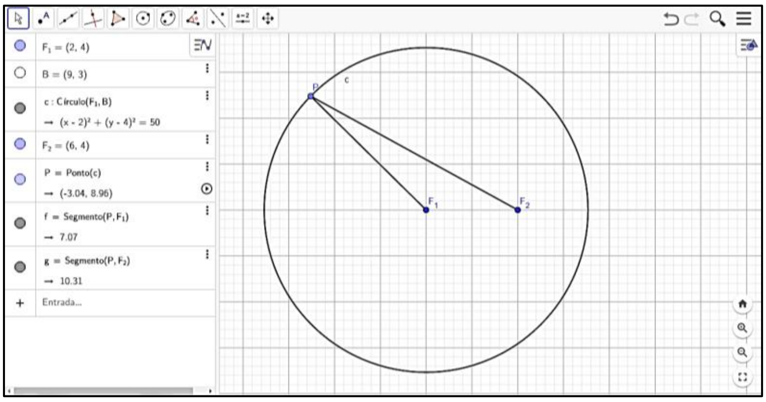
Fonte: O autor (2020).

Renomeie o ponto A para F_1, assim teremos nosso primeiro foco, em seguida marque um segundo ponto interno ao círculo e renomeie de F_2, assim teremos nossos dois focos da

[7] Disponível em: https://www.geogebra.org/?lang=pt. Acesso em: 13/09/2020

elipse, em seguida marque um ponto P qualquer sobre o círculo, e traçar um segmento do ponto P até F1 e outro de P até F2, como mostra na figura 1.13.

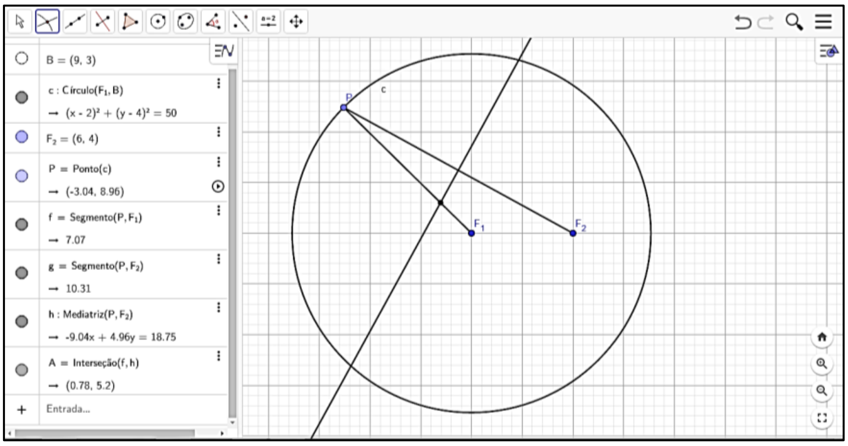
Figura 1.13: Construção da elipse Geogebra, terceiro passo.



Fonte: O autor (2020).

O próximo passo é traçar a mediatriz entre os pontos P e F_2. Depois faça a intersecção da mediatriz com o segmento PF_1, como mostra a figura 1.14.

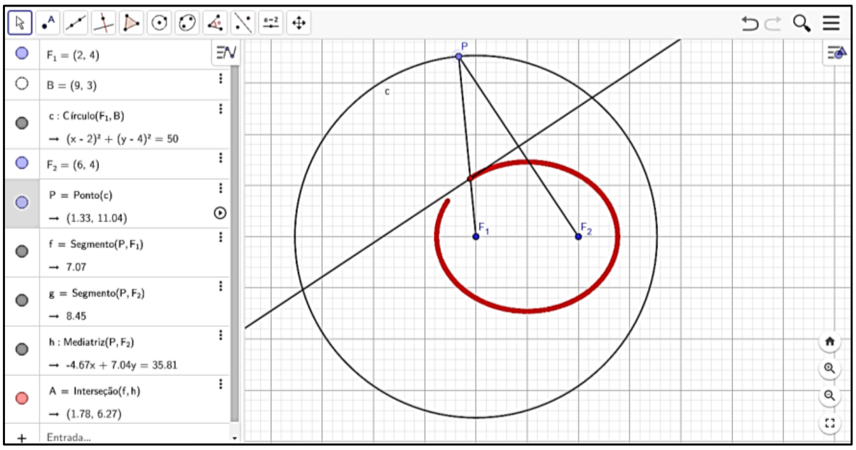
Figura 1.14: Construção da elipse Geogebra, quarto passo.



Fonte: O autor (2020).

Por fim, para visualizar a elipse clique com o botão direito sobre a intersecção e clique em "habilitar rastro". Em seguida mova o ponto P pelo círculo, você verá que o rastro da intersecção irá formar uma elipse com os focos F_1 e F_2, como mostra a figura 1.15.

Figura 1.15: Construção da elipse Geogebra, último passo



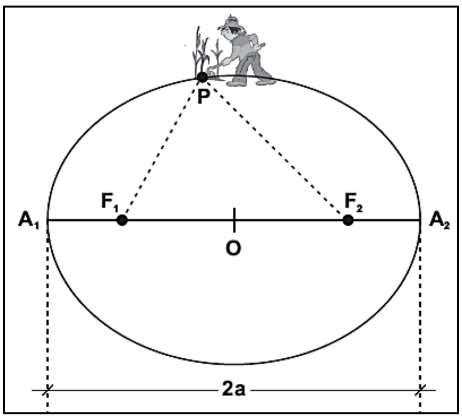
Fonte: O autor (2020).

A seguir, iremos ver uma lúdica forma de se construir uma elipse; o método do jardineiro, que é uma maneira diferente e que pode ser trabalhada em uma aula de campo com alunos.

Método do Jardineiro

O método do jardineiro como aponta no livro de Jacir J. Venturi (2019), é uma forma bem interessante de se construir uma elipse**.** Consiste em colocarmos dois pregos no chão com uma certa distância entre eles (estes são os focos), em seguida amarrar um barbante de medida superior à distância dos pregos, chamemos de 2a, estique o barbante com um lápis, e faça uma volta completa, sempre mantendo o barbante tensionado. É possível repetir com vários comprimentos de cordões diferentes, criando elipses dentro de elipses e assim estudar culturas de vegetais para construir uma micro mandala. Veja a figura 1.16.

Figura 1.16: Método do Jardineiro



Fonte: Venturi (2019).

Nesse capítulo introduzimos a história das cônicas, com foco principalmente na elipse, e os principais estudiosos que contribuíram na sua história e na sua construção. Definimos o lugar geométrico da elipse e apresentamos diferentes maneiras de se construir uma elipse a com régua e compasso, com o uso do programa Geogebra, e um método lúdico que pode ser empregado como um projeto interdisciplinar na sala de aula, o método do jardineiro. No próximo, apresentaremos o tratamento analítico na elipse.

Capítulo 2

No presente capítulo será apresentado o tratamento analítico da elipse com suas equações canônicas, paramétricas, polar e canônica rotacionada. Em seguida, apresentaremos as propriedades de simetria da elipse, pouco abordada nos livros de nível médio, e até mesmo nos livros de ensino superior nas disciplinas de álgebra e cálculo vetorial.

2.1. Tratamento Analítico

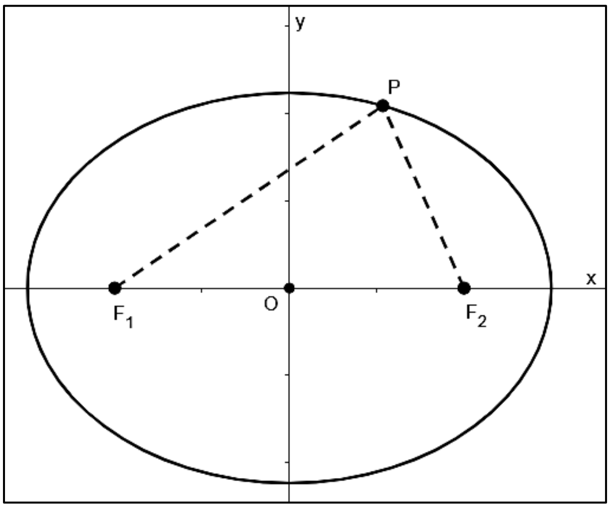
Para a construção deste tratamento analítico foram utilizados os seguintes livros e trabalhos: Venturi (2019), Munem (2015) e Sousa (2019).

2.1.1. Equação Canônica da Elipse

Iniciaremos demonstrando primeiramente a equação canônica da elipse com $C(0, 0)$.

1° caso: trabalharemos com a elipse onde o eixo maior está em função de Ox.

Figura 2.1: Equação canônica da elipse com $C(0,0)$



Fonte: O autor.

Pela definição (2.1):

$$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = 2a.$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \Rightarrow$$

$$(x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2+2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2 \Rightarrow$$

$$2x^2+2c^2+2y^2+2\sqrt{(x^2+2xc+c^2+y^2)\cdot(x^2-2xc+c^2+y^2)}=4a^2$$

Dividindo toda a equação por 2, obtemos:

$$x^2+c^2+y^2+\sqrt{(x^2+2xc+c^2+y^2)\cdot(x^2-2xc+c^2+y^2)}=2a^2$$

Organizando os termos:

$$\sqrt{(x^2+2xc+c^2+y^2)\cdot(x^2-2xc+c^2+y^2)}=2a^2-x^2-c^2-y^2$$

Elevando ambos os termos ao quadrado:

$$(x^2+2xc+c^2+y^2)\cdot(x^2-2xc+c^2+y^2)=(2a^2-x^2-c^2-y^2)^2$$

Resolvendo ambas as equações e eliminando termos em ambos os lados, obtemos a seguinte equação:

$$-4c^2x^2=4a^4-4a^2x^2-4a^2c^2-4a^2y^2$$

Dividindo tudo por 4:

$$-c^2x^2=a^4-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2 \Rightarrow$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2 \Rightarrow$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

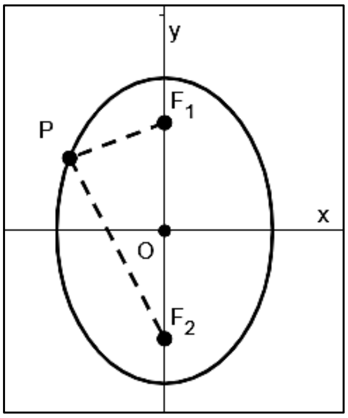
Note que $a>c$, logo, pondo $b^2=a^2-c^2$e dividindo ambos os membros por a^2b^2, obtemos.

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2.1.1.1)$$

2° caso: trabalharemos com a elipse onde o eixo maior está em função de Oy.

Figura 2.2: Equação canônica da elipse com eixo maior em Oy e $C(0, 0)$



Fonte: O autor.

Pela definição (1.2):

$$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = 2a.$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} = 2a \Rightarrow$$

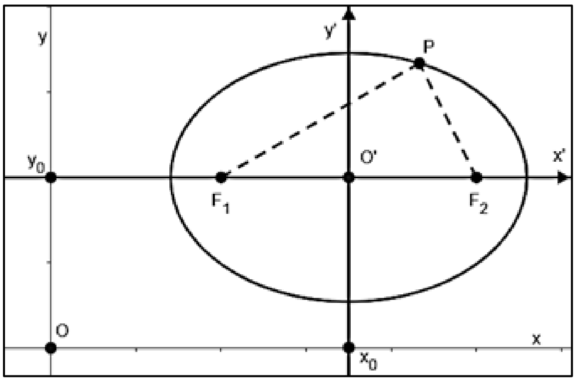
Ao desenvolver o mesmo procedimento do 1° caso, obtemos a seguinte expressão.

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (2.1.1.2)$$

Temos que saber também que a equação da elipse pode ter centro $C(x_0, y_0)$ fora da origem no sistema de coordenadas cartesianas. Assim:

3° Caso: Equação da Elipse com centro $C(x_0, y_0)$ fora da origem, onde o eixo maior é paralelo ao eixo Ox.

Figura 2.3: Equação canônica da elipse com $C(x_0, y_0)$



Fonte: O autor.

Pela definição (1.2):

$$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = 2a.$$

$$\sqrt{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{[(x - x_0) - c]^2 + (y - y_0)^2} = 2a - \sqrt{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$(x - x_0)^2 - 2c(x - x_0) + c^2 + (y - y_0)^2 =$$
$$4a^2 - 4a\sqrt{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2} + [(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2$$

Organizando os termos da equação anterior e eliminando termos que se cancelam, obtemos:

$$4c(x - x_0) + 4a^2 = 4a\sqrt{[(x - x_0) + c]^2 + (y - y_0)^2}$$

Dividindo os termos por 4 e elevando ao quadrado, obtemos:

$$c^2(x - x_0)^2 + 2a^2c(x - x_0) + a^4 = a^2[(x - x_0)^2 + 2c(x - x_0) + c^2 + (y - y_0)^2] \Rightarrow$$

$$c^2(x - x_0)^2 + 2a^2c(x - x_0) + a^4 = a^2(x - x_0)^2 + 2a^2c(x - x_0) + a^2c^2 + a^2(y - y_0)^2 \Rightarrow$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2(x - x_0)^2 - c^2(x - x_0)^2 + a^2(y - y_0)^2 \Rightarrow$$

$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)(x - x_0)^2 + a^2(y - y_0)^2$$

Como temos $b^2 = a^2 - c^2$, então:

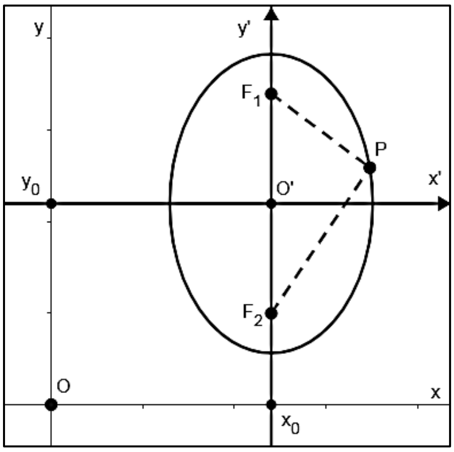
$$a^2b^2 = b^2(x - x_0)^2 + a^2(y - y_0)^2$$

Dividindo os termos por a^2b^2, obtemos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (2.1.1.3)$$

4° caso: Equação da Elipse com centro $\mathrm{C}(x_0, y_0)$ fora da origem, onde eixo maior da elipse é paralelo ao eixo $\mathrm{O}y$.

Figura 2.4: Equação canônica da elipse com eixo maior em $\mathrm{O}y$ e $\mathrm{C}(x_0, y_0)$



Fonte: O autor.

Pela definição (1.2):

$$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = 2a.$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + [(y - y_0) - c]^2} + \sqrt{(x - x_0)^2 + [(y - y_0) + c]^2} = 2a$$

Ao desenvolver o mesmo procedimento do 3° caso só que agora com os novos termos, obtemos:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (2.1.1.4)$$

2.1.2. Equação Paramétrica da Elipse

1° caso: Elipse com eixo maior coincidindo com o eixo Ox da equação e centro em (0,0):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Podemos reescrever a equação como sendo:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

Podemos perceber que essa equação é igual a 1, o que nos leva a uma outra equação que é a da relação fundamental da trigonometria:

$$sin^2\,\theta+cos^2\,\theta=1$$

Disso podemos fazer a seguinte comparação:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2=sin^2\,\theta$$

$$x=a\,sin\,\theta$$

E também da mesma forma:

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2=cos^2\,\theta$$

$$y=b\,cos\,\theta$$

Dessa maneira, obtemos que a equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x=a\,sin\,\theta \\ y=b\,cos\,\theta \end{cases} \qquad (2.1.2.1)$$

2° caso: Considerando agora a elipse com eixo maior em $0y$ e centro em (0,0). Da equação:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

Iremos seguir com a mesma ideia do 1° caso, então teremos:

$$\begin{cases} x=b\,cos\,\theta \\ y=a\,sin\,\theta \end{cases} \qquad (2.1.2.2)$$

Iremos deduzir agora a equação paramétrica da elipse com centro $C(x_0,y_0)$.

3° caso: Com eixo maior em relação a $0x$.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Essa equação nos remete ao mesmo procedimento do 1° caso, então vamos compará-la com a equação fundamental da trigonometria.

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2=sin^2\,\theta$$

$$x-x_0=a\,sin\,\theta$$

$$x=a\,sin\,\theta+x_0$$

Igualmente:

$$\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=cos^2\,\theta$$

$$y-y_0=b\,cos\,\theta$$

$$y=b\,cos\,\theta+y_0$$

Assim teremos que as equações paramétricas com centro $C(x_0,y_0)$, e eixo maior em Ox são:

$$\begin{cases} x=a\,sin\,\theta+x_0 \\ y=b\,cos\,\theta+y_0 \end{cases} \qquad (2.1.2.3)$$

4° caso: Elipse com centro $C(x_0,y_0)$, e eixo maior em Oy.

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

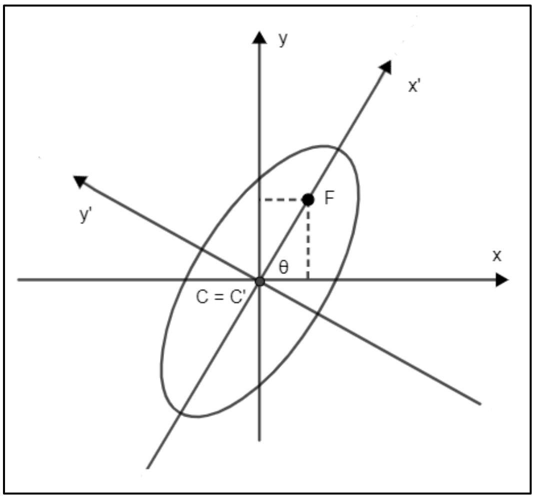
Fazendo procedimentos análogos ao 3° caso, obtemos a seguinte equação:

$$\begin{cases} x=b\,cos\,\theta+x_0 \\ y=a\,sin\,\theta+y_0 \end{cases} \qquad (2.1.2.4)$$

2.1.3. Equação Rotacionada da Elipse

Vamos analisar agora um caso em que a elipse está rotacionada em um certo ângulo θ, ou seja o eixo da elipse não está paralelo aos eixos x e y.

Figura 2.5: Elipse Rotacionada



Fonte: O autor.

Devido a essa rotação no seu eixo, a elipse sofre uma mudança das coordenadas do eixo rotacionado para o eixo xy.

$$\begin{cases} x' = x\,cos\,\theta + y\,sin\,\theta \\ y' = x(-\,sin\,\theta) + y\,cos\,\theta \end{cases}$$

Ao pegarmos o caso em que a elipse tem equação rotacionada igual:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x\,cos\,\theta + y\,sin\,\theta)^2}{a^2} + \frac{(-x\,sin\,\theta + y\,cos\,\theta)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2\,cos^2\,\theta + 2xy\,sin\,\theta\,cos\,\theta + y^2\,sin^2\,\theta}{a^2} + \frac{x^2\,sin^2\,\theta - 2xy\,sin\,\theta\,cos\,\theta + y^2\,cos^2\,\theta}{b^2} = 1$$

Fazendo o mínimo múltiplo comum e organizando a equação temos.

$$b^2[x^2\,cos^2\,\theta + 2xy\,sin\,\theta\,cos\,\theta + y^2\,sin^2\,\theta]+a^2[x^2\,sin^2\,\theta - 2xy\,sin\,\theta\,cos\,\theta + y^2\,cos^2\,\theta] = a^2b^2$$

Fazendo a distributiva e ainda fazendo $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$:

$$b^2x^2\,cos\,\theta + a^2x^2\,sin^2\,\theta + b^2 2xy\,sin\,\theta\,cos\,\theta - a^2 2xy\,sin\,\theta\,cos\,\theta + b^2y^2\,sin^2\,\theta + a^2y^2\,cos^2\,\theta = a^2b^2$$

$$x^2(b^2 \cos\theta + a^2 \sin^2\theta) + xy(2b^2 \sin\theta \cos\theta - 2a^2 \sin\theta \cos\theta$$
$$+ y^2(b^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta) - a^2b^2 = 0$$

Logo a equação rotacionada da elipse fica:

$$x^2(b^2 \cos\theta + a^2 \sin^2\theta) + xy[b^2 \sin(2\theta) - a^2 \sin(2\theta)] \quad (2.1.3)$$
$$+ y^2(b^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta) - a^2b^2 = 0$$

2.1.4. Equação Polar da Elipse

Vamos escrever agora as equações polares da elipse. Para isso iremos considerar o sistema de coordenadas polares onde:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

1° caso: Elipse com eixo maior coincidindo com o eixo Ox.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Substituindo x e y na equação, temos:

$$\frac{(r\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(r\sin\theta)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} = 1$$

Calculando o mínimo múltiplo comum, e substituindo 1 por $\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$:

$$\frac{b^2(r^2\cos^2\theta) + a^2(r^2\sin^2\theta)}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$
$$r^2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) = a^2b^2$$
$$r^2 = \frac{a^2b^2}{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)} \quad (2.1.4.1)$$

2° caso: Elipse com eixo maior coincidindo com o eixo Oy.

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Fazendo o mesmo procedimento do 1° caso, encontramos a seguinte equação:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{(b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)} \qquad (2.1.4.2)$$

Essa é a equação polar da elipse com o eixo maior coincidindo com eixo Oy.

Vamos analisar agora quando elipse estiver fora do centro $C(x_0, y_0)$.

3° caso: Elipse com centro $C(x_0, y_0)$, com eixo maior paralelo ao eixo Ox.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Substituindo x e y na equação, pelos valores iniciais.

$$\frac{(r \cos \theta - x_0)^2}{a^2} + \frac{(r \sin \theta - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Calculando o mínimo máximo comum na equação, e substituindo 1 por $\frac{a^2 b^2}{a^2 b^2}$

$$\frac{b^2 (r \cos \theta - x_0)^2 + a^2 (r \sin \theta - y_0)^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2}$$

$$b^2 (r^2 \cos^2 \theta - 2 x_0 r \cos \theta + x_0^2) + a^2 (r^2 \sin^2 \theta - 2 y_0 r \sin \theta + y_0^2) = a^2 b^2 \qquad (2.1.4.3)$$

Falando um pouco sobre a equação polar da elipse, essas equações são modificadas quando descrevemos elas em relação a excentricidade, podemos encontrar essas equações descritas em Munem (2015), onde é utilizado o Teorema das Cônicas para escrevê-las. Teremos para o caso em que a diretriz é paralela ao eixo polar:

$$r = \frac{\varepsilon d}{1 \pm \varepsilon \sin \theta} \qquad (2.1.4.4)$$

E teremos para o caso em que a reta diretriz seja perpendicular ao eixo polar:

$$r = \frac{\varepsilon d}{1 \pm \varepsilon \cos \theta} \qquad (2.1.4.5)$$

2.1.5. Caso especial com excentricidade igual a zero

Como já vimos ao decorrer do trabalho. a circunferência é um tipo especial de elipse que possui excentricidade igual a zero (veja figura 1.2.2), e a partir disso sua equação sofre algumas alterações, vejamos que por ser uma circunferência as distancia a e b, serão iguais, dessa forma teremos a = b = R, onde esse R é o raio da circunferência. Então vamos substituir os termos a e b na equação por R. Realizando procedimentos a partir de cada equação e seguindo métodos análogos de desenvolvimento, obteremos as seguintes equações para esse caso particular.

1° Equação da circunferência com centro na origem: $x^2 + y^2 = R^2$

2° Equação com centro C(x_0, y_0): $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

3° Equação paramétrica da circunferência com centro na origem: $\begin{cases} x = R\,cos\,\theta \\ y = R\,sin\,\theta \end{cases}$

4° Equação paramétrica com centro C(x_0, y_0): $\begin{cases} x = R\,cos\,\theta + x_0 \\ y = R\,sin\,\theta + y_0 \end{cases}$

5° Equação polar da circunferência: $R^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\,cos(\theta_0 - \theta)$

As demonstrações para as equações citadas acima podem ser encontradas em “Cônicas não Degeneradas: Dedução de Equações”, escrito por Souza (2019).

2.2. Propriedade de simetria da elipse

Quando falamos em algo simétrico nos referimos a coisas que são exatamente iguais quando as separamos em duas partes, podendo ser na horizontal, vertical ou na diagonal, lembrando que ela pode ser simétrica em uma direção e na outra não, algumas formas geométricas, objetos artísticos, itens presentes na natureza ou mesmo corpos humanos são simétricos. Essa propriedade também se aplica as elipses como iremos mostrar a seguir. Para apresentarmos as definições de simetria, foi utilizado o trabalho de Lopes (2011).

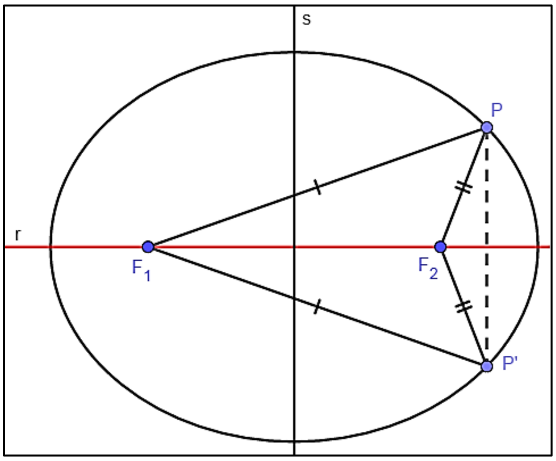
2.2.1 Eixo de simetria

Para darmos início vamos falar sobre a propriedade da elipse que afirma que toda elipse possui dois eixos de simetria: a reta suporte do segmento focal e a mediatriz desse segmento. Vamos verificar essa afirmação utilizando a geometria.

Observe a figura 2.6 e sejam F_1 e F_2 os focos da elipse. Considere *r* como sendo a reta suporte do segmento focal e *s* a mediatriz desse segmento. Escolhendo qualquer ponto pertencente a elipse, provaremos que seu simétrico em relação a essas retas também irá pertencer a elipse.

1° Caso: Simetria em relação a reta *r*.

Figura 2.6: Simetria em relação a reta *r*.



Fonte: Lopes, J. F. (2011), adaptado pelo autor.

Marquemos P um ponto da elipse, pela definição 1.2 temos: dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = $2a$, faremos $2a$ = k. Esse valor k é uma constante e maior que F_1F_2, então $k > F_1F_2$.

Seja P’ a reflexão do ponto P em relação a *r*, como a distância entre de P e P’ até a reta *r* é a mesma então *r* é mediatriz de PP’. E como F_1 e F_2 pertencem a *r*, então teremos que, $F_1P' = F_1P$ e $F_2P' = F_2P$.

Somando os membros da igualdade:

$$F_1P' + F_2P' = F_1P + F_2P$$

Então segue que $F_1P' + F_2P' = k$, portanto P’ pertence a elipse.

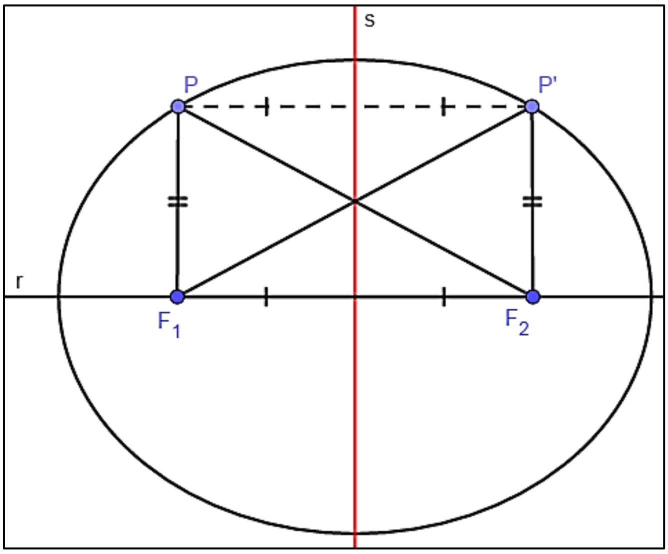
Esse primeiro caso nos garante que todo ponto que escolhermos em relação a reta que passa pelos focos, teremos um outro ponto que adquire as mesmas características no outro lado da reta, sendo assim pontos simétricos na elipse, vale lembrar que também se aplicam ao caso do círculo essa propriedade.

2° Caso: Simetria em relação a reta s.

Considere agora a figura 2.7 e seja P um ponto pertencente da elipse e P' seu simétrico em relação a reta s. Teremos As seguintes possibilidades:

I. Se $PP' = F_1F_2$

Figura 2.7: Simetria em relação a reta s, quando $PP' = F_1F_2$



Fonte: Lopes, J. F. (2011), adaptado pelo autor.

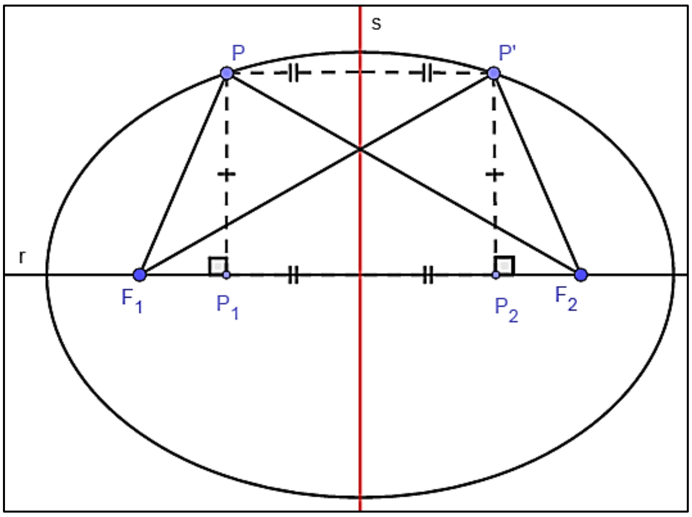
Temos que a reta s é mediatriz dos segmentos PP' e F_1F_2, então teremos $PP' \parallel F_1F_2$, e teremos o quadrilátero $F_1PP'F_2$ será um retângulo, das propriedades do retângulo vamos ter:

- Como $PF_1 \parallel P'F_2$, então $PF_1 = P'F_2$.
- Como PF_2 e $P'F_1$ são as diagonais do retângulo, então $PF_2 = P'F_1$

Segue então que $PF_1 + PF_2 = P'F_1 + P'F_2 = k$, com k sendo um valor constante. Portanto P' pertence a elipse.

II. Se $PP' < F_1F_2$ ou $PP' > F_1F_2$

Figura 2.8: Simetria em relação a reta s, quando $PP' < F_1F_2$.



Fonte: Lopes, J. F. (2011), adaptado pelo autor.

Fazendo P_1 a projeção de P sobre a reta r e ainda sobre a mesma reta, tome P_2 a projeção de P'.

Teremos então os triângulos ΔPP_1F_1 e $\Delta P'P_2F_2$, esses são triângulos retângulos em P_1 e P_2, respectivamente. Temos ainda que $PP_1 = P'P_2$ e $P_1F_1 = P_2F_2$. Então pela congruência de triângulos lado, ângulo, lado (LAL) temos que $\Delta PP_1F_1 \cong \Delta P'P_2F_2$. Logo, $m(PF_1P_1) \cong m(P'F_2P_2)$, e

$$PF_1 = P'F_2.$$

Ainda pela congruência LAL segue que $\Delta PF_1F_2 \cong \Delta P'F_1F_2$. Então,

$$PF_2 = P'F_1$$

Somando os membros das equações, vamos ter

$$k = PF_1 + PF_2 = P'F_1 + P'F_2$$

Logo, P' pertence a elipse.

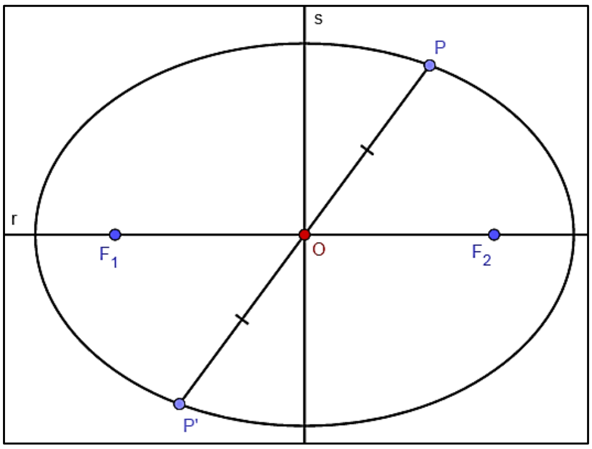
Nesse segundo caso temos que para todo ponto em relação a reta mediatriz, irá existir um segundo ponto que adquire as mesmas características do primeiro, porém do outro lado da reta. Essas propriedades também se aplicam para o caso do círculo.

2.2.2 Centro de simetria

Vamos ter que o centro de simetria de uma elipse é um ponto O, que é determinado pela intersecção dos eixos de simetria.

A elipse possui uma propriedade que diz: toda reta que passa pelo ponto O vai interceptar a elipse em um ponto P e no simétrico P' em sentido a O, e esse O é o ponto médio de PP'.

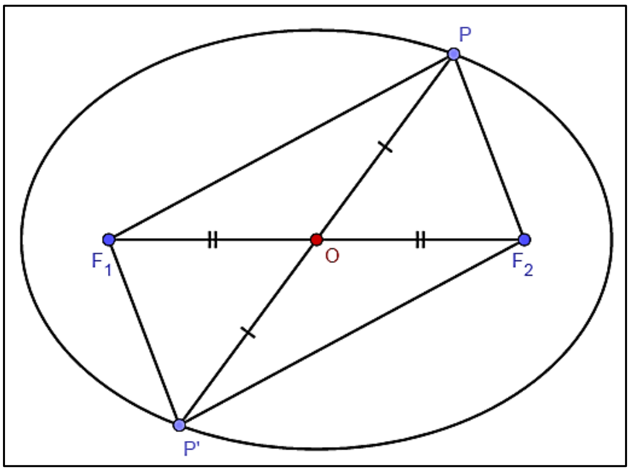
Figura 2.9: Centro de simetria da elipse.



Fonte: Lopes, J. F. (2011), adaptado pelo autor.

Observe a figura 2.10. Marquemos P um ponto da elipse e P' seu simétrico em relação ao centro O. Teremos que O é ponto médio de PP' e de F_1F_2. Dessa forma obteremos um quadrilátero $PF_1P'F_2$ e este será um paralelogramo, pois suas diagonais interceptam-se nos seus pontos médios.

Figura 2.10: Propriedade do centro de simetria.



Fonte: Lopes, J. F. (2011), adaptado pelo autor.

Sabemos que em todo paralelogramo os lados opostos são congruentes, dessa forma,

$$F_1P' = F_2P \text{ e } F_2P' = F_1P$$

Somando ambas as igualdades, temos

$$F_1P' + F_2P' = F_1P + F_2P$$

Por hipótese, P pertence a elipse, e k é um valor constante então

$$F_1P + F_2P = k$$

Pelas equações anteriores, podemos substituir P por P', então

$$F_1P' + F_2P' = k$$

Dessa forma, P' pertence a elipse.

Essa demonstração nos fala que, pelo centro da elipse, se traçarmos uma reta por ele, vamos obter dois pontos na elipse, que possuem a mesmas características sendo assim simétricos em relação ao centro.

Esta propriedade de simetria que as cônicas possuem em especial a elipse, é importante para a propriedade refletora da elipse como veremos no capítulo 3, pois ela faz com que a propagação da luz, som e ondas magnéticas seja feita de forma proporcional em todos os pontos da elipse.

2.3 Reta Tangente da Elipse

Seja E uma elipse com focos F_1 e F_2, e 2a o comprimento do eixo focal, onde é um valor real, positivo e maior que o segmento F_1F_2. Sabemos que caso $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, então o ponto P irá pertencer a elipse e podemos separar a elipse E em duas regiões. Para apresentar as propriedades da reta tangente da elipse, utilizamos o trabalho de Barbieri (2018).

- Região-focal onde $d(P, F_1) + d(P, F_2) < 2a$ para cada ponto dentro da elipse.
- Região não-focal onde $d(P, F_1) + d(P, F_2) > 2a$ para cada ponto fora de elipse.

Definição 2.3: Uma reta r é tangente a elipse em um ponto P se, e somente se, todos os pontos da reta r, exceto o ponto P, pertencem a região não focal desta curva.

Propriedade 1: A reta r mediatriz do segmento $F_2F'_2$ é tangente a elipse no ponto P.

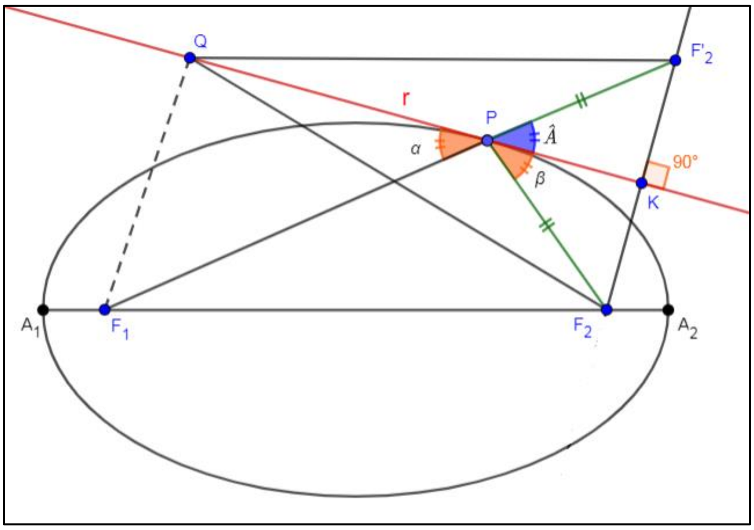
Observando a figura 2.11. É fácil ver que o ponto P pertence a reta r. Há necessidade de demonstrar que os pontos da reta r, exceto o ponto P, estão pertence a região não-focal da curva. Considerando um ponto Q, diferente do ponto P, e que pertença a reta r. Como a reta r é mediatriz do segmento $F_2F'_2$ então $QF_2 = QF'_2$. Assim podemos escrever que $QF_1 + QF_2 = QF_1 + QF'_2$. Aplicando a desigualdade triangular ao triangulo $F_1QF'_2$ então temos: $QF_1 + QF'_2 > 2a$.

Sabemos que $F_1F'_2 = F_1P + PF'_2 = F_1P + PF_2 = 2a$. Concluímos que:

$$QF_1 + QF_2 > 2a$$

Então pela definição 2.3, esse ponto Q pertence a região não-focal da elipse. Portanto a reta r é tangente a elipse no ponto P.

Figura 2.11: Reta tangente e Propriedades



Fonte: Barbiere, C. (2018), adaptado pelo autor.

Propriedade 2: A reta tangente r à elipse no ponto P forma ângulos congruentes com o segmento PF_1 e PF_2.

Ainda na figura 2.11 observe que os ângulos determinados pela reta r com os segmentos PF_1 e PF_2 são representados, respectivamente, por α e β. Considerando o triângulo $F_2PF'_2$, a reta r é mediatriz do lado $F_2F'_2$ no ponto K e passa pelo vértice P. Assim, a altura PK do triangulo $F_2PF'_2$ é bissetriz do ângulo $F_2\hat{P}F'_2$. Então os ângulos β e $\hat{A}$ são congruentes. Como os ângulos $\hat{A}$ e α são opostos pelo vértice, então temos que $\alpha = \beta$ ou $F_1\hat{P}Q = F'_2\hat{P}K$.

As propriedades 1 e 2, irão nos auxiliar a compreendermos melhor a propriedade refletora da elipse no capítulo 3, pois a propriedade 1 vai nos garantir que qualquer ponto da elipse irá possuir uma reta tangente, assim nos levando a propriedade 2 onde ao traçarmos segmentos que partem dos focos da elipse a um determinado ponto P, irá possuir a mesma angulação com reta tangente e assim garantir que o segmentos de um dos focos seja direcionado ao outro sem exceção

Nesse capítulo estudamos as equações em coordenadas cartesianas, paramétricas, rotacionadas e polares, nas suas formas na origem e fora da origem em ambos os eixos x e y, do plano cartesiano, também apresentamos o caso especial quando a excentricidade é igual a zero, também vimos as propriedades de simetria da elipse e a reta tangente à elipse, que são os principais elementos que geram as propriedades reflexivas, amplamente úteis e empregadas na maioria das construções práticas. No próximo capítulo iremos estudar essas propriedades, cuja características indo nos auxiliar a entender as aplicações apresentadas.

Capítulo 3

Neste capítulo iremos falar sobre a propriedade refletora das cônicas com ênfase em nosso principal foco de estudo que é a elipse, demonstraremos como essa propriedade ocorre. Também explicaremos como funcionam algumas aplicações da elipse. E proporemos uma sequência didática, em que o professor pode explicar concretamente como essa propriedade funciona.

3.1 Propriedade Refletora

Falando um pouco sobre propriedade refletora, nos deparamos constantemente com ela no nosso cotidiano, seja em espelhos, cavernas que emitem o eco, ou até mesmo na água, onde a principal função dessa propriedade é refletir seja o som, imagem ou luz, ocasionada devido ao encontro dos seus raios de propagação com uma superfície refletora. E com isso, as cônicas não poderiam ficar de fora, tanto a parábola, hipérbole e a elipse assumem tal propriedade que decorrem diretamente em relação as propriedades geométricas de suas retas tangentes ou suas retas normais.

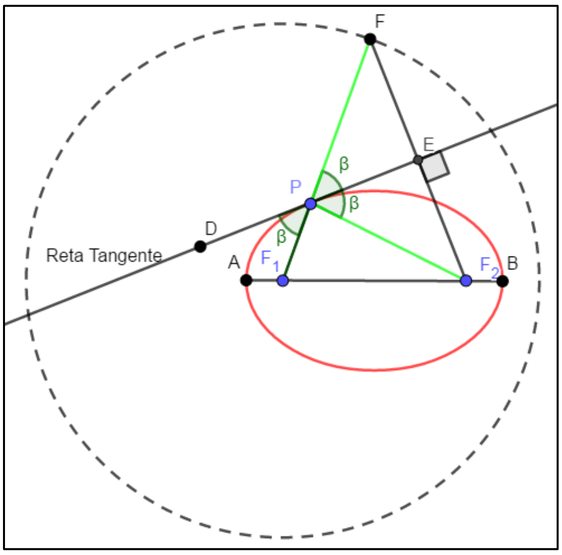
3.1.1 Propriedade Refletora da Elipse

Como já falamos anteriormente, a elipse é um lugar geométrico de todos os pontos cuja soma da distância aos dois focos é sempre a mesma, gerando uma curva fechada. O fato de ter dois focos em uma curva fechada proporciona uma propriedade que as torna, especiais, e aplicáveis em várias áreas. Se trata da propriedade refletora da elipse:

"Se uma fonte de luz ou som é colocada ao mesmo tempo no foco de uma superfície com seções transversais elípticas, então toda a luz ou som é refletido da superfície para o outro foco." (Derivando a Matemática, 2020).

De uma forma mais específica podemos descrever a propriedade refletora de elipse da seguinte forma; observe a figura 3.1, ao traçarmos um segmento de reta por um dos focos, com extremidade num ponto P da elipse e que seja o ponto de tangência de uma reta t qualquer. Esse segmento vai determinar com a reta t um ângulo β. Ao traçarmos outro segmento a partir desse ponto P e que tenha o mesmo ângulo β em relação a reta tangente t, esse segmento irá na direção do outro foco da elipse. Para apresentarmos a propriedade refletora da elipse, baseamos nas definições dos seguintes autores MOREIRA, J. S. (2017) e também Delgado, J. (2010).

Figura 3.1: Propriedade refletora da elipse.



Fonte: MOREIRA, J. S. (2017), adaptado pelo autor.

Para compreendermos essa propriedade, vamos mostrar que em uma elipse com focos F_1 e F_2, os ângulos formados entre a reta tangente e a elipse em um ponto P e os segmentos de reta que vão em direção aos focos são iguais (veja a figura 3.1).

Seja uma circunferência com centro em F_1 e com raio de comprimento igual a AB, e com um ponto F na sua circunferência, tal que o raio F_1F, contém o ponto P.

Para que a reta m (mediatriz de F_2F) seja tangente a elipse no ponto P teremos que mostrar que P é o único ponto de interseção entre m e a elipse.

Observemos que por construção $F_1F = AB = 2a$.

Suponhamos que exista um ponto P' diferente de P que pertença a mediatriz m e a elipse, então $d(P', F) = d(P', F_2)$ além disso temos que $d(F_1, P') + d(F_2, P') = 2a = d(F_1, P) + d(F_2, P)$.

Assim $d(F_1, P') + d(P', F) = 2a$, o que será um absurdo, pois pela desigualdade triangular temos que $d(F_1, P') + d(P', F) > d(F_1, F) = 2a$, então P é o único ponto de m que também pertence a elipse, logo m é tangente a elipse.

Logo, vamos ter que a mediatriz do triangulo PFF_2, será tangente a elipse no ponto P. Marquemos E a intersecção da mediatriz com a reta FF_2 do triangulo. Em seguida marcaremos um ponto D nessa mediatriz de forma que o ponto P fique entre D e E.

Como o triangulo PFF_2 é isósceles, sua mediatriz coincide com sua bissetriz que nos leva a igualdade entre os ângulos: $F\hat{P}E = F_2\hat{P}E = \beta$, e ainda que $D\hat{P}F_1 = E\hat{P}F$, pela propriedade de ângulos opostos, logo $F\hat{P}E = F_2\hat{P}E = D\hat{P}F_1 = \beta$, por fim teremos que os ângulos formados pelo segmento PF_1 e pelo segmento PF_2 com a reta tangente a elipse no ponto P serão congruentes.

3.2 Aplicações

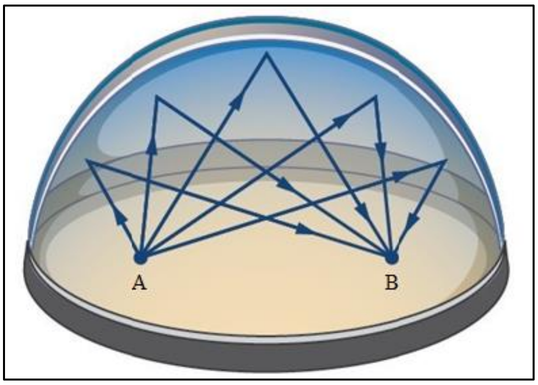
Um elipsoide é constituído basicamente da rotação ou revolução de uma elipse em torno da sua reta focal. Essa superfície irá preservar também as propriedades refletoras da elipse em sua região. Com isso, ela irá garantir que qualquer raio de luz ou onda sonora que seja emitida em um dos seus focos, será levado pela elipse até o seu outro foco. Com base nisso o elipsoide será a base para explicarmos as aplicações que serão mostradas a seguir. Todas as aplicações apresentadas podem ser encontradas em: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/elipsoide-elipse-e-sua-propriedade-refletora/.

Salas dos Sussurros

Uma das aplicações da elipses são nas chamadas salas de sussurros que podem ser vistas em museus e em teatros, onde em plano tridimensional, temos que se duas pessoas estiverem em um dos focos do elipsoide e começarem a conversar mesmo que em tom baixo, ainda poderão ser ouvidos por uma outra pessoa no outro foco do elipsoide.

O formato ao construir a sala é de suma importância e deve obedecer alguns parâmetros. Ao projetá-la, escolhe-se dois pontos A e B que ficam na altura da cabeça das pessoas que vão conversar. Em seguida, considere uma elipse que tenha A e B como focos, e a sala é construída da forma que qualquer plano que passe por esses pontos intercepte a sala segundo uma elipse congruente com a escolhida. Observe a figura 3.2.

Figura 3.2: Propriedade refletora da elipse.

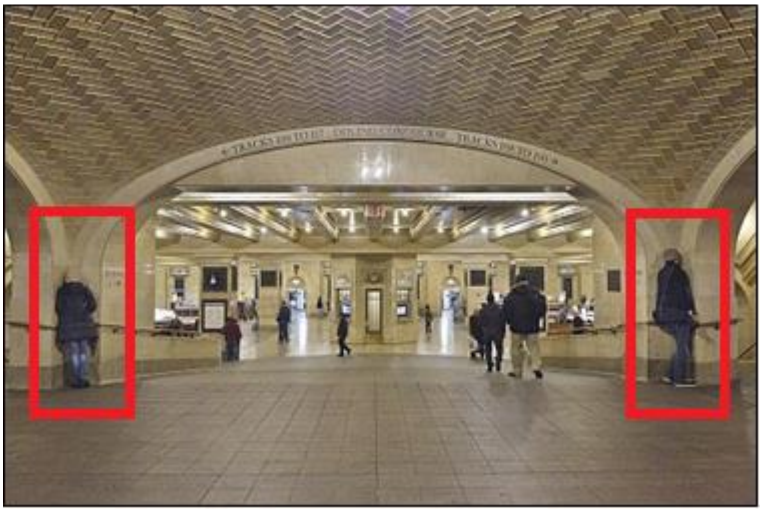


Fonte: Derivando a Matemática.[8]

[8]Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/elipsoide-elipse-e-sua-propriedade-refletora/. Acesso em: 22/01/2021

Na figura 3.3 observamos o Grand Central Terminal em Manhattan, Nova York, podemos perceber duas pessoas em pontos diferentes, mas devido a propriedade refletora elas conseguem conversar entre si, pois estão ambas próximas dos focos do elipsoide.

Figura 3.3: Grand Central Terminal

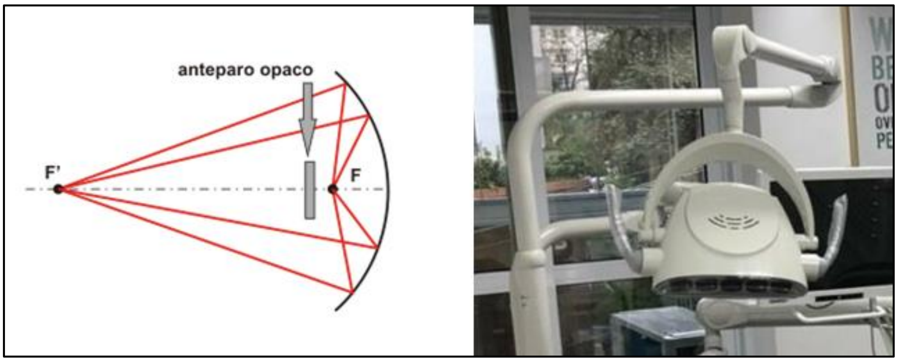


Fonte: Derivando a Matemática[9]

Luminárias com lentes elípticas

Outro exemplo que podemos citar são as luminárias com lentes elípticas que são utilizadas pelos dentistas, com essa propriedade o dentista tem a capacidade de direcionar os raios de luz para um lugar específico no dente do paciente.

Figura 3.4: Demonstração de como as lentes elípticas refletem a luz.



Fonte: Alfa Connection.[10]

[9] Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/elipsoide-elipse-e-sua-propriedade-refletora/. Acesso em 22/01/2021

[10] Disponível em: https://www.alfaconnection.pro.br/fisica/luz/espelhos/espelhos-parabolicos-elipticos-e-hiperbolicos/. Acesso em 22/01/2021

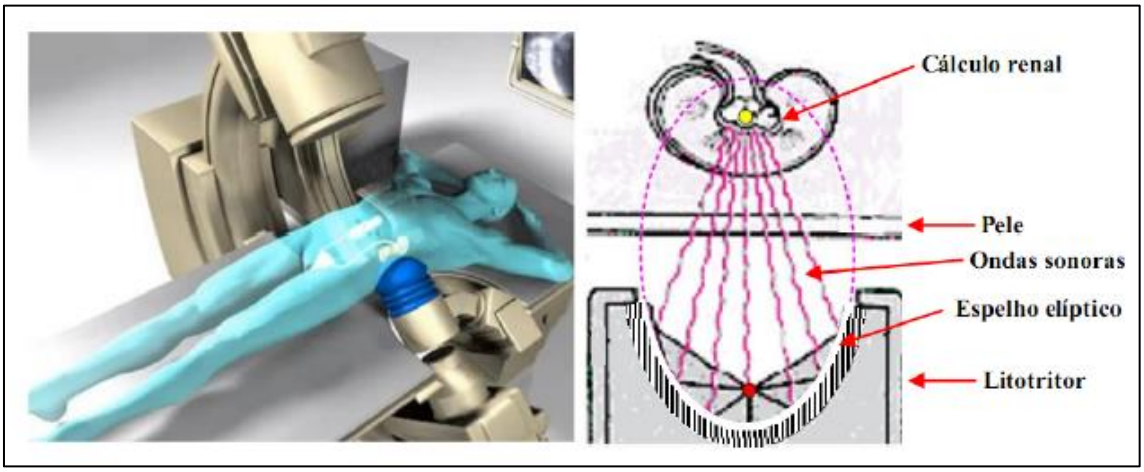
A fonte de luz é colocada em um foco F'da lente elíptica, a luz gerada vai ser refletida no espelho e concentrada no outro foco F, obtendo assim uma boa iluminação e que não vai incomodar o paciente. Como podemos ver na figura 3.4, a luz emitida por um dos focos é direcionada pela reta focal, desta maneira os raios de luz, sem exceção, serão emitidos de forma simétrica por essa reta, e com isso garantindo máxima eficiência da reflexão.

A Litotripsia

Outra aplicação ainda no ramo da saúde, consiste em solucionar um problema que é muito comum nas pessoas e que causa muita dor e pode chegar a incapacita-la. Estamos falando do cálculo renal.

A Litotripsia Extracorpórea (LECO), é um procedimento não invasivo onde o principal objetivo é fragmentar e quebrar os cálculos das vias urinárias através de ondas sonoras (observe a figura 3.5). Esse procedimento utiliza um aparelho chamado litotritor que possui um refletor com seção elíptica que fica encostado na pele, assim em um dos focos se encontra o cálculo renal e no outro foco é por onde irão sair as ondas sonoras de alta intensidade, que pela propriedade refletora da elipse, serão refletidas no cálculo renal que estão no outro foco e serão destruídos sem causar danos ao tecido ao redor.

Figura 3.5: Procedimento de Litotripsia.



Fonte: Clínica Scortegagna.[11]

3.3 Sequência Didática

Falando um pouco sobre o que é uma sequência didática, sua definição mais simples é que ela se trata de uma estratégia educacional onde o professor busca ajudar os alunos a

[11] Disponível em: http://www.clinicascortegagna.com.br/blog/ver/13/Litotripsia.

solucionar um ou mais problemas sobre determinado assunto. O diferencial da sequência didática é que é uma atividade que segue uma lógica sequencial que se dá a partir da evolução do conhecimento.

Estudamos diversos assuntos relacionados a elipse no decorrer dos capítulos até chegarmos a sua propriedade refletora, vimos que os sons e a luz ao sair de um de seus focos até um ponto da elipse são refletidos ao outro foco. Nessa seção vamos abordar uma construção que pode ser feita em sala de aula, com a participação dos alunos e que nos proporciona a demonstração dessa propriedade da elipse. E também uma segunda sequência onde trabalharemos com a interdisciplinaridade na matemática com o assunto de elipses.

Mesa de Bilhar Elíptica

Todas as pessoas desde crianças, demonstram grande entusiasmo e curiosidade sobre jogos. Dessa maneira a ideia de mesclarmos jogos ao ensino pode despertar tal curiosidade a respeito dos conteúdos matemáticos, com isso pensamos na construção de uma forma de ensinar essa propriedade de forma concreta e visual para os alunos, então vamos construir uma mesa de bilhar elíptica. Utilizamos o trabalho Propriedades de Reflexão do Bilhar Elíptico desenvolvido por Oliveira, N. C; Silva, J. N; Silva, L. (2018).

Descrição do projeto

Público-alvo

Alunos do ensino médio e de nível superior principalmente alunos do Curso de Licenciatura em Matemática.

Objetivo geral

Trabalhar a propriedade refletora da elipse, através da construção de material concreto Sinuca Elíptica, onde podemos explorar e entender como essa propriedade funciona.

Objetivos Específicos

- Aprofundar o conhecimento sobre a propriedade refletora da elipse
- Desenvolver o trabalho em equipe
- Estudar os elementos da elipse por meio de material concreto

Materiais

- 2 tábuas de madeira

- Furadeira
- Cola
- Lápis
- 2 pregos
- Barbante
- Tecido
- Martelo

Execução

A execução desse projeto se dá através de dois momentos, o primeiro consiste na construção do material concreto, e o segundo na demonstração da propriedade refletora.

1° momento

Para iniciar precisamos confeccionar o molde da nossa mesa de bilhar, então fixamos os dois pregos na tabua de madeira, distantes um do outro, em seguida amarramos as pontas do barbante nos pregos de forma que o barbante fique maior que a distância entre os pegos, e que não exceda o tamanho da tabua de madeira.

Com o auxílio do lápis estendemos o barbante sobre a madeira, e percorremos ao longo do barbante até darmos uma volta completa. Dessa forma teremos o molde elíptico da mesa na madeira.

O próximo passo é designado ao professor ou a um adulto responsável esse passo consiste em recortar o molde de madeira com uma serra. Esse molde receberá uma borracha que fará o papel da tabela de uma sinuca convencional. Em cima de outra tábua de madeira que será a mesa, de mesma dimensão, faremos uma elipse igual ao item anterior, e assim iremos fazer um furo em um de seus focos, com o auxílio de uma furadeira.

O último passo consiste em cobrirmos toda a mesa com o tecido. Depois de colarmos todo o tecido na mesa e na tabela, iremos fixar ambas as partes com parafusos para termos firmeza na peça produzida. Veja a figura 3.6.

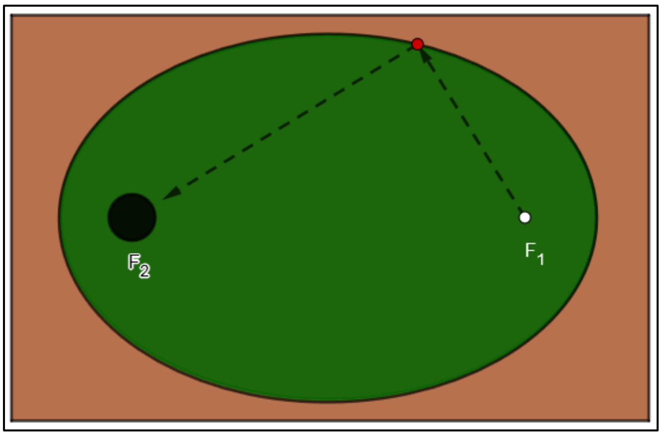
Figura 3.6: Mesa de bilhar elíptica.

Fonte: Cândido, N. (2018)

2° Momento

Dessa maneira teremos a mesa de sinuca em formato de elipse, observando a figura 3.7 veremos que nessa mesa ao lançar a bola de F_1 que é um de seus focos que está marcado na mesa em branco, até um ponto da tabela da mesa (utilizamos o ponto vermelho para demonstrar), a bola ao bater nesse ponto, será direcionada para o outro foco da elipse que é justamente o buraco por onde a bola irá cair.

Figura 3.7: Explicação da mesa elíptica.



Fonte: O autor

Com esse material o professor pode mostrar a propriedade refletora, pois ao lançar a bola ela sempre irá cair no buraco, pois a propriedade refletora, como já vimos, direciona luz ou som de um foco ao outro da elipse, essa propriedade também é observada nesse tipo de mesa em formato de elipse

Avaliação

A avaliação se dá através dos seguintes critérios

- Compreensão do conteúdo pela atividade proposta.
- Trabalho em equipe na construção do material.

Sugestões

Abaixo listamos algumas sugestões de vídeos de apoio:

- Vídeo 1: https://www.youtube.com/watch?v=VjW3TTcE4Wg. Acesso em: 15/03/2021
- Vídeo 2: https://www.youtube.com/watch?v=4KHCuXN2F3I. Acesso em: 15/03/2021

Mandala agrícola

Método do Jardineiro

O método do jardineiro, apresentado no capítulo 1, é uma forma bem interessante de se construir uma elipse. Com ela podemos trabalhar de forma interdisciplinar a matemática, biologia, meio ambiente e cidadania, sociologia, etc.

A interdisciplinaridade tem como principal objetivo superar a fragmentação do conhecimento, criando a possibilidade de construir um novo olhar sobre o ensino por meio de práticas que busquem homogeneizar as áreas do conhecimento, e vem apresentando um novo caminho a ser seguido e aplicado no cotidiano da sala de aula.

De acordo com Gadotti (1999) a metodologia do trabalho interdisciplinar supõe atitude e método que implica:

1. Integração de conteúdo;
2. Passar de uma concepção fragmentária para uma concepção unitária do conhecimento;
3. Superar a dicotomia entre ensino e pesquisa, considerando o estudo e a pesquisa, a partir da contribuição das diversas ciências;
4. Ensino-aprendizagem centrado numa visão de que aprendemos ao longo de toda a vida (educação permanente).

O uso da interdisciplinaridade, necessita de trabalhar temas bem delimitados, e neste projeto apresentaremos apenas como a matemática pode ser trabalhada. A ideia é reconhecer e utilizar formas no cotidiano, nesta atividade o conceito de elipse pode ser introduzido a partir da perspectiva da modelagem matemática, pois "Os modelos matemáticos são formas de estudar e formalizar fenômenos do dia a dia. Através da modelagem matemática o aluno se torna mais consciente da utilidade da matemática para resolver e analisar problemas do dia a dia." (D'Ambrósio, 1986, p.17).

O Sistema Mandala (veja a figura 3.8) é uma forma de produção de alimentos, utilizado na agricultura familiar, onde o plantio é feito de forma circular/elíptica. Neste sistema de produção, a horta é plantada em círculos/elipse concêntricas que representam a natureza. Os plantios em círculos/elipses, diferentes dos desenvolvidos pela agricultura convencional, permitem às plantas se ajudarem mutuamente, trabalhando com conceitos de cortinas quebra ventos, de plantas repelentes a insetos, de plantas melíferas e uma série de segredos que a natureza nos ensina e que também colaboram com a recuperação da biodiversidade e do controle ecológico de insetos e pragas assim como de doenças e plantas invasoras. Com isso, disciplinas de áreas diferentes podem ser contempladas, a exemplo da sociologia que poderá abordar agricultura familiar, meio-ambiente que poderá abordar pragas e utilização responsável da água, biologia que abordará plantas e insetos, projeto de máquinas que abordará o funcionamento da irrigação, empreendedorismo que fará um estudo de custo benefício etc.

Figura 3.8: Sistema Mandala

Fonte: EPOCH TIMES.[12]

Descrição do Projeto (matemática)

Construção de uma mandala agrícola em forma circular/elíptica

Público-alvo

Alunos de escolas agrícolas, técnicos em meio-ambiente, técnicos em edificações, eletromecânica, ou ainda, juntar alunos de diferentes formações em um projeto.

Objetivo geral

Compreender os conceitos de modelagem, de lugar geométrico do círculo/elipse, e grandezas e medidas

Objetivos específicos

- Estudar o conceito de área e volume e suas medidas
- Desenvolver o conceito de modelagem
- Definir os elementos da circunferência/elipse
- Compreender os conceitos de custo e lucro

[12] Disponível em: https://m.epochtimes.com.br/sistema-mandalla-projeto-auto-sustentavel-promissor-para-brasil/ Acesso em: 07/05/2021

Materiais

- Um terreno com área suficiente para construção da mandala
- Ferramentas para medição do terreno
- Lápis e papel
- Cordões e estacas pequenas para delimitação dos círculos/elipse concêntricos

Procedimento Metodológico

Divisão da turma em equipes

Medição do terreno para planejamento da mandala, neste momento o ideal é que grupos de alunos meçam o terreno e as medidas sejam discutidas e confrontadas em sala de aula.

Cada grupo deve procurar a orientação dos demais professores para a escolha das melhores culturas e com essas culturas definidas planejar quantos círculos/elipse devem ser projetados

Cada grupo fará seu projeto de elipses/círculos, reconhecendo os elementos, definindo os focos, eixos de simetria, centro. Explorando as equações em cada uma das circunferências/elipses que serão implantadas

Também será planejada a irrigação da mandala levando em consideração o volume de água necessário e neste momento será trabalhado o conceito de volume e medidas de água.

Como o projeto dos círculos/elipses definidos, levantamento do custo-benefício, escolha das culturas associadas, cada grupo deve apresentar para os demais o seu projeto. Os melhores serão executados e a escolha de quantos, vai depender do tamanho do terreno. Os alunos que não forem contemplados devem entrar nos grupos que terão seus projetos executados.

Com os projetos escolhidos, os círculos/elipses devem ser demarcados com estacas e cordões. E o plantio deve ser feito e cultivado.

Observação: Caso não haja terreno, o projeto pode ser desenvolvido, sem ser implementado ou utilizar uma maquete.

Avaliação

A avaliação de matemática se dará na fase do planejamento e apresentação do projeto, durante a discursão de conceitos, como área, volume, gastos, e dos lugares geométricos a serem utilizados na construção.

Nesse capítulo apresentamos a propriedade refletora da elipse, demonstrando como ela acontece, também mostramos algumas das aplicações dessa propriedade no nosso cotidiano que nunca percebemos durante nossa rotina. Como uma maneira de auxiliar nas aulas de professores também apresentamos duas sequências didáticas para serem utilizadas em sala de aula para que os alunos compreendam melhor sobre a construção de uma elipse e suas propriedades.

Capítulo 4

4.1 Procedimentos Metodológicos

Pela busca por conhecimento e aprofundamento dos saberes, as pessoas buscam em diversos ambientes por informação, e é esse sentimento que leva a evolução do que sabemos. Assim esse trabalho segue na linha de pensamento de Petri (2005, p.21), quando ele fala que a pesquisa é uma “aventura onde os exploradores, que seguindo seus instintos, vão atrás do desconhecido, do novo, do extraordinário, utilizando dos recursos que possui”. Nesse sentido buscando uma forma de entender os mistérios do mundo.

Mesmo que ainda seja um longo caminho até entendermos todos os conceitos que existem no mundo, pesquisar e buscar informações é necessário para que tenhamos uma base sólida para nos apoiarmos e assim conseguir compreender e resolver problemas que aparecem diante de nós, nos levando a ter curiosidade e interesse.

Segundo Demo (2002) e Rudio (1980), esta é uma pesquisa de cunho descritiva-teórica pois “descreve as características de uma determinada população ou um determinado fenômeno, e os interpreta, sem interferir nem modificar a realidade estudada” e ao mesmo tempo “dedicada a reconstruir teoria, conceitos, ideias, ideologias, polêmicas, tendo em vista, em termos imediatos, aprimorar fundamentos teóricos”.

Este trabalho apresenta um estudo de caráter exploratório, pois na pesquisa descritiva, a busca pelo conhecimento da realidade bem como suas características e problemas. Segundo Trivinos (1997) essa pesquisa busca descrever com exatidão os fatos e fenômenos de determinada realidade. Do ponto de vista teórico observamos a presença de duas sugestões de procedimentos didáticos, e um deles com uma abordagem ética-cultural.

Dessa maneira para que se fosse alcançado os objetivos desse estudo, a técnica de partida foi o levantamento bibliográfico em artigos, livros, pensadores, revistas eletrônicas, todos esses meios envolvidos para se alcançar o objeto de estudo que é em relação as cônicas, voltado principalmente para as elipses.

A abordagem do levantamento bibliográfico, foi feita de forma qualitativa. Onde temos a seguinte explicação por Minayo (1996, p.21-22):

> A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado, ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis.

Inicialmente foi feito um levantamento de livros, artigos e informações sobre o referente assunto das cônicas para conhecermos melhor a sua história, como elas foram criadas, como se deu seu desenvolvimento ao longo da história de diversos pensadores e matemáticos da antiguidade.

Seguindo em diante, era necessário conhecimentos para que pudéssemos fazer a construção das elipses de diferentes maneiras, assim foi pensado em métodos, tais esses utilizando instrumentos físicos, como régua e compasso, também a utilização de software para construção das elipses, o escolhido foi Geogebra, que é muito conhecido no meio matemática, por ser de grande ajuda na construção de figuras geométricas. O desenvolvimento analítico se deu por meio da organização de diversas formas de explicar como as funções da elipse são encontradas e para isso foi necessária uma busca pelos métodos de melhor compreensão e que foram mais utilizados em demonstrações.

Cada ponto que era adicionado de cada pesquisa, sempre foi visando os capítulos futuros, para que não houvesse uma falta de informação necessária em determinado ponto, assim todas as pesquisas, resumos e conteúdos anotados foram de ajuda para que se construa uma reflexão e interpretação pessoal.

Vale lembrar que todos os conteúdos estão disponíveis e todos eles apresentam fundamentação bibliográfica e histórica. Todo esse processo de construção do trabalho foi pensando de forma onde uma informação levasse a próxima até chegarmos em uma conclusão.

Todo o trabalho e o processo para sua formação, foi pensado de forma progressiva, onde foi revisado e melhorado ao decorrer de todo o desenvolvimento, vale ressaltar que é um estudo voltado especificamente para elipses e com um caráter explicativo, exploratório e que cumprisse com a finalidade a qual foi pensado.

Considerações Finais

Concluímos esse trabalho enfatizando como a geometria é importante na nossa sociedade, principalmente as cônicas que estão presentes em diversas aplicações que facilitam nossa vida, pois como vimos, as encontramos desde a construção civil, até a área da saúde. Destacando também como esse estudo tem potencial para ser aplicado em sala de aula, despertando o interesse dos alunos.

Ao decorrer de todo o trabalho conseguimos apresentar como nosso material de estudo contribui para a vida da sociedade mostrando as principais aplicações, também vimos que é possível mostrar tal propriedade agindo ativamente para os alunos em sala de aula a partir das sequências didáticas apresentadas.

O objetivo que tínhamos inicialmente foi alcançado, pois mostramos como funciona essa propriedade de forma prática, também os recursos e conhecimentos necessários para sua compreensão. Dentre outras coisas apresentamos o desenvolver histórico das cônicas ressaltando acontecimentos envolvendo a elipse, vimos também como construí-la geometricamente e suas principais formas de estudo, abordamos os conteúdos sobre simetria e reta tangente da elipse que compõe a propriedade refletora da mesma.

De início, pensamos em fazer um trabalho apenas falando sobre a propriedade refletora da elipse e apresentarmos algumas aplicações na vida do ser humano, porém ao decorrer do trabalho percebemos que muitas informações a respeito da elipse estavam faltando, então para conseguirmos compreender e aprofundar mais a pesquisa, buscamos em diversos livros uma melhor forma e mais completa de apresentar tal propriedade.

Devemos ter consciência que esse trabalho não conclui todas as pesquisas, mas sim uma forma de incentivar muitas novas pesquisas, pois na matemática há diversas formas de apresentar os conteúdos em relação ao material de estudo. Com isso esse trabalho pode impulsionar professores e alunos a buscar outros estudos e pesquisas em relação a outras tipos de cônicas.

Para finalizar, esperamos que esse trabalho possa contribuir na formação de futuros professores, potencializando uma melhora na construção de suas aulas e contribuindo na construção do saber dos alunos e na formação de seres pensantes em todos os níveis de aprendizagem.

Referências Bibliográficas

BARBIERI. Claudir Dias. **Cônicas e suas Propriedades Refletoras**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria: p. 90. 2018.

D’AMBROSIO, Ubiratan. Da realidade à ação reflexões sobre educação e matemática. 3.ª ed. Campinas: Summus Editora.1986.

DELGADO, Jorge. **Geometria Analítica I**. 3.ª ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

DEMO, P. **Avaliação qualitativa**. 7.ed. Campinas: Autores Associados, 2002.

Elipsoide, Elipse e sua propriedade refletora. **Derivando a Matemática**, 2020. Disponível em: < http://www.ime.unicamp.br/~apmat/elipsoide-elipse-e-sua-propriedade-refletora/>. Acesso em: 22 Jan 2021

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**, São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

COSTA, Jorge; SILVIA, Maria. **Cálculo Vetorial e Geometria Analítica**. Paraíba: 2016.

FRENSEL, Katia; DELGADO, Jorge. **Geometria Analítica**, Maranhão: UFMA, 2011

GADOTTI, Moacir. **Interdisciplinaridade – atitude e método. 1999**. Disponível em: <http://www.paulofreire.org/moacir_gadotti/artigos/portugues/filosofia_da_educaçao>
Acesso em: 30 Abr 2021

KILHIAN, Kleber. **Construção Geométrica de uma Elipse com Régua e Compasso**. O Baricentro da Mente. [S.I.] 2011. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2011/06/construcao-geometrica-de-uma-elipse-com.html> Acesso em: 18 Ago 2020.

LOPES, Juracélio Ferreira. **Cônicas e Aplicações**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro: p. 184. 2011.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. 4.ª ed. São Paulo/Rio de Janeiro: HUCITEC/ABRASCO, 1996.

MOREIRA, Johann Senra. **Construções das cônicas utilizando o desenho geométrico e instrumentos concretos**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: p. 103. 2017

MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J. **Cálculo**. Tradução André Lima Cordeiro. et al. Rio de Janeiro: LTC, 2008. vol 1. ISBN: 9788521610540.

Petri, S. M. **Modelo para apoiar a avaliação das abordagens de gestão de desempenho e sugerir aperfeiçoamento: sob a ótica construtivista**. Tese de (Doutorado em Engenharia da Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2005.

OLIVEIRA, Natham; SILVA, Judcely; SILVA, Laedson. **Propriedades de Reflexão do Bilhar Elíptico**. *In*: Congresso Nacional de Educação, V., 2018, Olinda. Anais... Olinda: 2018.

REIS, Genésio Lima dos; SILVA Valdir Vilmar da. **Geometria Analítica**/Genésio Lima dos Reis. Valdir Vilmar da Silva. 2.ª ed. [Reimp.]. Rio de Janeiro: LTC. 2013.

RUDIO, F. V. **Introdução ao projeto de pesquisa cientifica**. 4.ª ed. Petrópolis: Vozes, 1980.

SATO, Jocelino. **As cônicas e suas aplicações. Retas tangentes à uma cônica**. Uberlândia: UFU, 2005.

SILVA, Ana Lucia Vaz. **O Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática na Produção de Material didático para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula. Rio de Janeiro, 2001.

SOUSA, Bárbara Kaline. **Cônicas não Degeneradas: Dedução de Equações**. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) – Instituto Federal da Paraíba Campus Cajazeiras. Cajazeiras, p. 85. 2019.

TRIVIÑOS, Augusto N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1987.

VENTURI, Jacir J. **Cônicas e Quádricas**. Curitiba: Livrarias Curitiba, 10.ª ed. 2019