INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOÃO MARCOS DA SILVA BARROS

EQUAÇÃO QUADRÁTICA: HISTÓRIA, ABORDAGENS E CONTEXTUALIZAÇÃO

CAJAZEIRAS-PB
FEVEREIRO DE 2020

João Marcos Da Silva Barros

EQUAÇÃO QUADRÁTICA: HISTÓRIA, ABORDAGENS E CONTEXTUALIZAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Me. Késsia Carvalho
Coorientador: Prof. Me. Francisco Aureliano Vidal

CAJAZEIRAS-PB
FEVEREIRO DE 2020

Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

B277e

Barros, João Marcos da Silva

Equação quadrática: história, abordagens e contextualização / João Marcos da Silva Barros; orientadora Kíssia Carvalho; coorientador Francisco Aureliano Vidal.- Cajazeiras, 2020.

75 f.: il.

Orientadora: Kíssia Carvalho.

TCC (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2020.

1. Equações quadráticas 2. Jogo de Quadros - História I. Título.

517.9(0.067)

João Marcos Da Silva Barros

EQUAÇÃO QUADRÁTICA: HISTÓRIA, ABORDAGENS E CONTEXTUALIZAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 19 / 03 /2020

BANCA EXAMINADORA

Kíssia Carvalho

Prof. Me. Kíssia Carvalho (IFPB-CZ)

Orientadora

Francisco Aureliano Vidal

Prof. Me. Francisco Aureliano Vidal (IFPB-CZ)

Coorientador

Diêgo Ayllo da Silva Simões

Prof. Me. Diêgo Ayllo da Silva Simões (IFPB-CABEDELO)

José Doval Nunes Martins

Prof. Me. José Doval Nunes Martins (IFPB-CZ)

Dedico a Yeshua Hamashia, Jesus Cristo, por seu sacrifício por todos nós e pela metanóia operada em mim, o que me possibilitou ingressar e concluir esse incrível curso. Dedico também à minha família, por sempre estar junto em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por toda a paciência, graça e amor por nós demonstrados ao entregar o seu unigênito, nos dando vida nEle com isso.

À minha mãe Marilene Almeida da Silva Gomes, por seu extraordinário auxílio e amor, sem o qual muito dificilmente eu poderia ter concluído esse curso.

Ao meu pai João Ferreira Barros, pelo incentivo e amor.

À toda a minha família, por tudo de bom que vivi por fazer parte dela.

À minha noiva Maria da Conceição Alves Rodrigues (Samara), pela paciência e incentivo comigo, em grande parte desse curso.

Agradeço de uma forma única à minha orientadora, Kíssia Carvalho. Encontrei nas orientações dela muito mais que simples direcionamentos, se é que são simples, mas aprendi que deve-se existir amor no que se faz, por isso que ela é um exemplo em cuidado e carinho pelos alunos da licenciatura.

Agradeço tambéms ao meu coorientador, Francisco Aureliano Vidal, por sua paciência ímpar e por toda ajuda.

À toda a família IFBP-CZ, por nos abraçar e proporcionar um ensino de qualidade, possibilitando vôos mais altos.

Agradeço também ao professor José Doval Nunes Martins e o professor Diêgo Ayllo da Silva Simões, por se disponibilizarem a formar a banca avaliadora do meu trabalho, junto aos meus orientadores.

Agradeço a todos os meus amigos da licenciatura, em especial aos amigos José Jeferson Pereira Brasil, Valdigley Ferreira Campos, Ana Nonato Trigueiro, Weliton Íris de Sousa, Valéria Roberto e Maria Beatriz Marim de Moura, por toda ajuda ao longo do curso. São pessoas como essas que fazem a amizade ser tão agradável.

Sobretudo, agradeço novamente ao meu Deus, por me possibilitar viver tudo o que vivi ao longo desse incrível curso, onde pude aprender tantas coisas que nem é possível enumerar.

RESUMO

A equação quadrática é um assunto recorrente na vida dos estudantes, desde o ensino básico até o ensino superior. Além disso, existem situações reais que são descritas por meio ou relacionadas às equações quadráticas, por isso, é importante haver certo nível de domínio desse conteúdo. Este trabalho apresenta um estudo da equação quadrática nos quadros da Álgebra, Geometria e Cálculo Numérico, analisando seu desenvolvimento histórico, e como a contextualização colabora nesse estudo. Esta pesquisa é de caráter qualitativo, natureza básica e é exploratória, onde houve um aprofundamento por meio de revisão bibliográfica de obras relacionadas ao conteúdo. Verificou-se que, nem sempre a equação quadrática é contextualizada corretamente ou é apresentado seu desenvolvimento histórico. A partir desses resultados, percebe-se que a história junto a uma boa contextualização potencializa o processo de geração de significados no estudo da equação quadrática. Como o trabalho foi limitado aos números reais, sugerimos para trabalhos semelhantes um estudo abrangendo os números complexos.

Palavras-chaves: Equação Quadrática; História; Jogo de Quadros; Contextualização.

ABSTRACT

The quadratic equation is a recurring subject in students' lives, from basic education to higher education. In addition, there are real situations that are described through or related to quadratic equations, so it is important to have a certain level of mastery of this content. This work presents a study of the quadratic equation in the frameworks of Algebra, Geometry and Numerical Calculus, analyzing its historical development, and how contextualization collaborates in this study. This research is of a qualitative nature, basic in nature and is exploratory, where there was a deepening through bibliographic review of works related to the content. It was found that the quadratic equation is not always correctly contextualized or its historical development is presented. From these results, it is clear that the story together with a good context enhances the process of generating meaning in the study of the quadratic equation. As the work was limited to real numbers, we suggest for similar works a study covering complex numbers.

Keywords: Quadratic Equation; History; Game of Presentment; Contextualization.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Grande parte da matemática que conhecemos hoje surgiu a partir de necessidades e questionamentos sobre como fazer ou como facilitar determinada coisa. Não diferente disso, os registros mais antigos sobre uma atividade matemática que envolvesse a equação quadrática remonta os anos 2000 a.C na mesopotâmia, afirma Garbi(2010). Ainda segundo Garbi(2010), essa atividade que em partes pode ser considerada dedutiva, se originou a partir de necessidades práticas, como era o trabalho de escribas, engenheiros e arquitetos. A equação quadrática aparece nesse contexto como uma ferramenta para encontrar determinadas medidas desconhecidas sabendo-se de outras, o que é útil na resolução de problemas.

As contribuições feitas pelos povos mais antigos foram sendo estudadas e usadas como embasamento para evoluções posteriores. Dessa maneira, a forma como entender, representar e resolver situações envolvendo equação quadrática (eq. quadrática) foi sendo aperfeiçoada. Com isso, o embasamento matemático por trás da eq. quadrática também evoluiu. Seguindo esses progressos, também ocorreram mudanças na forma de ensinar, novas metodologias surgiram com o propósito de tornar a aprendizagem mais significativa.

Sabendo que, nem sempre se leva em conta a história por trás do conteúdo matemático ou se apresenta de forma descontextualizada quando é estudado problemas de eq. quadrática, foi pensado esse trabalho, para auxiliar professores de matemática e alunos no estudo da eq. quadrática. Assim, tentamos juntar nesse documento o contexto histórico da eq. quadrática, seu embasamento matemático (somente nos reais, com os coeficientes reais) e sugestões de ensino por meio da contextualização.

É importante deixar claro que, ao longo do trabalho será relacionado o termo "equação quadrática" com "função quadrática", mas que são coisas distintas. Como a eq. quadrática é um caso particular da função quadrática e como a eq. quadrática tem registros mais antigos do que a função quadrática, então, as contribuições feitas pelos povos antigos auxiliaram no desenvolvimento da função quadrática que conhecemos hoje. Dessa forma, sabendo da relação entre eq. quadrática e função quadrática, a função quadrática pode ser abordada no contexto das cônicas e por meios numéricos, além de se usar bastante o contexto histórico e a contextualização no ensino da eq. quadrática. Nessa pespectiva, podem ser encontrados vários trabalhos científicos que abordam a equação quadrática por meio de uma, ou mais, dessas formas. Apresentaremos na sequência alguns dos trabalhos que foram encontrados mas não foram citados aqui.

- Soares(2013) apresenta um estudo sobre função quadrática, abordando ela no contexto algébrico e geométrico, quando trata da função e suas propriedades partindo de situações envolvendo equações quadráticas e do método de completar quadrado.

- Ribeiro(2013), por meio do contexto histórico da função quadrática e utilizando-se do Winplot e o Geogebra, que são softwares matemáticos, realizou um estudo sobre função quadrática, e como trabalhar com a função quadrática de forma contextualizada a partir de situações problemas. Apresenta atividades que usam-se da função quadrática na resolução de problemas de Física, Economia e Matemática.

- Ferreira(2014), tomando como ponto de partida o pensamento matemático que envolveu a equação quadrática na antiguidade, trabalha com o estudo do ponto máximo ou mínimo da função quadrática de forma contextualizada e aplicada na matemática e em outras áreas.

Este trabalho foi baseado em livros como o Lima(2006), Winterle(2000), que apresentam a parte formal de conteúdos relacionados à equação quadrática, e livros como o Garbi (2010), Boyer (2012) e Eves (2011), que apresentam a parte histórica da eq. quadrática, que são oferecidos na grade de alguns cursos de licenciatura em matemática. Esses livros expõem teoria clássica, demonstrações, vários exemplos e aplicações na Matemática e na Física. Dentre esses, Lima(2006) e Winterle(2000) não abordam a equação quadrática em três contextos distintos, que são o algébrico, geométrico e o numérico, e nem sempre usam-se da história e da contextualização para facilitar o ensino da equação quadrática. Assim, esse trabalho se nortea da seguinte forma: Como a história da equação quadrática junto a uma boa contextualização pode contribuir no estudo da equação quadrática?

O objetivo dessa pesquisa é estudar a equação quadrática em três diferentes contextos (algébrico, geométrico e numérico), analisando como ela se desenvolveu ao longo dos séculos (sua história) e como a contextualização pode contribuir nesse estudo, sendo apresentadas sugestões de abordagens contextualizadas, e alguns exemplos, envolvendo equação quadrática de forma contextualizada.

Essa pesquisa é de caráter qualitativo, visto que visa um aprofundamento do conteúdo, é de natureza básica, uma vez que contribui para o avanço da ciência mas não tem uma aplicação prática e é exploratória onde foi realizada uma revisão bibliográfica envolvendo algumas obras para o estudo do conteúdo e desenvolvimento do trabalho. A revisão bibliográfica foi realizada por meio de pesquisas nos livros citados e em sites da internet, como o Google, Google Academic, Google Books e Siello. As palavras chave das buscas foram, EQUAÇÃO QUADRÁTICA, HISTÓRIA DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA, e CONTEXTUALIZAÇÃO DE EQUAÇÃO QUADRÁTICA.

Essa pesquisa se divide em quatro capítulos, onde no primeiro realizamos um estudo da história da equação quadrática, identificando, entre outras coisas, os métodos de resolução utilizados e as contribuições de cada povo. No segundo capítulo apresentamos a concepção de mudança de quadros, e sob essa concepção foi realizado um estudo sobre a equação quadrática em três contextos, o algébrico, o geométrico e o numérico. No terceiro capítulo expomos algumas concepçoes sobre como entendemos a contextualização, e sob essa visão apresentamos exemplos de metodologias contextualizadas e exemplos de como contextualizar e como não contextualizar questões de equação quadrática. No quarto apresentamos as considerações finais.

Capítulo 1

Evolução histórica da equação quadrática

A história das equações quadráticas envolvem várias culturas, tempos e pontos de partida diferentes, sendo que, o seu desenvolvimento se deu principalmente por intermédio dos babilônios, egípcios, gregos, árabes, chineses e hindus. Com o passar dos séculos, os estudos desenvolvidos pelos povos mais antigos foram sendo reaproveitados pelas sociedades seguintes, fazendo com que houvesse mais aperfeiçoamento desse assunto. Cada um desses povos tinham modos de entender e resolver os problemas sobre equações quadráticas, o que nos dá uma riqueza de detalhes sobre o método utilizado e a forma como eles os interpretavam. Neste capítulo apresentaremos como se deu esta evolução em algumas civilizações antigas, desde a Babilônica até a Europa renascentista, povos esses que deixaram registros escritos dos seus trabalhos, o que direcionou nossa escolha.

1.1 Babilônia e Egito

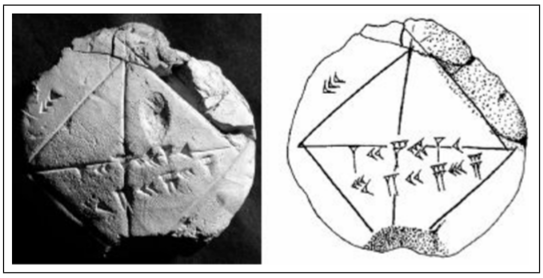
Segundo Garbi (2010), por volta de 4000 a.C o conhecimento matemático na mesopotâmia, desenvolvido pelos escribas, “engenheiros” e “arquitetos” mesmo que inicialmente de forma empírica, serviu como base para o desenvolvimento de uma suposta matemática dedutiva, fato esse respaldado por alguns feitos que Garbi (2010) classifica como “surpreendentes”. Ainda segundo esse autor, por volta de 2000 a.C os matemáticos babilônicos já conheciam a propriedade geral do triângulo retângulo (teorema de Pitágoras), já resolviam equações de primeiro e segundo graus, calculavam áreas e volumes de algumas figuras geométricas e determinaram com grande precisão a raiz quadrada de 2, dentre outras coisas. Com isso podemos perceber que a matemática babilônica tinha por predominância os estudos envolvendo álgebra e geometria. É interessante comentar, nesse ponto, que a linguagem simbólica que eles utilizavam para resolver os problemas, conhecida como "álgebra retórica", é distinta da que usamos em nossos dias, haja vista que o nosso tipo de simbologia é relativamente recente, assim como reforça Garbi (2010, p.12), quando diz que "somente os números eram representados por meio de símbolos: os desenvolvimentos eram, em sua quase totalidade, expressos por palavras".

Com relação aos métodos de resolução de equações quadráticas ultilizados pelos babilônios, Eves (2011) escreve que perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica muito desenvolvida, eles resolviam as equações quadráticas pelos métodos semelhantes a substituição numa fórmula geral e completar quadrados. Ainda relacionado aos métodos, Eves (2011, p.61), relacionando a álgebra e geometria babilônica, escreve que

> a marca principal da geometria babilônica é seu caráter algébrico. Os problemas mais intrincados expressos em terminologia geométrica são essencialmente problemas de álgebra não triviais. [...]Há muitos problemas que dizem respeito a uma transversal paralela a um lado de um triângulo retângulo e que levam a equações quadráticas.

Para uma melhor compreensão dos problemas sobre equações quadráticas que serão apresentadas nessa seção é interessante que façamos uma rápida apresentação do tipo de escrita e representação que eles usavam. Segundo Boyer (2012, p.40-42) os babilônios, em sua escrita cuneiformes e numeração posicional, usavam uma notação sexagesimal, por exemplo, tomemos a aproximação da raiz quadrada de 2, apresentada na Figura 1.1, que em caracteres modernos pode ser escrita como $1;24,51,10$. Nesse exemplo o ponto e vírgula separam a parte inteira da decimal e a vírgula separa as posições sexagesimais. Traduzindo esse exemplo para a linguagem decimal, temos $1 + 24(60)^{-1} + 51(60)^{-2} + 10(60)^{-3}$.

Figura 1.1: Imagem do tablete YBC 7289 que mostra a aproximação da raiz quadrada de 2 na escrita cuneiforme.



Fonte: Roque (2012, p.49)

Segundo Boyer (2012, p.44) por muito tempo não se pensou em abordar uma equação quadrática da forma $x^2 + px + q = 0$, com $p > 0$ e $q > 0$, pois a equação não possui raiz positiva, e como a álgebra e a geometria se relacionavam, os babilônios entendiam uma raiz de um problema de equação quadrática como sendo a medida de um lado de um quadrado, e como não existe comprimento negativo eles não abordavam determinados tipos de equação que assumia valores negativos. Por conta disso, as equações de segundo grau no tempo babilônico, Idade Média e até mesmo no começo do período moderno, foram classificadas em três tipos:

Tipo 1: $x^2 + px = q$
Tipo 2: $x^2 = px + q$
Tipo 3: $x^2 + q = px$

Esses três tipos de equações quadrática podem ser encontrados nos exercícios resolvidos que os babilônios utilizavam em seus estudos. Segundo Roque (2012), os babilônios usavam a tabletes com resutados de operações e um certo número de procedimentos, semelhantes a exercícios resolvidos. Os tabletes com resultados serviam de auxílio em cálculos, por exemplo, para saber a raiz quadrada de certo número ou a multiplicação entre dois números de certo passo de uma questão. Já os tabletes com procedimentos, trataríamos hoje por meio de equações. Vejamos agora, em detalhes, alguns desses exercícios resolvidos para que possamos identificar os tipos de equação quadrática abordada e por meio de qual procedimento eles resolviam os problemas.

Ainda segundo essa autora, os exemplos que veremos agora podem ser encontrados na coleção do British Museum, na placa BM 13901. O primeiro é o problema #1, que traduzido livremente fica:

Exemplo 1: “Adicionei a área e o lado de um quadrado, obtive 0;45. Qual o lado?”
Solução:
i) Tome 1
ii) Fracione 1 tomando a metade (que é $0;30$)
iii) Multiplique $0;30$ por $0;30$ (que é $0;15$)
iv) Some $0;15$ a $0;45$ (que é 1)
v) 1 é a raiz quadrada de 1
vi) Subtraia os $0;30$ de 1
vii) $0;30$ é o lado do quadrado

O exemplo seguinte é o #3 que é semelhante ao anterior. Pode ser encontrado na placa BM 13901 e traduzindo, fica:

Exemplo 2: “Subtraí o terço da área e depois somei o terço do lado do quadrado à área restante: 0;20.”

Solução:

i) Tome 1

ii) Subtraia o terço de 1 (que é $0;40$)

iii) Multiplique $0;40$ por $0;20$ (que resulta em $0;13,20$)

iv) Encontre a metade de $0;20$ (que é $0;10$)

v) Multiplique $0;10$ por $0;10$ (que resulta em $0;1,40$)

vi) Adicione $0;1,40$ a $0;13,20$ (que é $0;15$)

vii) $0;30$ é a raiz quadrada

viii) Subtraia $0;10$ de $0;30$ (que é $0;20$)

ix) Tome o recíproco de $0;40$ (que é $1;30$)

x) Multiplique $1;30$ por $0;20$ (resultando em $0;30$)

xi) $0;30$ é o lado do quadrado

Podemos perceber com esses exemplos que existem algumas semelhanças entre alguns passos nos dois exemplos, isso nos leva a pensar se existe alguma generalidade nos algorítmos que eles usavam na resolução dessas questões. Segundo Roque (2012, p.51) existia sim um certo tipo de generalidade, mesmo que ela fosse distinta já que eles trabalhavam com listas de exemplos específicos. Além disso é interessante resaltar a habilidade algébrica e o reaproveitamento de resultados obtidos e sua reutilização na resolução de novos exemplos.

Dado a entender que existia uma certa generalidade no passo-a-passo desses dois exemplos, tentemos montar um procedimento equivalente ao roteiro babilônico para encontrar a solução dessas questões. Por Roque (2012, p.52) podemos encontrar esse procedimento, e ele é dado do seguinte modo: Seja a equação da forma $ax^2 + bx = c$, sendo a, b e c números positivos, de forma semelhante às soluções anteriores, temos:

i) Multiplique a por c (que é ac)

ii) Encontre a metade de b (que é $\frac{b}{2}$)

iii) Multiplique $\frac{b}{2}$ por $\frac{b}{2}$ (que é $\left(\frac{b}{2}\right)^2$)

iv) Adicione ac a $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ (que é $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac$)

v) A raiz quadrada é $\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}\right)$

vi) Subtraia $\frac{b}{2}$ da raiz quadrada encontrada (que é $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}$)

vii) Tome o recíproco de a (que é $\frac{1}{a}$)

viii) Multiplique $\frac{1}{a}$ por $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}$ para encontrar a resposta

ix) O lado do quadrado é $l = \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}\right)\frac{1}{a}$

Podemos encontrar outro procedimento semelhante a esse no trabalho de Boyer (2012, p.44), sendo que, a forma estabelecida por ele para resolver as questões é dada por $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$ para uma raiz da equação $x^2 - px = q$ e $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$ para uma raiz da equação $x^2 + px = q$. Percebemos que esses procedimentos são variações do que foi apresentado por Roque (2012, p.52), que de uma forma mais geral engloba um número maior de situações. Isso se dá por conta que, nos dois exemplos de equações quadráticas analisadas por Boyer ele aborda problemas onde a forma da equação é dada por $x^2 - px = q$ ou $x^2 + px = q$. É interessante comentar que, em um desses exemplos Boyer comenta que os babiônicos também sabiam usar transformações algébricas, quando eles reduziram a equação $11x^2 + 7x = 6; 15$ ao tipo padrão, $x^2 + px = q$, ao multiplicar a equação por 11 para obter $(11x)^2 + 7(11x) = 1, 8; 45$, fazendo com que fosse reduzida a forma normal, mas com a incógnita sendo $y = 11x$. Ao reduzir à forma normal, era só usar o procedimento correspondente à forma encontrada.

Como já vimos, a álgebra babilônica era bastante desenvolvida para seu tempo, e um fato que reforça ainda mais isso são todos esses exemplos mostrados anteriormente, mas não podemos deixar de comentar que existe uma justificativa geométrica no cálculo das soluções das equações quadráticas. Vejamos como os babilônicos tratavam a solução das equações de segundo grau de uma forma geométrica, o que deixará a causa do passo-a-passo das soluções com mais significado. Segundo Roque (2012), após as primeiras traduções dos textos babiônicos serem realizadas pelo historiador O. Neugebauer, conjecturou-se que a natureza da matemática babilônica fosse de caráter algébrico, mas após traduções mais recentes feitas pelo historiador J. Høyrup houve uma nova interpretação do procedimento, só que esse foi de natureza geométrica. Vejamos como a nova tradução do exemplo 1 nos leva a uma nova interpretação:

Nova tradução do Exemplo 1 feita por J. Høyrup: "A superfície e a minha confrontação acumulei: obtive 0;45". (Entendemos aqui que o objetivo era determinar o lado da superfície, que o problema denomina de confrontação, que é um quadrado)

Solução:

i) 1 é a projeção

ii) Quebre 1 na metade (que resulta em 0;30) e retenha 0;30, obtendo 0;15

iii) Agregue 0;15 a 0;45

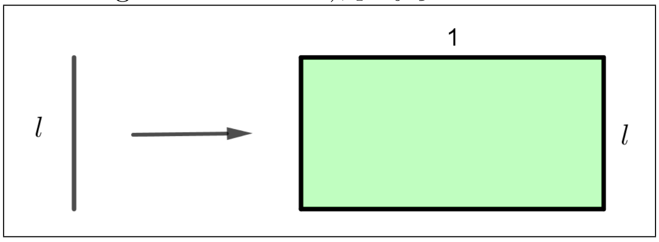
iv) 1 é o lado igual

v) Retire do interior de 1 os 0;30 que você reteve

vi) 0;30 é a confrontação

Segundo Roque (2012), após essa nova versão do problema, surgiu uma interpretação geométrica do procedimento. A partir do passo i) eles transformavam o lado procurado, ao qual chamaremos de l, através de uma projeção em um retângulo de lados l e 1 e área igual a l. Para os babilônicos não havia problema em transformar um segmento em uma superfície, que nesse caso era um lado l em um retângulo de lados l e 1 e área igual a l, veja a Figura 1.2.

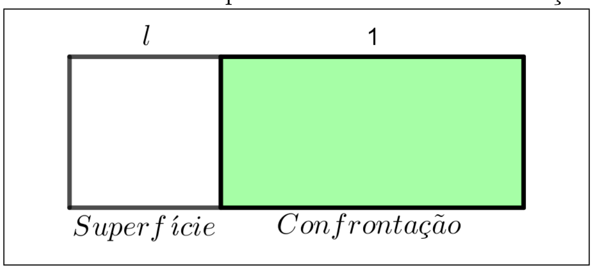
Figura 1.2: Passo i), projeção do lado l.



Fonte: Roque (2012, p.53), adaptado pelo autor

Na Figura 1.3 representamos geometricamente o enunciado do problema, "A superfície e a minha confrontação acumulei", por meio do retângulo da ilustração anterior e um quadrado de lado l, cuja soma deve dar 0;45 (como é pedido no enunciado). Com a finalidadde de se estabelecer uma relação de equivalência entre as áreas, essa figura será "cortada e colada" de forma que consigamos resolver o problema.

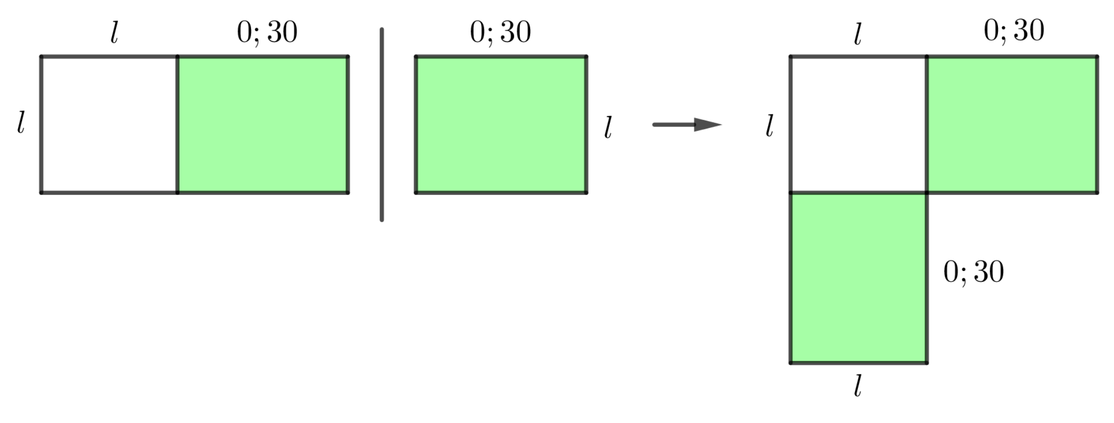
Figura 1.3: Enunciado: "A superfície e a minha confrontação acumulei" l.



Fonte: Roque (2012, p.54), adaptado pelo autor

Agora, como no passo ii), quebremos o retângulo de lado 1 ao meio. Reorganizando a figura, obtemos o seguinte resultado (Figura 1.4), que tem a mesma área do início (0;45).

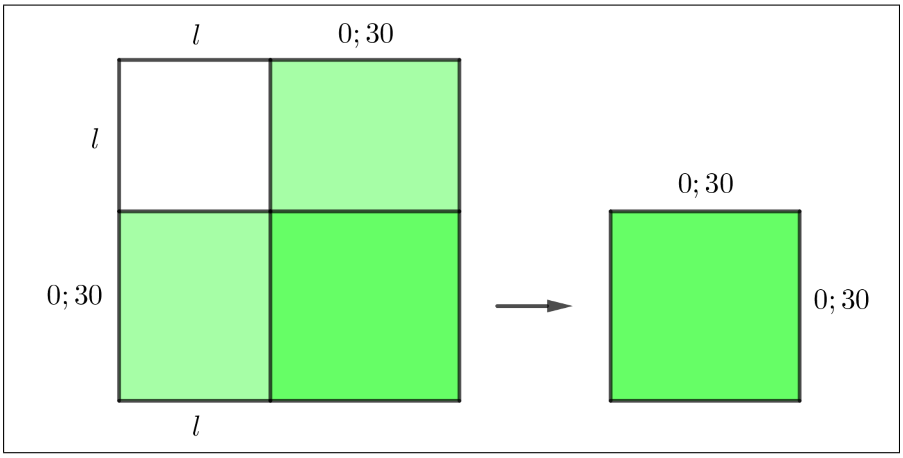
Figura 1.4: Passo ii): "Quebre 1 na metade."



Fonte: Roque (2012, p.54), adaptado pelo autor

Agora perceba que, os lados formados pela figura que repartimos ao meio determinam um quadrado de lado 0;30, que segundo a solução do problema, "retenho", em outras palavras, multiplico por ele mesmo, o que resulta na área de um novo quadrado (0;15). Podemos unir essa área ao conjunto, completando o quadrado, e formar um quadrado maior, que tem a área igual 1 (0;15 + 0;45 = 1). Veja Figura 1.5.

Figura 1.5: Passos iii) e iv): "Retenho 0;30 e agrego o resultado a 0;45. O quadrado maior tem área 1 e lado 1."



Fonte: Roque (2012, p.55), adaptado pelo autor

Por fim, como o quadrado de 1 é 1, então 1 é o lado comum, agora só basta desse lado retirar o lado do quadrado menor (0;30), o que resulta no lado procurado, $1 - 0;30 = 0;30$.

É importante comentar que, como já vimos, a questão pede que se acumule uma área e uma confrontação, que sabemos ser o lado procurado, ou seja, se pede que calcule a soma da área de um quadrado com o seu lado. Com isso, percebemos que os babilônios não tinham problema em tratar segmentos como sendo áreas, e isso possibilitou novos meios interpretativos que geraram novos caminhos para solucionar problemas de equações quadráticas.

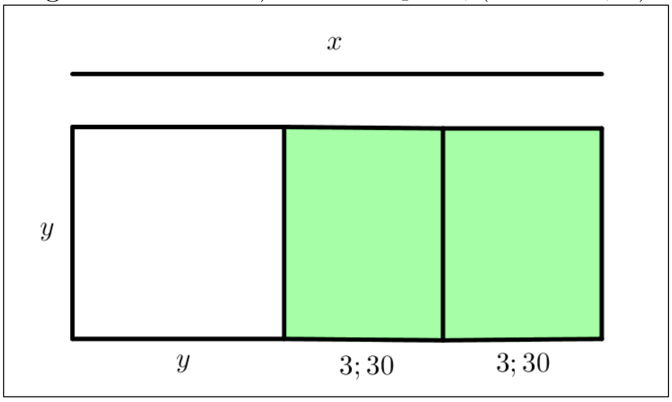
Vimos os três tipos de classificação para equações quadráticas que valeu por um longo tempo, e vimos a forma para solucionar os dois primeiros tipos, que é por meio do procedimento onde o lado procurado do quadrado é dado por $l = \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}\right)\frac{1}{a}$, para equações do tipo $ax^2 + bx = c$, que engloba os dois primeiros tipos $x^2 + px = q$ e $x^2 = px + q$. Segundo Boyer (2012), resolver um problema envolvendo o terceiro tipo de equação quadrática era equivalente a resolver o sistema simultâneo $x+y = p$, $xy = q$, e era muito recorrente em textos de problemas. Vejamos agora como eles resolviam problemas envolvendo o terceiro tipo. Segundo Roque (2012) o seguinte exemplo consta do tablete YBC 6967, e o enunciado dele é dado da seguinte forma:

Exemplo 3, problema de *igum* e *igibum*: É um problema onde o produto de dois números é igual a 1. Vejamos agora um exemplo desse tipo, onde se quer determinar o valor do *igibum* se este excede o *igum* de 7. As condições são: i) $xy = 1$ (60) e ii) $x - y = 7$

Solução:
i) Divida 7 por 2 (obtendo 3;30)
ii) Multiplique 3;30 por 3;30 (que é 12;15)
iii) Adicione 1 a 12;15 (obtendo 1,12;15)
iv) Qual a raiz quadrada de 1,12;15? (resposta 8;30)
v) Escreva 8;30 duas vezes
vi) De um subtraia 3;30 e em outro adicione essa mesma quantidade
vii) O *igibum* é 12 e o *igum* é 5

Como no exemplo anterior, usaremos a técnica geométrica de “cortar e colar” para determinar uma equivalência de áreas. Vemos na Figura 1.6 um retângulo dividido em três partes, onde a primeira é um quadrado de lado y e a segunda tem base medindo 7, que foi dividida ao meio, resultando em dois retângulos de lado 3;30, com isso poderemos identificar o trato geométrico por trás desse exemplo.

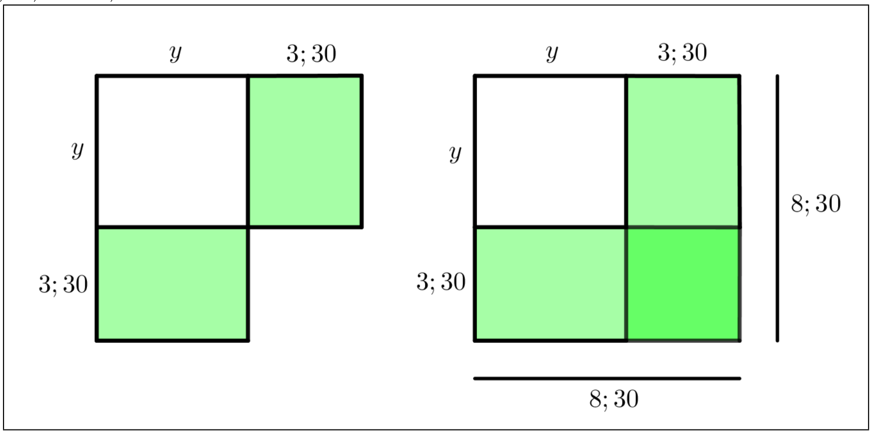
Figura 1.6: Passo i): Dividir 7 por 2, (obtendo 3;30).



Fonte: Roque (2012, p.57), adaptado pelo autor

A Figura 1.6 tem a área igual a 1, como diz no enunciado do problema. Agora, rearrumando a figura, pela Figura 1.7, temos:

Figura 1.7: Passos ii), iii) e iv): Multiplique 3;30 por 3;30 e adicione a 1, obtendo 1,12;15. A raiz quadrada de 1,12;15 é 8;30.



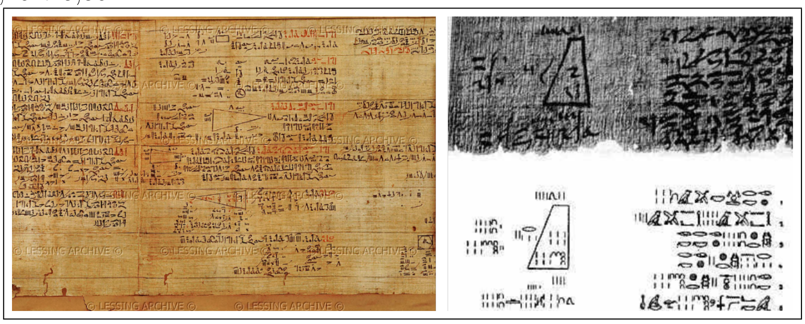
Fonte: Roque (2012, p.57), adaptado pelo autor

A figura que parece um L (do lado esquerdo Figura 1.7) tem a mesma área da Figura 1.6, que é 1 (60). Perceba que, semelhante ao exemplo 2, os lados dos retângulos que medem 3;30 delimitam um quadrado de área $3;30 \times 3;30 = 12;15$ (que equivale ao passo ii). Somando essa área menor a área da figura em forma de L, obtemos $1 + 12;15 = 1,12;15$ (que equivale ao passo iii). Agora, para saber o lado desse quadrado formado pela somas dessas áreas, basta extrair a raiz quadrada de 1,12;15, que é 8;30 (passo iv). Para encontrar o lado do retângulo original, basta subtrair o lado do quadrado menor (3;30) da medida do lado encontrado ao extrair a raiz, que foi 8;30, o que nos dá o valor de 5. Como 5 é a medida de um dos lados do retângulo original e o outro lado excede este de 7, então o outro lado deve medir 12.

Com esse e os outros exemplos apresentados, podemos identificar meios algébricos e geométricos de interpretação e resolução envolvendo os três tipos de equações quadráticas. É interessante resaltar que mesmo sendo considerada muito forte em sua álgebra, os babilônicos não deixaram de tratar os problemas de equações polinomiais de segundo grau também por meios geométricos, mesmo que para isso eles tivessem que usar de artifício não comum, que era somar área e lado do quadrado ou retângulo, o que nos deu uma qualidade de detalhes boa dessa forma de resolução. Todo esse avanço no trato desses problemas deu embasamento para o estudo e aperfeiçoamento realizado pelos povos seguintes.

Em relação a matemática egípcia, em comparação com a babilônica, pouco se tem registrado, e um dos motivos desse fato pode ser por que esse povo usava um material bastante frágil em seus registros e estudos, que era em papiro (planta de folhas fibrosas encontradas nas margens do rio Nilo). Segundo Garbi (2010) os documentos mais famosos que temos hoje são o Papiro de Ahmes, que também é conhecido como Papiro de Rhind (que foi o egiptólogo inglês que o econtrou no final do século 19), e o Papiro de Moscou, veja a Figura 1.8.

Figura 1.8: Passos ii), iii) e iv): Multiplique 3;30 por 3;30 e adicione a 1, obtendo 1,12;15. A raiz quadrada de 1,12;15 é 8;30.



Fonte: Sites Matemática é Fácil [1] e Papiro de Moscovo.[2]

No papiro de Ahmes, que data de cerca de 1650 a.C, são encontradas instruções acerca de soluções de 85 problemas de aritmética e geometria. No papiro de Moscou, que data de cerca de 1850 a.C, são encontrados 25 problemas também de aritmética e geometria e também, ainda segundo Garbi (2010), é encontrado nesse papiro a descrição verbal do cálculo do volume do tronco de uma pirâmide. Ainda segundo esse autor, nesses documentos não existem problemas envolvendo equações quadráticas, o que pode ser encontrado que mais se aproxima são questões envolvendo equações lineares. O artifício

[1]Disponível em <encurtador.com.br/hFOZ0>. Acesso em 17 de novembro de 2019

[2]Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm36/papirode.htm>. Acesso em 17 de novembro de 2019

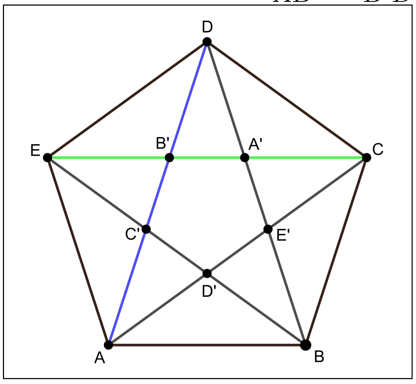
que eles usavam para resolver esse tipo de problema é chamado de "regra da falsa posição", por exemplo, qual o número que somado com sua metade dá 12? Pela regra da falsa posição fazia-se um chute inicial e olhava o que ocorria. Suponhamos que o chute fosse 4, como $4 + 2 = 6$, e 6 é metade de 12, então a resposta é o dobro de 4, ou seja 8.

1.2 Grécia e China

A matemática grega teve forte inspiração pelos povos egípcios e babilônicos, o que influenciou bastante a forma como eles desenvolveram seus estudos (predominantemente geométricos), muitos dos quais se perderam ao longo do tempo e por decorrência de outros fatores. A Grécia foi o lugar onde surgiram inúmeros matemáticos que deram importantíssimas contribuições à matemática, principalmente na geometria, e dentre esses ilustres matemáticos se destaca Tales (624 a.C. – 548 a.C., aproximadamente), da cidade jônica de Mileto. Segundo Garbi (2010) mesmo Tales não sendo considerado um matemático profissional, devemos a ele a primeira transformação do pensamento matemático, pois após visitar o Egito e a Babilônia ele não apenas repassou os conhecimentos geométricos aos seus conterrâneos, pelo contrário, "introduziu um conceito revolucionário: **as verdades matemáticas precisam ser demonstradas**" (GARBI, 2010, p.15, grifo original). A partir daí, Tales provou que feixes de paralelas cortadas por transversais produzem segmentos proporcionais, os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, entre outras provas.

Outro matemático grego que teve um papel muito significativo, poucas décadas depois de Tales, foi Pitágoras de Samos (580 – 500 a.C., aproximadamente). Segundo Garbi (2010) mesmo que os babilônios e chineses soubessem da propriedade geral do triângulo retângulo e os egípcios conhecendo o caso particular do triângulo de lados 3, 4 e 5, Pitágoras foi o primeiro que apresentou uma prova para relação entre hipotenusas e catetos de um triângulo retângulo. Ainda segundo esse autor, após Pitágoras demonstrar essa relação, pela primeira vez na Europa trabalhou-se com uma equação quadrática ($a^2 = b^2 + c^2$). Mesmo a matemática grega sendo mais desenvolvida quando o assunto era a geometria, segundo Boyer (2012, p.57) é provável que a geometria pitagórica não tenha determinado a forma de dividir um segmento em média e extrema razão. Segundo Boyer (2012), a média e extrema razão, também chamada de "secção áurea", atormentou os pitagóricos, e ela se relaciona à construção do pentagrama, ou pentágono estrelado. Se tivermos um polígono regular de cinco lados $ABCDE$ e traçarmos suas diagonais, que são cinco, elas se interceptam nos pontos $A'B'C'D'E'$. Esses pontos dividem as diagonais de um modo notável, fazendo com que em cada caso, um ponto da diagonal divida uma diagonal em dois segmentos de tamanhos diferentes, onde a razão entre toda a diagonal e o lado maior é igual à razão entre o lado maior e o menor, veja a Figura 1.9.

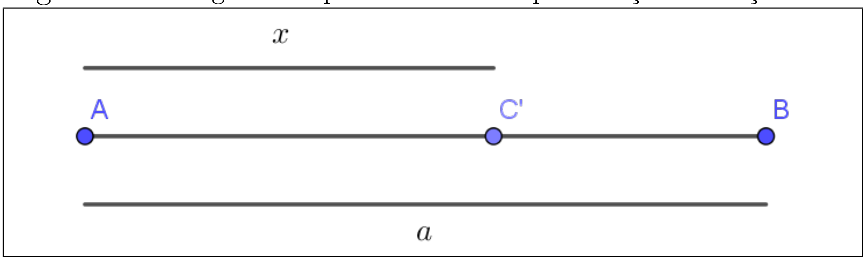
Figura 1.9: Secção áurea $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB'}} = \dfrac{\overline{AB'}}{\overline{B'D}} = k$



Fonte: Boyer (2012, p.57), adaptado pelo autor

Ainda segundo Boyer, dividir um segmento em média e extrema razão equivale a resolver uma equação quadrática, que tem por forma o tipo 1 apresentado na seção anterior. Para que possamos ver essa construção, tome um segmento $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC'} = x$, como mostra na Figura 1.10.

Figura 1.10: Segmentos que auxiliam na representação da secção áurea



Fonte: Boyer (2012, p.58), adaptado pelo autor

Pela propriedade da secção áurea, temos: $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{(a{-}x)}$, que após organizarmos, temos: $x^2 = a^2 - ax \Rightarrow x^2 + ax = a^2$. Como falado, esse é o tipo 1 na classificação das equações da seção anterior, e Pitágoras pode ter assimilado com os babilônios como resolvê-la de uma forma algébrica, mas Boyer adverte que se a for racional não há um x racional que satisfaça a equação, por isso sugere que Pitágoras pode ter abordado esse tipo de situação através de um processo geométrico parecido ao que se encontra em II. 11 e VI. 30 de Euclides, que são duas proposições do seu livro Os Elementos.

Outro grande nome da Matemática grega foi Euclides (300 a.C., aproximadamente). Não se sabe muito sobre a vida desse incrível matemático, apenas que, segundo

Garbi (2010), foi na Universidade de Alexandria perto de 300 a.C. que ele surgiu, resumiu e organizou o conhecimento matemático de até então. Responsável por escrever Os Elementos, Euclides manteve o conceito de Tales sobre as demonstrações e acrescentou que nem tudo pode ser provado, que as verdades mais elementares devem ser admitidas sem demonstração. Segundo Boyer (2012), após Tales e a revolução que ele trouxe no pensamento matemático, os gregos trataram dos problemas envolvendo equações quadráticas, herdadas dos babilônicos, através de procedimentos geométricos, diferente da álgebra aritmética deles, porque eles(gregos) não concordavam em somar segmentos com áreas, e áreas com volumes, ou seja, eles estabeleceram que deveria haver precisa isonomia entre os termos de uma equação. Ainda segundo esse autor, a partir daí, eles desenvolveram a solução de uma equação quadrática pelo procedimento conhecido como "aplicação de áreas", que foi uma parte da álgebra geométrica muito estudada em Os Elementos, de Euclides.

Para que possamos ver melhor o método de aplicação de áreas, vejamos como Euclides abordou um problema de equação quadrática que se encontra na proposição 11 do seu livro Os Elementos. A proposição é exposta do seguinte modo: "Dividir um segmento de reta dado de maneira que o retângulo determinado pelo todo e por uma das partes seja o quadrado construído sobre a outra parte" (AABOE, 1984, p.77 *apud* REFATTI; BISOGNIN, 2005, p.85).

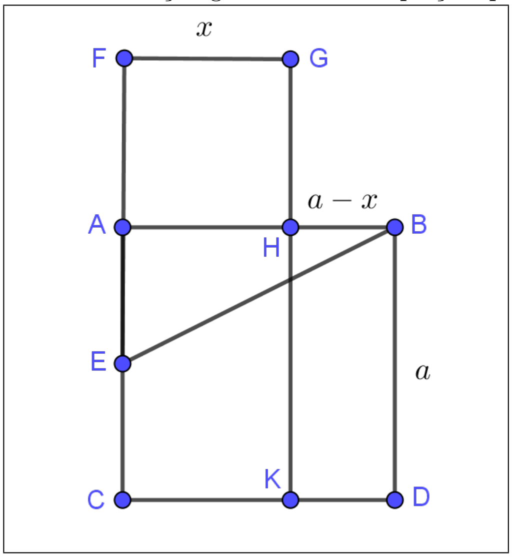
Segundo Refatti e Bisognin (2005), a proposição diz que devemos encontrar o ponto H sabendo que AB é uma reta dada, e que vale a relação $AB \cdot HB = AH$. Ainda segundo Refatti e Bisognin (2005), a solução desse problema se dá através do processo em seguida, e como aulíxio veja a Figura 1.11:

i) Forme um quadrado $ABCD$ sobre o lado AB;
ii) Trace o segmento BE, com E sendo o ponto médio do lado AC;
iii) Prolongue AC até um ponto F, determinado por $EF = EB$;
iv) Tome um ponto H em AB, de maneira que $AH = AF$;
v) Complete o quadrado $AFGH$ e prolongue GH até K, determinando $HBDK$;

Agora, dada essa construção, observe que:

i) $FC \cdot FA + (EA)^2 = (EF)^2$;
ii) $EF = EB$, e pelo teorema de Pitágoras:
$FC \cdot FA + (AE)^2 = (EB)^2 = (AE)^2 + (AB)^2$;

Figura 1.11: Resolução geométrica da equação quadrática



Fonte: Refatti e Bisognin (2005, p.85), adaptado pelo autor

iii) Subtraindo $(AE)^2$ nos dois lados, temos:

$FC \cdot FA = (AB)^2$;

iv) Pela ilustração 3, temos:

$(a + x)x = a^2 \Rightarrow x^2 + ax = a^2$.

Esses três matemáticos foram alguns dos muitos outros que constribuiram bastante com seus estudos matemáticos em território grego. Alguns dentre outros importantes matemáticos gregos, que segundo Garbi (2010), passaram pela universidade de Alexandria foram Arquimedes (287 - 212 a.C), considerado ser, na Antiguidade, o maior gênio; Apolônio (262 - 125 a.C), autor de "As cônicas" e Hiparco (180 - 125 a.C), que foi o criador da trigonometria. Ainda por Garbi (2010), após a tomada do Egito por Roma em 31 a.C., o desempennho da Universidade de Alexandria diminuiu, e somente após de mais de um século que outros nomes importantes começaram a surgir, como Herão (10 - 75 d.C.) ; Menelau (70 - 130 d.C.); Ptolomeu (85 - 165 d.C); Diofanto (200 - 270 d.C.), muito forte em teoria dos números na Antiguidade, entre outros.

Com relação à matemática da China Antiga, Boyer (2012, p.143) introduz que o mais antigo dos trabalhos matemáticos chineses se encontram no *Zhoubi Suanjing* (*Chou Pei Suang Ching*), que é uma coleção de textos escritos em faixas de bambu que foram encontrados em tumbas datadas do século II a.C., e é considerado uma exposição da matemática chinesa do século XII a.C. Nesse material podem ser encontrados cálculos astronômicos, uma introdução referente às propriedades do triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras e um pouco de frações. Ainda segundo Boyer (2012), outro material muito importante e talvez mais antigo do que o *Zhoubi*, foi o *Jiuzhang suanchu* (*Chui-chang* *suan-shu*) ou Nove Capítulos sobre a arte matemática. Boyer (2012) esclarece que nesse livro existem 246 questões sobre mensuração da terra, engenharia, agricultura, impostos, sociedades, solução de equações, cálculos e propriedades dos triângulos retângulos. Sobre equações de segundo grau, Boyer (2012, p.148-149) não apresenta detalhes sobre esse assunto diretamente, mas ao falar sobre a forma como Qin Jiushao (Ch'in Chiu-shao) (aproximadamente 1202-1261) determiou a raiz quadrada de 71824, problema esse presente na sua obra *Shushu juizhang* (Tratado matemático em nove partes). Para esse problema, ele usou 200 como a primeira aproximação de uma raiz $x^2 - 71824 = 0$. Após isso, diminuiu 200 das raízes dessa equação, obtendo $y^2 + 400y - 31824 = 0$ e achou 60 como aproximação e subtraiu 60 da raíz, onde chegou em $z^2+520z-4224 = 0$, que tem por raíz a 8. Assim, $x = 268$. Noutro exemplo que envolve equação quadrática, Boyer (2012) apresenta um método de transformação chamado *fan fa* desenvolvido por um matemático chines Zhu Shijie. Por Boyer (2012), para resolver a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$, Zhu Shijie obteve inicialmente $x = 19$ como aproximação, e em seguida usou o *fan fa* para transformar $y = x - 19$ para obter, $y^2 + 290y - 143 = 0$. O reultado foi $y = \dfrac{143}{(1 + 290)}$ como raíz aproxiada dessa equação. Assim, o valor correspondente de x é $19\dfrac{143}{291}$.

1.3 Hindus e Árabes

Segundo Garbi (2010), o povo hindu iniciou seus estudos em matemática muito antes dos muçulmanos, e em épocas iguais aos egípcios e mesopotâmios, eles já apresentavam um domínio de técnicas em Aritmética e Geometria. Ainda segundo esse autor, perto de 500 d.C., após a consolidação do sistema de numeração hindu, que se tornara posicional e com emprego de dez símbolos (dos quais o símbolo *sunya* é o zero), esse mesmo sistema de numeração foi difundido pelo mundo árabe pelo astrônomo e matemático Abu-Abdulah Muhammed inb-Musa al-Khwarizmi (783 - 850).

Segundo Roque (2012), dos documentos indianos mais antigos que se tem registro, o mais importante e antigo foi escrito por Aryabhata, nascido em 476, e mesmo que muito pouco se saiba sobre ele, Aryabhata inova ao sistematizar as técnicas de cálculo, o que caracteriza uma prática chamada "ganita". Nesse trabalho, escrito em forma de versos, podem ser encontradas técnicas geométricas e aritméticas semelhantes as usadas no cálculo para encontrar raízes quadradas e cúbicas, regras trigonométricas e cálculos de áreas.

Ainda segundo essa autora, por conta desses versos não serem tão fáceis de se compreender, outros matemáticos adicionavam a essas obras comentários redigidos, com o objetivo de apresentar sentido aos leitores. Com relação a isso, um importante astrônomo hindu chamado Brahmagupta, que viveu em 628 d.C., em um trabalho escrito sobre um comentário do livro de Aryabhata feito por Bhaskara I (viveu em 629, e não é o mesmo Bhaskara do século XII), dedica um capítulo à "ganita", onde escreve sobre operações aritméticas, juros, razões e proporções, e métodos para encontrar comprimentos, áreas e volumes de figuras geométricas. Além disso, possui em outro capítulo um estudo sobre os métodos de eliminação do termo médio e redução a uma variável, entre outros assuntos, que se tratavam de procedimentos onde se trabalha com valores desconhecidos.

Segundo Roque (2012), os livros mais famosos do século XII pertencem a Bhaskara (1114 - 1185), onde cita os procedimentos usados por Brahmagupta. Ainda por Roque (2012), em *Lilavati* e o *Bija Ganita*, livros mais famosos de Bhaskara, podemos perceber um amadurecimento na prática da "ganita", presente nos trabalhos de Aryabhata e Brahmagupta. Vejamos um exemplo do livro *Bija Ganita* apresentado por Roque (2012, p.213):

Elemplo I: "De uma quantidade retiramos ou adicionamos a sua raiz multiplicada por um coeficiente e a soma ou a diferença é igual a um número dado."

A referida quantidade é um quadrado, cuja raiz é a incógnita. Segundo essa autora, se traduzíssemos esse enunciado retórico em linguágem moderna, seria uma equação do tipo: $x^2 \pm bx = c$, e que tem por método de resolução à reduzir o problema a uma igualdade, usando-se da técnica de "eliminação do termo médio".

Roque (2012) ao descrever o método de Bhaskara em notação atual, apresenta a resolução do exemplo I da seguinte maneira:

i) Multiplicando em ambos os lados o valor $4a$ temos, $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$;

ii) Agora, adicione em ambos os lados o valor b^2, que resulta, $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$;

iii) Reorganizando, temos $(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$;

iv) Extraindo a raiz em ambos os lados e organizando temos,

$2ax + b = \sqrt{4ac + b^2} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$.

Segundo Garbi (2010), mesmo que a esse matemático hindu seja atribuído a dedução da fórmula geral da solução das equações quadráticas, ele mesmo afirmou que a tal fórmula foi descoberta pelo matemático hindu Shidhara (870 - 960) um século antes. Sobre essa fórmula geral, Garbi (2010) descreve que, ao tentar reduzir o grau da equação, o povo hindu chegou na seguinte situação:

Dada a equação, $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, temos:

i) Dividindo a equação por a e subtraindo $\dfrac{c}{a}$, temos;

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

ii) Completando quadrado, temos;

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

iii) Como $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ é quadrado perfeito, temos;

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

iv) Extraindo a raiz em ambos os lados, e como números positivou ou negativos elevados ao quadrado são sempre positivos, temos;

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

v) Logo;

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Com isso, Garbi (2010) adverte que a linguagem usada nessa dedução não é igual à que Bhaskara ultilizava, e resalta que foram os babilônios quem descobriram essa ferramenta de redução do grau de uma equação quadrática. Por fim, falando sobre Bhaskara, Boyer (2012, p.160) afirma que “Bhaskara foi o último matemático medieval importante da Índia”, e acrescenta que a obra dele retrata o ponto mais alto da parcela de contribuição matemática hindu anterior.

Com relação à matemática dos árabes, um nome se sobressai dentre todos, e nos deteremos a ele, o matemático e astrônomo Abu-Abdulah Muhammed inb-Musa al-Khwarizmi (783 - 850). Segundo Barbi (2010), motivado pelo desejo de fundar uma nova Alexandria, al-Mansur (reinou de 754 a 775) convidou sábios de muitas regiões para a sua cidade, Bagdad. Em 773, matemáticos hindus visitaram seu palácio e lhe apresentaram o sistema indiano de numeração.

Ainda por Boyer (2012) outro califa em Bagdad foi Al-Mamun (reinou entre 813 a 833), filho do califa Harun al-Rashid (reinou entre 786 a 806), que segundo a vontade de seu pai determinou que fossem traduzidos para o Árabe todos os trabalhos dos gregos que fossem encontrados, consolidando assim uma escola científica em Bagdad, com uma rica biblioteca. Foi por intermédio de Al-Mamun que al-Khwarizmi ganhou mais notoriedade no cenário matemático Árabe, e que a pedido do califa, escreveu seu livro

Al-Kitab al-jarb wa'l Muqabalah ou "O Livro da Restauração e do Balanceamento", onde aborda as equações. Segundo Boyer (2012) o Al-Jabr se aproxima muito da álgebra básica atual, porque se desprende dos complexos problemas de análise indeterminada, presentes nos trabalhos de Bramagupta e outros, e tem em si uma apresentação direta e de fácil entendimento sobre resolução de equações, em especial de segundo grau. O Al-Jabr não foi o único trabalho escrito por al-Khwarizmi, mas nos deteremos em especial neste livro.

Boyer(2012) apresenta em mais detalhes o conteúdo do livro Al-Jabr. Segundo esse autor, o livro tem uma ligeira apresentação do princípio posicional para números. Na sequência, apresenta três espécies de quantidades, que são raízes, quadrados e números (x, x^2 e números) que formam seis tipos de equações. Em seis capítulos pequenos, apresentam a resolução dessas equações. O capítulo I apresenta o tipo quadrados iguais a raízes, que em linguagem atual fica $x^2 = 5x$, $\dfrac{x^2}{3} = 4x$ e $5x^2 = 10x$, que tem por respostas, respectivamente, $x = 5$, $x = 12$ e $x = 2$. O capítulo II apresenta o tipo quadrados iguais a números, e o capítulo III resolve o tipo raízes iguais a números. Nesses três capítulos, sempre são resolvidos três exemplos em cada, para "ilustrar os casos onde o coeficiente do termo variável é igual a, maior que, ou menor que um." (BOYER, 2012, p.166). Os outros três capítulos abrangem os três casos clássicos de equações quadráticas com três termos, que podemos classificar como: quadrados e raízes iguais a números, quadrados e números iguais a raízes e raízes e números iguais a quadrados. Nas soluções, são encontradas maneiras para se completar quadrados, mas isso em situações específicas.

Em relação aos exemplos dos capítulos IV, V e VI, Boyer(2012) apresenta que o Cap. IV ilustra três exemplos, $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$ e $\dfrac{x^2}{2} + 5x = 28$ dos quais só são apresentadas as respostas positivas. Um único exemplo é apresentado no Cap. V: $x^2 + 21 = 10x$, com raízes 3 e 7 satisfazendo à regra $x = 5 \mp \sqrt{25 - 21}$. O Cap. VI, semelhante ao anterior, só apresenta um exemplo, $3x + 4 = x^2$, e nos adverte a dividir toda a equação pelo coeficiente do x^2, se esse não for o número 1. Para esse exemplo, o procedimento para completar quadrado equivale à solução $x = 1\frac{1}{2} + \sqrt{\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + 4}$, que só tem uma resposta positiva (não se considerava a negativa).

Ainda segundo Boyer (2012), influenciado pelos gregos, mas não muito semelhante à matemática grega clássica, nos capítulos IV, V e VI são apresentadas abordagens geométricas com a finalidade de demonstrar os exemplos. Apresentaremos na sequência somente a forma de demonstração do Cap. IV, pois ele já é suficiente em nosso trabalho. Para a equação $x^2 + 10x = 39$, temos o seguinte procedimento, aulixiado pela Figura 1.12:

i) Trace um quadrado $ABCD$, que representa x^2;

ii) Trace os retângulos $AIJB$, $BGHC$, $CLKD$, $DFEA$, representados por a, b, c e d, cada um medindo $2\frac{1}{2}$ de largura;

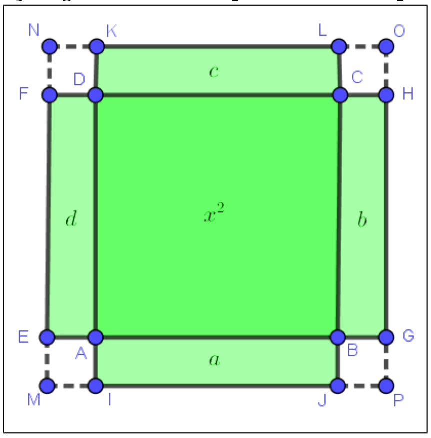
iii) Acrescente os quadrados $AEMI$, $BGPJ$, $CHOL$ e $DKNS$ das pontas, que tem área de $6\frac{1}{4}$ unidades cada um;

iv) Para completar o quadrado, some $4 \times 6\frac{1}{4}$, que resulta em $39 + 25 = 64$ unidades;

v) O lado do quadrado maior deve ser 8 unidades;

vi) Subtraia $2 \times 2\frac{1}{2}$ unidades, temos que $x = 3$

Figura 1.12: Representação geométrica do procedimento para "completar quadrado".



Fonte: Boyer (2012, p.167), adaptado pelo autor

Como já citado, as contibuições feitas por hindus e árabes em nosso sistema de numeração bem como no aperfeiçoamento de trabalhos envolvendo equações quadráticas, tem sua parcela de importância na história da matemática até o século XII. Fortemente inspirados pelos trabalhos dos gregos, eles absorveram e acrescentaram suas formas de interpretação e tratamento desses assuntos, o que facilitou os estudos feitos posteriormente, por conta dos numerais hindu-arábico apresentado por eles e difundido pelo mundo.

1.4 Europa medieval e renascentista

Dentre os matemáticos da Europa medieval, um que se destacou foi Leonardo de Pisa (1180 - 1250, aproximadamente) mais conhecido como Fibonacci. Segundo Boyer (2012, p.181), por conta do trabalho do pai, Fibonacci viajou pelo Egito, Síria e Grécia e teve por professor um muçulmano, por isso não se admira em saber que ele conhecia muito bem os numerais indu-abábicos. Um de seus trabalhos mais famosos foi o *Liber Abaci* (1202), onde apresenta "as nove cifras indianas" junto ao 0, que era chamado em árabe de "zephirum", e junto a isso, ele trata sobre procedimentos usuais algorítmicos ou aritméticos, extração de raízes e problemas sobre transações comerciais. Segundo Garbi (2010), muita contribuição nova foi dada por Fibonacci à simbologia algébrica, pois ele introduziu as palavras *res* ("coisa", em Latim), *radix* ("raiz") para a incógnita, *census* e *cubus* que representavam seu quadrado e cubo, nessa ordem. Boyer (2012) também mostra que Fibonacci também trabalhou com solução de equações cúbicas e análise indeterminada, e que a sua obra era avançada para o seu tempo. Todas essas contribuições foram de extrema importância posteriormente, através de estudos feitos por outros matemáticos renascentistas.

Segundo Boyer (2012), a álgebra mais conhecida na época do Renascimento se encontra na obra *Summa de aruthmetica, geometrica, proportioni et proportionalista* de 1494, do frei Luca Pacioli (1445 - 1514), que está diretamente ligada à obra *Liber Abaci* de 1202. A *Summa* reune materiais dos campos da aritmética, álgebra, geometria euclidiana mais elemetar e contabilidade. Na parte sobre aritmética presente na *Summa*, Pacioli escreveu sobre técnicas para multiplicação e extração de raízes quadradas e resolução de equações quadráticas e lineares, dentre outras coisas.

Ao discorrer sobre a vida e obra de Viète (1540 - 1603), Boyer (2012) apresenta que mesmo Viète tendo se formado em direito e dedicando somente o seu tempo livra aos estudos em Matemática, ele contribuiu muito na aritmética, álgebra, trigonometria e geometria, e se tratando da aritmética, foi forte influente no uso de frações decimais. Mas, segundo Boyer (2012), as contribuições mais significativas de Viète foi à álgebra, pois ele generalizou a forma de uma equação quadrática ao introduzir um padrão, onde usou uma vogal para representar uma valor desconhecido ou indeterminado, e uma consoante para simbolizar um valor conhecido ou dado. Boyer (2012) reitera que por pouco Viète não escreveu todas as equações quadráticas na forma $BA^2 + CA + D = 0$, onde A é a incógnita e B, C e D são os parâmetros. Segundo Refatti e Bisognin (2005), Viète atacava as equações de segundo grau a partir do seguinte processo:

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$

i) Tome $x = u + v$, com u e v como incógnitas auxiliares;

ii) Temos $a\left(u+v\right)^2 + b\left(u+v\right) + c = 0$;

iii) Abrindo o produto notável, colocando alguns termos em evidência e reorganizando, temos $av^2 + \left(2au + b\right)v + au^2 + bu + c = 0$;

iv) Reescrevendo essa igualdade como equação na incógnita v, fica

$av^2 + \left(2au + b\right)v + au^2 + bu + c = 0$; (1)

v) Para anular v, tome $u = -\dfrac{b}{2a}$;

vi) Substituindo os valores de u em (1), temos $av^2 + a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c = 0$; (2)

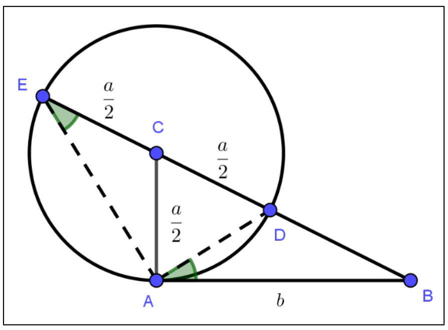
vii) Manipulando a equação (2), ficamos com $v^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$;

viii) Se $b^2 - 4ac \geq 0$, então $v = \dfrac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

ix) Retornando para $x = u + v$, temos $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ que é por meio de quem determinamos as raízes.

Outro influente matemático do período do renascimento foi René Descartes (1596 - 1650). Ao falar sobre a vida desse filósofo, físico e matemático francês, Eves (2011) apresenta a única publicação matemática dele, *La géométrie*(1637), e expõe que nesse material Descartes apresenta uma aritmetização da geometria. Ao discorrer sobre *La géométrie*, Roque (2012) apresenta que Descartes ao se referir às cinco operações básicas da aritmética expôs que tais equivalem a extruturas simples de compasso e régua. Com isso, Roque (2012) afirma que tal tratamento foi transformador na geometria, pois ultrapassava a homogeneidade das grandezas, fazendo com que o produto de dois segmentos fosse interpretado como outro segmento e não como a área de uma figura. Ainda nessa obra, Descartes analisa alguns casos de equação quadrática, considerando a incógnita como sendo um segmento de reta que pode ser construído. Roque (2012, p.290-291) apresenta três exemplos, e resolve dois, que Descartes aborda em *La géométrie*, que são $x^2 = ax + b^2$, $x^2 = -ax + b^2$ e $x^2 = ax - b^2$, mas adverte que, no segundo exemplo ele usava o $-a$ mas considerava o a positivo, e o sinal de menos caracterizava a operação sobre o coeficiente positivo. Para a equação da forma $x^2 = ax + b^2$, a resolução se dá do seguinte modo, veja a Figura 1.13:

Figura 1.13: Procedimento para determinar o segmento de reta x que é rais da equação $x^2 = ax + b^2$, segundo Descartes.



Fonte: Roque (2012, p.290), adaptado pelo autor

A costrução se dá com um triângulo retângulo ABC, $AB = b$ e $CA = \dfrac{a}{2}$. A finalidade é construir x que seja raiz da equação, para isso, prolongamos BC até E, de forma que $CE = CA$. Com isso, $EB = x$. Dessa forma, concluímos que:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

A demonstração segue o mesmo raciocínio da que apresenta Roque (2012). Para isso, seguimos a seguinte sequências de passos:

i) Trace uma circunferência de raio $\frac{a}{2}$ e centro C;

ii) O segmento BC intercepta a circunferência no ponto D;

iii) Dessa forma, $\frac{AB}{EB} = \frac{DB}{AB}$, e fazendo meio por extremos, temos $EB \cdot DB = AB^2$. Como $B\hat{A}D$ e $A\hat{E}B$ são ângulos que determinam o mesmo arco na circunferência, então $B\hat{A}D = A\hat{E}B$, assim, $\triangle EAB \sim \triangle DAB$;

iv) Sendo $EB = x$, $DB = x - a$, e como $EB \cdot DB = AB^2$, concluímos que $b^2 = x(x-a)$ ou $b^2 = x^2 - ax$;

v) Dessa forma, EB pode ser entendido como a raiz da equação;

Após constatar que esse segmento satisfaz à equação, da maneira como foi construído, então $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$. Segundo Roque (2012, p.291) a outra raiz é ignorada por Descartes pelo fato de ser uma raiz negativa.

Após o fim do renascimento, as contribuições e avanços na matemática continuaram. Por intermédio de grandes matemáticos, esses avanços foram sendo alcançados sob os conhecimentos já trazidos à luz por seus antecessores, o que continuou até os dias modernos.

Nesse capítulo vimos as contribuições no desenvolvimento dos estudos sobre as equações quadráticas, como os povos apresentados aqui, em seu respectivo período, trabalhava com problemas envolvendo esse tipo de assunto, e como os avanços foram sendo utilizado posteriormente em novos estudos. Vimos desde a Babilônia, passando pelo Egito, alguns problemas e seus métodos de resolução, depois algus avanços dos gregos na forma de interpretar e resolver problemas de equação quadrática, diferente da matemática chinesa, que contribuiu em menor quantidade em relação aos gregos. Então, vimos como os Hindus e Árabes revolucionaram alguns aspectos gerais e mais específicos no trato das equações quadráticas, e por fim, como muitos matemáticos europes contribuíram nos avanços com relação a abordagem de situações envolvendo equações polinomiais de segundo grau até o século XVII, que marca o fim do renascimento. No próximo capítulo veremos a concepção de mudança de quadro e como essa ferramenta pode ser útil ao abordar equações quadráticas em diferentes contextos.

Capítulo 2

A equação quadrática em diferentes quadros

2.1 Mudança de Quadro

Existem situações onde, ao trabalhar determinado conteúdo matemático, o professor ou os alunos, de forma consciente ou inconsciente, saem de um determinado contexto matemático e entram em outro, quer seja por conta de um assunto estudado ou na busca da resolução de um problema. Essa mudança de contextos como forma de resolver um problema, que demandam compreensão de determinados conteúdos matemáticos, foi chamado por Régine Douady de "mudança de quadro ou jogo de quadros". Nessa seção, iremos apresentar a concepção de mudança de quadro da educadora matemática francesa Régine Douady (1986).

Podemos entender o conceito de "quadro" de Douady do seguinte modo: "Um quadro é constituído de objetos de um campo da matemática, de relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diferentes e das imagens mentais associadas a esses objetos e a essas relações" (DOUADY, 1992, p. 135 *apud* TEIXEIRA, 2014, p.2). É interessante resaltar que um quadro tem subdivisões, desde que o conjunto axiomático da sua estrutura teórica seja diferente (TEIXEIRA, 2014, p.3). Assim, tomemos o quadro da geometria, ele pode ser subdividido em quadro da geometria euclidiana, quadro da geometria analítica, quadro da geometria hiperbólica, entre outros.

Segundo Douady (1992), citado por Teixeira (2014), mudança de quadro é a transição de um quadro para outro como forma de atingir concepções distintas de um problema. Essa passagem pode proporcionar novas opções de abordagens para aquela situação e uma gama de novas ferramentas que não poderiam ser usadas no contexto anterior. Ainda por esse autor, de forma espontânea ou não, a mudança de quadro é ultilizada na maioria das vezes quando nos deparamos com determinada questão em certo quadro, onde temos muita dificuldade na abordagem, então passamos para outro quadro onde é mais fácil de se trabalhar com a mesma. Tendo isso em mente, podemos usar a mudança de quadro também no estudo de determinados conteúdos matemáticos, onde o mesmo pode ser abordado de diferentes formas.

Sob a pespectiva de mudança de quadros, veremos na sequência a função polinomial do segundo grau, apenas com coeficientes reais, no quandro algébrico, no qual abordaremos ela na sua forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ e apresentaremos alguns de seus resultados significativos; no quadro geométrico, onde trabalharemos a parábola como uma cônica não degenerada e veremos as suas formas de equações; e no quadro numérico veremos a solução da equação polinomial de segundo grau sendo obtida de forma numérica, por meio de algorítmos, a serem implementados em uma linguagem de computador

2.2 Quadro Algébrico

Para iniciarmos as atividades aqui, deixaremos bem claro desde já que todas as informações apresentadas nessa seção, como definições e teoremas, foram baseadas no livro "A Matemática do Ensino Médio, Volume 1" de Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesar Morgado, (LIMA, E. L. *et al.* 2006).

Definição 2.2.1 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Após introduzir a definição de função quadrática, o autor nos adverte que os coeficientes a, b, c da função f são totalmente estabelecidos pelos valores que essa função assume. Ou seja, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $a = a', b = b'$ e $c = c'$. Para isso, seja $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomando $x = 0$ obtemos que $c = c'$. Cortando o c com c', fica $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esta igualdade vale em particular para todo $x \neq 0$. Assim, podemos dividir por x, o que resulta em $ax + b = a'x + b'$, para todo $x \neq 0$. Façamos agora o x assumir dois valores, que são $x = 1$ e $x = -1$, disso temos que $a + b = a' + b'$ e $-a + b = -a' + b'$, de onde chegamos a conclusão de que $a = a'$ e $b = b'$. Podemos também identificar uma função quadrática como um trinômio de segundo grau.

Existe uma diferença bem pequena entre os conceitos de função quadrática e trinômio de segundo grau. Um trinômio de segundo grau é uma expressão formal do tipo $aX^2 + bX + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo que a letra X representa apenas um símbolo, e X^2 outro símbolo, para escrever XX. A difinição de trinômio assegura que dois trinômios $aX^2 + bX + c = a'X^2 + b'X + c'$ são iguais quando $a = a', b = b'$ e $c = c'$. E ainda sobre trinômio, sabemos que a cada um corresponde a função quadrática definida por $x \mapsto ax^2 + bx + c$. Ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre trinômio e função quadrática, e por definição de função quadrática essa correspondência é automaticamente sobrejetiva.

Para poder ficar mais claro a questão da correspondência biunívoca, tomemos por exemplo as frações reais

$$\frac{X^3 - 3X + 2}{X^2 - 2X + 1} \text{ e } \frac{X^4 + X^3 - X^2 + X - 2}{X^3 - X^2 + X - 1}$$

que são expressões formalmente bem diferentes, definem a mesma função $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, pois para todo número real $x \neq 1$, temos que

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1} = x + 2.$$

Expomos esse exemplo para mostrar que, quando estamos trabalhando com polinômios, duas expressões formais diferentes podem determinar a mesma função real de uma variável real. Portanto, partindo daqui, identificaremos uma função quadrática com o trinômio do segundo grau a ela relacionada e falaremos da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tomando todo cuidado para não confundi-la com o número real $f(x)$, que é o seu valor no ponto x.

Proposição 2.2.1 *Se duas funções quadráticas asumem os mesmos valores em três pontos distintos x_1, x_2, x_3 então essas funções são iguais, isto é, assumem o mesmo valor para qualquer número real x.*

Agora, tentaremos mostrar que $a = a', b = b'$ e $c = c'$ com a demonstração da Proposição 2.2.1. Para isso, suponha que as funções quadráticas

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ e } t(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

assumam os mesmos valores para três números reais diferentes, ou seja, $f(x_1) = t(x_1), f(x_2) = t(x_2)$ e $f(x_3) = t(x_3)$, com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ e $x_1 \neq x_2 \neq x_3$. Escreva $\alpha_1 = a - a', \alpha_2 = b - b'$ e $\alpha_3 = c - c'$, mostraremos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Sabendo que $f(x_1) - t(x_1) = 0, f(x_2) - t(x_2) = 0$ e $f(x_3) - t(x_3) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
ax_1^2 + bx_1 + c - (a'x_1^2 + b'x_1 + c') &= 0 \\
ax_2^2 + bx_2 + c - (a'x_2^2 + b'x_2 + c') &= 0 \\
ax_3^2 + bx_3 + c - (a'x_3^2 + b'x_3 + c') &= 0
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 = 0 \quad (1) \\ \alpha_1 x_2^2 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 = 0 \quad (2) \\ \alpha_1 x_3^2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Fazendo $(2) - (1)$ e $(3) - (1)$, temos:

$$\alpha_1(x_2^2 - x_1^2) + \alpha_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (4)$$
$$\alpha_1(x_3^2 - x_1^2) + \alpha_2(x_3 - x_1) = 0 \quad (5)$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, então podemos dividir a (4) por $x_2 - x_1$ e a (5) por $x_3 - x_1$, obtendo

$$\frac{\alpha_1(x_2^2 - x_1^2) + \alpha_2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1}$$
$$\frac{\alpha_1(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{\alpha_2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$
$$\alpha_1(x_2 + x_1) + \alpha_2 = 0 \quad (6)$$

E de forma análoga a essa, temos

$$\alpha_1(x_3 + x_1) + \alpha_2 = 0 \quad (7)$$

Agora, subtraindo membro a membro, obtemos que $\alpha_1(x_3 - x_2) = 0$. Mas como $x_3 - x_2 \neq 0$, resulta portanto que $\alpha_1 = 0$. Dessa forma, basta que substituamos o α_1 nas outras equações para percebermos que $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 0$. Com isso, percebemos que estávamos trabalhando com um sistema homogêneo de três equações lineares e três incógnitas, e que a única solução desse sistema é a trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Disso, concluímos nossa demonstração.

Sabemos que, quando estamos trabalhando com um sistema homogêneo que só tem por solução a trivial, então podemos substituir os valores dos segundos membros, que são zeros, por qualquer números aleatórios que sempre teremos uma solução única. Usemos como exemplo o caso que já estamos trabalhando, se usarmos os mesmos passos seguidos anteriormente, dados arbitrariamente os números y_1, y_2, y_3, provaremos adiante que existe um, e somente um terno ordenado de número a, b, c tais que

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$$
$$ax_2^2 + bx_2 + c = y_2$$
$$ax_3^2 + bx_3 + c = y_3.$$

Sabendo isso, podemos então garantir que: dados três números reais distintos x_1, x_2, x_3 e números reais arbitrários y_1, y_2, y_3, existe um, e somente um, terno de números a, b, c tais que a função

$$f(x) = ax^2 + ba + c$$

cumpre $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

Nesse exemplo, nos interesa o valor da incógnita a, pois é a partir dele que é possível fazer algumas análises importantes dessa função. Para isso, mesmo que seja de forma análoga ao que foi feito no caso do sistema homogêneo, deixaremos os detalhes para melhor compreensão. Dado o sistema abaixo,

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \quad (1)\\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \quad (2)\\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \quad (3) \end{aligned}$$

determinemos o valor de a, que pode ser achado fazendo $(2) - (1)$, e $(3) - (1)$, o que resulta em,

$$\begin{aligned} a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \quad (4)\\ a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) = y_3 - y_1 \quad (5). \end{aligned}$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, dividindo (4) por $x_2 - x_1$ e (5) por $x_3 - x_1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\\ \frac{a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\\ a(x_2 + x_1) + b &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (6). \end{aligned}$$

De forma semelhante, temos

$$a(x_3 + x_1) + b = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad (7).$$

Fazendo $(7) - (6)$, temos

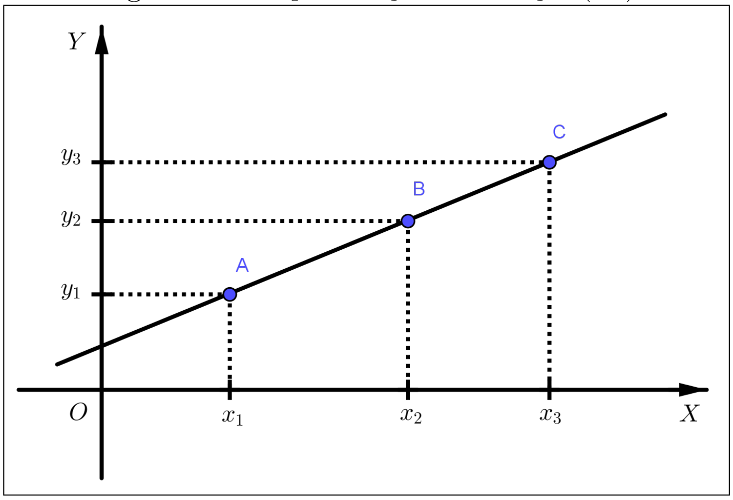
$$\begin{aligned} a(x_3 + x_1) - a(x_2 + x_1) + b - b &= \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\\ a(x_3 - x_2) &= \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\\ a &= \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]. \end{aligned}$$

Existe uma situação onde a função trabalhada acima pode não ser quadrática, que é quando $a = 0$. O que obtemos no exemplo acima para a nos indica que a é zero, se e somente se, valer que

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.1}$$

Fazendo uma análise mais detalhada dos pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ em $\mathbb{R}^2$, veja a Figura 2.1, chegamos a conclusão, pela condição (2.1), que os pontos A, B e C são colineares, ou seja, as retas AC e AB têm a mesma inclinação.

Figura 2.1: Representação da condição (2.1)



Fonte: Lima, E. L. *et al.* (2006, p.118), adaptado pelo autor

Tendo essas informações em mente, podemos então enunciar e provar que:

Proposição 2.2.2 *Dados x_1, x_2, x_3 números reais distintos e y_1, y_2, y_3 números reais tais que os pontos $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são não colineares em $\mathbb{R}^2$. Existe uma, e somente uma, função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.*

Para tornar esse fato válido, só é preciso mostrar que dado o sistema

$$\begin{cases} f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 & (1) \\ f(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 & (2) \\ f(x_3) = ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 & (3) \end{cases}$$

existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ que o satisfaz. Como estamos trabalhando com o mesmo exemplo, já determinamos anteriormente o valor de a, de modo análogo ao caso do sistema homogêneo:

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right].$$

Por questão de organização e para uma melhor compreensão, seja

$$\alpha = \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]$$

Para determinar b e c basta substituir o valor de a nas equações (1) e (2) do sistema, e após alguns cálculos, chegamos ao valor de b, que é:

$$b = \frac{1}{x_2 - x_1}\left[y_2 - y_1 + \alpha\left(x_2^2 - x_1^2\right)\right]$$

Após encontrar b, substituindo na equação (1) os valores de a e b, e isolando c, chegamos ao resultado

$$c = y_1 - \frac{1}{x_2 - x_1}\left[y_2 - y_1 + \alpha\left(x_2^2 - x_1^2\right)\right]x_1 - \alpha x_1^2$$

Dessa forma, mostramos que existem a, b e c reais que satisfazem o sistema inicial. Assim, provamos o que queríamos.

Por questões de conhecimento, também podemos verificar a condição (2.1) analisando a relação de colinearidade entre três pontos, que se dá quando, dados três pontos $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ distintos do $\mathbb{R}^2$, valer a equação:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ao desenvolver o determinante, chegamos na seguinte equação

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0$$

E quando organizada, fica igual a nossa condição (2.1),

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Conheçamos agora a forma canônica do trinômio e algumas consequências muito relevantes quando estamos estudando função quadrática. Vejamos o trinômio

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Queremos fazer aparecer $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ dentro do colchete, para isso, completando quadrados, escrevemos:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right],$$

que, reorganizando fica:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \tag{2.2}$$

A expressão (2.2) é chamada de forma canônica.

A primeira consequência de se usar a forma canônica é que ela nos leva diretamente à fórmula que usamos para encontrar as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Na prática, sendo $a \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \qquad (1)\\
\Leftrightarrow & \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad (2)\\
\Leftrightarrow & \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3)\\
\Leftrightarrow & \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Dados esses fatos, algumas observações precisam ser feitas:

i) Na passagem da linha (2) para a (3) só faz sentido quando o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0.$$

ii) Se $\Delta < 0$ então a equivalência das linhas (1) e (2) nos diz que a equação trabalhada não possui solução real, já que o quadrado de $x + \dfrac{b}{2a}$ não pode ser negativo, pois

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0.$$

iii) Dá fórmula (4), quando temos $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes reais distintas

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

iv) Sobre as raízes x' e x'' sabemos que $x' < x''$. Sua soma é dada por

$$s = x' + x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

e o seu produto é dado por

$$p = x' \cdot x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

v) As raízes x' e x'' são equidistantes do ponto $-\frac{b}{2a}$, ou seja,

$$\frac{x'+x''}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

vi) Existe uma situação onde a equação possui uma única raiz, chamada de raiz dupla. Isso acontece quando $\Delta = 0$, e a raiz é igual a $-\frac{b}{2a}$.

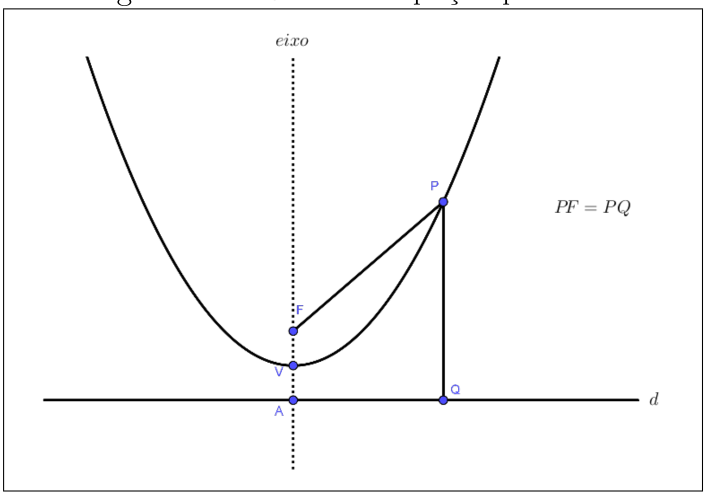
Voltemos agora para a forma canônica

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Suponha $a > 0$. Dentro do colchete existe uma soma entre duas parcelas, com a primeira dependendo de x e sendo sempre maior que zero, e a segunda é constante. Perceba que o menor valor que essa soma assume é quando $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, $x = -\frac{b}{2a}$. Por outro lado, quando $a < 0$, o valor de $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o maior dos números $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, quando $a > 0$, $f(x) = ax^2+bx+c$ não tem valor máximo (é ilimitada superiormente), e quando $a < 0$, $f(x)$ não tem valor mínimo (é ilimitada inferiormente).

O gráfico da função quadrática é uma parábola. Não nos prenderemos a muitos detalhes aqui, pois esse assunto será abordado com mais detalhes na seção seguinte. De forma bem resumida, dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d, veja a Figura 2.2.

Figura 2.2: Gráfico da equação quadrática



Fonte: Lima, E. L. *et al.* (2006, p.125), adaptado pelo autor

Na física, podemos encontrar algumas situações que são descritas por meio de uma função quadrática. A função quadrática é o modelo matemático que descreve o movimento uniformemente variado. Um exemplo característico desse tipo de movimento é a queda dos corpos no vácuo, apenas sujeito à ação da gravidade, onde um ponto se desloca sobre um eixo, e a posição desse ponto no instante t é dada por $f(t)$. A função quadrática que caracteriza o movimento uniformemente variado é dada por

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c,$$

onde a é a aceleração, b é a velocidade inicial (no instante $t = 0$) e c é a posição inicial do ponto.

Esse tipo de situação serve para contextualizar o estudo do movimento uniformimente variado.

Para exemplificar o que foi apresentado nessa seção, tome a função f dada por $f(x) = x^2 - x - 2$. Dada essa função, podemos identificar os seus coeficientes, que são $a = 1$, $b = -1$ e $c = -2$. Da fórmula (4) da forma canônica, como $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0$, então as raízes da função são

$$x' = \frac{-(-1) - \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = -1$$

e

$$x'' = \frac{-(-1) + \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = 2$$

Como vimos, a soma e o produto das raízes são, respectivamente

$$s = -\frac{(-1)}{1} = 1 = -1 + 2$$

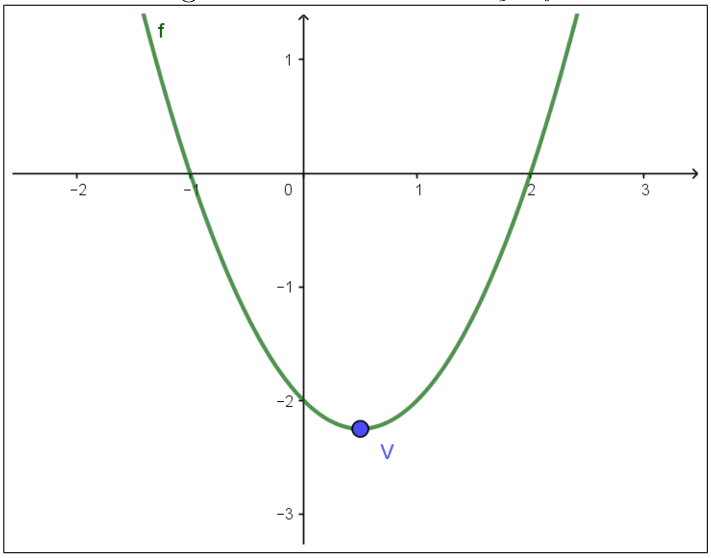
e

$$p = \frac{-2}{1} = -2 = -1 \cdot 2.$$

As raízes são equidistantes do ponto $-\frac{(-1)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$, pois, como vimos na observação vi) $\frac{-1+2}{2} = -\frac{(-1)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$.

Como $a = 1 > 0$, então $f(x) = x^2 - x - 2$ não tem valor máximo (é ilimitada superiormente), em outras palavras, a concavidade da parábola no gráfico está para cima, e o vértice da parábola é o ponto $V = (\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$, veja a Figura 2.3.

Figura 2.3: Gráfico da função f



Fonte: Própria (2020)

2.3 Quadro Geométrico

Semelhante a seção anterior, essa seção se desenvolverá com o auxílio das ideias, definições e conclusões contidas no livro "Vetores e Geometria Analítca" de Paulo Winterle, (WINTERLE, 2000).

Iniciaremos as discussões aqui com uma rápida apresentação da definição e apresentação dos elementos de uma parábola.

A definição de parábola diz que:

Definição 2.3.1 *Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano.*

Para ilustrar essa definição, consideremos uma reta d e um ponto F que não está em d. Na Figura 2.4 estão marcados alguns pontos que estão a uma mesma distância do ponto F e da reta d.

Um ponto P pertence à parábola, se e somente se,

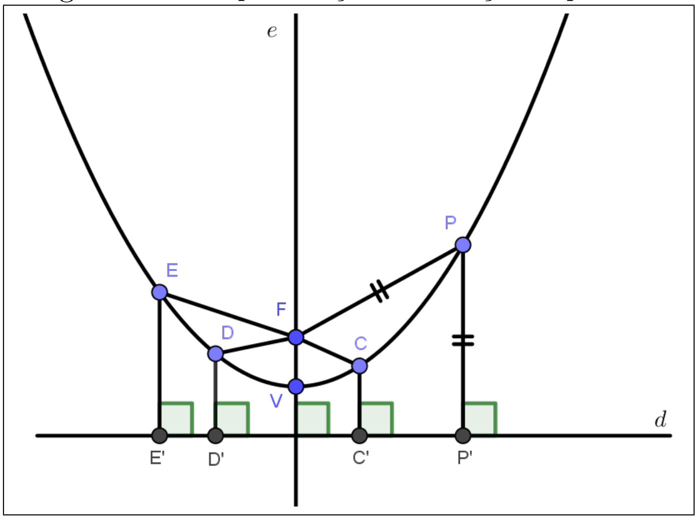
$$d(P, F) = d(P, d),$$

ou, equivalentemente

$$d(P, F) = d(P, P') \tag{2.3}$$

onde P' é o pé da perpendicular baixada de P até a reta d. Os elementos característicos dessa cônica são:

Figura 2.4: Representação da definição da parábola



Fonte: Winterle, P. (2000, p.162), adaptado pelo autor

Foco: é o ponto F.

Diretriz: é a reta d.

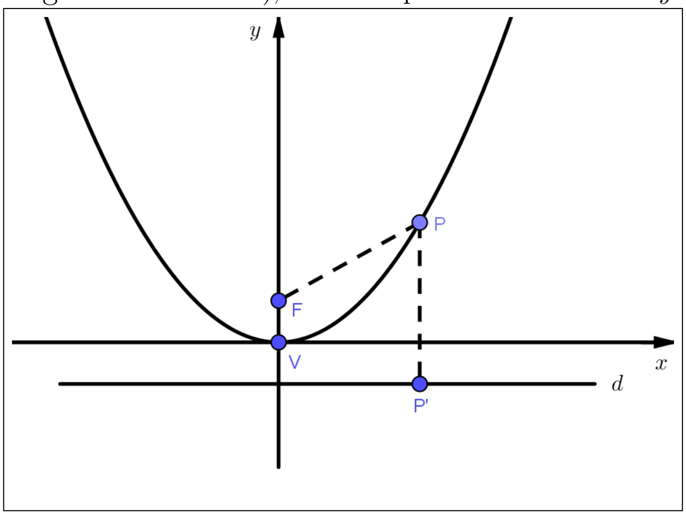
Eixo: é a reta e, que é perpendicular a d e passa por F.

Vértice: é o ponto V da parábola que corta o seu eixo.

Vejamos agora a forma reduzida da equação da parábola. Para isso, seja a parábola com vértice $V = (0, 0)$, daí, consideremos dois casos; i) quando o eixo da parábola coincide com o eixo dos y, e ii) quando o eixo da parábola coincide com o eixo dos x.

Para o caso i), seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola de foco $F\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$ e diretriz de equação $y = -\dfrac{p}{2}$, veja a Figura 2.5.

Figura 2.5: Caso i), o eixo da parábola é o eixo dos y



Fonte: Winterle, P. (2000, p.163), adaptado pelo autor

Pela igualdade (2.3), temos

$$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{P'P}|$$

Agora, perceba que, como $P'\left(x, -\dfrac{p}{2}\right) \in d$, temos

$$\left|\left(x - 0, y - \frac{p}{2}\right)\right| = \left|\left(x - x, y + \frac{p}{2}\right)\right|$$

ou

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = (x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

Reorganizando, temos

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

simplificando, fica

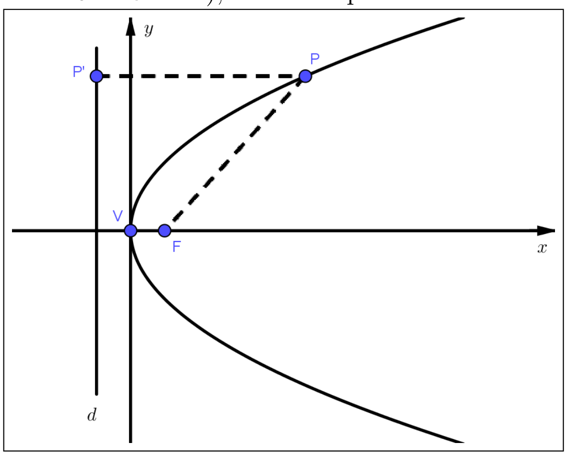
$$x^2 = 2py \tag{2.4}$$

que é chamada de equação reduzida para este caso.

Dada essas informações, é importante pontuar algumas coisas. Primeiro, o número real $p \neq 0$ é chamado de parâmetro da parábola, e é definido como a distância do vértice à reta diretriz, e do vértice ao foco, com a distância do foco à reta diretriz sendo $2p$. Então, da equação (2.3) temos que, como $py \geq 0$ então o parâmetro p e a ordenada y de P têm sinais iguais, e se $p > 0$ a parábola tem abertura para cima, do contrário, se $p < 0$, então sua abertura é para baixo. Por fim, o gráfico de (2.3) é simétrico em relação ao eixo y.

Para o caso ii), seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola de foco $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ e diretriz $x = -\dfrac{p}{2}$, veja a Figura 2.6.

Figura 2.6: Caso ii), o eixo da parábola é o eixo dos x



Fonte: Winterle, P. (2000, p.164), adaptado pelo autor

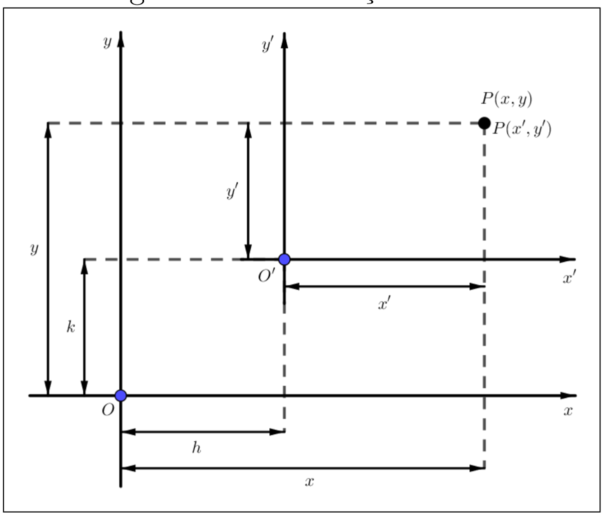
De forma análoga ao caso anterior, obteremos a equação reduzida

$$y^2 = 2px \tag{2.5}$$

Analisando a equação (2.5), podemos concluir que, quando $p > 0$, então a abertura da parábola é para à direita, do contrário, se $p < 0$ então sua abertura é para à esquerda.

Podemos também termos o caso onde o eixo da parábola não é x ou y. Para isso, vejamos no plano xOy um ponto $O'(h,k)$ qualquer. Introduziremos um novo sistema $x'O'y'$ de forma que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ possuam unidade de medida igual, a mesma direção e sentido dos eixos Ox e Oy. Dessa forma, todo ponto P do plano possue duas formas de representá-lo: $P(x,y)$ em xOy e $P(x',y')$ em $x'O'y'$ (Veja Figura 2.7).

Figura 2.7: Translação de eixos



Fonte: Winterle, P. (2000, p.167), adaptado pelo autor

Da Figura 2.7, obtemos

$$x = x' + h \quad \text{e} \quad y = y' + k \tag{2.6}$$

ou

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k \tag{2.7}$$

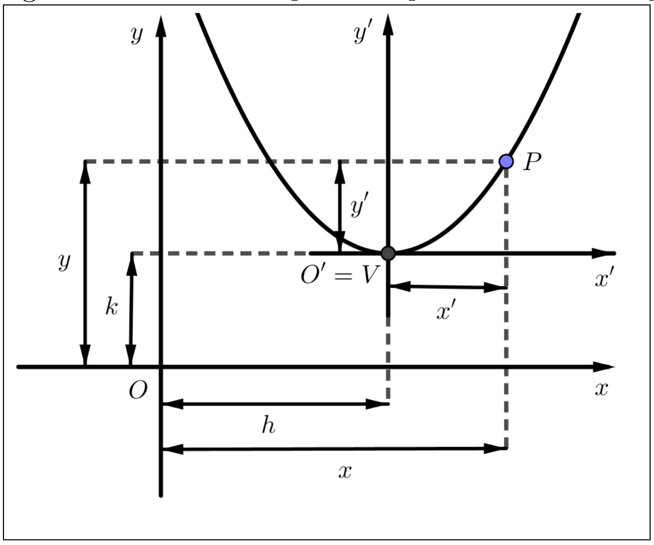
que são as fórmulas de translação.

A partir dessas informações, vejamos agora outras formas da equação de uma parábola. Para isso, seja uma parábola de vértice $V(h,k) \neq (0,0)$. Consideraremos aqui os casos onde o eixo da parábola é paralelo a um dos eixos coordenados.

Para o caso onde o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y, seja V a origem.

Tracemos o sistema $x'O'y'(O' = V)$, como na Figura 2.8.

Figura 2.8: O eixo da prábola é paralelo ao eixo dos y



Fonte: Winterle, P. (2000, p.167), adaptado pelo autor

Em relação a esse sistema a parábola tem vértice na origem, e, dessa forma, a sua equação reduzida é

$$x'^2 = 2py' \tag{2.8}$$

Sabemos que, para todo ponto P da parábola, por (2.6) temos

$$x' = x - h \text{ e } y' = y - k,$$

substituindo em (2.7) nos dá a equação

$$(x - h)^2 = 2p\,(y - k)\,, \tag{2.9}$$

que é a forma padrão (ou cartesiana) para este caso, e se refere ao sistema xOy. Em relação as observações que foram anteriormente feitas relacionadas ao parâmetro p, elas continuam válidas: se $p > 0$, a parábola está voltada para cima, do contrário, se $p < 0$, ela estará voltada para baixo.

Para o caso onde o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x temos, de modo análogo

$$(y - h)^2 = 2p\,(x - k) \tag{2.10}$$

Outra forma da equação da parábola é a equação geral, e ela se dá quando estamos trabalhando com qualquer parábola cujo eixo é paralelo ou coincide a um dos eixos coordenados. Para chegar em sua forma, tomemos a equação (2.9), temos

$$(x - h)^2 = 2p\,(y - k),$$

que é equivalente a

$$x^2 - 2hx + h^2 = 2py - 2pk.$$

Reorganizando, ficamos com

$$x^2 - 2xh - 2py + h^2 + 2pk = 0$$

ou

$$dx^2 + fx + gy + j = 0 \quad d \neq 0. \tag{2.11}$$

Se tomarmos a equação (2.9), temos

$$ey^2 + fy + gx + j = 0 \quad e \neq 0, \tag{2.12}$$

onde, para os dois casos, temos $f = -2h$, $g = -2p$ e $j = h^2 + 2pk$, com $f, g, j \in \mathbb{R}$. Dessa forma, a equação geral tem por representação as formas (2.11) ou (2.12).

Ainda podemos trabalhar com outra forma da equação da parábola. Toda vez que explicitarmos y na equação do tipo (2.10) ou x na equação do tipo (2.11), obteremos a sua equação explícita. Explicitemos o y em (2.10), temos

$$dx^2 + fx + gy + j = 0 \Rightarrow y = -\frac{dx^2}{g} - \frac{fx}{g} - \frac{j}{g}$$

ou

$$y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0, \tag{2.13}$$

com $a = -\dfrac{d}{g}$, $b = -\dfrac{f}{g}$, e $c = -\dfrac{j}{g}$, sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Explicitando agora o x na equação do tipo (2.11), de forma análoga ao caso anterior, temos

$$x = a'y^2 + by + c = 0 \quad a \neq 0 \tag{2.14}$$

com $a' = -\dfrac{e}{g}$, $b = -\dfrac{f}{g}$, e $c = -\dfrac{j}{g}$, sendo $a', b, c \in \mathbb{R}$.

Assim, a equação explícita da parábola é dada pelas formas (2.12) ou (2.13).

Por fim, veremos agora a equação da parábola em sua forma paramétrica. Para isso, vejamos a equação reduzida da parábola cujo eixo é o dos y:

$$x^2 = 2py.$$

O x, nessa equação, pode assumir qualquer valor real. Fazendo $x = t$, onde esse t se chama parâmetro, temos que $y = \dfrac{1}{2p}t^2$. Dessa maneira, as equações paramétricas da parábola são dadas por

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{2p}t^2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Da mesma forma, se fizermos $y = t$ na equação $y^2 = 2px$, temos o sistema

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2p}t^2 \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

que caracteriza equações paramétricas da parábola com vértice $V(0,0)$ e eixo Ox.

Para os casos onde o vértice da parábola não é a origem, consideremos a equação padrão da parábola cujo eixo é paralelo ao eixo dos y e cujo vértice é $V(h,k) \neq (0,0)$, que também é origem. Temos

$$(x-h)^2 = 2p(y-k)$$

Nesse caso, o x também assume qualquer valor real. Dessa forma, fazendo $x - h = t$, vem $x = t + h$. Então

$$t^2 = 2p(y-k) \Rightarrow t^2 = 2py - 2pk$$

Isolando o y, temos

$$y = \frac{t^2 + 2pk}{2p}.$$

Assim, o sistema que caracteriza as equações paramétricas desse caso é dado por:

$$\begin{cases} x = t + h \\ y = \dfrac{t^2 + 2pk}{2p} \end{cases}$$

Para o caso onde o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x, dada as circunstâncias do caso anterior, obtemos o sistema das equações paramétricas para esse caso, que é dado por:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2 + 2pk}{2p} \\ y = t + h \end{cases}$$

Trabalharemos com o mesmo exemplo da seção anterior ($f(x) = x^2 - x - 2$) para exemplificar algumas definições apresentadas até aqui. Com esse exemplo, mostraremos a forma padrão da equação da parábola, a equação na forma geral, a equação explícita, e sua forma paramétrica, e identificaremos os elementos dessa parábola, que são o foco, diretriz, vértice, parâmetro e eixo. Para isso, sabemos que a função f pode ser representada como

$$y = x^2 - x - 2,$$

que, por (2.13), se trata da equação explícita da parábola, que tem eixo paralelo ao eixo dos y, e cujo vértice V não está na origem.

Dadas essas condições, partiremos da equação explícita e veremos a equação geral. Para isso, organizando a equação explícita, temos

$$x^2 - x - y - 2 = 0,$$

que, por (2.11), se trata da Equação Geral desta parábola.

Agora, partindo da equação geral, podemos determinar a equação desta parábola em sua forma padrão, para isso, dada a equação geral, completando quadrado, temos

$$x^2 - x - y - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - y - 2 = 0,$$

que, após organizar, fica

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{9}{4}\right)$$

Se observarmos, o parâmetro $p = \dfrac{1}{2}$, pois

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(y + \frac{9}{4}\right),$$

o que caracteriza a forma padrão, por (2.9).

Por fim, para determinar as equações paramétricas deste exemplo, partindo da forma padrão, façamos $x - \dfrac{1}{2} = t$, o que resulta em, $x = t + \dfrac{1}{2}$. Então

$$t^2 = y + \frac{9}{4},$$

e

$$y = t^2 - \frac{9}{4}.$$

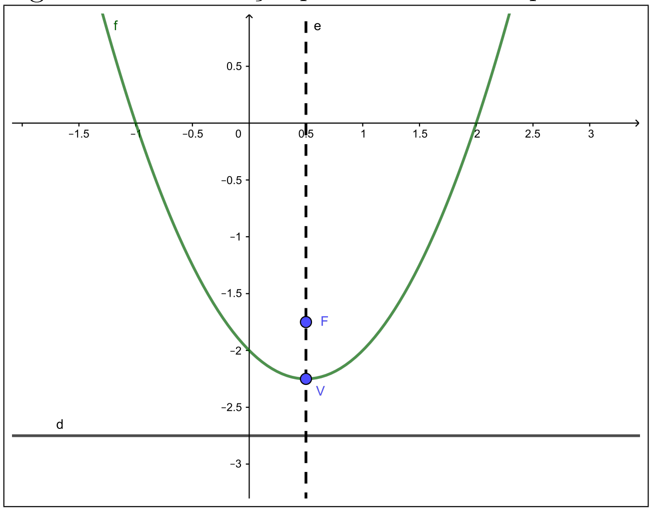
Assim, o sistema

$$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2} \\ y = t^2 - \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

constitui as equações paramétricas desta parábola.

Os elementos da parábola ultilizada nesse exemplo são, o vértive $V = (+\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$, o eixo e, que é dado por $x = +\frac{1}{2}$, e o parâmetro p, dado por $p = +\frac{1}{2}$. Como temos o valor de p, então o foco e a diretriz são determinados facilmente. O foco é o ponto $F = (+\frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$ e a reta diretriz d é dada por $y = -\frac{11}{4}$, veja a Figura 2.9.

Figura 2.9: Ilustração para auxílio de compreensão 1



Fonte: Própria (2020)

2.4 Quadro Numérico

Semelhante ao que foi feito nas seções anteriores, essa seção se desenvolverá baseada nas informações contidas no livro "Algoritmos Numéricos" de Frederico Fereira Campos, filho, (CAMPOS, filho, F. F. 2007).

Para início de discussão, é interessante sabermos do que se trata o Cálculo Numérico (C.N). O Cálculo Numérico é uma metodologia para obter a resolução de problemas matemáticos usando um computador, e é muito usado por cientistas e engenheiros. As soluções por meio do C.N são sempre numéricas, diferente dos métodos analíticos que nos dão resultados em forma de funções matemáticas.

Em relação a solução de um problema por meio do C.N, sabemos que ela pode ser alcançada em quatro etapas, que são: definição do problema, modelagem matemática, solução numérica e análise dos resultados. Usaremos um exemplo simples para mostrar estas etapas.

Definição do problema: Aqui, se define qual é o problema real que será resolvido. Tomemos, por exemplo, calcular $\sqrt{a}$, $a > 0$ apenas usando as quatro operações aritméticas.

Modelagem matemática: Por meio de uma função matemática o problema real é modelado e passa a ser o problema original. No exemplo,

$$x = \sqrt{a} \longrightarrow x^2 = a \longrightarrow f(x) = x^2 - a = 0,$$

o problema real (calcular $\sqrt{a}$, $a > 0$) foi transformado no problema original (achar as raízes de uma função quadrática). Em geral, temos mais soluções no problema original do que no problema real. Para o exemplo apresentado, as duas raízes da equação algébrica são $+\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$.

Solução numérica: Nesta etapa, se faz a escolha do método numérico mais adequado para solucionar o problema original, resultante da modelagem matemática. Após isso, o método é especificado por meio de um algoritmo, que depois é implementado em um computador para que se possa obter os resultados numéricos. A solução numérica ainda pode ser subdividida em três fases: elaboração do algoritmo, codificação do programa e processamento do programa. Para informações mais aprofundadas dessas fases, ler o livro base aqui ultilizado.

Usaremos o cálculo de $\sqrt{a}$ para exemplificar a etapa de solução numérica. Para isso, será ultilizado o método de Newton para o cálculo de uma raiz de $f(x) = x^2 - a = 0$, que será apresentado posteriormente. Dessa forma, dado $f(x) = x^2 - a = 0$, para se determinar uma raiz, temos:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Trocando $f(x)$ e $f'(x)$ na expressão acima, temos que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = x_k - \frac{x_k}{2} + \frac{a}{2x_k},$$

ou seja,

$$x_{k+1} = \left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)\frac{1}{2}.$$

Este processo foi proposto pelos matemáticos babilônicos, e consiste em uma método interativo para cálculo de $\sqrt{a}$ a partir de um valor inicial x_0 apenas com operações aritméticas. Por exemplo, para calcular $\sqrt{9}$, sendo $x_0 = 1$, o processo babilônico dá os resultados

i	x_i	$x_i - 3$
0	1.0000	
1	5.0000	2.0000
2	3.4000	0.4000
3	3.0235	0.0235
4	3.0001	0.0001
5	3.0000	0.0000

A coluna x_i nos apresenta as consecutivas aproximações de $\sqrt{9}$ a cada interação i, e a coluna $x_i - 3$ nos mostra a diferença entre o valor aproximado x_i e o valor exato 3.

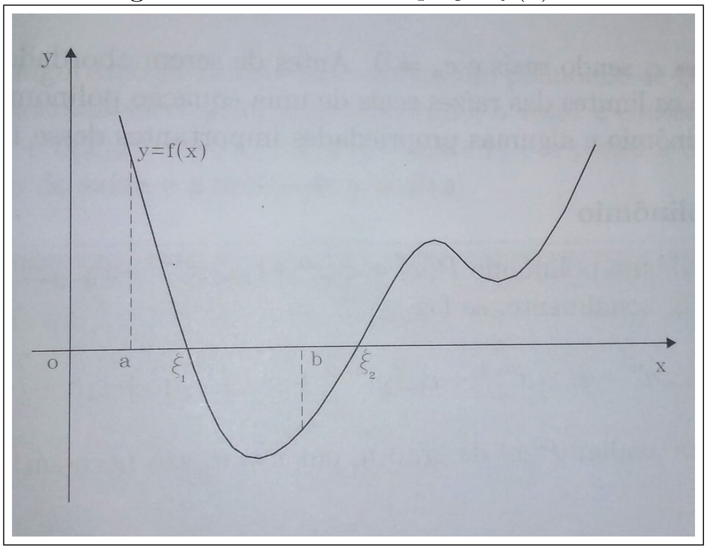
Análise dos resultados: Nessa última etapa, é feita uma verificação se a solução numérica do problema real é adequada, pois alguns modelos matemáticos podem resultar em soluções sem sentido, físico ou químico, como é o exemplo de tempo negativo. Caso a solução não se mostre adequada, deve-se obter um novo problema original através de uma nova formulação matemática e determinar outra nova solução numérica.

Tomando o mesmo exemplo anterior, mas sendo atribuído o valor inicial $x_0 = -1$ ou qualquer $x_0 < 0$, o processo convergirá para -3, que é raiz de $f(x) = x^2 - 9 = 0$, mas não é de $\sqrt{9}$, como mostra os resultados a seguir.

i	x_i	$x_i - 3$
0	$-$ 1.0000	
1	$-$ 5.0000	$-$ 8.0000
2	$-$ 3.4000	$-$ 6.4000
3	$-$ 3.0235	$-$ 6.0235
4	$-$ 3.0001	$-$ 6.0001
5	$-$ 3.0000	$-$ 6.0000

De uma forma mais geral, podemos dividir em duas fases o problema de calcular uma raiz. A primeira fase é o isolamento da raiz, onde se encontra um intervalo $[a, b]$ que contenha uma, e somente uma, raiz de uma equação algébrica, veja a Figura 2.10. Na Figura 2.8, ξ_1 e ξ_2 são os valores de x que satisfazem à equação $f(x) = 0$. A segunda fase é o refinamento da raiz. Nessa fase, a partir de um valor inicial $x_0 \in [a, b]$ é gerada uma sequência $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ que converge para uma raiz exata ξ de $f(x) = 0$.

Figura 2.10: Raízes da equação $f(x) = 0$.



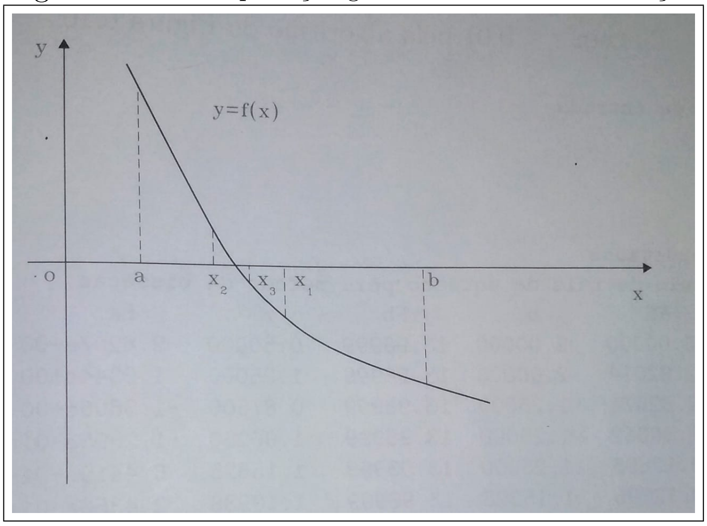
Fonte: Campos, filho, Frederico Ferreira. (2007, p.271)

Há procedimentos para calcular as raízes de equações polinomiais que não requerem prévio isolamento de cada uma das raízes. Entretanto, a maior parte dos métodos para cálculo de raízes exige que a mesma esteja em um intervalo (real, pois estamos trabalhando nos reais, então as raízes são reais e esse intervalo também), e que ela seja única naquele intervalo. Para isso, existem alguns teoremas que são de crucial importância para se determinar as raízes. Uma desses é o Teorema de Lagrange (CAMPOS, filho, F. F. 2007, p.276), que serve para delimitar as raízes reais de uma equação algébrica na forma da Figura (2.8), e o outro é o da Regra de sinais de Descartes (CAMPOS, filho, F. F. 2007, p.279), que determina o número de raízes reais de uma equação algébrica. Dessa forma, quando se sabe os limites (Teorema de Lagrange), e o número das raízes reais (Regra de sinais de Descartes) então o trabalho de isolar as raízes ficará muito facilitado.

Após determinar o intervalo, usa-se métodos numéricos para achar a raiz nesse mesmo intervalo. Veremos de uma forma bem resumida sobre alguns desses métodos:

Método da bisseção: Tenhamos a função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$, com ξ sendo a única raiz de $f(x) = 0$ que pertence ao intervalo. Esse método consiste em subdividir o intervalo ao meio a cada interação, mantendo o subintervalo que contém a raiz, ou seja, mantendo o intervalo onde $f(x)$ tem sinais opostos nos extremos. Assim, obtém-se uma sequência de intervalos encaixados $\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \ldots, [a_k, b_k]\}$ nos quais $f(a_i)f(b_i) < 0$, $i = 1, 2, \ldots k$. Veja a Figura 2.11.

Figura 2.11: Interpretação gráfica do método da bisseção.

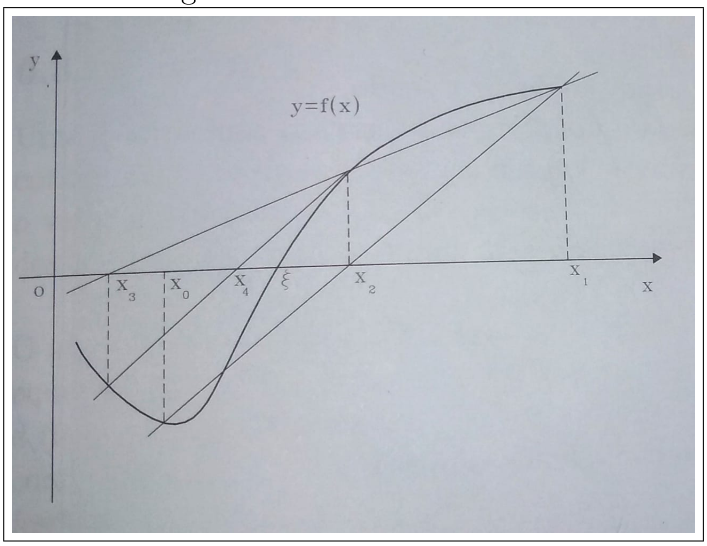


Fonte: Campos, filho, Frederico Ferreira. (2007, p.289)

Uma notável utilidade do método da biseção é que ele tem convergencia certa se $f(x)$ for contínua em $[a, b]$ e se $\xi \in [a, b]$.

Metodo da secante: Esse método é baseado em aproximação linear. A aproximação linear consiste basicamente em aproximar $f(x)$ por um polinômio linear no intervalo de interesse $[x_0, x_1]$. Se o intervalo for pequeno, então a aproximação é válida para a maior parte das funções. Dessa forma, uma estimativa da raiz ξ é tida como o valor pelo qual a reta corta o eixo das abscissas. O método da secante utiliza os pontos obtidos nas duas últimas iterações como pontos-base, com o polinômio linear passando por eles. Veja Figura 2.12.

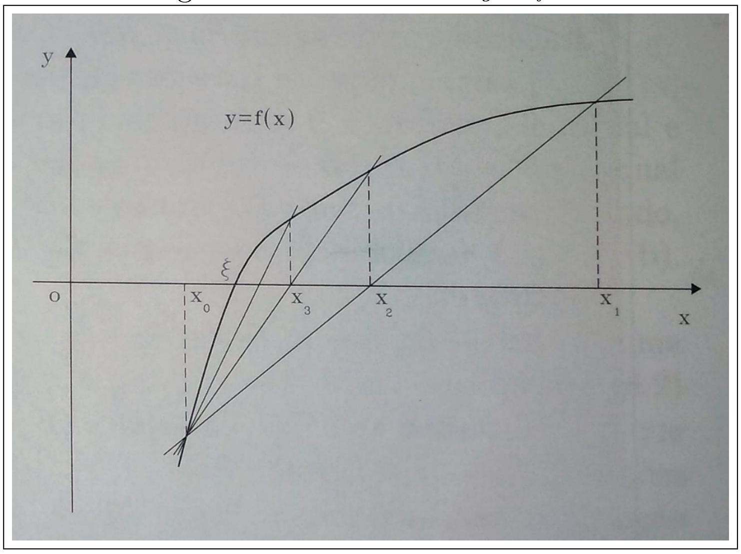
Figura 2.12: Método da secante.



Fonte: Campos, filho, Frederico Ferreira. (2007, p.293)

Método da *regula falsi*: Também baseado em aproximação linear, esse método evita um problema que pode ocorrer no método da secante, que é quando a função não é aproximadamente linear no intervalo que contém a raiz. O método da *regula falsi* garante que a raiz permaneça isolada entre dois pontos, pois esse método preserva o ponto onde o valor da função tem sinal oposto ao valor da função no ponto mais recente. Veja Figura 2.13.

Figura 2.13: Método da *regula falsi*.



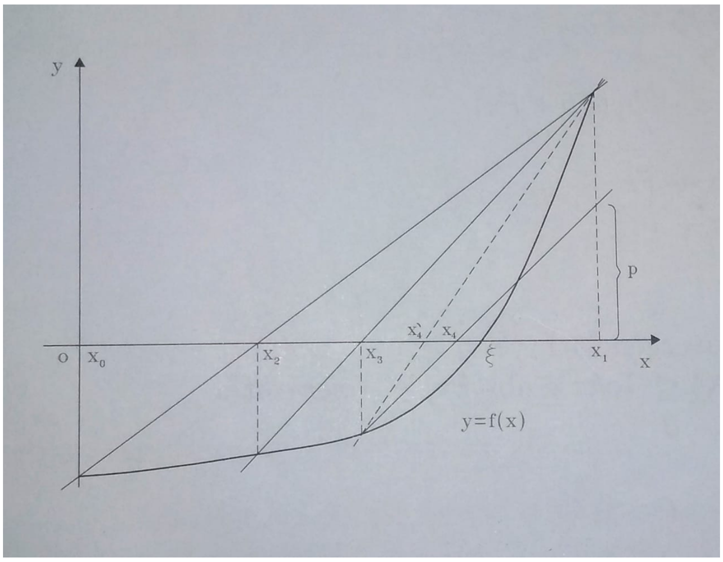
Fonte: Campos, filho, Frederico Ferreira. (2007, p.293)

Método de pégaso: Esse método também se baseia em aproximação linear, e nesse método a sequência $\{x_i\}$ é obtida usando a fórmula de recorrência

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}),\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Para garantir que $\xi \in [x_{k-1}, x_k]$ os pontos $[x_{k+1}, f(x_{k-1})]$ e $[x_k, f(x_k)]$, que serão usados para obter uma reta que nos dê x_{k+1}, são determinados de forma que $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$ possuam sempre sinais opostos. Além disso, o valor de $f(x_{k-1})$ é reduzido por um fator igual a $\dfrac{f(x_k)}{f(x_k) + f(x_{k+1})}$, evitando assim a retenção de um ponto, como acontece no método anterior. Assim, a reta pode ser construída através de um ponto que não pertence à curva de $f(x)$. Veja a Figura 2.14.

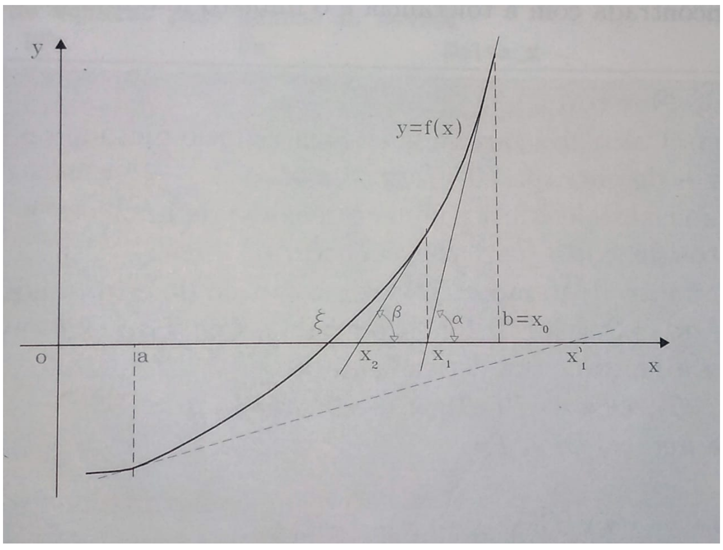
Figura 2.14: Interpretação gráfica do método de pégaso.



Fonte: Campos, filho, Frederico Ferreira. (2007, p.297)

Método de Newton: Dado o intervalo $[a, b]$, seja ξ a única raiz de $f(x) = 0$ que pertence a esse intervalo, e x_k uma aproximação dessa raiz, sendo $x_0 \in [a, b]$. Além disto, as derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ têm de existir e ser contínuas e com sinal constante nesse intervalo. De uma forma geométrica, esse método é semelhante a aproximar um arco da curva usando uma reta tangente traçada a partir de um ponto da curva. Por usar tangentes, esse método também é conhecido como método das tangentes. Veja a Figura 2.15.

Figura 2.15: Interpretação gráfica do método de Newton.



Fonte: Campos, filho, Frederico Ferreira. (2007, p.309)

Método de Schröder:O método de Schröder é só uma modificação do método de Newton, que possibilita o cálculo de uma raiz de multiplicidade m (para o caso da função quadrática, nosso caso, então $m = 2$), conservando a convergência quadrática, usando uma fórmula de recorrência. O método de Newton apresenta uma converência somente linear quando uma raiz tem multiplicidade $m > 1$, daí a modificação de Schröder.

Para exemplificar o que foi apresentado nessa seção, considere a equação polinomial $x^2 - x - 2 = 0$, desejamos encontrar uma raiz real utilizando métodos numéricos. Inicialmente combinaremos a regra de sinais de Descartes e o Teorema de Lagrange, para obter informações importante para o isolamento das raízes.

Usando o dispositivo prático para o Teorema de Lagrange, como apresentado na Tabela 2.1 a seguir, temos os intervalos que deverão conter as raízes reais do poliônimo.

Tabela 2.1: Dispositivo prático do Teorema de Lagrange

$n = 2$	P	P_1	P_2	P_3
c_2	1	2	1	2
c_2	-1	1	1	-1
c_2	-2	-1	-2	-1
k	1	0	0	1
$n - k$	1	2	2	1
B	2	1	2	1
L_i	3.0	1.71	-2.4	-1.5
$\frac{1}{L_i}$	3.0	0.5	-2.4	-0.66

Aplicando a regra dos sinais de Descartes, temos que o número de raízes positivas $n^+ = 1$ e que o número de raizes negativas é $n_- = 1$. Assim usando a combinação dos dois resultados, sabemos que há uma raiz positiva no intervalo $[0.5, 3.0]$ e uma raiz negativa no intervalo $[-2, -0.66]$.

Vamos encontrar a raiz positiva utilizando o método de Newton, para isto vamos escolher um valor inicial $x_0 \in [0.5, 3.0]$, tem que ser um valor que satisfaça

$$f(x_0)f"(x_0) > 0.$$

Assim temos, $f(x) = x^2 - x - 2$, $f'(x) = 2x - 1$ e $f"(x) = 2$, considerando $x_0 = 2.5$ temos $f(2.5)f"(2.5) = (1.75)(2) = 3.5 > 0$. Fazendo os devidos algebrismos na fórmula de Newton tem-se:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - x_k - 2}{2x_k - 1}$$

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^2 - x_k - x_k^2 + x_k + 2}{2x_k - 1}$$

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k - 1}$$

Desta forma, podemos iniciar as iterações com $x_0 = 2.5$, e usar como critério de parada o erro, $\epsilon < 10^{-3}$. Em que erro é dado por, $\epsilon = \dfrac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k|}$

Substituindo os devidos valores nas iterações temos como apresentado na Tabela 2.2:

Tabela 2.2: Iterações de Newton para achar a raiz positiva de $x^2 - x - 2$

k	x_i	ϵ
0	2.5	-
1	2.0625	0.175
2	2.00125	0.029
3	2.0000000521	$6.24e10^{-4}$

Assim a raiz positiva encontrada é $x' = 2.0000$, conforme pode ser visto nos exemplos para os demais quadros

Resumindo o que foi visto nesse capítulo, usando a ideia de mudança de quadros vimos a equação quadrática em diferentes contextos. Em cada contexto, abordamos alguns dos pontos mais relevantes. No quadro algébrico vimos a função quadrática, provamos algumas proposições e vimos alguns dos principais resultados. No quadro geométrico, vimos a construção gráfica da parábola e algumas das principais formas que ela pode ser representada. E no quadro numérico, vimos como é calculada uma raiz de uma equação quadrática por meio de métodos numéricos.

Capítulo 3

Contextualização

3.1 Contextualização no ensino

Para iniciar a discussão sobre o que é contextualização e o seu papel no ensino, vejamos o que diz as politicas públicas responsáveis por organizar os currículos, baseadas na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) 9.394/1996, que diz que é na

> [...] contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado. [...] A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas. [...] Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de ilustrar o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola. (BRASIL, 2006, p.83).

Podemos identificar três pontos importantes no que foi dito acima, que são "construir conhecimento com significado", "aprendizagens a serem realizadas" e "dar sentido ao conhecimento matemático na escola". Esses pontos estão ligados com o uso correto da contextualização no ensino, e tornam a aprendizagem mais significativa. Tendo isso em vista, fica claro que a contextualização desempenha um importante papel no processo de ensino e aprendizagem, mas, precisamos esclarecer primeiramente que não há uma única concepção de contextualização, como apresenta Maioli (2012) em sua pesquisa, quando, analisando as concepções sobre contextualização em alguns trabalhos de autores e formadores de professores, afirma que

> [...] as ideias a respeito de contextualização sofrem certa variação: ora é o conhecimento que é contextualizado, ora é o ensino, ora são as atividades. Embora tenhamos identificado diversas ideias em relação à contextualização, o uso de situações envolvendo o cotidiano, aplicações concretas ou atividades manipulativas aparecem na maioria das pesquisas que apresentaram ou trataram de atividades contextualizadas. (MAIOLI, 2012, p.104-105)

Portanto, seguiremos o mesmo entendimento sobre contextualização que é apresentado por Vasconcelos (2008) *apud* Maioli (2012), que diz que

> [...] contextualizar é apresentar em sala de aula situações que deem sentido aos conhecimentos que desejamos que sejam aprendidos, por meio de uma problematização, [...] criando, dessa forma, um contexto que dará significado ao conteúdo, isto é, que os conduza à sua compreensão. O que queremos enfatizar é que a contextualização é uma alternativa que poderá auxiliar na construção do significado. (VASCONCELOS, 2008, p.49 *apud* MAIOLI, 2012, p.90).

Esse pensamento sobre contextualização será seguido nesse capítulo por que fundamenta o que será apresentado nas seções seguintes, onde discutiremos sobre a contextualização na matemática, contextualização de equações quadráticas e exemplos de questões bem contextualizadas e mal contextualizadas, para função polinomial do segundo grau.

3.2 Contextualização na matemática

Veremos nessa seção algumas pesquisas que desenvolvem práticas contextualizadas que consideramos ser boas propostas de aula de matemática contextualizada.

Em relação à resolução de problemas, Morais (2008) e Souza (2009) apresentam boas propostas de práticas contextualizadas.

Se referindo a um ensino contextualizado de matemática, Morais (2008) diz que

> [...] contextualizar refere-se ao maior número de relações e conexões que se pode fazer ao ensinar um novo conteúdo. Quanto maiores forem essas relações e mais forte as conexões, sejam elas de dentro da Matemática ou fora dela, mais significativa será a aprendizagem. (MORAIS, 2008, p.33).

A proposta elaborada por Morais (2008) envolve a resolução de problemas para o ensino de polinômios com alunos pertencentes a 7ª e 8ª séries do ensino fundamental, tendo como ponto de partida a construção de caixas. Inicialmente, são feitos encaminhamentos que conduzam os alunos a observar e discutir as medidas como variáveis, e se existe alguma relação com a área. Na sala da 8ª série, um estudo de função é aprofundado, partindo de um estudo sobre o comportamento do volume em relação a variação das medidas. Essa situação resulta em um problema relacionado a uma função polinomial de terceiro grau, que mesmo sem ser aprofundada serve como ponto de partida para o estudo de outros conteúdos matemáticos. Para mais informações dessa proposta, ler o trabalho citado.

Agora, em relação ao pensamento de Souza (2009) sobre uma aula de matemática contextualizada, o autor afirma que

> Uma aula contextualizada leva o aluno a interagir com o que está sendo ministrado, [...] aprendizagem é associada à preocupação em retirar o aluno da condição de espectador passivo, em produzir uma aprendizagem significativa e em desenvolver o conhecimento espontâneo em direção ao conhecimento abstrato. É preciso fazer os alunos verem a matemática na vida real, [...] ligar a matemática que se estuda nas salas de aula com a matemática do cotidiano. (SOUZA, 2009, p.15)

A pesquisa inicialmente se desenvolve a partir da apresentação de três problemas sobre geometria espacial, sendo esses problemas no contexto agropecuário, que é a área do curso. Depois, foram realizados dois seminários, onde foram mostrados os dados da pesquisa de campo. O primeiro seminário foi relacionado à história da matemática, e o segundo, às aplicações da matemática. Com a exposição dos dados da pesquisa de campo houve a formalização dos conceitos matemáticos. Por fim, foi realizada uma avaliação sobre o trabalho, e os alunos preencheram um questionário avaliando os benefícios de uma matemática contextualizada.

Os exemplos apresentados servem como ponto de partida, ou uma base para o desenvolvimento de uma aula de matemática contextualizada. Essas pesquisas tiveram seus próprios resultados, o que comprova a validade dos resultados de quando se usa a contextualização no ensino de conteúdos matemáticos, entendendo a contextualização como uma ferramenta que pode "ligar os pontos", ou seja, dar sentido ao que se estuda em sala de aula.

Existem muitos outros trabalhos que apresentam práticas contextualizadas, mas achamos suficiente apresentar os dois exemplos, para transmitir a ideia base de uma didática contextualizada. Para mais informações sobre isso, ler o trabalho de Maioli (2012).

3.3 Contextualização de equações quadráticas

Muitos autores usam da contextualização para coplementar o estudo de determinados conteúdos matemáticos. Como o foco do nosso trabalho são as equações quadráticas, então veremos como elas são apresentadas de forma contextualizada em dois livros.

Lima (2006), depois de apresentar muita fundamentação teórica sobre a equação quadrática vista como uma função quadrática, no estudo do gráfico da função apresenta inicialmente um contexto histórico e prático da função quadrática. Em breve relato sobre a lenda de Arquimedes, na qual ele incendeia navios de uma frota, usando os raios do sol refletidos em espelhos parabólicos, Lima (2012) mostra o quanto o gráfico de uma função quadrática é recorrente no cotidiano, visto que, a superfície parabólica é originada quando giramos uma parábola em torno do seu eixo. Após contextualizar, Lima (2012) analisa o fundamento matemático dos aparelhos que utilizam de superfícies parabólicas (holofortes, faróis de automóveis, lanternas, etc...).

Lima (2012) também apresenta situações que contextualizam equações quadráticas na física, quando discorre sobre o movomento uniformemente variado (M.U.V). Segundo Lima (2012, p.141), "A função quadrática é o modelo matemático que descreve o movimento uniformemente variado". Ao se aprofundar no estudo do M.U.V, são apresentadas situações de contextualização envolvendo equações quadráticas, como é o caso do movimento de um projétil lançado por uma força instantânea, sujeito apenas à ação da gravidade, sem a resistência do ar.

Winterle (2000), após apresentar todo o estudo das cônicas, reserva uma seção para mostrar curiosidades das mesmas. Nessa parte, ele exibe a propriedade da reflexão de cada uma das cônicas estudadas.

Ao discorrer sobre a propriedade da reflexão da parábola, ele mostra o mesmo que foi apresentado por Lima (2012), mas de uma forma mais direta. Após uma breve explicação dessa propriedade, Winterle (2000) expõe um experimento que traduz perfeitamente a propriedade de reflexão da parábola, e pode ser encontrado no Museu de Ciências e Tecnologia da PUCRS. Veja a Figura 3.1.

Figura 3.1: Experimento que exemplifica a propriedade de reflexão da parábola

Fonte: Winterle, P. (2000, p.210)

O experimento acima é composto por uma mesa com um anteparo curvo em forma parabólica. O furo na mesa está exatamente na posição do foco da parábola que forma o anteparo. Então, um objeto quando é lançado de forma paralela ao eixo da curva, após bater no anteparo, volta e cai sempre no furo. No experimento da Figura 3.1, o objeto lançado é um botão.

3.4 Exemplos

Retomando a concepção base usada em nosso trabalho do que se trata contextualizar, como diz Vasconcelos (2008 *apud* MAIOLI, 2012) que é "apresentar situações que deem sentido aos conhecimentos que desejamos que sejam aprendidos", as questões apresentadas na sequência foram analisadas sob esse pensamento. Dessa forma, nessa seção apresentaremos dois exemplos de questões contextualizadas, sendo uma bem contextualizada e uma mal contextualizada.

3.4.1 Como não deve ser contextualizada

A questão apresentada na sequência foi retirada da prova do Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES) do ano de 2016, e pode ser encontrada no site matematicarlos. Ela foi considerada mal contextualizada pelo motivo de que, o resultado da situação presente nela não condiz com a realidade, mesmo que trate de uma situação real, que é o disparo de um canhão. A questão diz:
(PAEBES – 2016) Um canhão disparou uma bala, de forma que a altura H atingida por essa bala, em metros, em função do tempo t, em segundos, pode ser calculada através da função $H(t) = -5t^2 + 60t$, sendo $0 \leq t \leq 12$. Desconsiderando a altura do canhão, qual é a altura máxima, em relação ao solo, atingida pela bola nesse disparo, em metros?

Para podermos determinar a suposta altura máxima que a bala do canhão atinge, basta calcularmos o y do vértice da função H. Para isso, dado os valores de $a = -5$, $b = 60$ e $c = 0$, então temos

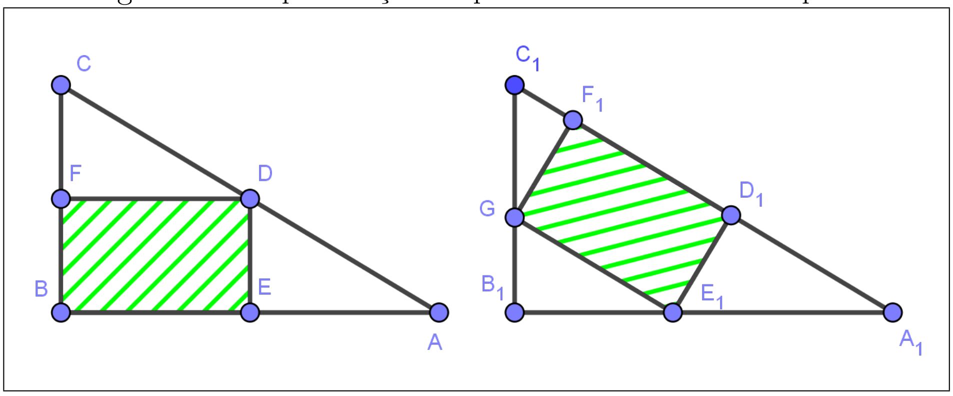
$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{60^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 0}{4(-5)} \Rightarrow y_v = -\frac{3600}{-20} \Rightarrow y_v = 180 \text{ metros.}$$

Nessa questão, altura máxima atingida pela bala do canhão foi de 180 metros, o que não procede, uma vez que, pelo canal especializado em temas militares contemporâneos, "Hoje no Mundo Militar", um canhão não dispara seus projéteis em trajetórias parabólicas, pois o disparo de canhão segue uma trajetória próxima a de uma linha reta horizontal, e além disso, como o disparo desse tipo de arma é próxima a de uma linha reta horizontal, os artilheiros precisam ter visão clara dos alvos, ou seja, o disparo tem em média mais de três quilômetros, ou seja, alcançam 3000 metros, dessa forma, como o disparo não segue a trajetória parabólica, então é impossível que a altura máxima do disparo tenha sido apenas de 180 metros. Ainda por esse canal, a arma responsável pelos disparos parabólicos são os obuseiros, que em geral tem cano mais curto do que o canhão e foram desenvolvidos no século XVIII com o propósito de atingir o interior de fortificações defensivas. Mesmo que a questão utilize-se do procedimento correto para determinar a altura, o contexto foi retradado de forma incoerente.

3.4.2 Como deve ser contextualizada

O exemplo apresentado na sequência foi retirado do livro A Matemática do Ensino Médio, Volume 1, de Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cesar Morgado. Entendemos essa questão como estando bem contextualizada pelo motivo oposto da questão anterior, já que, além de ser algo que pode acontecer na realidade, a resolução é coerente com a realidade. A questão diz:
Numa vidraçaria há um pedaço de espelho, sob a forma de um triângulo retângulo de lados 60cm, 80cm e 1m. Quer-se, a partir dele, recortar um espelho retangular com a maior área possível. Afim de economizar corte, pelo menos um dos lados do retângulo deve estar sobre um lado do triângulo. As posições sugeridas são as da Figura 3.2 abaixo:

Figura 3.2: Representação das possibilidades de corte do espelho



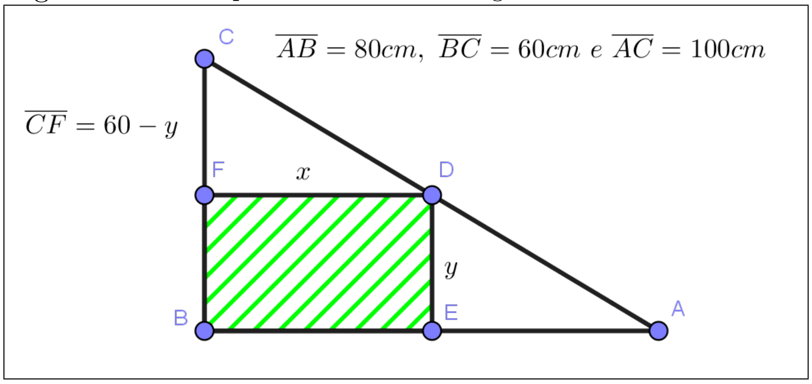
Fonte: Lima, E. L. *et al.* (2006, p.155), adaptado pelo autor

Em cada caso, determine qual o retângulo de maior área e compare os dois resultados.

Para determinar a área do retângulo da esquerda, primeiro chamemos de x a medida da base e y a altura do retângulo. Observe a Figura 3.3. Como todos os triângulos formados na figura são semelhantes, considerando os ΔDFC e ΔABC, temos então:

$$\frac{60-y}{60} = \frac{x}{80} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 60$$

Figura 3.3: Caso para os lados do retângulo nos catetos do ΔABC



Fonte: Lima, E. L. *et al.* (2006, p.155), adaptado pelo autor

Sabemos que a área do retângulo é dada por $A = xy$. Substituindo o resultado anterior na fórmula da área, temos

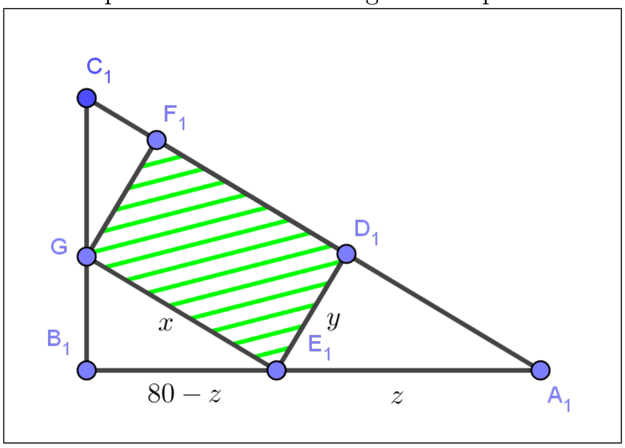
$$A = x(-\frac{3}{4}x + 60) \Rightarrow A = -\frac{3}{4}x^2 + 60x$$

Com isso, basta calcularmos o y_v da função área, já que ela está expressa na forma de uma função quadrática. Assim, a maior área, para o retângulo do primeiro caso, é dada por:

$$y_v = -\frac{60^2}{4(-\frac{3}{4})} = +1200\text{cm}^2$$

Para o outro caso, chamaremos as medidas da base do retângulo de x e a altura de y. Veja a Figura 3.4.

Figura 3.4: Caso para um lado do retângulo na hipotenusa do $\Delta A_1B_1C_1$



Fonte: Lima, E. L. *et al.* (2006, p.155), adaptado pelo autor

Nesse caso, os $\Delta A_1E_1D_1$ e ΔE_1B_1G são semelhantes ao $\Delta A_1B_1C_1$. Dessa forma, da relação entre ΔE_1B_1G e $\Delta A_1B_1C_1$ temos:

$$\frac{x}{100} = \frac{80 - z}{80} \Rightarrow x = -\frac{5}{4}z + 100 \quad (*)$$

Da relação entre $\Delta A_1E_1D_1$ e $\Delta A_1B_1C_1$, temos:

$$\frac{y}{60} = \frac{z}{100} \Rightarrow z = \frac{5}{3}y$$

Substituindo z em $(*)$, temos:

$$x = -\frac{5\left(\frac{5}{3}y\right)}{4} + 100 \Rightarrow x = -\frac{25}{12}y + 100 \quad (**)$$

Isolando o y em $(**)$, temos:

$$y = -\frac{12}{25}x + 48$$

Sabemos que a área do retângulo é dada por $A = xy$. Substituindo o y na fórmula da área, temos:

$$A = x(-\frac{12}{25}x + 48) \Rightarrow A = -\frac{12}{25}x^2 + 48x$$

Com isso, analogamente ao primeiro caso, basta calcularmos o y_v da função área $A = xy$, já que ela está expressa na forma de uma função quadrática. Assim, a maior área, para o retângulo do segundo caso, é dada por:

$$y_v = -\frac{48^2 - 4\left(-\frac{12}{25}\right)0}{4\left(-\frac{12}{25}\right)} = -2304\left(-\frac{25}{48}\right) = +1200\text{cm}^2$$

Concluímos que, em ambos os casos, a maior área possível no corte do espelho retangular é de 1200cm^2.

Esse exemplo é um válido exemplo de como contextualizar uma questão envolvendo equação quadrática(função quadrática), pois como já falamos, além de se tratar de uma situação real, a forma como a questão é resolvida está de conformidade com a realidade, dando sentido ao conhecimento que está sendo estudado, como diz a concepção de contextualização base desse capítulo.

Neste capítulo, pudemos entender que a contextualização não tem uma só concepção, pois como vimos, muitos autores entendem o ato de contextualizar de diferentes modos. Basicamente, apresentamos o que alguns autores pensam sobre a contextualização no ensino, na matemática, contextualização de questões sobre equações quadráticas(função quadrática), e apresentamos exemplos de como deve ser uma questão de equação quadrática de forma contextualizada, e como não deve ser, tudo sob a concepção de Vasconcelos (2008 *apud* MAIOLI, 2012) sobre contextualização. No capítulo seguinte serão feitas as considerações finais.

Capítulo 4

Considerações finais

Buscamos nesse trabalho relacionar três assuntos, que foi a história da equação quadrática, a sua abordagem em três contextos com tratamentos distintos, e a contextualização como metodologia para potencializar a compreensão sobre questões de equação polinomial de segundo grau.

Com a realização desse trabalho, percebe-se que a história da equação polinomial de segundo grau junto a uma boa contextualização das questões sobre, desempenha um importante papel no processo de criação de significados na compreensão de problemas envolvendo equações polinomiais de segundo grau. Percebemos que, quando relacionamos o conteúdo matemático (função quadrática) com alguma relação que exista no cotidiano daquele que a estuda, e essa relação esteja em conformidade com o real, então a geração de significados na aprendizagem é aumentada.

Esse trabalho pode contribuir para alunos e professores em três aspectos, que são história da equação quadrática, o fundamento matemático algébrico, geométrico e um pouco do numérico que envolve a equação quadrática, e por fim, pode dar alguma contribuição no estudo sobre contextualização, quando apresenta algumas concepções sobre, e mostra exemplos de modelos de aula e questões contextualizadas. Com isso, são três possibilidades de contribuição em um único trabalho.

Em relação às contribuições que ocorreram em minha formação acadêmica bem como em outros aspectos da minha vida, o trabalho desempenhou a função de acrescentar ainda mais em minha formação, no que se refere ao aprofundamento do assunto de equação quadrática, história da mesma, e do conhecimento sobre contextualização. A história da equação quadrática é bastante rica, abrange vários povos, culturas e épocas distintas, e poder conhecer tais fatos foi de muita valia para mim. O aprofundamento no estudo da equação quadrática, nos quadros algébrico, geométrico e numérico trouxe uma gama de informações que ainda não tinha conhecimento, e poder estudar melhor sobre várias concepções sobre contextualização, bem como identificar exemplos de aulas e questões contextualizadas aumentou minha caixa de ferramentas para minha futura carreira docente. Em resumo, foram muitas as contribuições que esse trabalho trouxe em minha vida.

É importante resaltar que, os estudos sobre equação quatrática não terminam com esse trabalho, haja vista que esse tema é bastante amplo e pode ser abordado em contextos diversos, como fizemos aqui. Esse trabalho pode servir como embasamento para novas pesquisas sobre o tema, contribuindo assim no desenvolvimento de outros trabalhos.

Sobretudo, como esse trabalho se limitou ao estudo das equações quadráticas no conjunto dos números reais, sugerimos um estudo semelhante a esse, só que envolvendo os números complexos, já que os mesmos começaram a ser estudados a partir de uma situação envolvendo equação quadrática, e isso pode gerar mais contribuições, em diferentes contextos, em futuras pesquisas.

Referências Bibliográficas

BOYER, Carl. B. **História da matemática**. Tradução do inglês para o português de Helena Castro. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 2012.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília, DF. 1996.

CAMPOS, filho, Frederico Ferreira. **Algoritmos numéricos**. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5ª ed. Campinas SP: Unicamp, 2011.

FERREIRA, M. D. S. C. **Uma Abordagem Didática Para O Ensino De Máximo Ou Mínimo Na Função Quadrática**. Dissertação de Mestrado, Macapá, Universidade Federal do Amapá. 2014. Disponível em: <encurtador.com.br/svwV4>. Acesso em: 21 Fev. 2020.

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas**. 4ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

LIMA, E. L. *et al.* **A Matemática do Ensino Médio – Vol. 01**. 9 ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

MAIOLI, M. **A contextualização na matemática do Ensino Médio**. Tese de Doutorado, São Paulo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2012. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/10922>. Acesso em: 15 Out 2019.

MORAIS, R. S. **A aprendizagem de polinômios através da resolução de problemas por meio de um ensino contextualizado**. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Universidade Federal de São Carlos. 2008. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/2442?show=full>. Acesso em: 12 Fev. 2020.

REFATTI, L. R.; BISOGNIN, E. **ASPECTOS HISTÓRICOS E GEOMÉTRICOS DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA**. 2005. p.79-95. Trabalho Final de Graduação - Universidade Franciscana, S. Maria, 2005.

RIBEIRO, D. M. A. D. A. **Uma abordágem didática para função quadrática**. Dissertação de Mestrado. Campo dos Goytacazes, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. 2013. Disponível em: <encurtador.com.br/adhiW>. Acesso em 21 Fev. 2020.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

SOARES, J. H. S. **Função Quadrática**. Dissertação de Mestrado. Natal, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 2013. Disponível em: <encurtador.com.br/qsyTU>. Acesso em: 20 Fev. 2020.

SOUZA, J. F. **Construindo uma aprendizagem significativa com história e contextualização da matemática**. Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. 2009. Disponível em: <https://tede.ufrrj.br/jspui/handle/tede/131>. Acesso em: 12 Fev. 2020.

TEIXEIRA, P. J. M. **Jogo de quadros na perspectiva de Régine Douady**. REVEMAT, Florianópolis (SC), v.9, n. 2, p. 145-165, 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2014v9n2p145>. Acesso em: 9 Dez. 2019.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2000.

________________. 1 Vídeo (6:40 min). **Obuseiro, Morteiro e Canhão. Qual a diferença entre eles?** Publicado pelo canal Hoje no Mundo Militar, 2018. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=V7MRVnwOTmU>. Acesso em: 27 de fev de 2020.

E2048 – QUESTÃO 17 DO PAEBES TRI – 2º TRIMESTRE – 2016. 2017. Matematicarlos. Disponível em: <encurtador.com.br/ltuF5>. Acesso em: 27 de fev de 2020.