INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO,
CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DA PARAÍBA
COORDENAÇÃO DO CURSO SUPERIOR DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAFAEL GERMANO DE SOUZA

A IMPORTÂNCIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO DESENVOLVIMENTO DA FÍSICA MODERNA

CAJAZEIRAS-PB
2020

RAFAEL GERMANO DE SOUZA

A IMPORTÂNCIA DO CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA O DESENVOLVIMENTO DA FÍSICA MODERNA

Trabalho de conclusão do curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de licenciatura em matemática do Instituto Federal de Educação da Paraíba – IFPB – Campus Cajazeiras

Orientador: Francisco Lopes Lavor Neto

CAJAZEIRAS-PB
2020

IFPB
Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

S729i

Souza, Rafael Germano de

A importância do cálculo diferencial e integral no desenvolvimento da física moderna / Rafael Germano de Souza; orientador Francisco Lopes Lavor Neto.- 2020.
38 f.: il.

Orientador: Francisco Lopes Lavor Neto.
TCC (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2020.

1. Cálculo diferencial 2. Cálculo Integral 3. Física moderna 4. Matemática I. Título

517.2 (0.067)

RAFAEL GERMANO DE SOUZA

A IMPORTÂNCIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO DESENVOLVIMENTO DA FÍSICA MODERNA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Cajazeiras como requisito para aprovação na disciplina de TCC e obtenção do diploma de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 22/12/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Francisco Lopes Lavor Neto (Orientador)

IFPB – Campus Cajazeiras

Fábio Gomes Ribeiro

Prof. Dr. Fábio Gomes Ribeiro

IFPB – Campus João Pessoa

Francisco Aureliano Vidal

Prof. Me. Francisco Aureliano Vidal

IFPB – Campus Cajazeiras

Dedico este trabalho aos meus pais, pilares da minha formação como ser humano.

AGRADECIMENTOS

Aos meus formadores de maneira geral, do primário ao superior, por terem me incentivado e me norteado.

A essa instituição, seu corpo docente, direção e administração pelo horizonte que me oportunizaram.

Ao meu orientador Francisco Lopes Lavor Neto, pelo suporte, correções e incentivo.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte de minha formação, o meu muito obrigado.

Em algum lugar, alguma coisa incrível está esperando para ser conhecida.

Carl Sagan.

RESUMO

Tendo em vista que o surgimento da física moderna ocorreu no início do século XX, e que em certas áreas, como na relatividade, a física moderna colocava em questão conceitos físicos absolutamente consolidados no mundo científico, pesquisa-se sobre a Importância e a utilização do cálculo diferencial e integral no desenvolvimento da física moderna. Para tanto, é necessário fazer revisão bibliográfica mostrando como autores conceituados observam historicamente o desenvolvimento da física moderna, ordenar historicamente como se deu o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral em paralelo com a física moderna, estudar onde o cálculo diferencial e integral foi utilizado no desenvolvimento da física moderna e explicar como o cálculo diferencial e integral foi utilizado no desenvolvimento da física moderna. Realiza-se, então, uma análise bibliográfica de cunho qualitativo descritivo. Diante disso, verifica-se que o cálculo diferencial e integral foi uma peça importantíssima no desenvolvimento dos conceitos: Função onda, valores esperados, equação de Schrödinger, distribuição de Fermi-Dirac, transformação de Lorentz, transformação de velocidade e energia relativística, o que impõe a constatação de que o cálculo diferencial e integral teve vital importância para o desenvolvimento da física moderna.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo diferencial e integral. Física moderna. Matemática.

ABSTRACT

In view of the emergence of Modern Physics occurred together with the beginning of the 20th century, and that in certain areas, such as relativity, modern physics put into question physical concepts absolutely consolidated in the scientific world, research on the Importance of Differential Calculus and Integral for the development of Modern Physics, in order to present the importance and the use of differential and integral calculus in modern physics. Therefore, it is necessary to make a bibliographic review showing how renowned authors historically observe the development of modern physics, order historically how the development of differential and integral calculus occurred in parallel with modern physics, to study where differential and integral calculus was used in the development modern physics and explain how differential and integral calculus was used in the development of modern physics. Then, a bibliographic analysis of qualitative and descriptive nature is performed. Given this, it appears that the Differential and Integral Calculus was a very important piece in the development of the concepts: the Wave Function, expected values, the Schrödinger Equation, the Fermi-Dirac Distribution, the Lorentz Transformation, the speed transformation and relativistic energy, which imposes the realization that Differential and Integral Calculus was vitally important for the development of Modern Physics.

Keywords: Differential and integral calculus. Modern physics. Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A importância que o cálculo diferencial e integral desempenhou na física clássica é inegável. Cálculo de velocidades, cálculos gravitacionais, quantização de energia, entre outros. Contudo, com o início do século XX teve início a chamada física moderna.

Como bem descreveu Helerbrock (2020) após o surgimento da teoria da relatividade de Einstein e da quantização das ondas eletromagnéticas, esse novo campo de estudo surgiu, ampliando os horizontes da Física. Com isso, houve então questionamentos sobre conhecimentos muito consolidados até então.

Motivado pelo espírito investigativo, buscar-se-á responder de forma clara a seguinte questão: Quão o cálculo diferencial e integral foi importante para o desenvolvimento da física moderna? Por hipótese acreditasse que sim, o cálculo teve um importante papel no desenvolvimento da física moderna.

Por meio de um estudo bibliográfico sobre alguns dos principais conceitos, leis e modelos teóricos da física moderna, aos quais houve influência explícita do cálculo diferencial e integral. Ficar-se-á clara a importância do cálculo diferencial e integral no desenvolvimento da física moderna. A partir da observação do uso da integral na interpretação da função onda, em valores esperados, na distribuição de Fermi-Dirac e em energia relativística. Como também o uso da derivada na equação de Schrödinger e na transformação de velocidades.

No quesito metodologia, utilizou-se um estudo bibliográfico documental sobre o tema, baseando-se notadamente sobre a ordem de conteúdos proposta pelos autores Paul A. Tipler e Gene Mosca.

Tendo a introdução como o primeiro capítulo, fazendo uma breve apresentação. O trabalho desenvolve-se por meio de mais cinco capítulos. Os mesmos terão o seguinte desenvolvimento.

No segundo capítulo, vemos um pouco do contexto histórico no qual se deu o desenvolvimento da física moderna. Além disso, foram apresentados alguns dos mais importantes cientistas para o desenvolvimento da física moderna.

No terceiro capítulo, revisou-se um pouco das derivadas e das integrais, revendo definições, com base no que é geralmente apresentado no curso de licenciatura em matemática, além disso, também se usou suas notações.

No quarto capítulo, serão vistos alguns dos conteúdos da física moderna que possuem contribuições do cálculo para seu desenvolvimento. Neste capítulo, também serão descritos estes conceitos, seu desenvolvimento e história, além da forma como o cálculo foi utilizado na sua descoberta.

No quinto capítulo, é feita a análise de resultados, onde é discutido o resultado da pesquisa. Também é feito o teste da hipótese, onde saber-se-á se ela foi confirmada ou refutada.

E no sexto capítulo temos as considerações finais, onde são explanadas as conclusões e aprendizados da pesquisa, além de sugestões como por exemplo é recomendado que possa ser melhor avaliado o desenvolvimento dos conteúdos da física moderna abordados neste trabalho

2 O DESENVOLVIMENTO DA FÍSICA MODERNA

Até o início do século XX entendia-se que havia uma total distinção entre as ondas e as partículas. Assim como explicado “[...] se pensava que o som, a luz [...] fossem ondas, e elétrons, prótons, átomos [...] fossem partículas. ” (TIPLER e MOSCA, 2009, p. 2).

Porém, do início até a terceira década do século XX, houve um grande número de descobertas surpreendentes na física teórica e experimental que mudaram esse pensamento. Entre estas descobertas estava o fato de que a luz na verdade transfere energia em pequenos pacotes ou quantas, como partículas, assim como que o elétron pode apresentar difração e interferência, comportando-se assim como ondas.

> Agora me parece realmente, que as observações sobre a “radiação negra”, Fotoluminescência, a geração de raios catódicos por luz ultravioleta e outros a produção ré. Grupos de fenômenos relacionados com a transformação da luz parecem melhor compreensíveis sob o pressuposto, que a energia da luz é distribuída de forma descontínua no espaço. (EINSTEIN, 1905, p. 133, tradução nossa).[1]

Proposta por Max Planck e Albert Einstein, respectivamente em 1900 e 1905, a quantização da energia e a natureza quântica da luz, foram teorias inovadoras para sua época. Estas teorias ajudaram a Einstein a explicar o efeito foto elétrico, feito que lhe concedeu o prêmio Nobel.

Mesmo premiado com o Nobel de Física por explicar o efeito foto elétrico, Einstein é mais memorado até hoje por outra teoria desenvolvida na física moderna, a Teoria da Relatividade.

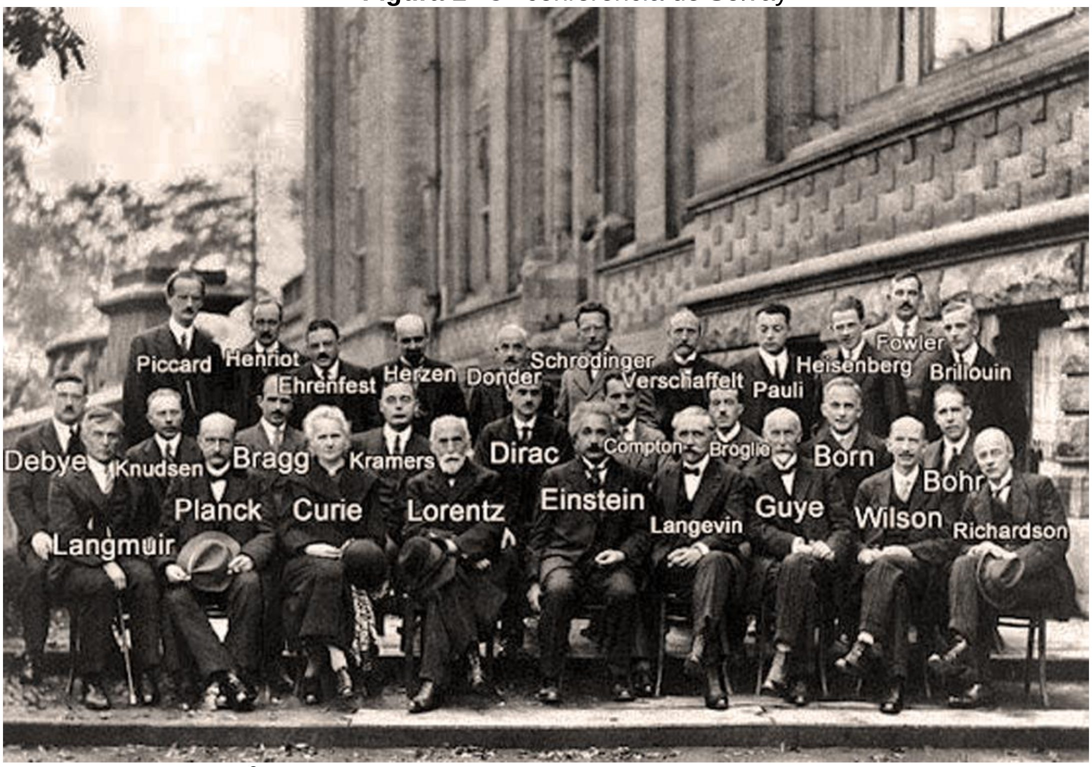
> “No ano em que Einstein foi premiado com o Nobel, a Teoria da Relatividade já estava formada, mas ainda era vista com cautela pela comunidade científica. Havia forte resistência a ela, especialmente na União Soviética e na própria Alemanha, diz Shozo Motoyama, especialista em História da Ciência, da Universidade de São Paulo, USP. ” (SUPERINTERESSANTE, 2016).

A física moderna desenvolveu-se em um período de hegemonia científica europeia, dado assim o número de grandes cientistas europeus que contribuíram para o seu desenvolvimento. A física moderna atravessou o período entre guerras, e

[1] *“Es scheint mir nun in der Tat, daB die Beobachtungen uber die ,,schwarze Strahlung" , Photolumineszenz , die Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht und andere die Erzeugung bez. Verwandlung des Lichtes betreffende Erscheinungsgruppen besser verstandlich erscheinen unter der Annahme , da6 die Energie des Lichtes diskontinuierlich im Raume verteilt sei.”*

influenciou na criação da mais mortal arma já criada pela humanidade, a bomba atômica.

Figura 1 - 5^a conferência de Solvay



Fonte: leonardoneiva[2]

Contudo não foi apenas Einstein o protagonista da física moderna, como mostrado na figura 1, outros cientistas também desempenharam importante papel no decorrer do século XX. Tais como: Max Planck, considerado pai da física quântica por suas contribuições na área. Erwin Schrödinger, mais conhecido pela equação que leva seu nome e pela qual ganhou o prêmio Nobel. O italiano Enrico Fermi destaque em trabalhos com reatores nucleares. O físico e matemático britânico Paul Dirac. E o também ganhador do prêmio Nobel, por seu trabalho com eletromagnetismo, Hendrik Lorentz.

Muitos destes cientistas se reuniram nas chamadas conferências de Solvay. Uma série de conferências científicas que reunião os mais consagrados cientistas da época. Estas conferências foram realizadas no Instituto Internacional de Solvay de Física e Química, localizado em Bruxelas na Bélgica.

---

[2] Disponível e: https://www.leonardoneiva.com.br/blog/5a-conferencia-de-solvay-1927-eletrons-e-fotons/. Acesso em 28 set. 2020

É possível identificar através da história da física moderna um pouco do quão revolucionário foi seu desenvolvimento. Como ela revolucionou o mundo produtivo nas décadas seguintes e a sua influência no mundo acadêmico até os dias atuais.

3 CONCEITO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Neste capítulo será visto por meio da análise da obra Fundamentos de Matemática Elementar, as definições de derivada e integral que são comuns as cadeiras de cálculo do curso de licenciatura em matemática.

3.1 Derivada

O conceito de cálculo diferencial e integral é formado como o próprio nome diz, de duas partes: A diferenciação e a integração. Sua origem está intimamente ligada aos conceitos da mecânica newtoniana e ao estudo dos movimentos.

Para uma função f qualquer, tal que f esteja definida no intervalo aberto I, com x_0 um elemento pertencente a I. A derivada de f em relação ao ponto x_0 será o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Caso este limite exista e seja finito.

Como descrito por Iezzi, Murakami e Machado (2011, p. 122) a derivada de f no ponto x_0 é habitualmente indicada com uma das seguintes notações

$$f'(x_0) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1}$$

Ou

$$f'(x_0\ ) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2}$$

Ou

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3}$$

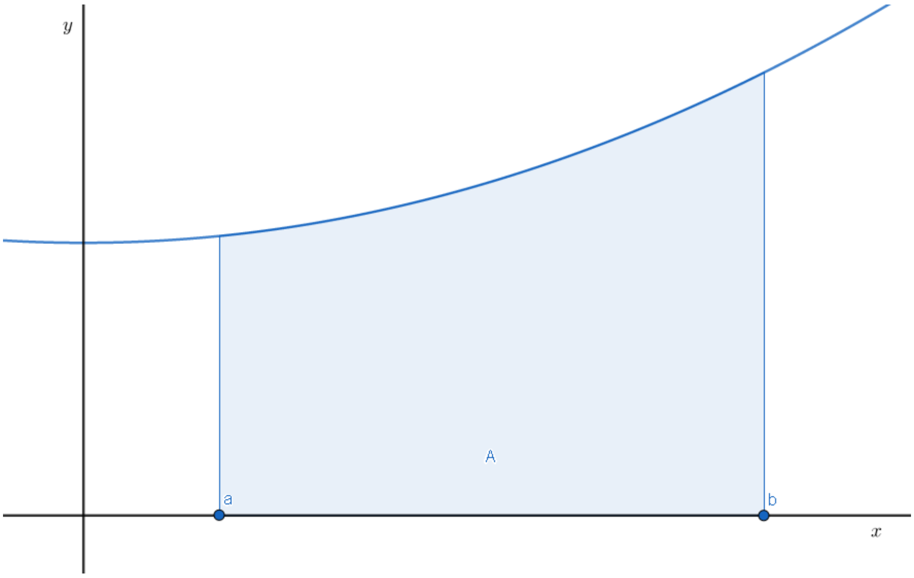
Basicamente o que ela irá fazer é aproximar do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa x_0

Com o tempo desenvolveu-se técnicas para se derivar com mais praticidade, porém não será abordado pois foge do escopo do trabalho.

3.2 Integral

A definição de integral está intimamente ligada com o cálculo da área de figuras cujo contorno não é formado apenas por segmentos. Para efeito de ilustração considere o cálculo da área da região A, presente na figura 2.

Figura 2 - Área sobre a curva



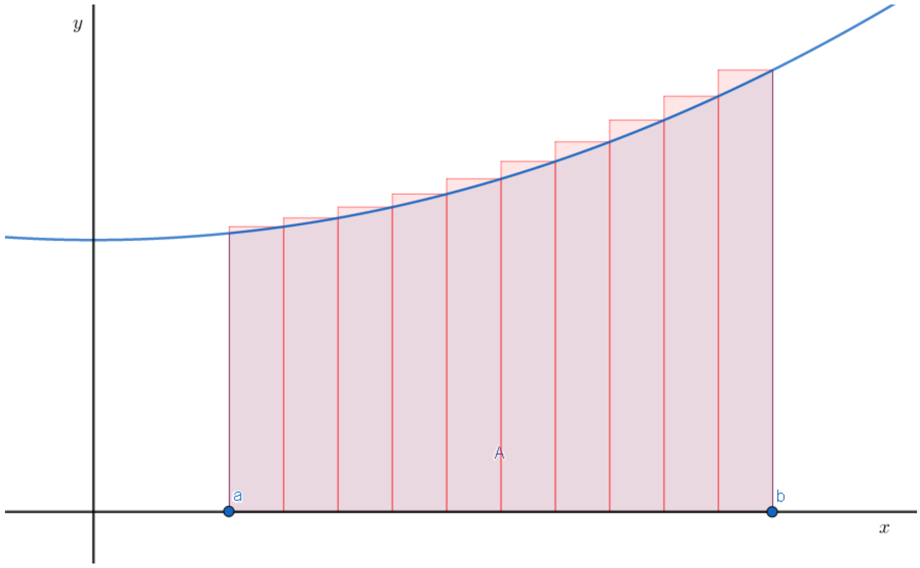
Fonte: Compilação do autor[3]

A região A sob o gráfico da função $f[a, b] \to \mathbb{R}$, em que $f(x) \geq 0$.

Dividindo o intervalo $[a, b]$ em intervalos suficientemente pequenos para que neles a função $f(x)$ possa ser considerada constante com uma boa aproximação. Desta forma poderemos calcular a área de cada um dos retângulos formados por cada um dos subintervalos.

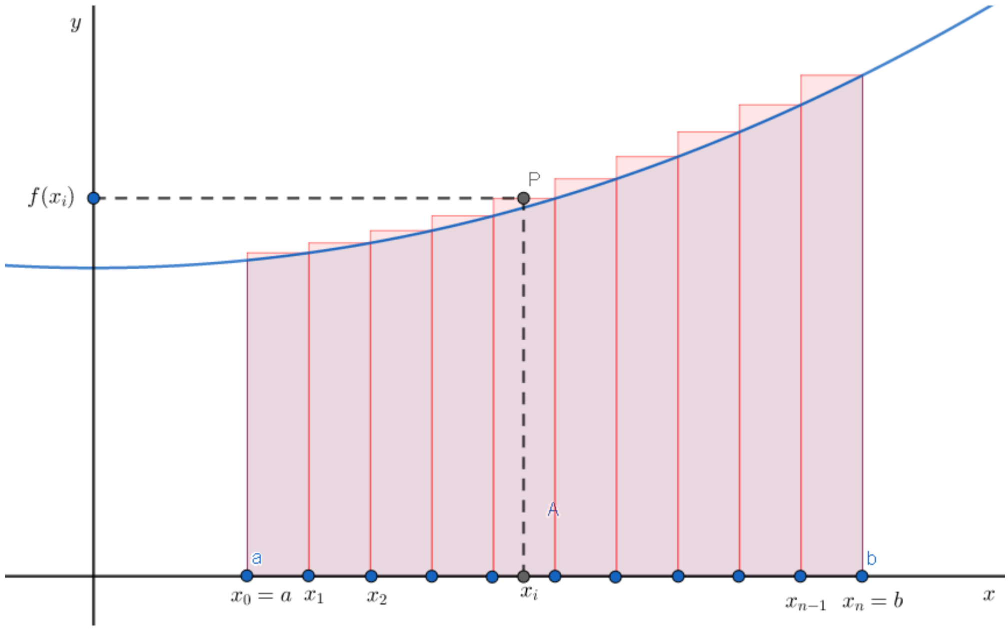
[3] Montagem a partir do Software GeoGebra.

Figura 3 - Área sobre curva seccionada



Fonte: Compilação do autor[4]

Figura 4 - Área sob curva com intervalos



Fonte: Compilação do autor[5]

Denotando pontos pertencentes aos subintervalos de $[a, b]$ da forma apresentada na figura 4 onde:

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b.$$

[4] Montagem a partir do Software GeoGebra.
[5] Montagem a partir do Software GeoGebra.

E o comprimento de cada um dos n subinteralos é $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ com $i = 1, \dots, n$. Assim, para um $\bar{x} \in \{x_0, \dots, x_n\}$ e supondo que $f(x) = f(\bar{x})$, a área do retângulo que contém $\bar{x}$ é $f(\bar{x})\Delta_{\bar{i}} x$.

Logo a área de A é aproximadamente soma das áreas de todos os retângulos formados no intervalo $[a, b]$.,

$$A \cong f(x_1)\, \Delta_1 x + \cdots + f(x_n)\, \Delta_n x, \tag{4}$$

Ou

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta_i x. \tag{5}$$

Como explicado por Iezzi, Murakami e Machado (2011, p. 196) para estabelecer de um modo geral a noção de integral de uma função f definida em um intervalo $[a, b]$, fazemos a partição de $[a, b]$. Uma partição é um conjunto $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ com x_i pertencente a $[a, b]$, $i = 1, 2, \dots, n$ e $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$.

Também é explicado por Iezzi, Murakami e Machado (2011, p. 196) é chamada de *norma* da partição P o número μ, que é o máximo do conjunto $\{\Delta_1 x, \Delta_2 x, \dots, \Delta_i x, \dots, \Delta_n x\}$ onde $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Desta forma sendo escolhido arbitrariamente $\bar{x}_i$ no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, a soma $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta_i x$ é chamada de soma de Riemann de f em $[a, b]$ relativa a partição P e à escolha feita dos $\bar{x}_i$.

4 UTILIZAÇÃO DO CÁLCULO NO DESENVOLVIMENTO DA FÍSICA MODERNA

Neste capítulo serão descritos alguns dos conceitos da física moderna em que se notou explicita participação do cálculo em seu desenvolvimento. Apresentados por muitas vezes ao lado de um pequeno contexto histórico. Conheceremos também as grandes mentes por trás destes conceitos, e sua importância para o mundo científico.

4.1 Interpretação da função onda

Por intermédio desta pesquisa bibliográfica foi observado que não é possível afirmar desde quando os físicos estudam os fenômenos ondulatórios: Como as ondas numa corda, as ondas acústicas ou as ondas eletromagnéticas. Foi observado também que o estudo dos fenômenos ondulatórios teve um importante papel na física clássica.

Com o advento da física moderna novas descobertas foram feitas. E surgiu a necessidade do estudo das ondas de elétrons. Contudo havia uma notória dificuldade nesse estudo.

Erwin Schrödinger no início do século XX publicou em um de seus trabalhos a denotação dessa onda como ψ(Psi), que seria a função onda dos elétrons. Contudo, “Quando Schrödinger publicou sua função de onda, nem ele nem qualquer outro sabia bem como interpretar a função ψ. ” (TIPLER e MOSCA, 2009, p. 12).

Foi somente por meio dos trabalhos do físico polonês Max Born, onde foi apresentada uma boa aplicação para a função de Schroedinger. Em seus trabalhos Born levou a função de onda a um novo rumo. “...inspirado pelas idéias (*sic*) de Einstein para os fótons, supôs que o quadrado da função de onda do elétron deveria fornecer uma densidade de probabilidade para o elétron. ” (POLYCARPO e BARROSO, 20?, p. 1).

Seria assim possível prever as probabilidades de se encontrar um elétron em um determinado espaço. Então, definiu-se $\psi(\mathrm{x,t})$ a função de onda do elétron $P(x) = |\psi(x,t)|^2 dx = \psi(x,t)\psi*(x,t)dx$, onde $P(x)$é a densidade de probabilidade de se encontrar uma partícula na posição x, sobre o espaço de comprimento dx. Mesmo que geralmente a função onda é escrita como $\psi(x,t)$, de modo a depender da posição e do tempo, para facilitar o nosso estudo analisaremos apenas as funções de onda estacionária, omitindo assim a dependência temporal.

É aqui então que encontraremos a utilização do Cálculo Diferencial e Integral. Como explicado pelos autores.

> A probabilidade de encontrar a partícula numa região entre x_1 e $x_1 + dx$ ou numa região entre x_2 e $x_2 + dx$ é a soma das probabilidades separadas $P(x_1)dx + P(x_2)dx$. Uma vez que temos uma partícula, a probabilidade de encontra-la em um local deve ser igual a unidade. (TIPLER e MOSCA, 2009, p. 13).

Assim se somarmos todas as probabilidades sobre os valores possíveis teremos a seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx = 1. \tag{6}$$

Essa equação é chamada de condição de normatização. “Se ψ deve satisfazer a condição de normatização, ela deve tender a zero quando $|x|$ tende ao infinito. Esta condição impõe restrições as possíveis soluções da equação de Schrödinger. “ (TIPLER e MOSCA, 2009, p. 13).

4.2 Valores esperados

Na mecânica clássica comumente a solução de um problema pode ser dada a partir da posição de uma partícula como função do tempo. Contudo quando se estuda sistemas microscópicos levando em conta a natureza ondulatória da matéria, é impossível se proceder do mesmo modo.

> O máximo que podemos saber é a probabilidade relativa de medir um certo valor da posição x. Se medirmos a posição para um grande número de sistemas idênticos, obteremos um conjunto de valores que correspondem à distribuição de probabilidade. (TIPLER e MOSCA, 2009, p. 20).

Após calcularmos essa probabilidade para um grande número de sistemas idênticos chegamos a um **valor esperado** ”[...] que poderíamos obter através da medição de um grande números de partículas que tivessem a mesma função onda $\psi(x)$. ” (TIPLER e MOSCA, 2009, p. 20). Denotado como $\langle x \rangle$.

Podemos afirmar então que o valor esperado de x é o mesmo que pode-se obter calculando o valor médio de x através de uma medição de um gigantesco número de partículas que seguissem a mesma função $\psi(x)$.Pois, como vimos na seção anterior, $\psi^2(x)dx$ é a probabilidade de se encontrar uma partícula sob a região dx, logo o valor esperado é

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi^2(x)dx. \tag{7}$$

E para qualquer função $F(x)$ temos

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\psi^2(x)dx. \tag{8}$$

É possível ver no cálculo de valores esperados uma notável dependência do cálculo diferencial e integral, visto que é a partir dele que se torna possível mensurar um resultado quantitativo.

4.3 A Equação de Schrödinger

A equação de Schrödinger (E. S.) contém certas semelhanças com as equações de onda clássica. Como explicado pelos autores Tipler e Mosca.

> [...] é uma equação diferencial parcial no espaço e no tempo. Como as leis do movimento de Newton, a equação de Schrödinger não pode ser deduzida. Sua validade, como as validades das leis de Newton, está na sua concordância com as experiências. (TIPLER e MOSCA, 2009, p. 32)

A E. S. dependente do tempo, e em uma dimensão, será escrita da seguinte maneira:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}, \tag{9}$$

onde a função $\Psi(x,t)$ é a função de onda, já vista anteriormente, e U é a função de energia. Ao analisar matematicamente a E. S., observa-se que ela além de conter o número imaginário, também contém uma **primeira derivada** sobre tempo e uma **segunda derivada** sobre o espaço.

A E. S. “[...] foi a primeira equação da mecânica quântica a ser descoberta. ” (FEYNMAN, LEIGHTON e SANDS, 2008c, p. 261). Ela descreve uma gama de fenômenos que eram misteriosos até então.

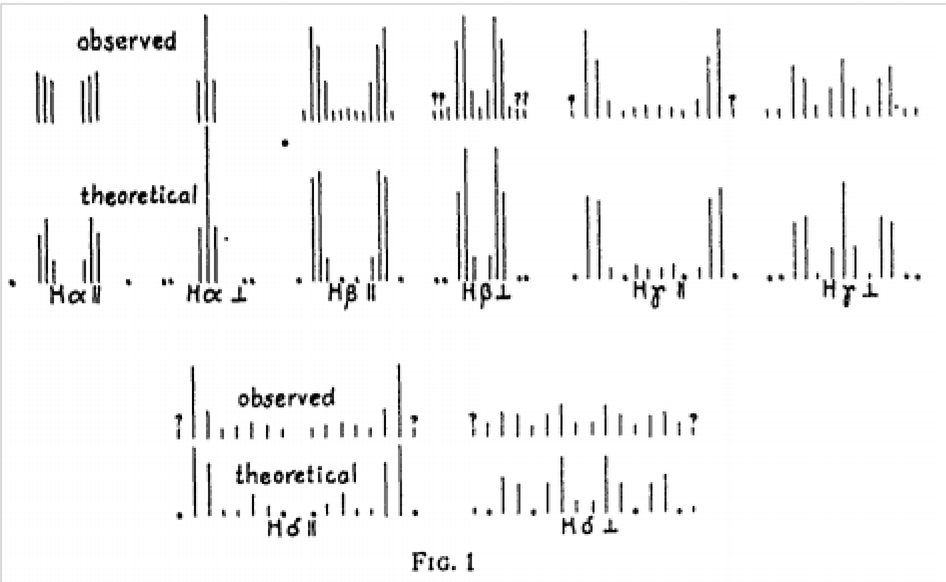
> [...] o grande momento histórico que marca o nascimento da descrição mecânico quântica da matéria ocorreu quando Schrödinger primeiro escreveu a sua equação em 1926. Por muitos anos a estrutura atômica interna da matéria tinha sido um grande mistério. Ninguém tinha sido capaz de entender

> o que matinha a matéria unida, por que havia ligações químicas, e especialmente como era possível que os átomos fossem estáveis. (FEYNMAN, LEIGHTON e SANDS, 2008c, p. 261).
>
> Em princípio, a equação de Schrödinger é capaz de explicar todos os fenômenos atômicos exceto os que implicam em magnetismo ou relatividade. Ela explica os níveis de energia de um átomo, e todos os fatos sobre ligações químicas. (FEYNMAN, LEIGHTON e SANDS, 2008c, p. 261).

Apesar da semelhança com as equações de onda clássicas, a solução da E. S. não serão necessariamente reais. Como é muito bem explanado pelos autores Tipler e Mosca "$\Psi(x,t)$ não é uma função mensurável [...]. Entretanto, a probabilidade de encontrar uma partícula em alguma região do espaço dx certamente tem que ser um valor real." (TIPLER e MOSCA, 2009, p. 32). Assim como apresentado teoricamente, nas observações experimentais foi visto que não há a concentração da carga do elétron em um único ponto do espaço.

> Neste caso, foi possível calcular valores razoavelmente corretos para as intensidades e.g. dos componentes do efeito Stack (ver Seção 6, Fig. 1) pela seguinte hipótese: a carga do elétron não está concentrada em um ponto, mas está espalhada por todo o espaço, proporcional à quantidade $\psi\bar{\psi}$. (SCHRÖDINGER, 1926, p. 1066, tradução nossa).[6]

Figura 5 - Fig. 1 da seção 6



[6] *In this case it has been possible to compute fairly correct values for the intensities e.g. of the Stack effect components (see Section 6, Fig. 1) by the following hypothesis: the charge of the eléctron is not concentrated in a point, but is spread out through the whole space, proportional to the quantity $\psi\bar{\psi}$.*

Fonte: (SCHRODINGER, 1926, p. 1066)[7]

Na figura 5 é apresentado um recorte do trabalho publicado por Schrödinger, onde é possível notar uma conformidade entre os resultados previstos teoricamente e as observações experimentais.

Estudando o cálculo dos níveis de energia permitidos do sistema, utiliza-se a equação de Schrödinger independentemente do tempo. Contudo, somente certos valores de energia E_n dão soluções ψ_n.

> Quando $U(x)$ for tal que a partícula está confinada em alguma região do espaço, somente certos valores discretos de energias E_n dão soluções ψ_n que podem satisfazer a condição de normalização. $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n|^2 dx = 1$. (TIPLER e MOSCA, 2009, p. 33).

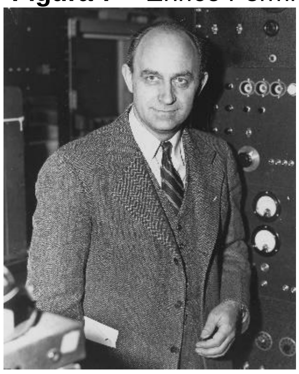
Condição esta já vista na seção 4.1. Na análise dessa seção foi feita a utilização tanto da integral quanto da derivada.

4.4 A Distribuição de Fermi-Dirac

Figura 6 – Paul Dirac

Fonte: Wikipédia[8]

Figura 7 – Enrico Fermi



Fonte: Wikipédia[9]

A distribuição de Fermi-Dirac ou como também é conhecida, a estatística de Fermi Dirac, é uma função que analisa as partículas de *spin* semi-inteiros. Ela tem

[7] SCHRÖDINGER, E. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. **The Physical Review**, Maryland, dez. 1926.

[8] Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac>. Acesso em: 17 set. 2020.

[9] Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Enrico_Fermi>. Acesso em 22 set. 2020

fundamental importância no estudo de gases de férmions e no estudo da distribuição de elétrons livres em um metal.

Seu nome foi dado, em homenagem a dois dos maiores cientistas do século XX, Enrico Fermi e Paul Dirac. A distribuição de Fermi-Dirac apresenta-se de forma que a densidade de estados é calculada pela teoria quântica.

> A distribuição de Fermi-Dirac pode ser escrita na mesma forma que a distribuição de Maxwell-Boltzmann, onde a densidade de estados é calculada pela teoria quântica e o fator de Boltzmann é substituído pelo fator de Fermi. (TIPLER e MOSCA, 2009, p. 135).

Para análise deste tópico partir-se-á da função da distribuição de energia: $n(E)dE = f(E)g(E)dE$, onde $n(E)dE$ é o número de elétrons que tem energia entre E e $E + dE$, $g(E)dE$ é o número de estados que tem energia entre E e EdE e $f(E)$ é a probabilidade de um estado ser ocupado, que é o fator de Fermi. Utilizar-se-á da integral sobre $n(E)dE$ para encontrar o número total de elétrons denotado pelos autores Tripler e Mosca como N.

Utilizar-se-á da integral sobre $n(E)dE$ para encontrar o número total de elétrons denotado pelos autores Tripler e Mosca como N.

$$N = \int_0^{\infty} n(E)dE = \frac{16\sqrt{2}\pi {m_e}^{3/2}V}{3h^3} E^{3/2}. \qquad (10)$$

A integral completa pode ser encontrada no apêndice A. Outro caso em que também é utilizado o cálculo diferencial e integral é no cálculo dos níveis de energia. Onde segundo os autores:

$$E_{méd} = \frac{\int_0^{E_F} Eg(E)dE}{\int_0^{E_F} g(E)dE} = \frac{1}{N}\int_0^{E_F} Eg(E)dE. \qquad (11)$$

Sendo N o número total de elétrons e

$$N = \int_0^{E_F} g(E)dE. \qquad (12)$$

Dessa forma:

$$E_{méd} = \frac{3}{5}E_F. \qquad (13)$$

Na distribuição de Fermi-Dirac podemos ver a participação do cálculo em aspectos subatômicos. Essa distribuição é bastante conhecida por sua importância no estudo de semicondutores.

4.5 A Transformação de Velocidade

É possível derivando-se a transformação de Lorentz, encontrar como as velocidades se transformam de um referencial para outro. Para isso, imaginemos uma partícula que se desloca para a direita com velocidade v em relação a um referencial R e que esteja com a velocidade $u'_x = dx'/dt'$ em um determinado referencial R'.

Das equações da transformação de Lorentz temos as seguintes derivações:

$$dx = \gamma(dx' + v\,dt'), \tag{14}$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{vdx\prime}{c^2}\right). \tag{15}$$

Assim, a velocidade relativa ao referencial R é dada por:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{u\prime_x + v}{1 + \frac{vu\prime_x}{c^2}}\,. \tag{16}$$

“Se a partícula tiver componentes da velocidade ao longo dos eixos y e z, podemos usar a mesma relação entre dt e dt', com $dy = dy'$ e $dz = dz'$ [...]” (TIPLER e MOSCA, 2009, p. 161). Obtendo assim as equações:

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{u\prime_y}{\gamma\left(1 + \frac{vu\prime_x}{c^2}\right)}; \tag{17}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{u\prime_z}{\gamma\left(1 + \frac{vu\prime_x}{c^2}\right)}. \tag{18}$$

Essas equações mostram a utilização das derivadas como uma ferramenta na descrição do conceito de transformação de velocidades. O desenvolvimento completo das equações pode ser encontrado no apêndice.

4.6 Energia Relativística

Teoria proposta por Albert Einstein em 1905, a energia relativística propõe uma relação entre massa e energia. Com muitas consequências, ela tem com toda certeza a fórmula mais popularmente conhecida da física, a famosa $E = mc^2$. Nesta teoria o cálculo também demonstrou sua importância.

Para entender energia relativística é necessário partir do conceito de massa relativística, pois como explicado por Bonjorno et al. (2013), quando estudamos a física clássica, vemos no teorema trabalho-energia, que a variação da energia cinética de uma partícula é igual ao trabalho realizado por sua força resultante. Já na mecânica relativística segundo Tipler Mosca (2009, p. 166), a força resultante é igualada à taxa de variação do momento relativístico. Visto que a massa não será mais interpretada como uma constante, mas sim, como uma variável dependente da velocidade.

Podemos então calcular o trabalho realizado pela força resultante e iguala-lo à taxa de variação da energia relativística.

Para calcular a energia cinética ela será definida com a mesma definição da mecânica clássica, ou seja, a energia cinética é igual ao trabalho realizado pela força resultante ao acelerar uma partícula que estava no repouso. Utilizando-se da integral temos

$$K = \int_{u=0}^{u=uf} F_{res}\, ds = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(u_i{}^2/c^2)}} - 1 \right). \tag{19}$$

Ou

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} - mc^2. \tag{20}$$

O segundo membro da expressão é composto por dois termos. O primeiro é chamado de energia cinética visto que dependente da velocidade da partícula. Já o segundo, mc^2, de energia de repouso visto que não é dependente da velocidade da partícula. O desenvolvimento completo da equação pode ser encontrado no apêndice.

Segundo Feynman, Leighton e Sands (2008a, p. 189), esta equação foi usada para estimar quanta energia seria liberada numa fissão numa bomba atômica. Este fato fez com que jornais dessem a Einstein o título de pai da bomba atômica.

E quando o corpo estiver em repouso, a energia da partícula será igual ao produto da massa pelo quadrado da velocidade da luz ou

$$E_0 = mc^2. \tag{21}$$

E a energia relativística total E será a soma da energia cinética com a energia de repouso, ou seja

$$E = K + E_0, \tag{22}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}. \tag{23}$$

O cálculo promove como uma ferramenta matemática um melhor entendimento do conceito físico descrito. Transformando sua definição teórica em algo mensurável.

5 ANÁLISE DE RESULTADOS

A escolha por uma pesquisa qualitativa descritiva se deu pelo fato de que tanto a física moderna quanto o cálculo diferencial e integral são temas conhecidos no mundo acadêmico a quase um século. Proporcionando desta forma, uma variada base referencial bibliográfica.

Para se conseguir os dados da pesquisa foi feita a análise qualitativa bibliográfica do tema. Tendo como base os conteúdos do livro Física para Cientistas e Engenheiros dos autores Paul A. Tipler e Gene Mosca. E como suporte a coleção Lições de Física *The Feynman Lectures on Physics*.

Foi levando ainda em conta os conceitos de derivada e integral apresentados no curso de licenciatura em matemática, descritos no oitavo volume da coleção Fundamentos da Matemática dos autores Gelson Iesi, Carlos Murakami e Nilson José Machado e no livro Cálculo do autor James Stewart. Além, de uma análise de documentos eletrônicos (*papers*) sobre o tema.

A escolha dos autores se deu por serem referências muito conceituadas, onde, poderiam nortear nossa pesquisa sem a geração de dúvidas sobre seu embasamento teórico.

Após a análise sobre os conteúdos da física moderna apresentados no livro Física para Cientistas e Engenheiros, foram elencados aqueles em que foi notada a participação, mais explicita, dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, para seu desenvolvimento.

Sabendo que o propósito da pesquisa era fazer uma revisão bibliográfica mostrando como autores conceituados observam historicamente o desenvolvimento da física moderna, ordenar historicamente como se deu a aplicação do cálculo diferencial e integral na física moderna e explicar como o cálculo diferencial e integral foi utilizado no desenvolvimento da física moderna.

Foi possível notar claramente a utilização do cálculo diferencial e integral no desenvolvimento dos conceitos físicos descritos no terceiro capítulo. Como na utilização da derivada na transformação de velocidades. Assim como a utilização da integral na Interpretação da função onda, no estudo de valores esperados, na equação de Schrödinger, na transformação de Fermi-Dirac e no estudo de energia relativística

Como a hipótese inicial era que: Sim, o cálculo diferencial e integral foi muito importante para o desenvolvimento da física moderna. Podemos agora afirmar que a hipótese foi confirmada. Por todas evidências que já aparentavam antes desta pesquisa, pela forma como foi utilizado nos tópicos descritos no terceiro capítulo deste trabalho e por todos resultados vistos na análise feita.

E referente a nossa questão inicial: Quão o cálculo diferencial e integral foi importante para o desenvolvimento da física moderna? Podemos dar por resposta que: O cálculo diferencial e integral teve notável importância para o desenvolvimento de conceitos importantíssimos da física moderna, sendo utilizado na descrição matemática de conceitos desenvolvidos de forma experimental. Sua importância se deu muito além de cálculos quantitativos, ele foi utilizado como importante meio na interpretação destes conceitos da física moderna.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa teve como objetivo geral responder à questão: Como o cálculo diferencial e integral foi importante para o desenvolvimento da física moderna? Constata-se que este objetivo foi efetivamente atendido, pois o trabalho conseguiu verificar que o cálculo diferencial e integral teve um importante papel para o desenvolvimento da física moderna. Com a sua participação na interpretação da função Onda, no estudo de valores esperados, na equação de Schrödinger, na distribuição de Fermi-Dirac, na transformação de Velocidades e no estudo de energia relativística.

O primeiro objetivo específico era fazer uma revisão bibliográfica mostrando como autores conceituados observam historicamente o desenvolvimento da física moderna. Este objetivo foi atendido por toda pesquisa bibliográfica feita para baseamento do trabalho.

O segundo objetivo específico era ordenar historicamente como se deu o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral em paralelo com a física moderna. Este objetivo foi parcialmente atendido na elaboração e organização do primeiro e terceiro capítulos deste trabalho.

O terceiro objetivo específico era estudar onde o cálculo diferencial e integral foi utilizado no desenvolvimento da física moderna. Este objetivo foi atendido no estudo dos conceitos da física mostrados ao decorrer das seis seções do terceiro capítulo.

O quarto objetivo especifico era explicar como o cálculo diferencial e integral foi utilizado no desenvolvimento da física moderna. Objetivo também atendido, na explicação dos conceitos da física mostrados ao decorrer das seis seções do terceiro capítulo.

A pesquisa partiu da hipótese de que o cálculo diferencial e integral foi importante para o desenvolvimento da física moderna, por mostrar-se fundamental na física clássica, e também para a física moderna no início do século XX. Durante o trabalho foi verificado que o cálculo foi peça importantíssima no desenvolvimento dos conceitos: da função onda, de valores esperados, da equação de Schrödinger, da distribuição de Fermi-Dirac, da Transformação de Lorentz, da transformação de velocidade e de energia relativística. E então foi feito o teste da hipótese: A hipótese foi confirmada por o cálculo diferencial e integral se mostrar presente no desenvolvimento destes conceitos.

Como a metodologia proposta era um estudo bibliográfico e documental sobre o tema, ele desenvolveu-se baseando-se fundamentalmente na ordem de conteúdos propostas pelo livro de Tipler e Mosca. Os dados coletados referem-se a definições e cálculos propostos pelo livro. Os tópicos foram selecionados por meio de um prévio estudo do tema durante a fase de estudo bibliográfico. A pesquisa foi desenvolvida na biblioteca do campus do IFPB de cajazeiras.

Diante da metodologia proposta percebe-se que o trabalho poderia ser desenvolvido utilizando uma gama maior de fontes bibliográficas nacionais e internacionais. Além de ser feita revisão histórica mais minuciosa e de ser possível associar a pesquisa a outras áreas do conhecimento além da matemática.

Recomenda-se que possa ser melhor avaliado o desenvolvimento dos conteúdos da física moderna abordados neste trabalho. Levando em conta o rigor científico de suas demonstrações e buscando ampliar mais seu desenvolvimento.

REFERÊNCIAS

BONJORNO, J. R. et al. **Física:** Mecânica. 2. ed. São Paulo: FTD, v. 1, 2013.

EINSTEIN, A. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. **Annalen der Physik**, Berlim, 17 mar. 1905. Disponivel em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19053220607>. Acesso em: 24 set. 2020.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Lições de Física de Feynman:** Mecânica, Radiação e Calor. São Paulo: Bookman, 2008ª.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Lições de Física de Feynman:** Eletromagnetismo e Matéria. São Paulo: Bookman, 2008b.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Lições de Física de Feymann:** Mecânica Quântica. São Paulo: Bookman, 2008c.

HELERBROCK, R. O que é física moderna? **Brasil Escola**, 20? Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/fisica-moderna.htm>. Acesso em: 01, fev. 2020.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Sâo Paulo: ATUAL, v. 8, 2011.

POLYCARPO, E.; BARROSO, M. F. **Uma Breve História do Mundo dos Quantas:** Unidade V. Rio de Janeiro: UFRJ, 20?. Disponivel em: <htpps://www.if.ufrj.br/~marta/cederj/quanta/mq-unidade5.pdf>.

SCHRÖDINGER, E. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. **The Physical Review**, Maryland, dez. 1926.

SUPERINTERESSANTE. ALBERT EINSTEIN GANHOU ALGUM PRÊMIO NOBEL? **Superinteressante**, 2016. Disponivel em: <http://super.abril.com.r/história/albbert-einstein-ganhou-algum-premio-nobel/>. Acesso em: 20 fev 2020.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para Cientistas e Engenheiros**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

APÊNDICE — Passagens matemáticas

Desenvolvimento da equação (10)

$$N = \int_0^\infty n(E)dE$$

$$= \int_0^\infty f(E)g(E)dE,$$

$$= \int_0^\infty f(E)\frac{8\sqrt{2}\pi m_e{}^{3/2}}{h^3}E^{1/2},$$

$$= \int_0^{E_F} f(E)\frac{8\sqrt{2}\pi m_e{}^{3/2}}{h^3}E^{1/2} + \int_0^{E_F} f(E)\frac{8\sqrt{2}\pi m_e{}^{3/2}}{h^3}E^{1/2},$$

$$= \int_0^{E_F} 1\ \frac{8\sqrt{2}\pi m_e{}^{3/2}}{h^3}E^{1/2} + \int_0^{E_F} 0\ \frac{8\sqrt{2}\pi m_e{}^{3/2}}{h^3}E^{1/2},$$

$$= \int_0^{E_F} \frac{8\sqrt{2}\pi m_e{}^{3/2}V}{h^3}E^{1/2} + 0,$$

$$= \int_0^{E_F} \frac{8\sqrt{2}\pi m_e{}^{3/2}V}{h^3}E^{1/2},$$

$$= \frac{2}{3}\ \frac{8\sqrt{2}\pi m_e{}^{3/2}V}{h^3}E^{3/2},$$

$$= \frac{16\sqrt{2}\pi m_e{}^{3/2}V}{3h^3}E^{3/2}.$$

Desenvolvimento das equações (16), (17) e (18) respectivamente

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + v\,dt')}{\gamma\left(dt' + \frac{v\,dx'}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}.$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{vdx'}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)};$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma\left(dt' + \frac{vdx'}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dz'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)}.$$

Desenvolvimento das equações (19) e (20) respectivamente

$$K = \int_{u=0}^{u=uf} F_{res}\,ds,$$

$$= \int_{u=0}^{u=uf} \frac{dp}{dt}\,ds\ ,$$

$$= \int_{u=0}^{u\,=\,uf} u\, dp,$$

$$= \int_{u=0}^{u\,=\,uf} u\, d\left(\frac{mu}{\sqrt{1-(\frac{u^2}{c^2})}}\right).$$

Onde definindo $u = ds/dt$.

$$= \int_{0}^{u_f} m\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} u\, du,$$

$$= mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(u_i{}^2/c^2)}} - 1\right).$$

Ou

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} - mc^2.$$