INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**ANA NONATO TRIGUEIRO**

# ESTUDO SOBRE TRANSFORMAÇÕES CONFORMES: TEORIA E APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA E NA FÍSICA NA PERSPECTIVA DA INTERDISCIPLINARIDADE

CAJAZEIRAS-PB
2020

# ESTUDO SOBRE TRANSFORMAÇÕES CONFORMES: TEORIA E APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA E NA FÍSICA NA PERSPECTIVA DA INTERDISCIPLINARIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

**Orientadora: Prof ª. Mª. Kíssia Carvalho**

CAJAZEIRAS-PB
2020

Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

T828e

Trigueiro, Ana Nonato

Estudo sobre transformações conformes: teoria e aplicações na matemática e na física na perspectiva da interdisciplinaridade / Ana Nonato Trigueiro; orientadora Kíssia Carvalho .- Cajazeiras, 2020.
63 f.: il.

Orientadora: Kíssia Carvalho.
TCC (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2020.

1. Variáveis complexas 2. Transformações conformes 3. Interdisciplinaridade I. Título.

517.55(0.067)

ANA NONATO TRIGUEIRO

# ESTUDO SOBRE TRANSFORMAÇÕES CONFORMES: TEORIA E APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA E NA FÍSICA NA PERSPECTIVA DA INTERDISCIPLINARIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 17/06/2020 .

BANCA EXAMINADORA

Kissia Carvalho

Prof ª. Mª. Kíssia Carvalho
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

Patrício Luiz de Andrade

Prof. Me. Patrício Luiz de Andrade
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

Prof. Dr. Rodiney Marcelo Braga dos Santos
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

CAJAZEIRAS-PB
2020

Dedico a Deus que permitiu todas as conquistas em todos os momentos da minha vida, sem Ele não estaria aqui, é o maior mestre que alguém pode ter. E dedico também à minha família, que é essencial na minha vida!

Agradecimento

Agradeço primeiramente a Deus. Que permitiu todas as conquistas em todos os momentos da minha vida, é o maior mestre que alguém pode ter, é meu guia e autor da minha história.

Ao meu pai, Geraldo Trigueiro Gadelha, que em meio a tantas dificuldades não mediu esforços para que meu sonho pudesse ser realidade.

À minha mãe, Maria Lucia Nonato Gadelha, mulher batalhadora, que com seus ensinamentos me instruiu a seguir o melhor caminho, o qual me trouxe até aqui.

Às minhas irmãs, Maria Nonato Trigueiro e Francisca Nonato Trigueiro que sempre me ajudaram com palavras de incentivo nas horas mais precisas, acreditando sempre na minha capacidade.

À minha familia, que foi a base para essa conquista, por ter acreditado que meu grandioso sonho seria concretizado.

Agradeço de forma especial à minha orientadora, Kíssia Carvalho. Pessoa amiga e querida que contribuiu com as orientações desde o projeto de pesquisa, um ser humano maravilhoso que me deu o suporte que eu precisava para conseguir concretizar o trabalho.

Aos meus professores do curso de Licenciatura em Matemática que, sem dúvidas, foram meus mediadores. De toda esta jornada, permanece o conhecimento que adquiri através de seus ensinamentos, que muito contribuíram para minha aprendizagem. De forma especial, ao professor Vinícius Martins Teodosio Rocha, pelas contribuições neste trabalho e no curso.

Agradeço de forma especial, ao professor Rodiney Marcelo Braga dos Santos, agradeço por todas as contribuições e ensinamentos durante as disciplinas, que foram de suma importância para a minha formação acadêmica e pessoal.

Aos meus colegas de graduação, que compartilharam momentos de dificuldades ao meu lado, mas também momentos de alegria, descontração e, sobretudo, de aprendizagem, momentos que serão guardados na memória, pois a batalha foi longa mas de muito proveito.

Agradeço de forma especial aos professores Rodiney Marcelo Braga dos Santos e Patrício Luiz de Andrade que aceitaram participar da minha banca examinadora.

E, finalmente, agradeço novamente a Deus por proporcionar estes agradecimentos, e a todos que tornaram possível esse sonho tornar-se realidade dando, de forma direta ou indireta, a sua colaboração para a minha formação acadêmica e pessoal.

# Resumo

O conceito de transformação conforme é muito importante dentro da Matemática, tanto por seu caráter teórico quanto do ponto de vista aplicativo, e seja qual for o tipo de transformação conforme, é essencial que se tenha em mente a modificação causada por cada função, para que se consiga identificar aquela responsável por transformar uma região, em outra desejada. Deste modo, partindo da necessidade de se estudar e entender alguns tipos e aplicações de transformações conformes, surge este trabalho, para que possamos mostrar a importância das transformações, para facilitar o trabalho de docentes e discentes do nível superior, em vários ramos da Física e da Matemática. Além de que, estabeleceremos os aspectos básicos das transformações conformes como ponto de partida para suas aplicações, com uma abordagem interdisciplinar e com o objetivo de utilizar conhecimentos da Matemática para resolver uma aplicação e compreender determinado fenômeno por meio de diferentes pontos de vista. Assim, a pesquisa teve como questões norteadoras as seguintes indagações: O que são transformações conformes, em que elas podem ser aplicadas e como? Com base nisso, realizamos uma pesquisa qualitativa do tipo exploratória e de natureza básica, em que propomos a nossa intervenção por meio de uma abordagem interdisciplinar, de maneira a contribuir para o ensino-aprendizagem, e ainda, potencializando uma apropriação do saber, tanto pelos discentes como pelos docentes das respectivas áreas aqui citadas. Portanto, concluímos afirmando sua importância para as áreas do conhecimento citadas e seu forte potencial de aplicabilidade dentro de cada área.

**Palavras-chave:** Variáveis Complexas; Transformações Conformes; Aplicações; Interdisciplinaridade.

# Abstract

The concept of conforming transformation is very important within mathematics, both for its theoretical character and from the application point of view, and whatever the type of conforming transformation is, it is essential to keep in mind the change caused by each function, so that if it is possible to identify the one responsible for transforming a region, into a desired one. Thus, starting from the need to study and understand some types and applications of conforming transformations, this work arises, so that we can show the importance of transformations to facilitate the work of teachers and students of higher education, in various branches of Physics and Education. Mathematics. In addition to that, we will establish the basic aspects of conforming transformations as a starting point for its applications, with an interdisciplinary approach and with the objective of using knowledge of Mathematics to solve an application and understand a certain phenomenon through different points of view. Thus, the research had as guiding questions the following questions: What are conforming transformations, in which they can be applied and how? Based on this, we conducted a qualitative research of an exploratory and basic nature, in which we propose our intervention through an interdisciplinary approach, in order to contribute to teaching-learning, and also, enhancing the appropriation of knowledge by both students as well as by the teachers of the respective higher education courses mentioned here. Therefore, we conclude by stating your importance for the aforementioned areas of knowledge and their strong potential for applicability within each area.

**KeyWords:** Complex variables; Conforming Transformations; Applications; Interdisciplinarity.

# Lista de Figuras

# Sumário

# Introdução

As transformações conformes tem uma aplicabilidade bastante importante tanto na Matemática quanto na Física e surgem para transformar a região em que o problema se apresenta em outra região mais simples, para a resolução de problemas, isso porque, as transformações conformes modificam a geometria do problema, preservando as grandezas físicas.

Segundo Santos (2013)[22], o estudo das transformações conformes teve sua origem na cartografia, onde se desenvolve as técnicas para o traçado de mapas da superfície da terra. Tais mapas consistem, basicamente, na projeção de uma superfície esférica em outra, em geral, plana, cilíndrica ou cônica. A projeção estereográfica, conhecida desde os tempos de Hiparco de Nicea (190-120 a.C), é descrita matematicamente na obra Planisphaerium, de Claúdio Ptolomeu (90-168 d.C).

Ainda segundo Santos (2013), no ano de 1593, Christopher Clavius (1537-1612), mostrou em seu livro Astrolabium como determinar o ângulo formado pela interseção de dois grandes círculos numa esfera por meio da medida do ângulo formado pelas imagens transformadas no plano e conseguiu demonstrar com seu método que os ângulos eram preservados pela transformação. A partir dai surgiu contribuições e estudos importantes de vários matemáticos, como: Lambert, Euler, Lagrange, Gauss, Riemann, Cauchy, Möbius e entre outros.

O conceito de transformação conforme é muito importante dentro da Matemática, tanto por seu caráter teórico quanto do ponto de vista aplicativo. Seja qual for a área de estudo ou a utilização de uma transformação conforme, é essencial que se tenha em mente a modificação causada por cada função elementar, para que se consiga identificar aquela responsável por transformar uma região à outra. Neste trabalho, estabeleceremos os aspectos básicos de transformações conformes como ponto de partida para suas aplicações na Física e na Matemática.

Partindo da necessidade de se estudar e entender alguns tipos e aplicações de transformações conformes, surge este trabalho, para que possamos mostrar a importância das transformações para facilitar o trabalho de docentes e discentes do nível superior, em vários ramos da Física, como: a hidrodinâmica, à teoria da elasticidade, a teoria dos campos magnéticos e eletrostáticos e da Matemática, como: resolução de equações do terceiro grau, números complexos e entre outros. Assim, tentamos reunir neste trabalho, o contexto histórico, os conceitos, as transformações e as aplicações, com uma abordagem interdisciplinar.

Na prática realizar estas transformações de forma concreta pode ser muito complicado, pois não existe um único algoritmo para tal construção, este é o problema principal das transformações conformes. Diante desse contexto, pode se encontrar vários trabalhos científicos com diversas aplicações de transformações conformes, aqui vamos citar alguns que foram encontrados e não foram citados ao longo deste trabalho.

- Montanhano (2018) [17] que apresenta um estudo das transformações conformes, mais especificamente no caso de espaços semi-riemannianos planos, como espaços Euclidianos e Minkowskianos. Este estudo é feito primeiramente com a exposição das relações das transformações conformes com as transformações ortogonais generalizadas. Focando no caso bidimensional, identificou álgebra de Witt e sua única extensão central unidimensional não trivial, álgebra de Virasoro, como personificações das transformações conformes, e portanto faz um estudo destas álgebras e de suas representações.

- Zabadal, Beck e Garcia (2006) [27] que apresentam métodos híbridos para solução de problemas difusivos relativos à dispersão de poluentes em meio aquático. Estes métodos aplicam variáveis complexas a fim de executar mapeamentos sobre a equação diferencial a ser resolvida bem como sobre o domínio considerado. O mapeamento do domínio transforma regiões de formato complexo em regiões retangulares. Ambos mapeamentos são usados a fim de reduzir o tempo total requerido de processamento para solução de problemas difusivos não-homogêneos.

- Bourchtein e Oliveira (2006) [6] em que são construídas, de forma concreta, transformações conformes de algumas regiões duplamente conexas em anel. Para isso, são utilizadas as funções elementares e suas propriedades, os princípios básicos das transformações conformes e entre outros.

- Duran (2013) [11] estuda Transformações de Möbius arbitrárias por meio de transformações mais simples. Um estudo detalhado de inversão geométrica é realizado com o objetivo de estudar a inversão complexa. Apresenta o comportamento das Transformações de Möbius no infinito e são classificadas em elíptica, hiperbólica, loxodrômica e parabólica.

Este trabalho foi baseado nos livros clássicos da disciplina variáveis complexas que são oferecidos na grade curricular de alguns cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática. Estes apresentam teoria clássica, demonstrações, exemplos e aplicações na Matemática e na Física, Churchill (1975) [8], Ávila (2000) [1], Brown e Churchill (2015) [7], mas dos livros citados nenhum aborda a resolução de equação do terceiro grau usando transformação conforme e não mostra a importância que esse conteúdo tem para o ensino superior. Assim, a pesquisa teve como questões norteadoras as seguintes indagações: O que são transformações conformes e em que elas podem ser aplicadas e como?

Para realizar transformações conformes de algumas regiões mais complicadas em regiões canônicas, foram estudados vários assuntos de variáveis complexas, cuja maioria não está no currículo de alguns cursos de Licenciatura em Matemática, de algumas instituições de ensino. Para a resolução destes problemas são usadas as propriedades das funções elementares, números complexos, funções analíticas , rotação de tangentes, equação paramétrica, funções inversas e harmônicas, resíduos e entre outros.

O objetivo do presente trabalho é utilizar conhecimentos da Matemática para resolver uma aplicação e compreender determinado fenômeno por meio de diferentes pontos de vista. Bem como, estudar a teoria necessária para o entendimento das transformações conformes, desenvolver as demonstrações para prova de alguns teoremas importantes e compreender as várias formas de se aplicar as transformações conformes, além de apresentar aplicações tanto na Física como na Matemática na perspectiva da abordagem interdisciplinar.

Essa pesquisa é de caráter qualitativo, pois visa um aprofundamento do conteúdo, é de natureza básica, pois contribui para o avanço da ciência mas não tem uma aplicação prática e é exploratória, pois foi feita uma revisão bibliográfica de algumas obras para o estudo do conteúdo e desenvolvimento do trabalho. Para a revisão bibliográfica feita, além dos livros já citados, foi feita um busca em dois momentos: primeiro, usando a expressão TRANSFORMAÇÕES CONFORMES e, em um segundo momento, utilizando a expressão APLICAÇÕES DE TRANSFORMAÇÕES CONFORMES. Para tal, usamos os seguintes bancos de dados acadêmicos: Google, Google Academic, Google Books e Siello.

Esse trabalho se divide em quatro capítulos, no primeiro foi feito uma pesquisa e um estudo sobre o tema transformações conformes, em que utilizamos como instrumentos de estudo e pesquisa livros, artigos e a internet ampla, para assim obter todo conhecimento necessário para entender transformações conformes e em seguida fazer uma revisão teórica de vários conteúdos pertinentes ao objetivo deste trabalho. No capítulo seguinte estudamos transformações conformes e seus tipos. No terceiro apresentamos as aplicações das transformações em escoamento de fluídos, resolução de equações do terceiro grau e transformação de uma região em outra. Já no quarto capítulo apresentamos uma abordagem interdisciplinar e propomos uma sequência didática, afim de potencializar nossa contribuição com este trabalho e no último capítulo expomos as considerações finais. Dentro desse estudo será mostrado algumas definições e teoremas, respectivamente, que serão de bom uso no decorrer do estudo de transformações conformes, no plano complexo. Sabendo sempre que não há uma fórmula específica para transformações, cada qual apresenta sua singularidade e especificidade.

# 1.Revisão teórica

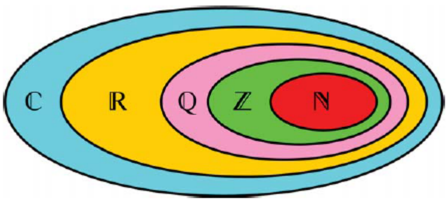
Este capítulo apresenta o arcabouço teórico necessário para o desenvolvimento desse trabalho. Todos as teorias apresentadas nesse capítulo terão como referências o livro Variáveis Complexas e suas Aplicações (Churchill, 1975)[8], o livro Variáveis Complexas e Aplicações (Brown e Churchill, 2015)[7], Variáveis Complexas e Aplicações (Ávila, 2000)[1], o livro da Coleção Conexões com a Matemática (Dante, 2016) [10], a dissertação Números Complexos e as Transformações de Möbius (Pereira, 2013)[26], Conceitos Topológicos no Plano Complexo (Toffoli, 2006) [24]e Introdução à História da Matemática (Mol, 2013)[18].

## 1.1.Números Complexos

Historicamente, os números complexos começaram a ser estudados graças à grande contribuição do matemático Girolamo Cardano (1501-1576) [20]. Esse matemático mostrou que mesmo tendo um termo negativo em uma raiz quadrada era possível obter uma solução para a equação do segundo grau: $x^2-10x+40=0$. Essa contribuição foi de grande importância, pois até então os matemáticos não acreditavam ser possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. A partir dos estudos de Girolamo Cardano, outros matemáticos estudaram sobre esse impasse na Matemática, obtendo uma formalização rigorosa com Friedrich Gauss (1777-1855).

O conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$) é o conjunto que possui maior cardinalidade, afinal ele contém todos os outros conjuntos numéricos, conforme figura1.1.

Figura 1.1: Diagrama de Venn (Conjunto Complexo)



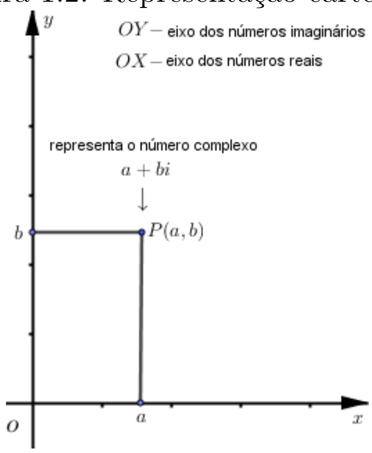

Fonte: Cunha, 2014

É necessário, pois, compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo elementos desse conjunto, assim como a representação geométrica dos números complexos. O primeiro a propor uma visualização dos complexos identificando-os como pontos do plano bidimensional foi o autodidata norueguês Caspar Wessel em 1797. Essa idéia foi redescoberta por Jean-Robert Argand, um contador suíço, que publicou um livro em 1860 sobre o assunto, e também pelo matemático alemão Karl

Friedrich Gauss. Como era impossível associar um ponto da reta real à raiz quadrada de um número negativo, a questão foi resolvida associando-se aos números imaginários pontos sobre uma reta perpendicular à reta real, passando pelo ponto zero, e dessa forma criando um sistema de coordenadas cartesianas.

Nesse sistema, os números reais são colocados sobre o eixo horizontal, denominado eixo real, e todos os números imaginários sobre a reta perpendicular à reta real, passando pelo zero da reta real horizontal, denominado de eixo imaginário. Portanto, não só os imaginários passam a ter uma representação gráfica, como as combinações possíveis de reais e imaginários, ou seja, os números complexos, são representados por pontos no plano definido pelos eixos real e imaginário, denominado plano complexo. O plano de Argand-Gauss, também denominado plano complexo, é uma representação geométrica do conjunto dos números complexos. Da mesma maneira que cada ponto da reta está associado a um número real, o plano complexo associa o ponto $(a, b)$ do plano ao número complexo $a + bi$. Esta associação conduz a duas formas de representação de um número complexo: a forma retangular ou cartesiana e a forma polar. A forma algébrica é ilustrada conforme figura 1.2 e representada por $z = a + bi$.

Figura 1.2: Representação cartesiana




Fonte: Elaboração própria

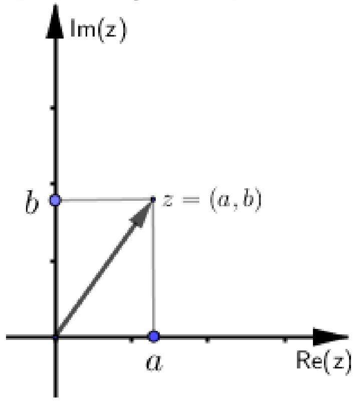
Outra maneira de definir um número complexo $z$ é expressa-lo como um par ordenado $(a, b)$ de números reais $a$ e $b$, tal que

$$z = (a, b)$$

Os números reais $a$ e $b$ são, respectivamente, a parte real e parte imaginária de $z$, sendo indicados por: $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$ e ilustrado na figura 1.3.

A unidade imaginária é o $i$, em que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$. A partir dessa unidade podemos classificar o número complexo $z$ em um número real, se e somente se, $Im(z) = 0$, em imaginário puro, se e somente se, $Re(z) = 0$ e $Im(z) \neq 0$ , e é nulo, se e somente se, $Re(z) = Im(z) = 0$. Assim, no conjunto dos complexos existe elemento

Figura 1.3: Representação da parte real e imaginária

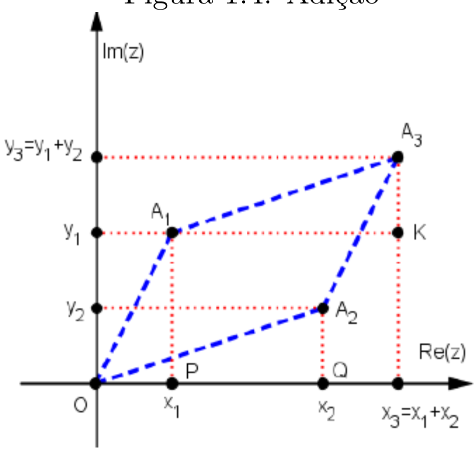



Fonte: Elaboração própria

nulo $(a, b) = (0, 0)$ e ainda o simétrico aditivo $(-a, -b)$. E como nos Reais, no conjunto dos números complexos podemos definir as operações de :

**Adição:** Sejam $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$, então $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) = A_3$, conforme figura1.4

Figura 1.4: Adição




Fonte: Santos, M. J. V. 2016

**Multiplicação:** Sejam $r = (x, y)$ e $z = (x_1, y_1)$, então $(x, y) \cdot (x_1, y_1) = (xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1) = r \cdot z$.

Outra característica dos complexos é que existe o seu conjugado, que é indicado por $\bar{z}$. Os números conjugados são verdadeiros aliados para a realização de operações de divisões com números complexos. A participação deles nos cálculos da divisão, a torna mais simples e permite uma melhor compreensão por parte do indivíduo. Para se obter o conjugado de um número complexo, troca-se o sinal de sua parte imaginária. Então, se $z = x + yi$, logo $\bar{z} = x - yi$. Assim, quando multiplicamos um número complexo por seu conjugado, o resultado será um número real. Outra operação importante é a divisão de números complexos, que depende do seu conjugado, a qual pode ser definida da seguinte forma:

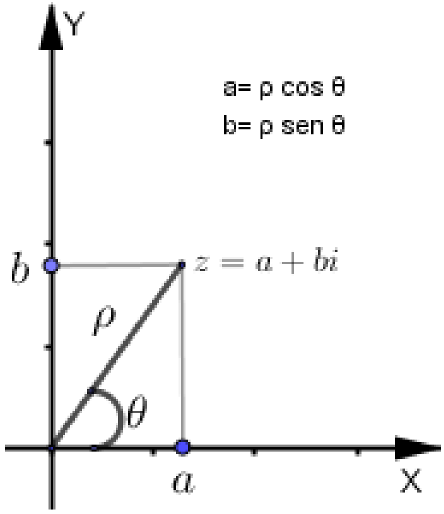
**Divisão:** Seja $z_1 = (x+yi)$ e $z_2 = (a+bi)$, então $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z_2}}{\bar{z_2}} = \frac{(x+yi)}{(a+bi)} \cdot \frac{(a-bi)}{(a-bi)} = \frac{xa-xbi+ayi+yb}{a^2+b^2}$

A forma trigonométrica ou polar é muito útil e prática nas operações de potenciação e radiciação nos $\mathbb{C}$, por isso a importância de se compreender bem essa representação. A forma polar de um número complexo é representada por:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

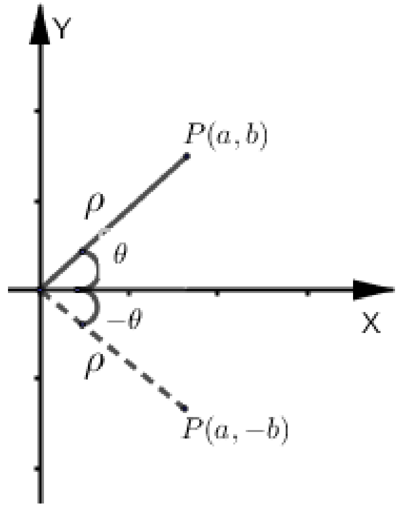
Em que $a = \rho cos(\theta)$ e $b = \rho sin(\theta)$, onde $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ com $\rho \geq 0$ . O ângulo $(\theta)$ de $z$ é chamado argumento de $z$, ou seja, $arg(z)$, e é determinado por meio da equação $\arctan(\frac{a}{b}) = \theta$. Observe que $\rho = |z|$, se $z$ for entendido como um vetor em $\mathbb{R}^2$. A figura 1.5 ilustra essa representação, em que o eixo $x$ representa também o eixo polar. Na forma polar, o conjugado de $z = \rho(cos(\theta) + isen(\theta))$ é $\bar{z} = \rho(cos(-\theta) + isen(-\theta))$, pois o cosseno é uma função par, em que $cos(-\theta) = cos(\theta)$ e a função seno é ímpar, em que $sen(-\theta) = -sen(\theta)$ e seu ângulo nada mais é do que uma reflexão do a fixo de $z$ na reta das abcissas, como mostra a figura 1.6.

Figura 1.5: Representação polar




Fonte: Elaboração própria

Figura 1.6: Conjugado do ângulo




Fonte: Elaboração própria

Veremos agora como realizar a potenciação de números complexos na forma polar, pois está fica mais prática utilizando a notação polar. Considere um número complexo qualquer escrito dessa forma $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, queremos calcular potencias de $z$ até $z^n$, com $n$ pertencente aos números naturais. Para esse cálculo utilizaremos a chamada fórmula de Moivre (ÁVILA, p. 11, 2000)[1], para potenciação de números complexos, representada da seguinte forma:

$$z^n = \rho^n \cdot (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Já o produto de um complexo $z_1$ por outro número complexo $z_2$, estará relacionado ao ângulo, pois corresponde a uma ampliação ou contração do vetor, seguido de uma rotação de ângulo igual ao argumento no sentido anti-horário em torno da origem do vetor obtido, conforme figura 1.7. O produto é efetuado da seguinte forma, considere $z_1$ e $z_2$ definidos da seguinte maneira:

$$z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$$

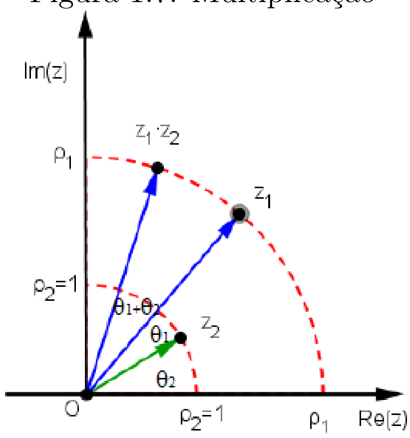
$$z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$$

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))) \cdot (\rho_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)))$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Observe que o produto de $z_1 \cdot z_2$ é um número complexo cujo módulo é o produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é a soma dos argumentos dos fatores.

Figura 1.7: Multiplicação




Fonte: Santos, M. J. V. 2016

Podemos também multiplicar um número real por um número complexo, nesse caso o argumento não se altera, o mesmo é a medida do ângulo formado entre o eixo real positivo no plano complexo e a reta que une $z$ com a origem do mesmo plano .

Outro conceito bastante importante é o de valor absoluto, que leva um número $z$ e seu inverso aditivo $-z$, a um mesmo número $W$, ou seja, $|z| = W$ e $|-z| = W$, que sempre será não negativo e é chamado de módulo, e calculado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Assim, chegamos na desigualdade triangular que afirma que se $a$ e $b$ são números reais, então $|a + b| \leq |a| + |b|$. A desigualdade triangular nos números reais é uma analogia ao caso da geometria plana onde diz que a medida de qualquer um dos lados de um triângulo é menor que a soma dos outros dois.

### 1.1.1.Regiões do Plano Complexo

Neste momento iremos definir algumas regiões complexas, necessárias para entender funções analíticas. Deste modo, uma circunferência no plano complexo centrada em $p$ é o lugar geométrico de todos os números complexos, que estão a uma distância fixa de $z$, denominada raio da circunferência. Se $z = a + bi = (a, b)$ é um ponto qualquer da circunferência e $p = x + iy = (x, y)$ é o centro da circunferência, a distância entre $z$ e $p$ é fixa, e normalmente denotada por $r$. A equação da circunferência toma a forma $|p - z| = r$ ou seja, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Assim apresentaremos alguns conceitos elementares sobre topologia no plano complexo os quais são similares aos da reta real.

**Disco aberto:** Seja $p$ um número complexo e $r$ um número real positivo e diferente de zero. Um disco aberto de centro em $p$ e raio $r$ é o conjunto de todos os números complexos $z$ tal que a distância de $z$ a $p$ seja menor do que $r$. Podemos denotar esta definição por:

$$|z - p| < r$$

**Disco fechado:** Seja $p$ um número complexo e $r$ um número real positivo e diferente de zero. Um disco fechado de centro em $p$ e raio $r$ é o conjunto de todos os números complexos $z$, tal que a distância de $z$ a $p$ seja menor ou igual a $r$. Denotamos isto por

$$|z - p| \leq r$$

**Vizinhança aberta:** Diz-se que $S$ é uma vizinhança aberta de um número complexo $p$ se, existe um disco aberto centrado em $p$ com um raio positivo $r$, inteiramente contido em $S$.

**Vizinhança fechada:** Diz-se que $S$ é uma vizinhança fechada de um número complexo $p$, se existe um disco fechado centrado em $p$ com um raio positivo $r$, inteiramente contido em $S$.

## 1.2.Função Complexa

Seja $D$ um subconjunto do plano complexo $C$. Uma função complexa é uma correspondência que associa a cada elemento $z \in D$ um único número $w = f(z) \in C$. A definição de ponto de acumulação que daremos agora é formalmente a mesma dos cursos de Cálculo e Análise e é de fundamental importância para a teoria do limite.

**Definição 1:** Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, diz-se que $a$ é um ponto de acumulação de $X$ quando todo intervalo aberto de centro $a$, isto é, todo intervalo da forma $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, com $\epsilon > 0$, contém uma infinidade de pontos de $X$. Após definir ponto de acumulação, podemos entender o que é um ponto isolado, pois um ponto $p$ é isolado, se não é ponto de acumulação de um conjunto. Isto significa, que é possível construir um disco aberto centrado em $p$, contendo apenas este ponto.

**Limite**

**Definição 2:** Seja $z_0$ um ponto de acumulação de um subconjunto D de C e $f : D \to C$ uma função complexa. O número complexo $L$ é o limite de $f$ quando $z$ tende a $z_0$, se dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um número positivo $\Delta > 0$ sendo $\Delta = \Delta(\epsilon, z_0)$ tal que se $z \in D$ com $0 < |z - z_0| < \Delta$, então:

$$|f(z) - L| < \epsilon,$$

Denotamos este limite por

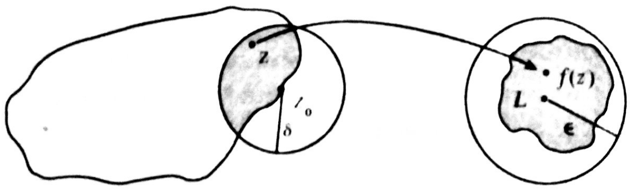
$$\lim_{z \to\ z_o} f(z) = L$$

Em outras palavras, a definição 2 afirma, que uma função $f = f(z)$ tem limite $L$ quando $z$ está se aproximando de $z_0$, se a distância entre $f(z)$ e $L$ pode ser tomado arbitrariamente pequena, desde que $z$ esteja suficientemente próximo de $z_0$. Note que, na definição não é exigido que a função esteja definida no ponto $z = z_0$ para que exista o limite

$$\lim_{z \to\ z_o} f(z)$$

A noção de limite de uma função em um ponto $z_0$ diz respeito ao comportamento da função nos pontos próximos a $z_0$ e não necessariamente no próprio $z_0$. Veja figura 1.8.

Figura 1.8: Limite de uma função complexa




Fonte: Ávila, 2000

**Exemplo 1:** A função $f(z) = \frac{z^2+1}{z-i}$ está definida para $z \neq i$, mas

$$\lim_{z \to\ i} \frac{z^2+1}{z-i} = 2i$$

Como para $z \neq i$ temos

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z-i} = \frac{(z+i) \cdot (z-i)}{z-i} = z + i$$

e $|f(z) - 2i| = |z + i - 2i| = |z - i|$, então para todo $\epsilon > 0$, obteremos que $0 < |z - i| < \epsilon$, implicando em $|f(z) - 2i| = |z - i| < \epsilon$ bastando tomar $\Delta = \epsilon$. Todas as propriedades dos limites de soma, produto, subtração e divisão que são utilizadas para funções nos $\mathbb{R}$, são também válidas para os limites de funções complexas.

**Continuidade**

Quando o ponto $z_0$ pertence ao domínio de $f$ e $L = f(z_0)$, dizemos que $f$ é contínua no ponto $z_0$ e escrevemos $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Veja que a função do exemplo 1 não é contínua em $I$, pois $f(z_0)$ não existe, par $z_0 = i$. Quando a função não é contínua, por que o limite da função em um dado ponto não existe, a descontinuidade neste ponto é dita essencial. E ainda, com base no exemplo 1, a função possui uma descontinuidade em $z_0 = i$, pois o limite existe, mas a função não está definida para $z = i$. Neste caso, definimos uma nova função $F$, tal que $F(z) = f(z)$ para $z \neq i$ e $F(i) = 2i$. Está nova função é contínua em todos os pontos do plano complexo. Assim, uma função é contínua, quando é contínua em todos os pontos do seu domínio.

**Derivada**

Dizemos que $f$ é derivável em $z_0$, se o limite 1.1 existe

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \tag{1.1}$$

Ele define uma nova função de $z$, a derivada ou função derivada da função $f$ no ponto $z_0$, denotada por $f'$. Assim

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

A função complexa é derivável em todos os pontos, se tiver derivada em cada um dos pontos do seu domínio. Todas as regras familiares de derivação, como derivada de uma constante, derivada da soma (diferença), regra da potência, regra do produto, regra do quociente e regra da cadeia são válidas para a derivação em funções complexas.

**Integral**

Seja $F(t) = U(t) + iV(t)$ uma função da variável real $t$ num intervalo $[a, b]$. Sua integral é definida em termos das integrais das funções reais $U$ e $V$, mediante a expressão

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt. \tag{1.2}$$

Sendo que, essa integral existe, quando $F$ é primitiva. Desta definição seguem algumas propriedades, que podem ser encontradas na página 80 do livro variáveis complexas e aplicações (Ávila, 2000).

# 1.3.Funções Analíticas

Conforme Churchill (1975), quando $z$ designa qualquer um dos números de um conjunto $S$ de números complexos, chamamos $z$ de variável complexa . Se para cada valor de $z$ em $S$, o valor de uma variável complexa $w$ é determinado, então $w$ é uma função da variável complexa $z$ no conjunto $S$:

$$w = f(z)$$

Temos assim uma função de variável complexa, em que o conjunto $S$ é usualmente um domínio. Nesse caso ele se diz domínio de definição da função $w$. Os valores de $f(z)$, correspondentes a todos os $z$ em $S$, que constituem um outro conjunto $R$ de números complexos, conhecido como imagem da função $w$.

Assim, uma função $f : S \to R$ é dita analítica num ponto, quando ela e suas derivadas são definidas para um dado valor de $S$ ou um dado ponto no plano $S$. Quando a função $f(z)$ ou suas derivadas tendem ao infinito para um dado valor de $S$, diz-se que a função não é analítica para aquele ponto. Formalmente uma função $f$ é analítica num domínio do plano-$z$ (plano do domínio), se ela é analítica em todo ponto desse domínio.

Segundo Cunha (2014), outra definição de função analítica é dada a seguir:

**Definição 3:** Uma função $f$ é analítica num ponto $z_0$ se $f$ for diferenciável em todos os pontos de alguma vizinhança de $z_0$, isto é, dizemos que uma função $f(z)$ é analítica em $z_0$, se existir $\Delta > 0$ tal que $f'(z)$ exista para todo z com$|z - z_0| < \Delta$.

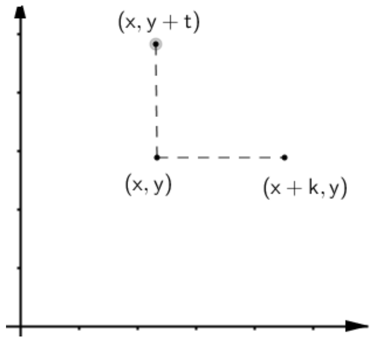
**Equações de Cauchy-Riemann**

Seja $f(z) = u(z) + iv(z)$ uma função derivável no ponto $z = x + iy$. Então, o quociente

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

tem limite $f'(z)$ com $\Delta z \to 0$, independentemente do modo como $\Delta z$ tende a zero. Em Particular, podemos fazer $\Delta z$ tender a zero por valores reais $\Delta z = k$ e, por valores imaginários $\Delta z = it$, conforme figura 1.9.

Figura 1.9: Riemann




Fonte: Elaboração própria

Assim, obtemos, respectivamente,

$$f'(z) = \lim_{k\to 0} \frac{u(x+k,y) - u(x,y) + i[v(x+k,y) - v(x,y)]}{k}$$

e

$$f'(z) = \lim_{t\to 0} \frac{u(x,y+t) - u(x,y) + i[v(x,y+t) - v(x,y)]}{it}$$

A existência desses limites implica a existência, separadamente, dos limites das partes reais e das partes imaginárias das expressões sob limites, isto é,

$$f'(z) = \lim_{k\to 0} \frac{u(x+k,y) - u(x,y)}{k} + i \lim_{k\to 0} \frac{v(x+k,y) - v(x,y)}{k}$$

e

$$f'(z) = \lim_{t\to 0} \frac{u(x,y+t) - u(x,y)}{k} - i \lim_{t\to 0} \frac{v(x,y+t) - v(x,y)}{it}.$$

Em consequência, as funções $u$ e $v$ possuem derivadas parciais no ponto $(x, y)$, e valem nesse ponto as seguintes condições:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

e

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Igualando as partes reais e imaginárias, obtemos daqui as chamadas equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

A análise acima mostra que essas equações são uma condição necessária para a existência da derivada de uma função $f$, mas elas não são suficientes para garantir a existência dessa derivada.

**Condição necessária e suficiente**

Como acabamos de ver as equações de Cauchy-Riemann são uma condição necessária, porém não suficiente, para que uma função $f$ tenha derivada. No entanto, se a ela juntarmos a condição de que as derivadas de $u$ e $v$ sejam contínuas numa região $R$, obtemos uma caracterização muito importante das funções analíticas em termos dessas equações. É o que diz o teorema 1.

**Teorema 1:** Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções reais com derivadas parciais contínuas numa região $R$. Então, uma condição necessária e suficiente para que a função $f(z) =$

$u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica em $R$ é que as equações de Cauchy-Riemann estejam aí satisfeitas.

**Interpretação geométrica**

As equações de Cauchy-Riemann têm um significado geométrico interessante, expresso no teorema 2, apresentado a seguir:

**Teorema 2:** Se $f = u + iv$ é analítica numa região $R$, então as curvas das famílias

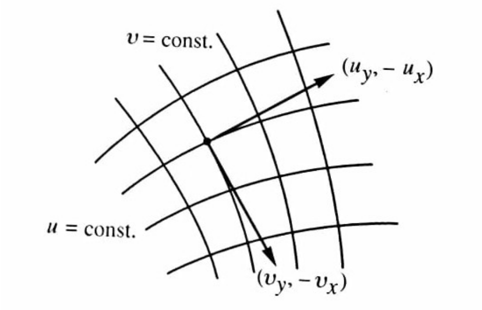
$$u(x, y) = const.$$

e

$$v(x, y) = const.$$

se cruzam em um ângulo reto em todo ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ onde $f'(z_0) \neq 0$, veja figura 1.10.

Figura 1.10: Interpretação geometrica das equações de CR




Fonte: Ávila, 2000

Ao demonstrar esse teorema obtemos um resultado que se refere a famílias de curvas do plano-$z$ (plano do domínio), que são levadas pela função $f(z)$ nas famílias das retas do plano-$w$ (plano do contra-domínio ou imagem), paralelas aos eixo dos $v$ e ao eixo dos $u$ respectivamente. Um resultado análogo é verdadeiro para famílias de curvas do plano-$w$, que são imagens das famílias de retas coordenadas do plano-$z$, isto é, as famílias de retas paralelas ao eixo dos $x$ e ao eixo dos $y$ respectivamente. Toda a demonstração desse teorema pode ser encontrada nas páginas 59-60 do livro Variáveis Complexas e Aplicações (Ávila, 2000).

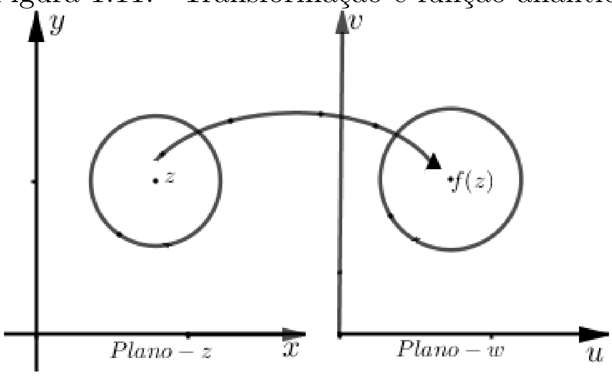
**Transformação**

Propriedades de uma função real $f(x)$, são demonstradas geometricamente pelo gráfico da função. A equação $y = f(x)$ estabelece uma correspondência entre pontos $x$ no eixo-$x$ e pontos $y$ no eixo-$y$, isto é, ela leva pontos $x$ em pontos $y$. A descrição gráfica melhora quando se leva cada ponto $x$ num ponto $(x, y)$ do plano-$xy$, ponto este que se situa à distância orientada $y$ acima ou abaixo do ponto $x$. A curva assim obtida é o gráfico de $f(x)$. Da mesma maneira, usamos uma superfície para exibir graficamente uma função real $f(x, y)$ das variáveis reais $x$ e $y$.

Entretanto, quando $w = f(z)$ e as variáveis $w$ e $z$ são complexas, não dispomos de tal representação gráfica da função $f$, uma vez que precisamos de um plano para a representação de cada uma das variáveis. Algumas informações sobre a função podem, entretanto, ser obtidas graficamente, exibindo-se conjuntos de pontos correspondentes $z$ e $w$. É mais simples, em geral, desenhar dois planos complexos separadamente para variáveis $z$ e $w$, onde para cada ponto $(x, y)$ no plano-$z$, no domínio de definição de $f$, existe um ponto $(u, v)$ no plano-$w$, onde $w = u + iv$.

A correspondência entre pontos nos dois planos se diz aplicação ou transformação de pontos no plano-$z$ em pontos do plano-$w$ pela função $f$. Pontos $w$ são, então, imagens de pontos $z$, conforme figura 1.11. Este termo se aplica também entre conjuntos como, por exemplo, imagem de uma curva, de uma região, etc. Para se empregar certos termos geométricos tais como translação, rotação e reflexão, é conveniente, às vezes, considerar a aplicação como transformação num só plano.

Figura 1.11: Transformação e função analítica




Fonte: Elaboração própria

# 1.4.Funções Harmônicas

Uma função harmônica é qualquer solução não trivial da equação de Laplace, cujas derivadas primeira e segunda são contínuas. Uma outra definição, mais formal, é apresentada a seguir:

**Definição 4:** Seja $f = u + iv$ analítica num domínio do plano-$z$. Sendo $u$ e $v$ funções reais de $(x, y)$. Então, em todo ponto do domínio

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \tag{1.4}$$

desde que estas segundas derivadas existam. Em seguida esta escrito a equação diferencial de Laplace em duas variáveis independentes $x$ e $y$. Assim, quando a função é analítica, suas derivadas parciais de segunda ordem existem e são contínuas, o que satisfaz à equação de Laplace e é chamada de função harmônica.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.5}$$

**Exemplo 2:** A função $u = y^3 - 3x^2y$ é harmônica?
É fácil ver, pela substituição direta na equação de Laplace, que a função é harmônica. Para verificar e achar $v$, notemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy,$$

e daí, usando uma das equações de Cauchy-Riemann, podemos concluir que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -6xy.$$

Integrando está equação em relação a $y$, com $x$ fixo, temos que

$$v = -3xy^2 + \phi(x),$$

onde $\phi(x)$ é, no momento, uma função arbitrária de $x$. Mas, como $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, então $\phi$ deve ser tal que

$$-3y^2 + \phi(x) = -3y^2 + 3x^2.$$

Portanto $\phi'(x) = 3x^2$ e $\phi(x) = x^3 + c$, onde $c$ é uma constante arbitrária. Assim, a conjugada harmônica da função $u = y^3 - 3x^2y$ é

$$v = -3xy^2 + x^3 + c.$$

# 1.5.Funções elementares

Considera-se nesta seção algumas das funções elementares estudadas no Cálculo, tais como: a função logarítmica, a função exponencial e a função linear, além de que foi definido funções complexas correspondentes. Não se pretende um estudo exaustivo do assunto, busca-se desenvolver ideias muito úteis e necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

**1.4.1 Função exponencial**

**Definição 5:** Definimos a função exponencial $w = e^z$, em termos de funções reais, pela equação

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (cos(y) + isen(y))$$

em que usando a fórmula de Euler

$$e^{iy} = (cos(y) + isen(y))$$

onde $z = x + iy$ e o número $y$ é usado como medida em radiano do ângulo na definição dos $cos(y)$ e $sen(y)$. Desta maneira, a mesma definição também pode ser escrita na forma polar, da seguinte maneira $e^z = \rho e^{i\phi}$, onde o $\rho = e^x$ e o $\phi = y$, fica claro que $|e^z| = e^x$ e que o $arg(e^z) = y + 2n\pi$, com $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

**Exemplo 3:** Para encontrar os números $z = x + iy$ tais que

$$e^z = 1 + \sqrt{3}i, \tag{1.6}$$

em seguida calculamos o módulo do número complexo $e^z$, que é igual a 2, e ainda escrevemos o mesmo número complexo na forma exponencial, usando a fórmula de Euler, assim escrevemos (1.6) como

$$e^x e^{iy} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Então, a respeito da igualdade de dois números complexos em forma exponencial, obtemos

$$e^x = 2 \quad e \quad y = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad (n =, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Como $ln(e^x) = x$, segue que

$$x = ln(2) \quad e \quad y = \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad (n =, \pm 1, \pm 2, ...);$$

e, portanto,

$$z = ln(2) + \left(2n + \frac{1}{3}\right)\pi i \quad (n =, \pm 1, \pm 2, ...).$$

### 1.4.2 Função Logarítmica

O logaritmo pode aparecer em qualquer outra função, pode estar no quociente, no expoente de uma potência, no radicando de uma raiz, ou até mesmo no logaritmando de um outro logaritmo. As propriedades (soma, subtração, multiplicação e mudança de base) são fundamentais para o cálculo de logaritmos e todas são usadas no estudo das funções logarítmicas complexas.

**Definição 6:** Definimos a função $log$ de uma variável complexa $z$, pela equação

$$\log(z) = \log(re^{i\theta}) = log(r) + i\theta \quad se \quad r > 0,$$

em que $z = re^{i\theta}$ e o argumento $\theta$ é medido em radianos. A definição é natural, no sentido de que a mesma é escrita usando formalmente as propriedades dos logaritmos, já estudadas nos reais e que valem também para os complexos.

**Exemplo 4:** Se $z = -1 - \sqrt{3}i$, então $r = 2$ e o argumento é igual a $\frac{-2\pi}{3}$. Logo, $log(-1 - \sqrt{3}i) = ln(2) + i\left(\frac{-2\pi}{3} + 2n\pi\right) = ln(2) + 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\pi i$, com $(n =, \pm 1, \pm 2, ...)$.

Outra informação importante que deve-se saber quando trabalha-se com logaritmos nos complexos, é sobre ramo de um logaritmo, que é denotado como $log_k(z)$ e ainda

$$log_k(z) = log_k(r) + i\theta, \qquad 2k\pi \leq \theta < 2(k+1)\pi.$$

Costuma-se dizer que o logaritmo fica "especificado"com um determinado valor de $k$. O ponto $z = 0$ é chamado ponto de ramificação de $log_k(z)$, justamente porque, quando um ponto $z$ descreve um círculo centrado na origem e volta ao ponto inicial, a função $log_k(z)$ retorna aumentada de $2\pi i$, isto é, passa de um de seus ramos ao ramo seguinte.

### 1.4.3 Funções lineares

A função linear é aquela que possui a lei de formação do tipo $f(x) = ax + b$, com $a$ real e diferente de zero. Toda função que possui valor igual a zero para o coeficiente $b$ também é classificada como função linear e, por consequência, é também uma função afim. Mas, quando trabalhamos com plano complexo todos os valores serão números complexos. A função é definida como $w(z) = z + c$, onde $c$ é uma contante complexa. Isto, é se

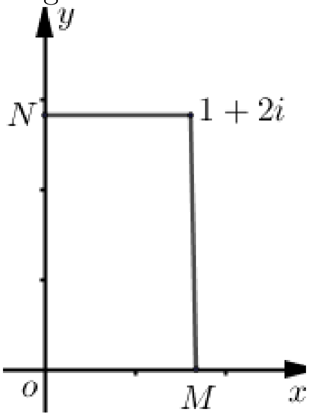
$$z = x + iy \qquad e \qquad c = c_1 + ic_2$$

então a imagem de cada ponto $(x, y)$ no plano-z é o ponto $(x + c_1, y + c_2)$ no plano-$w$. Visto que todo ponto numa região do plano-$z$ é levado no plano-$w$, desta mesma maneira, a imagem da região é simplesmente a translação da região. As duas regiões têm a mesma forma, o mesmo tamanho e a mesma orientação. Como exemplo, a função

$$w = (1 + i)z + 2 - i$$

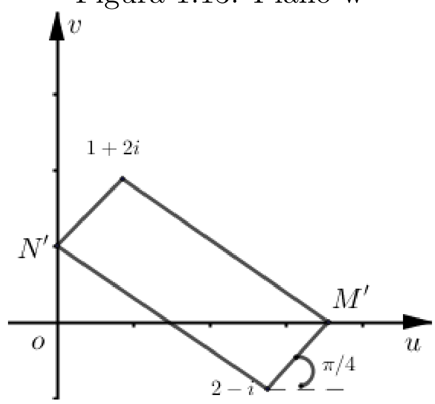
transforma a região retangular no plano-$z$ na região retangular no plano-$w$, conforme figuras 1.12 e 1.13.

Figura 1.12: Plano-z




Fonte: Elaboração própria

Figura 1.13: Plano-w




Fonte: Elaboração própria

Isto é evidente geometricamente, visto que $arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ e $|1+i| = \sqrt{2}$.

# 1.6. Resíduos

Se existe alguma vizinhança de um ponto singular $z_0$ de uma função $f$, onde $f$ é analítica, exceto no próprio ponto $z_0$, então $z_0$, se diz ponto singular isolado de $f$. Em que, ponto singular ou singularidade de $f$, é um ponto onde uma função $f$ não é analítica.
**Exemplo 5:** A função $\frac{1}{z}$ é analítica , exceto em $z = 0$, logo temos que a origem é um ponto singular isolado desta função. Assim, toda função tem um resíduo em cada um dos seus pontos singulares isolados, ou seja, se tem ponto singular tem resíduo.

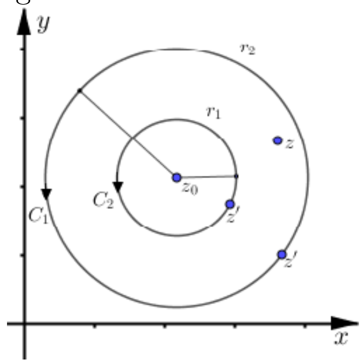
Veremos a teoria sobre a Série de Laurent, um dos instrumentos mais importantes no tratamento de funções analíticas, pois toda função analítica pode ser representada por uma série de potência.

**Séries de Laurent:** $z'$ denota pontos arbitrários nos círculos $C_1$ e $C_2$ concêntricos:

$$|z' - z_0| = r_1 \qquad e \qquad |z' - z_0| = r_2$$

com centro num ponto $z_0$, onde $r_1 < r_2$, conforme figura 1.14.

Figura 1.14: Série de Laurent




Fonte: Elaboração própria

**Teorema 3:** Se $f$ é analítica sobre $C_1$ e $C_2$ e na região entre esses dois círculos, então, em cada ponto $z$ entre os círculos, $f(z)$ é representada por uma série convergente de potências positivas e negativas de $(z - z_0)$,

$$f(z) = \sum_{\infty}^{n=0} a_n(z - z_0)^n + \sum_{\infty}^{n=1} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{1.7}$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z')dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2...), \tag{1.8}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z')dz'}{(z' - z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2...), \tag{1.9}$$

sendo cada integral calculada no sentido anti-horário.

A série em (1.6) é chamada de série de Laurent. No caso em que $f$ é analítica no interior de $C_1$ e também sobre $C_1$, exceto no próprio ponto $z_0$, o raio $r_2$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno. O desenvolvimento (1.6) é válido, então, quando $0 < |z - z_0| < r_1$. A demonstração desse teorema pode ser encontrada no livro variáveis complexas e suas aplicações (Churchill, 1975), nas páginas 126, 127 e 129. Toda a função tem um resíduo em cada um dos seus pontos singulares isolados, já que a Série de Laurent em torno do ponto, representa a função numa vizinhança do ponto, exceto no próprio ponto.
**Teorema 4 (do resíduo):** Se uma função tem apenas um número finito de pontos singulares num domínio, então esses pontos singulares são necessariamente isolados.

# 1.7.Considerações

Concluímos este capítulo com o estudo de vários conceitos, definições e operações importantes dos números complexos, das funções analíticas, funções harmônicas e funções elementares, além do estudo de regiões no plano complexo, resíduos e da série de Laurent. A partir dos tópicos estudados, até este momento, adquirimos o conhecimento necessário para entender transformações conformes. No próximo capítulo, estudaremos sua definição formal e alguns tipos.

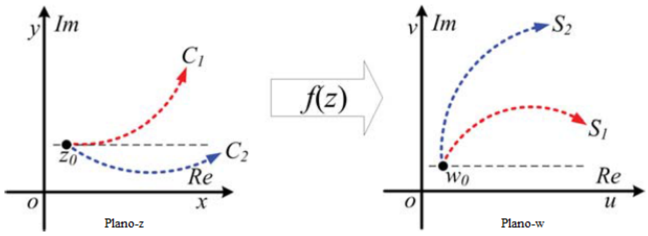
# 2.Transformações Conformes

Com base no conhecimento adquirido no capítulo anterior, para construir este teremos como referências para todas as teorias estudadas neste capítulo, as notas de aula (Alencastre, 2016 )[4][3], Conceitos Topológicos no Plano Complexo (Toffoli, 2006)[24], dissertações de mestrado (Cunha, 2014)[9] e (Pereira, 2013)[26], livro Variáveis Complexas e Aplicações (Brown e Churchill, 2015)[7]. Neste capítulo, apresenta-se conceitos, algumas propriedades e exemplos de transformações conformes. Discutem-se, primeiramente, alguns aspectos importantes no estudo das transformações com objetivo de tornar claro os conceitos. Em seguida, o contexto histórico do desenvolvimento dessas transformações desde o âmbito Matemático até o Físico.

As transformações conformes no plano complexo, além de configurarem um campo à parte da Matemática, possuem varias utilidades e aplicações tanto na Matemática quanto na Física, apresenta-se em vários tipos e constitui basicamente em transformar o domínio em que o problema é apresentado em outro domínio mais simples, tornando a resolução de problemas mais fácil e por meio de técnicas que se baseiam nas propriedades da função analítica. A seguir, mostra-se a orientação dos ângulos e a definição formal, respectivamente.

Seja $C_1$ e $C_2$ duas curvas suaves no domínio de $f(z)$ que se cruzam em $z_0$, cujas as imagens no plano-$w$ são representadas por $S_1$ e $S_2$, respectivamente. Assim, se $w_0 = f(z_0)$, as curvas $S_1$ e $S_2$ se cruzam em $w_0$, conforme Figura 2.1.

Figura 2.1: Ângulos orientados no sentido positivo




Fonte: Cunha, 2014

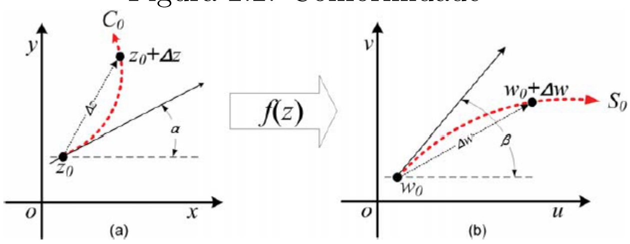
Considere duas curvas $C_1$ e $C_2$ que se encontram em $z_0$. Sem perda de generalidade podemos considerar $z_0 = 0$. Uma funcâo $f(z)$ leva estas duas curvas em outras duas curvas, e podemos supor sem perda de generalidade que $f(z_0) = 0$. O ângulo $\theta$ entre as curvas $C_1$ e $C_2$ não altera se a transformação é conforme.

**Definição 7:** A transformação $w = f(z)$ é conforme num domínio $D \subset \mathbb{C}$ se o ângulo entre $C_1$ e $C_2$ em $z_0$, for igual ao ângulo entre $S_1$ e $S_2$ em $v_0$, em valor absoluto e sentido, para todos os pontos $z_0$ em $D$.

**Teorema 5:** Se $f(z)$ é analítica e $f'(z) \neq 0$ num domínio $D$, então a transformação $w = f(z)$ é conforme em $D$.

**Demonstração:** A transformação que preserva os valores absolutos dos ângulos orientados, mas não necessariamente os sentidos, é denominada isogonal (FERNANDES e BERNARDES, 2006)[12]. Observe o ponto $z_0 + \Delta z$ em $C_0$ no sentido positivo a partir de $z_0$, o limite do argumento de $\Delta z$ quando $\Delta z \longrightarrow 0$ é o ângulo de inclinação $\alpha$ da reta tangente a curva $C_0$ no ponto, como representada na figura 2.2($a$). Se $w_0 = f(z_0)$ e se $w_0 + \Delta w$ em $S_0$ no sentido positivo a partir de $w_0$ é a imagem de $z_0 + \Delta z$, então o argumento $\Delta w$ tende para o ângulo de inclinação $\beta$ da reta tangente a curva $S_0$ no ponto $w_0$, como representado na figura 2.2($b$).

Figura 2.2: Conformidade




Fonte: Cunha, 2014

Temos que a derivada $f'(z_0)$ é definida por

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \tag{2.1}$$

onde $\delta w = f(z_0 + \delta z) - f(z_0)$. Tem-se que a tangente à curva $C_0$ em $z_0$ gira um angulo $\theta_0$ sob a transformação $w = f(z)$. E sendo $\theta_0$ um argumento $f'(z_0)$, então o cálculo do limite do argumento de $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ é

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left[ arg \left( \frac{\Delta w}{\Delta z} \right)_{z=z_0} \right] = arg \left[ \lim_{\Delta z \to 0} \left( \frac{\Delta w}{\Delta z} \right)_{z=z_0} \right] \tag{2.2}$$

$$= arg f'(z)|_{z=z_0} = \theta_0. \tag{2.3}$$

Sendo $w_0 + \Delta w$ a imagem de $z_0 + \Delta z$, então o valor do argumento de $\Delta w$ é dado por

$$arg\Delta w = arg\Delta z + arg \left( \frac{\Delta w}{\Delta z} \right). \tag{2.4}$$

Quando $\Delta z \longrightarrow 0$, o $arg\Delta z \longrightarrow \alpha$ e o $arg\Delta w \longrightarrow \beta$. Então

$$\beta = \alpha + arg \left( \frac{\Delta w}{\Delta z} \right), \tag{2.5}$$

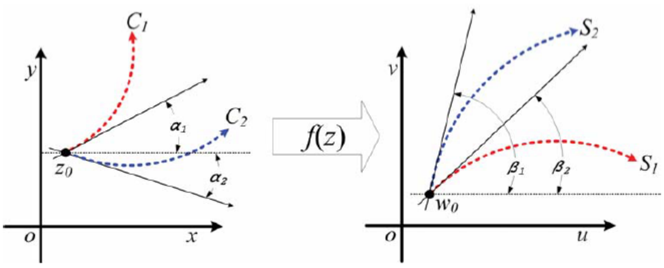
assim em 2.2 temos,

$$\beta = \alpha + arg|f'(z_0)|, \tag{2.6}$$

$$\beta = \alpha + \theta_0. \tag{2.7}$$

O valor encontrado no cálculo do limite do argumento de $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ em (2.2) somente é válido para a transformação $w = f(z)$, desde que $f$ seja analítica em $z_0$ e $f'(z) \neq 0$. Como o ângulo $\theta_0$ é encontrado pela função transformadora $f$ e pelo ponto $z_0$, ele é o mesmo para todas as curvas passando por $z_0$. Sendo as curvas $C_1$ e $C_2$ que se cruzam no ponto $z_0$ do plano complexo $z$, com $\alpha_1$ e $\alpha_2$ os ângulos de inclinação das curvas $C_1$ e $C_2$, respectivamente, em $z_0$. Através da transformação $w = f(z)$, obtém-se as curvas $S_1$ e $S_2$ imagens de $C_1$ e $C_2$, respectivamente, no plano-$w$, interceptando em $w_0 = f(z_0)$. Os ângulos de inclinação das curvas $S_1$ e $S_2$ em $w_0$ são $\beta_1$ e $\beta_2$, respectivamente, como mostra a figura 2.3. Da equação e (2.6) tem-se que $\beta_1 = \alpha_1 + \theta_0$ e $\beta_2 = \alpha_2 + \theta_0$. Desta forma tem-se

Figura 2.3: Preservação dos Ângulos



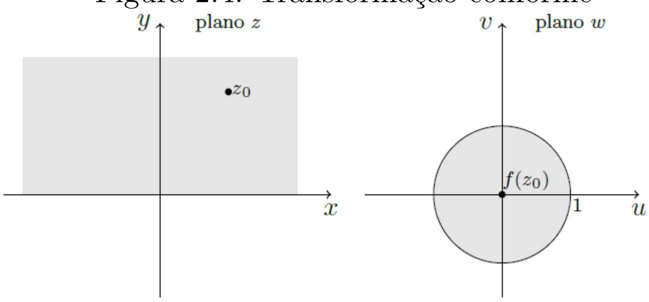

Fonte: Cunha, 2014

$$\beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2. \tag{2.8}$$

Portanto, o ângulo entre $C_1$ e $C_2$ é igual ao ângulo entre $S_1$ e $S_2$, como na figura 2.3, o que completa a demonstração.

**Exemplo 6:** Mostraremos que a transformação $w = f(z)$ onde $f(z) = e^{\theta_0}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$, $z_0$ é um ponto do semiplano superior e $\theta_0 \in \mathbb{R}$, transforma o semiplano superior no plano-$z$ no disco unitário no plano-$w$, conforme figura 2.4. Seja $z = x + yi$, $z_0 = x_0 + y_0 i$ e

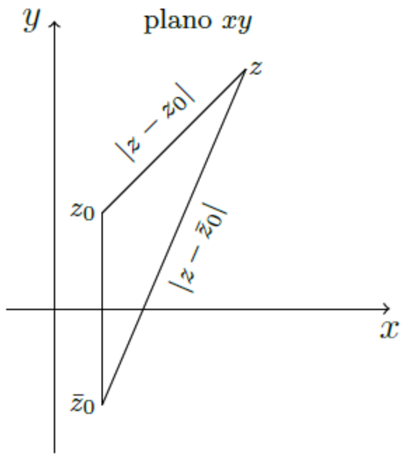
Figura 2.4: Transformação conforme




Fonte: Alencastre, 2016 (a)

$\bar{z}_0 = x_0 - y_0 i$, então $z - z_0 = (x - x_0) + (y - y_0)i \Rightarrow |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ e ainda $z - \bar{z}_0 = (x - x_0) + (y + y_0)i \Rightarrow |z - \bar{z}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}$. Observe que se $z$ pertence ao semiplano superior $(y \geq 0)$ temos $|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0|$ ocorrendo a igualdade se $z$ pertence ao eixo real, veja a ilustração geométrica no desenho da figura (2.5).

Figura 2.5: Transformação




Fonte: Alencastre, 2016 (a)

Assim

$$\begin{aligned} |w| &= \left| e^{\theta_0} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| \\ &= |e^{\theta_0}| \frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

pois, considerando $|e^{\theta_0}| = 1$ e $|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0|$. Logo $f(z) = w \leq 1$, o que nos leva a um círculo unitário em que $f(z_0) = 0$ e que o eixo real é mapeado na borda do disco unitário.

# 2.1. Transformações por Funções elementares

Como as funções elementares citadas no capítulo 1 são analíticas, as transformações discutidas aqui são conformes, exceto nos seus pontos singulares.

**Transformação linear**

A partir das funções lineares conseguimos transformar uma região em outra. Essa transformação $w = Cz$ em que C é uma constante complexa não nula e $z \neq 0$. Pode ser escrita na forma exponencial, escrevendo $z = r(cos(\theta) + isen(\theta))$ e $C = a(cos(\alpha) + isen(\alpha))$ de onde obtemos:

$$C = a\, e^{(i\alpha)} \qquad e \qquad z = r\, e^{(i\theta)}. \tag{2.9}$$

Logo,

$$w = (ar)\, e^{[i(\alpha + \theta)]} \tag{2.10}$$

Assim, essa transformação leva todo ponto numa região do plano-$z$ no plano-$w$, em que ambas as regiões tem a mesma forma, o mesmo tamanho e a mesma orientação.

**Transformação pela função exponencial**

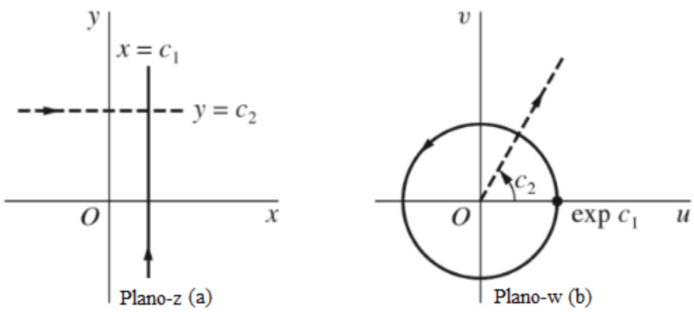
Sabemos que a transformação $w = e^z$ pode ser escrita como $w = e^x \cdot e^{iy}$, em que $z = x + iy$. Assim, se $w = \rho e^{i\phi}$, então

$$\rho = e^x \;\; e \;\; \phi = y$$

A imagem de um ponto $z = (c_1, y)$ arbitrário de uma reta vertical $x = c_1$ tem como coordenadas polares $\rho = e^{c_1}$ e $\phi = y$ no plano-$w$, veja figura 2.6. Essa imagem percorre o círculo mostrado na figura (b) no sentido anti-horário, à medida que o ponto $z$ percorre a a reta para cima. A imagem da reta $x = c_1$ é o círculo todo, e cada ponto do círculo é imagem de um número infinito de pontos ao longo dessa reta, espaçados a cada $2\pi$ unidades.

A função exponencial define uma bijeção de uma reta horizontal $y = c_2$ sobre o ângulo $\phi = c_2$. Isso é facilmente percebido na figura 2.6 a seguir:

Figura 2.6: Transformação Exponencial




Fonte: Brown e Churchill, 2015

A medida que o ponto $z$ percorre toda a reta $x = c_1$ da esquerda para direita, sua imagem se afasta da origem ao longo do raio. Deste modo, os segmentos verticais e horizontais são levados em porções de círculos e raios, respectivamente, e as imagens de várias regiões são facilmente obtidas a partir dessa transformação.

**Transformação pela função logarítmica**

Qualquer ramo do logaritmo é uma função injetiva, definida em todo plano-$z$, exceto $z = 0$, e tendo como imagem toda uma faixa horizontal do plano-$w$ e a totalidade dos ramos, cobre todo o plano-$w$.

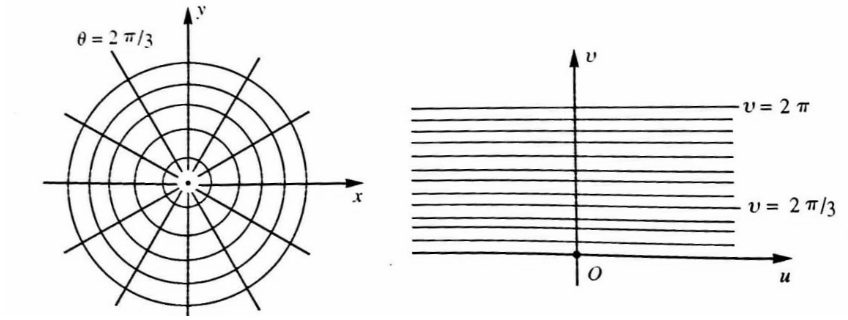
$$z = re^{i\theta}, w = u + iv,$$

e

$$w = log(z) = log(r) + i\theta.$$

Os raios $\theta =$ const. do plano-$z$, que vão nas retas horizontais $v =$ const. do plano-$w$, e os círculos $r =$ const. são levados nas retas verticais $u =$ const. Note que a ortogonalidade das curvas $u(x, y) =$ const. e $v(x, y) =$ const. era de se esperar, de acordo com a interpretação geométrica das equações de Cauchy-Riemann (p. 19).

Figura 2.7: Transformação logaritmíca




Fonte: Ávila, 2000

O ramo principal leva o plano complexo $z \neq 0$ na faixa $0 \leq v < 2\pi$ do plano-$w$. E, em geral, o ramo $k$-ésimo leva o plano $z \neq 0$ na faixa $2k\pi \leq v < 2(k+1)\pi$ do plano-$w$. Assim, todo ramo do logaritmo é uma função injetiva, definida em todo o plano, exceto em $z = 0$, e tendo como imagem uma faixa horizontal do plano-$w$. A função e exponencial e a logarítmica são funções inversas uma da outra, desde que o domínio da exponencial seja a faixa horizontal de largura $2\pi$ que é imagem do logaritmo.

# 2.2. Transformações Harmônicas

Dentro da Matemática existe um problema muito importante, que é o de encontrar uma função que seja harmônica em um domínio especifico e que satisfaça condições prescritas neste domínio. Aqui podem ser prescritos tanto os valores da função ao longo da fronteira como os valores da derivada da função ao longo da fronteira, em que recaímos em dois problemas o de Dirichlet e o de Neumann, respectivamente. Esses são problemas de contorno nas equações diferenciais de derivadas parciais bem antigos. Cada função analítica fornece um par de função harmônicas, e uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é inteira, se ela é derivável em todo ponto $z \in \mathbb{C}$, isto é, se $f$ for analítica em todo o plano complexo.

Como a função $e^{(iz)}$ por exemplo, é inteira, as suas partes são harmônicas em todos os pontos, pois satisfaz a equação de Laplace. Apresentaremos um argumento bastante importante na resolução desses problemas. Seja $H$ uma função harmônica qualquer das variáveis independentes $x$ e $y$. Vamos introduzir novas variáveis independentes $u$ e $v$, tal que a variável complexa $z = x + iy$ seja uma função analítica de $w = u + iv$ , ou seja,

$$z = f(w).$$

Para a função harmônica dada $H(x, y)$, existe uma função harmônica conjugada $G(x, y)$, em que $H + iG$ é uma função analítica de $z$, mas $z$ é uma função analítica de $w$ e portanto $H + iG$ também é uma função analítica de $w$ e assim, $H$ é uma função harmônica de $u$ e $v$. O seguinte teorema enuncia esse resultado.

**Teorema 6:** Toda função harmônica de $x$ e $y$ se transforma numa função harmônica de $u$ e $v$ por meio da mudança de variáveis

$$x + iy = f(u + iv),$$

onde $f$ é uma função analítica.

Como consequência, uma função que é dita harmônica em alguma vizinhança permanece harmônica sob mudanças de variáveis advindas de uma transformação conforme

$$w = F(z),$$

onde $F(z)$ é analítica e $F'(z) \neq 0$ na vizinhança, uma vez que a função inversa $z = f(w)$ é analítica.

**Exemplo 7:** A função $H = e^{-y}\sin(x)$, é harmônica em qualquer região do plano-$xy$. Sob a transformação, que é obtida pela função harmônica, definida anteriormente

$$z = w^2,$$

temos $x = u^2 - v^2$ e $y = 2uv$, então a função $H = e^{-2uv}\text{sen}\,(u^2 - v^2)$ é harmônica na região correspondente do plano-$uv$, ou seja,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = 0$$

## 2.3.Transformações Condições de Contorno

As condições que prescrevem, que uma função harmônica $H$ ou sua derivada, seja constante sobre uma parte da fronteira de uma região, são as mais comuns, embora essas não sejam os únicos tipos importantes de condições de contorno. Algumas dessas condições, permanecem inalteradas, sob a mudança de variáveis por meio da transformação conforme. Uma curva ao longo da qual uma função $H$ é constante é chamada curva de nível da função. Pela mudança de variáveis, uma curva de nível $H(x, y) = c$ no plano-$xy$ é transformada na curva de nível

$$H[x(u, v), y(u, v)] = c$$

no plano-$uv$. Uma parte da fronteira de uma região no plano-$xy$ sobre a qual $H$ tem valor constante, é transformada numa curva no plano-$uv$, onde $H$ toma o mesmo valor constante. Se a derivada de $H$ se anula ao longo de uma curva no plano-$xy$, então a derivada de $H$ como função de $u$ e $v$ também se anula sobre a curva correspondente no plano-$uv$. Deste modo, um problema de valor de contorno" é aquele, que determina uma solução que satisfaça ao mesmo tempo as equações diferenciais e as condições de contorno.
**Teorema 7:** Sob uma transformação $z = f(w)$, onde $f$ é analítica e $f'(w) \neq 0$, permanecem inalteradas as condições de contorno de um dos dois tipos

$$H = c$$

e

$$\frac{dH}{dn} = 0$$

impostos a uma função $H$, harmônica. Esse teorema, enuncia a invariância de tipos especiais de condições de contorno. Uma condição de contorno que não é de nenhum desses tipos pode ser transformada numa condição que é substancialmente diferente da original.

# 2.4.Transformação de Joukovski

Essa transformação é conhecida assim, porque foi utilizada pelo cientista russo Nicolai Joukovski (1847-1921) em seus estudos de aerodinâmica. Deste modo, estudaremos agora essa transformação:

$$w = J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{a^2}{z})$$

onde $a > 0$. Observe que $J$ leva cada ponto $z$ num ponto $w$, e cada ponto $w$ é imagem de dois pontos $z_1$ e $z_2$, raízes da equação

$$z^2 - 2wz + a^2 = 0.$$

Como estas raízes satisfazem a relação de Girard, $z_1 \cdot z_2 = a^2$, vemos que, ou ambas estão no círculo $|z| = a^2$, ou uma é interna e a outra externa a esse círculo. Somente os pontos $w = a$ e $w = -a$ provêm de raízes duplas, $z = a$ e $z = -a$ respectivamente. Os pontos do segmento $[-a, +a]$ são imagens de pontos conjugados $z = ae^{\pm i\theta}$ do círculo $|z| = a$, pois $J(ae^{\pm i\theta}) = \cos(\theta)$. Então $J$ transforma, bijetivamente, tanto o interior quanto o exterior do círculo $|z| = a$, em todo o plano $w$, excetuando o segmento $[-a, +a]$.

# 2.5.Transformação de Möbius

Vamos aprender sobre as transformações de Möbius, uma classe de transformações do plano complexo com o nome do matemático alemão August Ferdinand Möbius (1790-1868). Essa classe de transformações tem algumas propriedades muito interessantes, algumas das quais veremos aqui. Conhecida como sendo uma transformação complexa definida por uma composição de outras transformações mais simples, a saber: translação, rotação, dilatação e inversão. A mesma está entre as transformações mais importantes da geometria com aplicações desde mapeamento cerebral até a teoria da relatividade, podendo ser uma combinação complicada das quatro transformações básicas. A função complexa definida por

$$T(z) = w = \frac{az+b}{cz+d}$$

é chamada uma transformação de Möbius, onde $a$, $b$, $c$, $d$ são números complexos tais que $ad - bc \neq 0$. A chamada transformação de Möbius, tem a função de levar qualquer reta numa reta ou círculo e também qualquer círculo numa reta ou círculo. Essa transformação também chamada de transformação fracionária, é considerada como uma composição das transformações de translação, rotação, dilatação e inversão (essas transformações serão tratadas na seção 2.6).

A transformação de Möbius leva cada ponto do plano-$z$, exceto o ponto $z = \frac{-d}{c}$ com $c \neq 0$, em um único ponto do plano-$w$. Isolando $z$ na expressão acima, temos a inversa da transformação de Möbius que continua sendo uma transformação de Möbius, dada por

$$z = T^{-1}(w) = z = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Os pontos $z = \frac{-d}{c}$ e $w = \frac{a}{c}$ são pontos críticos da transformação e de sua inversa, respectivamente, no sentido de que $T(\frac{d}{c}) = \infty$ e $T^{-1}(\frac{a}{c}) = \infty$. Pode-se mostrar que existe uma única transformação de Möbius, que leva três pontos distintos $z_1$, $z_2$ e $z_3$ do plano-$z$ a três pontos distintos $w_1$, $w_2$ e $w_3$ do plano-$w$, tal que para cada ponto $z$ vale a seguinte relação, denominada de razão cruzada,

$$\frac{(w-w_1)\cdot(w_2-w_3)}{(w-w_2)\cdot(w_1-w_3)} = \frac{(z-z_1)\cdot(z_2-z_3)}{(z-z_2)\cdot(z_1-z_3)} \tag{2.11}$$

onde $w = T(z)$. Por exemplo, vamos achar a transformação de Möbius que leva os pontos $z_1 = -1$, $z_2 = -i$ e $z_3 = i$ nos pontos $w_1 = 0$, $w_2 = 2$ e $z_3 = 1+i$, respectivamente. Antes de fazer os cálculos, observe que o círculo $|z| = 1$ (onde estão os valores dados de $z$) será levado no círculo $|w-1| = 1$ (onde estão os valores dados de $w$). Então substituindo estes pontos na expressão (2.11) obtemos

$$\frac{(w-0)\cdot(2-(1+i))}{(w-2)\cdot(0-(1+i))}=\frac{(z-(-1))\cdot(-i-i)}{(z-(-i))\cdot(-1-i)} \tag{2.12}$$

então

$$\frac{w\cdot(1-i)}{(w-2)\cdot(-1-i)}=\frac{(z+1)\cdot(-2i)}{(z+i)\cdot(-1-i)} \tag{2.13}$$

efetuando alguns cálculos, temos

$$(w-wi)\cdot(z+i)\cdot(-1-i)=(w-2)\cdot(-1-i)\cdot(-2iz-2i) \tag{2.14}$$

dividindo tudo por $(-1-i)$, obtemos

$$(w-wi)\cdot(z+i)=(w-2)\cdot(-2iz-2i)) \tag{2.15}$$

multiplicando, encontramos a seguinte expressão

$$wz+wi-wiz-wi^2=-2wiz-2wi+4iz+4i \tag{2.16}$$

após alguns cálculos, temos

$$w\cdot(z-i^2+3i+iz)=4iz+4i \tag{2.17}$$

dividindo tudo por $(z-i^2+3i+iz)$, tem-se

$$w=\frac{4iz+4i}{(z-i^2+3i+iz)} \tag{2.18}$$

logo

$$w=\frac{4z+4}{(1-i)z+(3-i).} \tag{2.19}$$

Para ver que esta transformação leva o interior do primeiro disco no interior do segundo, basta substituir $z=0$ (que está no interior do primeiro disco) e ver que a imagem $w=\frac{2(3+i)}{5}$ está no interior do segundo, pois assim, podemos entender essa transformação de uma região em outra.

# 2.6.Outras Transformações

As funções que vamos aqui tratar são transformações e dentre elas estão a translação, a rotação, a inversão e a dilatação, cujos nomes indicam movimentos geométricos. Essas transformações relacionam números complexos segundo uma certa lei algébrica. Reflexões, translações e rotações são exemplos de isometrias no plano ou no espaço. Algumas conservam os ângulos orientados e são então chamadas deslocamentos. O conjunto de deslocamentos formam um grupo de Möbius, devido as semelhanças que conservam os ângulos.

**Transformação por translação**

Translação é o movimento que um objeto realiza de um ponto para o outro. É o deslocamento em linha reta na mesma direção e no mesmo sentido de um objeto ou figura, em função de um vetor percorrendo a mesma distância. As translações conservam a direção e o comprimento de segmentos de reta, e as amplitudes dos ângulos.

$$T(z) = z + w$$

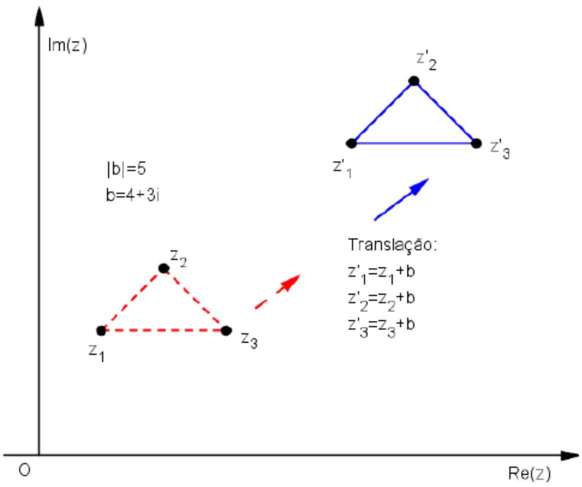
Sendo $w$ uma constante complexa. Essa transformação mapeia imagens do plano-$z$, transladado em direção ao vetor $w$ do plano-$w$. Tem-se como exemplo, a transformação por translação com $w = 5+8i$ no primeiro quadrante, em seguida tem-se a imagem sendo transladada na direção do vetor $w = -5+8i$ no segundo quadrante e assim por diante, ou seja, essa transformação leva cada número complexo em outro número complexo, transladado em $n$ unidades na horizontal e na vertical.

**Exemplo 8:** Sejam $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + 3i$ e $z_3 = 3 + 2i$, três números complexos, formando os vértices de um triângulo e $b = 4 + 3i$. Consideremos a translação $T(z) = z + b$. Então

$$T(z_1) = 5 + 5i, \qquad T(z_2) = 6 + 6i, \qquad T(z_3) = 7 + 5i$$

Cada vertice do triângulo sofreu um deslocamento igual a 5 unidades que corresponde $|b|$. Veja a figura 2.8.

Figura 2.8: Translação




Fonte: Santos, M. J. V. 2016

**Transformação por rotação**

Uma rotação é uma transformação geométrica de um sistema de coordenadas. Seja

$$w = e^{i\theta} z$$

Em que $\theta$ é uma constante real, tal que $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$. Nesta transformação imagens no plano-$z$ são giradas de um ângulo $\theta$. Se $\theta > 0$, a rotação se dá no sentido anti-horário, mas se $\theta < 0$, a rotação se dá no sentido horário. Analisemos a rotação de uma desigualdade $ax + by + c \geq 0$ com o ângulo de notação $\theta$ e o eixo real. Seja $= x + yi$ e $k = e^{i\theta}$, então

$$z \cdot k = (x + yi) \cdot (cos(\theta) + isen(\theta)) = (xcos(\theta) - ysen(\theta)) + (xsen(\theta) + ycos(\theta))i$$

Aplicando $z \cdot k$ na desigualdade $ax + by + c \geq 0$, temos

$$a(xcos(\theta) - ysen(\theta)) + b(xsen(\theta) + ycos(\theta)) + c \geq 0$$

$$(acos(\theta) + bsen(\theta))x + (bcos(\theta) - asen(\theta))y + c \geq 0.$$

Fazendo

$$\alpha = (acos(\theta) + bsen(\theta))$$

$$\beta = (bcos(\theta) - asen(\theta))$$

$$\omega = c,$$

obtemos

$$\alpha x + \beta y + \omega \geq 0.$$

Assim, basta que tenhamos o ângulo de rotação e a desigualdade (neste caso) para determinar a rotação.

**Exemplo 9:** Sejam a desigualdade $2x + 3y - 2 \geq 0$ e o ângulo de rotação $\theta = 30$. Veja figura 2.9. Fazendo as substituições em

$$\alpha = acos(\theta) + bsen(\theta),$$

$$\beta = bcos(\theta) - asen(\theta),$$

$$\omega = c.$$

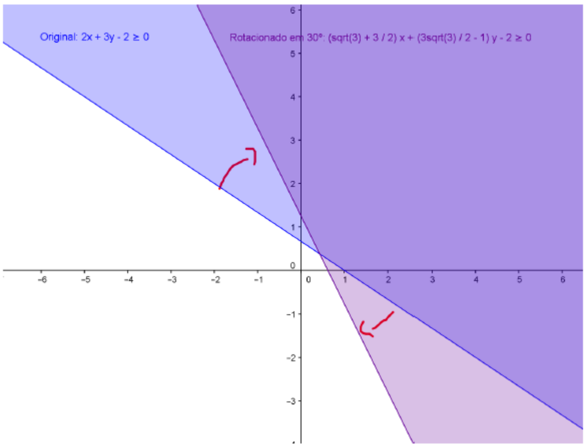
Temos

$$\alpha = \sqrt{3} + \frac{3}{2}, \beta = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1, \omega = c.$$

E substituindo em $\alpha x + \beta y + \omega \geq 0$. Temos a seguinte desigualdade

$$\left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right) x + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right) y - 2 \geq 0.$$

Figura 2.9: Rotação




Fonte: Santos, M. J. V. 2016

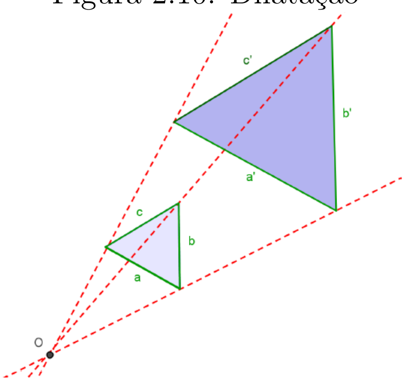
**Transformação por dilatação**

Uma dilatação nada mais é do que aumentar ou diminuir as dimensões de uma imagem ou figura geométrica a partir de um fator multiplicativo. Assim

$$w = \varphi z$$

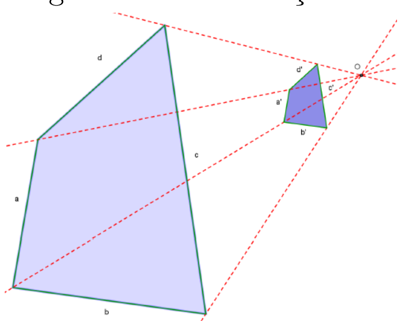
sendo $\varphi$ uma constante real. Para $\varphi > 1$, as imagens serão dilatadas, mas quando $0 < \varphi < 1$, as imagens serão contraídas. Deste modo, de acordo com os valores de $\varphi$, imagens e ou pontos podem sofrer dilatação (aumentar) ou contração (diminuir). Observe as figuras 2.10 e 2.11.

Figura 2.10: Dilatação




Fonte: Santos, M. J. V. 2016

Figura 2.11: Contração



Fonte: Santos, M. J. V. 2016

**Transformação por inversão**

Existem também transformações que não são definidas nem no plano, nem no espaço e uma delas é a inversão, que invertem o plano de dentro para fora. Essa transformação associa a cada número complexo um outro número complexo, que possui o inverso de seu módulo e o oposto de seu argumento, ou seja, linhas continuam sendo linhas ou círculos e os ângulos são preservados. Assim, a expressão

$$w = \frac{1}{z}$$

estabelece correspondência biunívoca entre os pontos do plano-$z$ e os pontos do plano-$w$, exceto para os pontos $z = 0$ que não tem imagem, e $w = 0$ que não é imagem de nenhum ponto do plano-$z$. A imagem de um círculo generalizado sob a transformação inversa é um círculo generalizado.

A transformação inversa é representativa de todas as transformações de Möbius dessa maneira. Qualquer transformação de Möbius transforma círculos em círculos. A imagem de um círculo ou reta sob uma transformação de Möbius será sempre um círculo ou uma reta. Não há outras possibilidades. Esta é uma das boas propriedades das transformações de Möbius, o que as torna muito úteis.

# 2.7.Considerações

Encerramos este capítulo com a compreensão das transformações conformes e seus tipos. Vale salientar a importância deste capítulo para o trabalho, pois somente entendendo essas transformações é que será possível compreender bem o capítulo seguinte, que traremos aplicações de transformação linear, transformação de Möbius e Transformação de Joukovski.

# 3. Aplicações de transformações conformes

Neste capítulo usaremos transformações conformes para resolver problemas da Física e da Matemática envolvendo equação de Laplace. Todas as teorias e definições apresentadas neste capítulo tem por base o livro do Halliday Fundamentos da Física [14], o livro do (Churchill, 1975)[8], Variáveis Complexas e suas Aplicações, o livro do (Brown e Churchill, 2015) [7], Variáveis Complexas e Aplicações além de algumas dissertações de mestrados e notas de aula (Alencastre, 2016 )[4][3], (Pereira, 2013)[26], (Santos, 2016)[21] e entre outras.

## 3.1. Aplicação que transforma uma região em outra

Essa é uma aplicação da transformação linear e que recai em outras transformações. Por exemplo, a aplicação

$$f(z) = w = (1+i)z + 2 \tag{3.1}$$

transforma uma região retangular do plano $z = (x, y)$ na região retangular do plano $w = (u, v)$ mostrada na figura 3.1. Isso pode ser visto expressando essa aplicação como a composição das transformações

$$Z = (1+i)z \tag{3.2}$$

e

$$w = Z + 2 \tag{3.3}$$

pela fórmula de Euler, temos que $e^{i\theta} = cos(x) + isen(x)$, em que podemos reescrever da seguinte forma $1 + i = \sqrt{2} \cdot (cos45° + isen45°) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, e $z$ é arbitrário, logo

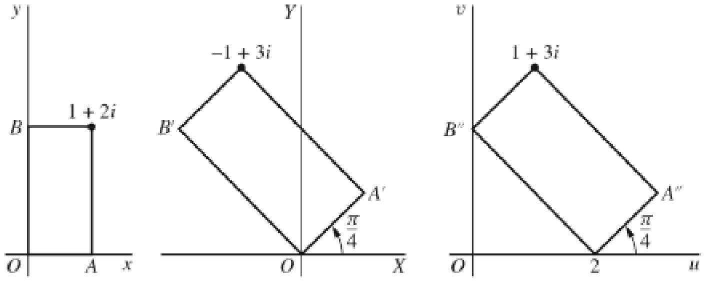
$$1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{\left(i\frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{e} \quad z = r\, e^{i\theta}, \tag{3.4}$$

podemos colocar a primeira das transformações (3.2) na forma

$$Z = (\sqrt{2}r) \cdot e^{\left[i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right]}.$$

Logo, essa transformação (3.2) expande o vetor radial de um ponto não nulo $z$ por um fator de $\sqrt{2}$ e o gira no sentido anti-horário por $\frac{\pi}{4}$ radianos em torno da origem. A segunda das transformações (3.3) é uma translação de duas unidades para a direita. A figura 3.1 ilustra essa aplicação.

Figura 3.1: Transformação de uma região em outra




Fonte: Brown e Churchill, 2015

Observe o ponto $z = (1, 2)$, ou seja, na segunda figura $z = (1+i)(1+2i) = 1+2i+i-2 = -1+3i$, que nos leva a rotação da segunda figura, em seguida $-1+3i+2 = 1+3i$. Logo, $z = (1, 2) = (-1, 3)$. Veja que o ponto que estava na origem rotaciona e caminha duas unidades para direita, o que pode ser visto na última imagem.

# 3.2. Aplicação ao escoamento de fluídos

Antes de iniciarmos propriamente a aplicação, se faz necessário apresentar alguns conceitos importantes do conteúdo de fluídos. Muitos problemas de hidráulica, dinâmica dos fluídos ou aerodinâmica dos fluídos podem ser resolvidos por métodos de variáveis complexas, em especial com aplicações conformes, como veremos nesta subseção. Para este fim são necessárias algumas considerações que simplificaram tremendamente a nossa tarefa. As hipóteses básicas são as seguintes:

- O escoamento é bi-dimensional: As características básicas do escoamento de fluidos são as mesmas independente do plano em consideração. Isso permite aplicação dos teoremas na solução de problemas de escoamento em redor de objetos.

- Escoamento é estacionário: A velocidade do fluido depende apenas das coordenadas espaciais $(x; y)$ e não do tempo.

- Fluido é não viscoso: O fluido não tem viscosidade, escoa sem atrito.

- Escoamento é potencial: A velocidade do fluido deriva de um campo potencial, isto é, se $v_x$ e $v_y$ são as componentes da velocidade na direção $x$ e na direção $y$ respectivamente, existe uma função tal que as derivadas parciais existem.

- Fluido é incompressível: Equivale a dizer que a densidade do fluido é constante.

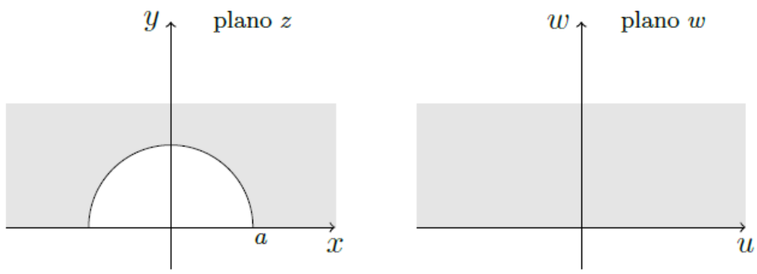
Vários problemas da Física são modelados matematicamente por equações diferenciais parciais às quais são associadas condições adicionais denominadas condições de contorno. Chama-se “problema de valor de contorno” aquele que determina uma solução que satisfaça ao mesmo tempo as equações diferenciais e as condições de contorno. Estaremos interessados basicamente na solução de problemas cuja modelagem recaiam em equações de Laplace bi-dimensional, ou seja, problemas onde desejamos determinar uma função $u(x;u)$ que satisfaça a equação de Laplace:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.5}$$

As funções harmônicas desempenham um importante papel na hidrodinâmica e aerodinâmica. Um problema importante em dinâmica dos fluidos é determinar como um fluido, inicialmente escoando com velocidade constante $v_0$, é perturbado pela introdução de obstáculos, e é a partir desse tipo de problema que usaremos as transformações conformes para solucionar.

A intenção é obter potencial complexo da forma: $H(z) = v_0 z + G(z)$. Em que o limite de $G(z)$ é zero, quando o módulo de $z$ tende ao infinito e isso garante que longe do obstáculo a velocidade do fluido tenha módulo constante. Uma transformação é dada por $f(z) = z + \frac{a^2}{z}$ e ocorre conforme a figura 3.2.

Figura 3.2: Transformação $f(z)$




Fonte: Alencastre, 2016

Essa transformação conforme leva o exterior do semi-círculo de raio $a$ centrado em $z_0 = 0$ do semiplano superior do plano-$z$ no semiplano superior do plano-$w$ . Deste modo podemos usá-la para descrever o escoamento do fluido incompressível em torno de um semi-círculo.

**Exemplo 10:** Estudar o potencial complexo de escoamento $H(z) = v_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$. Fazendo $z = re^{i\theta}$ podemos reescrever o potencial complexo na forma:

$$H(z) = \Phi + \Psi = v_0\left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{re^{i\theta}}\right) \tag{3.6}$$

$$= v_0\left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{re^{i\theta}}\right) \tag{3.7}$$

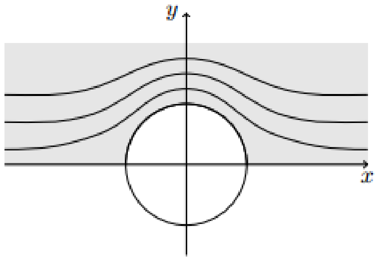
$$= v_0 \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos(\theta) + v_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin(\theta) \tag{3.8}$$

Logo, temos:

$$\begin{cases} \Phi(r,\theta) = v_0 \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \cos(\theta) \\ \Psi(r,\theta) = v_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin(\theta) \end{cases}$$

Então as curvas $\Psi(r,\theta) = \beta$ representam as linhas de corrente, isto é, as trajetórias reais das partículas do fluído, conforme mostra a figura 3.3.

Figura 3.3: Linhas de corrente




Fonte: Alencastre, 2016

E derivando o potencial complexo $H$ para obter a velocidade complexa temos:

$$V = H'(z)$$

$$= v_0 \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right)$$

$$= v_0 \left( 1 - \frac{a^2}{re^{i\theta}} \right)$$

$$= v_0 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \cos(\theta) \right) - v_0 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \sin(\theta) \right)$$

Assim, distante do semi-círculo, $\lim_{r\to\infty} V = v_0$, isto e, o fluido está escoando na direção do semi-eixo real positivo com velocidade constante $v_0$.

## 3.3.Aplicação da transformação de Möbius na resolução de equações do terceiro grau

Segundo Pereira (2013)[26], historicamente, o surgimento de um novo conjunto numérico deve-se à necessidade da extensão de outro conjunto já existente, uma vez que o desenvolvimento da ciência e do pensamento humano exigem novos conhecimentos. A verdadeira origem dos complexos está diretamente ligada às resoluções das equações cúbicas. O contexto desta origem se dá na Itália renascentista no século XVI, tendo como segundo plano, uma história de disputas e intrigas intelectuais envolvendo matemáticos como Scipione, Fiori, Tartaglia e Cardano e, posteriormente com as observações e notações criadas por Bombelli. Nesse contexto apresentaremos nesta seção uma forma de resolver essas equações usando as transformações de Möbius (Santos, 2016)[21], já estudadas na seção 2.5 do capítulo 2.

Considere uma equação de terceiro grau com coeficientes complexos:

$$X^3 + xX^2 + yX + z = 0 \tag{3.9}$$

Uma maneira de simplificar essa equação consiste em substituir $X$ por $Y - \frac{x}{3}$, ao substituir temos:

$$\left(Y - \frac{x}{3}\right)^3 + x\left(Y - \frac{x}{3}\right)^2 + y\left(Y - \frac{x}{3}\right) + z = 0 \tag{3.10}$$

$$Y^3 - 3Y^2\frac{x}{3} + 3Y\frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + x\left(Y^2 - 2Y\frac{x}{3} + \frac{x^2}{9}\right) + yY - \frac{yx}{3} + z = 0 \tag{3.11}$$

$$Y^3 - Y^2x + \frac{Yx^2}{3} - \frac{x^3}{27} + xY^2 - 2Y\frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + yY - \frac{yx}{3} + z = 0 \tag{3.12}$$

$$Y^3 - \frac{x^2Y}{3} - \frac{x^3}{27} + \frac{x^3}{9} + yY - \frac{yx}{3} + z = 0 \tag{3.13}$$

$$Y^3 + Y\left(-\frac{x^2}{3} + y\right) + \frac{x^3}{9} - \frac{x^3}{27} - \frac{yx}{3} + z = 0 \tag{3.14}$$

Daí, obtemos uma nova equação de terceiro grau da forma:

$$Y^3 + pY + q = 0 \tag{3.15}$$

Caso $p = 0$, as soluções desta equação são as raízes cúbicas de $-q$. Suponha-se que $p \neq 0$. Para resolver a equação 3.19, exitem vários métodos usuais, como por exemplo o de Cardano [20] e entre outros, porém aqui essa equação será resolvida por outro método que embora seja necessário mais cálculos, é talvez mais natural e mais simples e consiste no uso de transformações de Möbius, ou seja, substituímos $Y$ por

$$Y = \frac{aZ + b}{cZ + d},$$

onde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pertence ao conjunto $GL(2, \mathbb{C})$ das matries invertíveis da forma $2 \times 2$ e com entradas complexas. Ao substituir o $Y$ da equação 3.19, por $Y = \frac{aZ+b}{cZ+d}$, obtemos uma fração racional. Caso $a$ e $c$ tenham sido escolhidos tais que

$$a^3 + pac^2 + qc^3 \neq 0, \tag{3.16}$$

então esta fração será escrita como quociente de dois polinômios de terceiro grau, descrito da seguinte forma

$$\left(\frac{aZ+b}{cZ+d}\right)^3 + p\left(\frac{aZ+b}{cZ+d}\right) + q \tag{3.17}$$

$$\left(\frac{aZ+b}{cZ+d}\right)\left(\frac{aZ+b}{cZ+d}\right)^2 + p\left(\frac{aZ+b}{cZ+d}\right) + q \tag{3.18}$$

dividindo cada membro da equação acima por $\left(\frac{aZ+b}{cZ+d}\right)$, obtemos

$$\frac{(aZ+b)^2}{(cZ+d)^2} + p + q\left(\frac{cZ+d}{aZ+b}\right) \tag{3.19}$$

$$\frac{a^2Z^2+2aZb+b^2}{c^2Z^2+2cZd+d^2} + p + \frac{qcZ+qd}{aZ+b} \tag{3.20}$$

calculando o mmc, temos que

$$\frac{a^3Z^3+2a^2Z^2b+aZb^2+a^2Z^2b+2aZb^2+b^3+(paZ+pb)(c^2Z^2+2cZd+d^2)+(c^2Z^2+2cZd+d^2)(qcZ+qd)}{(c^2Z^2+2cZd+d^2)(aZ+b)} \tag{3.21}$$

em que realizando algumas multiplicações e colocando alguns termos em evidência obtemos o seguinte numerador

$$Z^3a^3 + Z^2 3a^2b + Z3ab^2 + b^3 + (c^2Z^2 + 2cZd + d^2)(z(pa+qc) + (pb+qd) \tag{3.22}$$

daí, efetuando as multiplicações e agrupando os termos semelhantes temos

$$Z^3(a^3+c^2(pa+qc))+Z^2(3a^2b+c^2(pb+qd)+2cd(pa+qc)+Z(3ab^2+2cd(pb+qd)+d^2(pa+qc))+b^3+d^2(pb+qd) \tag{3.23}$$

onde dividindo tudo pelo coeficiente $(a^3 + c^2(pa+qc))$ do $Z^3$ tem-se

$$x' = \frac{(3a^2b + c^2(pb+qd) + 2cd(pa+qc)}{(a^3 + c^2(pa+qc))} = \frac{b(3a^2 + c^2p) + d(2acp + 3qc^2)}{(a^3 + c^2pa + c^3q))} \tag{3.24}$$

$$y' = \frac{(3ab^2 + 2cd(pb+qd) + d^2(pa+qc))}{(a^3 + c^2(pa+qc))} = \frac{a(3b^2 + d^2p) + c(2dpb + 3d^2q))}{(a^3 + c^2pa + c^3q))} \tag{3.25}$$

$$z' = \frac{b^3 + d^2(pb+qd)}{(a^3 + c^2(pa+qc))} = \frac{b^3 + d^2pb + qd^3)}{(a^3 + c^2pa + c^3q))} \tag{3.26}$$

assim, a expressão 3.23 torna-se

$$Z^3 + x'Z^2 + y'Z + z'. \tag{3.27}$$

Já para encontrar o denominador o cálculo será feito a partir do denominador da equação

3.21, em que obtemos

$$c^2aZ^3 + 2cdaZ^2 + d^2aZ + c^2bZ^2 + 2cZdb + d^2b \tag{3.28}$$

agrupando os termos, obtem-se

$$Z^3c^2a + Z^2(2cda + c^2b) + Z(d^2a + 2cdb) + d^2b \tag{3.29}$$

e dividindo cada membro pelo coeficiente $c^2a$ de $Z^3$, temos

$$x'' = \frac{(2cda + c^2b)}{c^2a} \tag{3.30}$$

$$y'' = \frac{(d^2a + 2cdb)}{c^2a} \tag{3.31}$$

$$z'' = \frac{d^2b}{c^2a} \tag{3.32}$$

assim,

$$Z^3 + x''Z^2 + y''Z + z''. \tag{3.33}$$

Logo, a fração racional é representada pela fração obtida pelo quociente das equações 3.31 e 3.37 .

$$\frac{Z^3 + x'Z^2 + y'Z + z'}{Z^3 + x''Z^2 + y''Z + z''}$$

Quer-se tentar encontrar $a$, $b$, $c$, e $d$ tais que $x' = y' = 0$ e $a$, $b$, $c$, e $d$ obtêm-se de $x$, $y$, e $z$ usando unicamente operações aritméticas e extração de raízes.

Ainda segundo Santos, (2016)[21], nem sempre será possível encontrar $a$, $b$, $c$, e $d$ nessas condições. Para compreender porquê é necessário recorrer ao conceito de solução múltipla. Se $P(X)$ é um polinômio com coeficientes complexos, dizer que um número complexo $r$ é solução da equação $P(X) = 0$ equivale a dizer que $P(X)$ é múltiplo de $X - r$. Naturalmente, é mesmo possível que $P(X)$ seja múltiplo de $(X - r)^n$, para algum $n > 1$. Diz-se que $r$ é uma raiz simples de $P(X)$ se isto não acontecer, diz-se que é uma raiz dupla ou tripla, caso isso aconteça para $n = 2$ e $n = 3$, respectivamente. E diremos que $r$ é uma solução simples dupla ou tripla da equação $P(X)$ quando $r$ for, respectivamente, uma raiz simples, dupla ou tripla do polinômio $P(X)$.

Nem sempre é possível encontrar $a$, $b$, $c$, e $d$ nas condições descritas. Uma vez que a equação $Z^3 + z' = 0$ ou tem três soluções simples (caso $z' \neq 0$) ou uma solução tripla (caso $z' = 0$). Quando o método descrito poder ser aplicado, a equação $Y^3 + pY + q = 0$ não poderá ter solução dupla, mas esse obstáculo poderá ser contornado.

Suponha que $3b^2 + d^2p \neq 0$. Então, se tomarmos

$$a = -c \cdot \frac{2bdp + 3d^2q}{3b^2 + d^2p} \tag{3.34}$$

resultará de (3.28) e de (3.29) que $y' = 0$ e que $x'$ pode ser escrito como uma fração racional cujo numerador é

$$3c^2(b^3 + pbd^2 + qd^3)(3b^2p + 9bdq - d^2p^2)$$

Considere agora $d = 1$ e seja $b$ tal que $3b^2p + 9bq - p^2 = 0$, pelo que $x' = 0$. Assim, encontramos uma expressão para $b$, dada por

$$b = \frac{\frac{-q}{2} + s}{\frac{p}{d3}}.$$

Tome agora $c = 1$, temos que

$$a = \frac{\frac{-q}{2} + s}{\frac{p}{d3}}.$$

Observe que com essas escolhas de $a$, $b$, $c$, e $d$, o determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é diferente de zero e portanto pertence ao conjunto $GL(2, \mathbb{C})$. Então, as soluções da equação (3.18) são os números da forma

$$\frac{ar + b}{r + 1},$$

onde $r$ é uma raiz cúbica de $-z'$, note que $z'$ não pode ser igual a 1.

Resumindo, o algoritmo para resolver a equação 3.19 consiste em:

**Caso 1:** Sendo $p = 0$ na equação $Y^3 + pY + q = 0 \Rightarrow Y^3 + q = 0 \Rightarrow Y = \sqrt[3]{-q}$. Assim, as soluções da equação são raízes cúbicas de $-q$.

**Exemplo 11:** Seja $Y^3 + i = 0$ , em que $p = 0$ e $q = i$, assim a solução é $Y = \sqrt[3]{-i} \Rightarrow Y = i$.

**Caso 2:** Sendo $p \neq 0$ na equação $Y^3 + pY + q = 0$ temos dois casos

$$\begin{cases} 1. \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0 \\ 2. \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \neq 0 \end{cases}$$

então $-\frac{3q}{2p}$ é uma solução dupla de 3.19 e $\frac{3q}{p}$ é uma solução simples, isso em relação ao item 1. Sendo ainda $p \neq 0$ e agora $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \neq 0$ (item 2), então seja $s$ uma raiz quadrada de $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, deste modo define-se que

$$\alpha = \frac{\frac{-q}{2} - s}{\frac{p}{3}}$$

e

$$\beta = \frac{\frac{-q}{2} + s}{\frac{p}{3}}$$

Então as soluções da equação 3.19 são os números da forma

$$\frac{\beta - \alpha r}{1 - r},$$

onde $r$ é uma raiz cúbica de $\frac{\beta}{\alpha}$.

**Exemplo 12:** Seja $Y^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{4}}Y + i = 0$, em que $p = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ e $q = i$, assim teremos a seguinte solução dupla, que é $Y = \frac{-3i}{2\frac{3}{\sqrt[3]{4}}} = \frac{-3i}{\frac{6}{\sqrt[3]{4}}} = \frac{-i\sqrt[3]{4}}{2}$ e a outra solução é simples e dada por $Y = \frac{3i}{\frac{3}{\sqrt[3]{4}}} = i\sqrt[3]{4}$.

**Exemplo 13:** Seja $Y^3 + 3Y = 0$ em que $p = 3$ e $q = 0$, assim teremos a seguinte solução, que tem como primeiro passo encontrar $s$, assim temos que $s = \frac{0^2}{4} + \frac{3^3}{27} = 0 + \frac{27}{27} = 1 \neq 0$ e então $s = \sqrt{1} = 1$, em seguida

$$\alpha = \frac{-0}{2} - 1 = -1$$

$$\beta = \frac{-0}{2} + 1 = 1$$

deste modo, $r = \sqrt[3]{\frac{1}{-1}} = \sqrt[3]{-1} = -1$ e portanto uma das soluções é

$$\frac{1 - (-1)(-1)}{1 - (-1)} = 0.$$

# 3.4. Considerações

Assim, ao apresentar essas aplicações das transformações conformes, que envolvem funções complexas, concluímos esse capítulo dando ênfase ao fato destas aplicações poderem ser apresentadas no nível superior, desde que se tenha conhecimento dos números complexos e de fluídos, para tornar uma aprendizagem mais significativa.

# 4.Contribuições para o ensino: uma abordagem interdisciplinar

A partir dos capítulos anteriores, podemos dizer que as transformações conformes possui uma grande aplicabilidade na resolução de problemas, em ambas as áreas de conhecimento citadas. Neste capítulo vamos entender as contribuições dessas aplicações para o ensino, na perspectiva da interdisciplinaridade, para isso, antes vamos discorrer sobre interdisciplinaridade, tomando por base alguns autores, como (Fazenda, 1985)[13], (Neto, 2014)[19],( Luck, 1994)[15], (Cunha, 2014)[9], (Moreira, 2011)[16], (Ausubel, 1963)[2] e (Zabala, 1998)[28].

## 4.1.Interdisciplinaridade

Sabemos o quão difícil pode se tornar aprender um conteúdo, seja do mais simples ao mais complexo, tudo depende da forma como é abordado. Deste modo, a interdisciplinaridade surgiu no início da década de 1960 na Europa e chegou ao Brasil no final da mesma década, trazendo ricas contribuições para o cenário educacional brasileiro. A interdisciplinaridade é um método de pesquisa e de ensino suscetível de fazer com que duas ou mais disciplinas interajam entre si, esta interação podendo ir da simples comunicação das ideias até a integração mútua dos conceitos, da epistemologia, da terminologia, da metodologia, dos procedimentos, dos dados e da organização da pesquisa (Neto, 2014)[19]. Fazenda (1985)[13], corrobora quando diz que o ensino, em qualquer etapa, baseado na interdisciplinaridade proporcionaria uma aprendizagem muito mais estruturada, ampliada e rica, pois os conceitos serão organizados em torno de unidades mais globais, de estruturas conceituais e metodológicas compartilhadas por várias disciplinas.

Segundo Lück (1994)[15], a prática interdisciplinar faz possível a superação de conhecimento, linearidade e artificialização, tanto no processo de produção do conhecimento, como no ensino. A autora ainda diz que a interdisciplinaridade corresponde à necessidade de superar a visão fragmentadora de produção de conhecimento.

Fazer uso da interdisciplinaridade não é criar novas disciplinas a partir da união de outras já existentes, e sim, de agregar conhecimentos. Além de que, o professor tem a possibilidade de inovar suas metodologias de ensino e também de fazer com quer o discente aprenda de forma significativa. A abordagem interdisciplinar neste trabalho se apresenta na inter-relação entre a Física e a Matemática, quando é descrito toda uma teoria Matemática e a mesma soluciona problemas e agrega conhecimento para Física também.

Sabemos ainda que o conhecimento não surge do nada e que para se aprender um saber, antes alguém teve que se dedicar e estudar esse assunto. É sabido que o conteúdo o qual tratamos nesse trabalho é de abordagem de uma disciplina chamada variáveis complexas da Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Matemática, porém nem toda grade curricular do superior trás essa disciplina.

Apesar da disciplina e do trabalho ser voltado para o nível superior, ainda assim, demanda de conhecimentos dos números complexos, conteúdo esse do terceiro ano do nível médio e que muitas vezes é negligenciado por não dar tempo ou por ser considerado menos importante, isso provoca dificuldades quando o aluno avança para um nível superior, pois chega sem embasamento teórico para tal. Daí a importância da ambientação, ou seja, da interação entre conteúdos do médio e do superior, ambos são indissociáveis.

A partir do momento que ocorre essa interação, a aprendizagem acontece de forma mais significativa, pois para Moreira (2011)[16], a aprendizagem significativa é o processo através do qual um novo conhecimento se relaciona de maneira não arbitrária e substantiva à estrutura cognitiva do aprendiz. Além disso, essa ligação entre teoria e aplicação, também torna o ensino mais significativo e faz com que a teoria se mostre útil para o alunado, pois dar sentido ao que o discente está estudando. E conforme Ausubel (1963)[2], a aprendizagem significativa é o mecanismo humano, por excelência, para adquirir e armazenar a vasta quantidade de ideias e informações representadas em qualquer campo de conhecimento.

Segundo Cunha (2014)[9], os números complexos fazem parte do conteúdo do ensino médio cuja importância principal é o cálculo das raízes de uma equação polinomial. No entanto, uma pergunta natural dos alunos é se os números complexos tem alguma aplicação prática. Essa pergunta é comum não só em relação a esse conteúdo, mas em relação a grande maioria dos conteúdos matemáticos, e neste trabalho nos preocupamos em mostrar tais aplicações, pois entendemos ser muito importante para o ensino e aprendizagem.

Assim, é necessário salientar a importância de se aplicar a teoria vista, e principalmente, quando se pensa na construção gradativa do conhecimento. Essas aplicações se mostra num grau de relevância, primeiro por trazer uma abordagem interdisciplinar, ou seja, ao possibilitar o desenvolvimento de competências e habilidades tanto para ensino de Matemática quanto para o de Física. Segundo por utilizar-se de um conteúdo complexo como é as transformações conformes e mostrar sua utilidade para solucionar problemas de escoamento de fluídos em torno de obstáculos e por poder ser usado para solucionar equações de terceiro grau, o qual este último, pode ser feito pelo docente uma transposição didática para ser apresentado no nível médio, bem como a transformação por translação rotação, inversão e dilatação.

Além de que, estas transformações chama a atenção do aluno, por poder transformar uma região em outra e trazer uma abordagem até mesmo geométrica. Deste modo, trabalhar com aplicações dentro da prática pedagógica, por meio da interdisciplinaridade, é fundamental para o ensino-aprendizagem, pois dar significado ao conhecimento e mostra como usar aquilo que se aprende. Portanto, é com base nestas ideias sobre interdisciplinaridade e aprendizagem significativa que propomos essa sequência didática.

## 4.2.Sequência Didática

Conforme Zabala (1998)[28], sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos discentes. É considerada ainda, como um conjunto organizado de materiais de ensino, destinados a ensinar e permitir aprendizagem de um determinado conteúdo.

Este trabalho apresenta uma sequência com mesmo propósito, de forma organizada, iniciamos apresentando uma revisão, que contém um conjunto de conhecimentos necessários para o andamento da disciplina variáveis complexas, em seguida, apresentamos a teoria propriamente dita, das transformações conformes, logo depois, mostramos aplicações que solucionam problemas, tanto na Matemática como na Física, e ainda ao mostrar essas aplicações, consideramos uma ordem lógica, que vai da de menor complexidade até a de maior complexidade.

## 4.3.Público-Alvo

Discentes e docentes de Bacharelado e/ou Licenciatura em:

- Matemática
- Física

## 4.4.Objetivo Geral

O objetivo do presente trabalho é utilizar conhecimentos da Matemática para resolver uma aplicação e compreender determinado fenômeno por meio de diferentes pontos de vista.

## 4.5.Objetivo Específicos

- Estudar a teoria necessária para o entendimento das transformações conformes;
- Compreender as várias formas de se aplicar as transformações conformes;
- Apresentar aplicações tanto na Física como na Matemática na perspectiva da abordagem interdisciplinar.

# 4.6.Conteúdo Programático, Competências, Habilidades

**Conteúdo Programático**

Apresentamos o conteúdo programático contido na sequência didática mencionada neste trabalho:

- Números Complexos;
- Função Complexa;
- Funções Analíticas;
- Funções Harmônicas;
- Funções elementares;
- Resíduos;
- Transformações por Funções elementares;
- Transformações Condições de Contorno;
- Aplicação que transforma uma região em outra;
- Aplicação ao escoamento de fluídos.

**Competências**

As competências são:

- Entender cada tipo de transformação conforme;
- Entender algumas aplicações de transformações conformes e entender que existe várias.

**Habilidades**

As habilidades são:

- Reconhecer as relações das transformações conformes com outras áreas do conhecimento;
- Aplicar os conceitos dos números complexos, de acordo com a sua necessidade, nas transformações conformes e suas aplicações.

# 4.7. Metodologia

Inicialmente, a aula se dará de forma interdisciplinar e com auxilio de um professor de Física, e os conteúdos serão abordados na mesma ordem que se apresenta neste trabalho. Essa proposta pode ser aplicada, por meio de um desafio abordando os conteúdos, de modo que a turma possa ser dividida em grupos distintos, em que cada grupo será desafiado a estudar, compreender e apresentar para os demais grupos o que foi estudado, ou seja, um grupo pode fazer a rotação do quadrado, bem como entender e o outro pode compreender o processo físico, com auxilio de um professor de Física, abrangendo a temática interdisciplinar.

Levando em consideração que os professores estarão acompanhando e ajudando em possíveis dificuldades. No fim, os professores se posicionará atribuindo sua avaliação a cada grupo. Assim, essa sequência, foi pensada para ajudar o discente a entender que é necessário uma organização nos estudos, que os conteúdos devem ser expressos e estudados com uma certa ordem cronológica, pois irá ajudá-lo a compreender de forma mais significativa e dando mais sentido, em relação ao conteúdo o qual está estudando.

# 4.8. Avaliação

A avaliação será realizada com base nos seguintes itens:

- Por meio de atividades, que ocorrerão de forma contínua durante todo o processo da sequência didática;
- Compreensão dos conteúdos abordados.

Logo, a utilização de uma sequência didática proporciona para o discente, maior aprendizado, mais organização, valorização do conhecimento prévio e por fim, ensino centrado na problematização. Além de que, proporciona ao professor um trabalho articulado em vários eixos de ensino, e ainda é fundamental para organização do trabalho pedagógico. Uma observação importante, é que ainda daria para explorar no ensino médio a ideia de rotação, translação, dilatação e inversão, sem falar em função analítica, podendo ser abordado dentro do próprio conteúdo, números complexos. Seria um aprofundamento maior e melhor, para ajudar na compreensão dos conteúdos supracitados.

# 5.Considerações Finais

Este trabalho apresenta uma relação entre teoria e aplicação, além disso, trás um embasamento teórico por meio de fontes bibliográficas já existentes, a partir do momento que os números complexos são trabalhados com uma linguagem mais formal, mais ampla dos cursos superiores. Deste modo, busca auxiliar um pouco mais, graduandos da Licenciatura e Bacharelado em Matemática, abrindo espaço para novos conhecimentos, através da abordagem interdisciplinar.

No tocante a aplicação, quando trabalharmos com a transformação de Möbius, mostramos com uma linguagem acessível, as transformações conformes e ou geométricas no plano. Transformar uma reta em círculo, ou o caminho contrário, através da inversão, ver como posso efetuar translações, rotações e dilatações, encanta visualmente e pode ser um reforço para despertar interesse por novos conhecimentos.

Inicialmente, buscamos fazer um trabalho que tratasse da parte teórica mais direta, mas que também mostrasse aplicações de forma sequenciada e com uma certa ordem, do nível menos complexo ao mais complexo e ainda retratando a importância da associação entre ambos, além de mostrar um aspecto também voltado ao ensino e aprendizagem. Assim, as transformações conformes, transformam uma região em outra, para melhor e mais fácil resolução de um problema, pode ser aplicada tanto no âmbito da resolução de problemas da Física como da Matemática, e pode ser abordado de maneira interdisciplinar. Portanto, concluímos afirmando sua importância para as áreas do conhecimento citadas e seu forte potencial de aplicabilidade dentro de cada área.

Esse trabalho pode contribuir tanto para professores, pois auxiliará e possibilitará um estudo mais abrangente e prático, quanto para discentes da Licenciatura e do Bacharelado em Matemática, pois mostra uma sequencia didática, desde a teoria até as suas aplicações, além de possibilitar uma abordagem dos números complexos e das transformações conformes de uma forma mais abrangente e interdisciplinar.

É um trabalho que contribui de forma significativa para minha formação e que me proporcionou uma grande experiência, aprendizado e que me legou um estudo de um conteúdo encantador dentro da Matemática, que agregou ainda mais conhecimentos, tanto dos já vistos como os que eu aprendi no decorrer do trabalho.

É importante dizer que este estudo não se esgota ao se concluir este trabalho, pois servirá como aporte teórico para impulsionar e embasar novas pesquisas, novos estudos, pois há outras transformações, outras aplicações, já que é um conteúdo amplo e é possível até que haja uma outra maneira de aplicar a transformação de Möbius para solucionar equações, os quais não tivemos acesso.

No entanto, vale sugerir um estudo parecido para aplicação da transformação de Mobius em imagens e vídeos panorâmicos como ferramenta de zoom de maneira natural, ou ainda usar outras transformações para o mapeamento cerebral. É um tema muito rico e abrangente e que trás uma importância grande para solução de problemas matemáticos e físicos e ainda para o ensino.

# Referências


[1] ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e Aplicações**. Editora S.A-LTC. 3.ed. Rio Janeiro, 2000.

[2] AUSUBEL, D.P. ***The psychology of meaningful verbal learning***. Grune and Stratton. New York, 1963.

[3] ALENCASTRE, A. B. **Transformações Conformes: Aplicações**. Nota de aula 15. UFS, 2016. Disponível em :<https://www.cesadufs.com.br/ORBI/public/uploadCatalago/19155916022012VariC3A1veis$Complexas_{15}$. pdf>. Acesso em: 17/11/2019.

[4] ALENCASTRE, A. B. **Transformações Conformes**. Nota de Aula 14. UFS, 2016. Disponível em :<https://www.cesadufs.com.br/ORBI/public/uploadCatalago/19155616022012VariC3A1veis$Complexas_1$4.pdf >. Acesso em: 17/11/2019. (a)

[5] ALENCASTRE, A. B. **Variáveis Complexas**. Nota de Aula. UFS, 2016. Disponível em : <https://www.cesadufs.com.br/ORBI/public/uploadCatalago/19155616022012VariC3A1veisComplexas.pdf>. Acesso em: 17/11/2019. (b)

[6] BOURCHTEIN, L. and OLIVEIRA, A. N. **Transformações Conformes de Algumas Regiões Duplamente Conexas em Anel**. UFPEL. Revista researchgate.net, vol. 24, p. 81-6. Capão do Leão-RS, 2006.

[7] BROWN, J. W. and CHURCHILL, R.V **Variáveis Complexas e Aplicações**. Editora Mcgraw-hill do Brasil, ltda. 9. ed. Porto Alegre, 2015.

[8] CHURCHILL, R. V. **Variáveis Complexas e suas Aplicações**. Editora Mcgraw-hill do Brasil, ltda. 1. ed. São Paulo, 1975.

[9] CUNHA, R. F. **Aplicações de Transformações conformes em Problemas Eletromagnéticos**. Dissertação de mestrado em matemática, UFG-PROFMAT, Goiânia, 2014.

[10] DANTE, L. R. **Matemática: contextos e aplicações**. Editora ática. v. 3. 3. ed. São Paulo, 2016.

[11] DURAN, F. **Transformações de Möbius e inversões**. Dissertação de mestrado em matemática. UEP. Rio Claro, 2013.

[12] FERNANDES, C. S. and BERNARDES JR, N.C. **Introdução às funções de uma variável complexa.** Editora S.B.M. v. 1. 5. ed. Rio de Janeiro, 2006.

[13] FAZENDA, I. **Interdisciplinaridade: história, teoria e pesquisa**. 4ª ed. Papirus. Campinas, 1994.

[14] HALLIDAY, D. and RESNICK, R. and WALKER, J. **Fundamentos de Física – Gravitação, Ondas e Termodinâmica**. Editora LTC. v.2. 9.ed. 2011.

[15] LUCK, H. **Pedagogia Interdisciplinar: fundamentos teórico-metodológicos**. 1. ed. Petrópolis, 1994.

[16] MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares**. Editora Livraria da física. 1. ed. São Paulo, 2011.

[17] MONTANHANO, S. G. **Transformações Conformes**. Dissertação de mestrado em matemática. UEM. Maringá, 2018.

[18] MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. Editora CRB. CAED-UFMG. Belo Horizonte, 2013.

[19] NETO,C.G.F. **Métodos interdisplinares aproximando saberes matemáticos e geográficos**. In: Anais do CONEDU. UEPB, 2014.

[20] MELO, C. U. **O Método de Cardano e sua Aplicação do Ensino Médio** . Dissertação. UFG-PROFMAT. Catalão, 2014.

[21] SANTOS, J. C. **Transformadas de Möbius e Equações do Terceiro Grau**. Bol. Soc. Por. Mat Portugual, 2016.

[22] SANTOS, V. R. **Aspectos das Transformações conformes na eletrodinâmica: invariância e leis de conservação**. Dissertação de mestrado em física. USP. São Paulo, 2013.

[23] SANTOS, M. V. J. **Transformadas de Möbius**. Dissertação de mestrado em matemática. UFS-PROFMAT, São Cristóvão-SE, 2016.

[24] TOFFOLI, S. F. L. **Conceitos topologicos no plano complexo.** Matemática essencial, 2006. Disponível em:<http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/vc/vc02.htm>. Acesso em: 27/05/2020.

[25] RODRIGUES, C. I. **Transformações de Möbius: Matemática multimídia**. Experimento - UNICAMP. São Paulo.

[26] PEREIRA, H. R. **Números Complexos e a Transformações de Möbius** . Dissertação de mestrado em matemática. UFG-PROFMAT. Goiânia, 2013.

[27] ZABADAL, J. R. S and BECK, D. and GARCIA, R. L. **Problemas Difusivos Bidimensionais em Regime Permanente com Fonte Arbitrária – Soluções Exatas**. SCIELO. Vol.11. Rio de Janeiro, 2006.

[28] ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.