INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

CAMPUS CAJAZEIRAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUCAS BATISTA DA SILVA

A RETA TANGENTE NO LIVRO DO ENSINO MÉDIO E DE CÁLCULO: INVESTIGANDO RELAÇÕES DE ABORDAGEM

CAJAZEIRAS-PB

2021

LUCAS BATISTA DA SILVA

A RETA TANGENTE NO LIVRO DO ENSINO MÉDIO E DE CÁLCULO: INVESTIGANDO RELAÇÕES DE ABORDAGEM

Monografia apresentada junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do Instituto Federal da Paraíba, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática.**

Orientador(a):

Prof. Ms. Jair Dias de Abreu.

CAJAZEIRAS-PB

2021

LUCAS BATISTA DA SILVA

A RETA TANGENTE NO LIVRO DO ENSINO MÉDIO E DE CÁLCULO: INVESTIGANDO RELAÇÕES DE ABORDAGEM

Monografia apresentada ao programa de Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba, como requisito à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Data de aprovação: 12/05/2021

Banca Examinadora:

Jair Dias de Abreu

Prof. Ms. Jair Dias de Abreu
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

Kissia Carvalho

Prof(a). Ms. Kissia Carvalho
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

José Doval Nunes Martins

Prof. Ms. José Doval Nunes Martins
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

Campus Cajazeiras Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

S586r

Silva, Lucas Batista da

A reta tangente no livro do ensino médio e de cálculo: investigando relações de abordagem / Lucas Batista da Silva; orientador Jair Dias de Abreu.- 2021.
65 f. : il.

Orientador:Jair Dias de Abreu.
TCC(Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2021.

1. Reta tangente 2. Cálculo 3. Livros didáticos I. Título

CDU 517(0.067)

A Deus, a minha noiva Silvana e a minha família, dedico.

AGRADECIMENTOS

Com a finalização deste trabalho, sinto a necessidade de agradecer a pessoas que, direta ou indiretamente, ficaram ao meu lado nesta etapa tão importante da minha vida profissional e pessoal.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por sempre iluminar a minha vida e por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste trabalho.

Em segundo lugar, agradeço ao meu professor orientador, Jair Dias de Abreu, pela orientação, dedicação, pelo exemplo de profissionalismo, auxiliando em meu crescimento profissional e pessoal.

Quero agradecer também à minha banca examinadora constituída pelos professores Doval Nunes e Kissia Carvalho, por terem aceito o convite, pela participação e pelas contribuições dadas neste trabalho e ao longo de toda minha formação.

Gostaria de agradecer ao amor de minha vida, Silvana, por toda ajuda, apoio e incentivo dado ao logo de toda minha formação. Sem ela ao meu lado nada disso estaria acontecendo.

Agradeço a toda minha família, em nome dos meus pais Joana e José e minhas irmãs Ana Beatriz e Thalita, meu muito obrigado pelo apoio, compreensão e todo esforço investido na minha educação.

Agradeço também a todos meus professores, que ao longo de toda minha jornada acadêmica me propocinonaram ensinamentos e correções que me permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação profissional ao longo do curso.

A todos os alunos da minha turma, pelo ambiente amistoso, no qual convivemos e solidificamos os nossos conhecimentos, de forma especial à Fabrício, Matheus, Francisco, Reinaldo e Jeferson, com quem convivi diariamente durante os últimos anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer não só como pessoa, mas também como formando.

Por último, quero agradecer também ao Instituto Federal da Paraíba – Campus Cajazeiras e todo o seu corpo docente pelo acolhimento.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas
criar as possibilidades para a sua própria
produção ou a sua construção.”
(Paulo Freire).

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo geral analisar a forma de abordagem da reta tangente em livros didáticos de matemática do ensino médio e em livros de Cálculo do ensino superior, a fim de verificar se, ao introduzir o conteúdo de derivadas, os conceitos e ideias da reta tangente estudados no ensino médio são retomados. Esta análise torna-se de cunho fundamental, pois não examina apenas a percepção dos alunos, mas também a abordagem que os professores desenvolvem para promover um melhor aprendizado, através do livro didático, identificando algumas lacunas que podem ser superadas por meio do seu planejamento pedagógico. A metodologia desta pesquisa é de cunho qualitativa, com caráter exploratório, pois envolve um levantamento bibliográfico em livros didáticos do ensino médio (03) e livros de Cálculo do ensino superior (04), quanto à abordagem da reta tangente. Os critérios utilizados para os livros do ensino médio, referem-se às bibliografias mais atuais, de acordo com o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2016. Já nos livros do ensino superior, a seleção foi feita de acordo com a indicação de professores atuantes na área e com o contato obtido, com os livros que utilizei para estudo, na disciplina de Cálculo, durante a minha graduação. Inicialmente, é feito um estudo exploratório, trazendo uma reflexão que abrange os conceitos existentes sobre a reta tangente, além de uma revisão histórica dos principais matemáticos que contribuíram diretamente para a sua criação, de acordo com o trabalho de Faria (2018). Posteriormente, temos as análises dos livros didáticos, onde serão expostas as percepções desenvolvidas a partir das decorrentes análises, evidenciando tanto a parte descritiva, quanto a parte crítica e reflexiva de nossa pesquisa. Diante disso, podemos concluir que, nos livros do ensino médio, percebemos que a maior carência está na abordagem feita sobre a reta tangente, que se apresenta de forma pouco explorada, onde os autores poderiam ter trazido um contexto histórico, retomando os conceitos do coeficiente angular, afinal, não contextualizar historicamente a reta tangente faz com que não seja identificado o real valor que a reta possui para a matemática. Já nos livros de Cálculo percebemos que, não há tanta relação desse conteúdo no ensino médio, com a forma que é trabalhado no ensino superior. A maioria dos livros não faz um paralelo para evidenciar o que o aluno aprendeu no ensino médio e o que ele irá aprender no ensino superior. A importância desse paralelo se dá ao fato de o aluno conseguir compreender a reta tangente em sua totalidade e perceber que o assunto que ele está estudando, nada mais é do que algo que ele já viu, porém, agora, de forma mais aprofundada. Fica a cargo do professor a responsabilidade de utilizar outros recursos para sanar essa dificuldade.

Palavras-chave: Reta Tangente; Cálculo; Livros Didáticos.

ABSTRACT

This work has the general objective of analyzing the way of approaching the tangent line in high school mathematics textbooks and in higher education calculus books, verify whether, when introducing the content of derivatives, the concepts and ideas of the line tangent studied in high school are resumed. This analysis becomes fundamental, as it examines not only the students' perception, but also the approach that teachers develop to promote better learning, through the textbook, identifying some gaps that can be overcome through their pedagogical planning. The methodology of this research is of a qualitative nature, with an exploratory character, as it involves a bibliographic survey in high school textbooks (03) and Higher Education Calculation books (04), regarding the approach of the tangent line. The criteria used for high school books refer to the most current bibliographies, according to the 2016 National Textbook Program (PNLD). In higher education books, the selection was made according to the indication of professors working in the area and with the contact obtained, with the books I used for study, in the subject of Calculus, during my graduation. Initially, an exploratory study is carried out, bringing a reflection that covers the existing concepts about the tangent line, in addition to a historical review of the main mathematicians who contributed directly to its creation, according to the work of Faria (2018). Later, we have the analysis of the textbooks, where the perceptions developed through the resulting analyzes will be exposed, showing both the descriptive part, as well as the critical and reflective part of our research. In view of this, we can conclude that, in high school books, we realize that the greatest lack is in the approach taken on the tangent line, which presents itself in a little explored way, where the authors could have brought a historical context, resuming the concepts of the coefficient angular, after all, not historically contextualizing the tangent line does not identify the real value that the line has for mathematics. In the Calculus books, we can see that there is not so much relationship between this content in high school and the way it is worked in higher education. Most books do not make a parallel to show what the student learned in high school and what he will learn in higher education. The importance of this parallel is because that the student can understand the tangent line in its entirety and realize that the subject he is studying, is nothing more than something he has seen, but now, in more depth. It is the responsibility of the teacher to use other resources to remedy this difficulty.

Keywords: Tangent line; Calculation; Didactic books.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 - APRESENTANDO A PESQUISA

Desenvolvida junto com a própria humanidade, a Matemática não teve nenhum inventor. Ela surgiu com a necessidade humana de contar e medir objetos. Como é conhecida hoje, a matemática surgiu no Antigo Egito e no Império Babilônico, por volta de 3500 a.C., além desses dois impérios, ao longo do tempo, várias outras civilizações passaram a necessitar da Matemática e cada império desenvolveu o seu próprio sistema de contagem e medição (BEZERRA, 2021).

Diante do surgimento dessa ciência, vários filósofos foram responsáveis por aperfeiçoá-la e dar origem a múltiplas áreas pertencentes à mesma. Dentre elas, temos a álgebra, a aritmética e a geometria. No campo da geometria, em especial, temos a geometria analítica, que analisa a representação dos elementos geométricos, incluindo a medição da distância entre pontos, retas, circunferências e outros (LUIZ, 2021).

Também inserida na geometria analítica temos o estudo da reta tangente, definida por Carvalho (1919), como sendo uma reta que intercepta uma curva em um único ponto, mais especificamente, nas curvas encontradas nas circunferências, teve sua história confundida com a história do cálculo, se tornando um dos princípios para a criação do Cálculo, no século XVII.

Esta pesquisa é de cunho qualitativa, com caráter exploratório, pois envolve um levantamento bibliográfico em livros didáticos do ensino médio e livros de Cálculo do ensino superior, quanto à abordagem da reta tangente.

Sendo assim, o objetivo geral é analisar a forma de abordagem da reta tangente em livros didáticos de matemática do ensino médio e em livros de Cálculo do ensino superior, a fim de verificar se, ao introduzir o conteúdo de derivadas, os conceitos e ideias da reta tangente estudados no ensino médio são retomados. Essa análise se deteve a observar nos livros algumas informações sobre a reta tangente, tais como o conceito, a visão histórica e a forma de abordagem da reta tangente, analisando como ela é abordada nos livros, para que seja possível fazer uma relação das formas de abordagem do conteúdo, e assim, fortalecer as análises dos livros de Cálculo, juntamente com os livros do ensino médio.

Baseando-se nesse objetivo, a pergunta que norteou este trabalho foi: De que forma a reta tangente estudada no ensino médio é abordada no livro de Cálculo para introduzir o estudo das derivadas? Ao analisar essa relação em minha experiência enquanto aluno na educação básica e na disciplina de cálculo, percebi que, não há tanta relação desse conteúdo no ensino médio, com a forma que é trabalhado no ensino superior. Relacionando-os entre si, a reta tangente, no ensino superior, é apresentada aparentemente com mais dificuldade, com um conteúdo totalmente distinto do que é exposto no ensino médio, sendo que o estudo da reta tangente, de forma analítica, já foi apresentado na educação básica onde muitas das vezes, o livro de cálculo não faz esse paralelo com o ensino médio e o professor também não retoma esses conceitos.

É essencial ressaltar que, na maior parte das vezes, os alunos enxergam o conteúdo de derivada, na disciplina de cálculo I nos cursos superiores, não relacionando ao que aprenderam no ensino médio. Além disso, a reta tangente é um ponto de encontro entre a matemática estudada no ensino médio e as derivadas no superior, pois como dito em Carvalho (1919), foi inspirado no estudo da declividade da reta tangente que o conteúdo de cálculo surgiu. Sendo assim, é necessário que os estudantes reconheçam a sua importância para a matemática. Para isso, analisar como a reta tangente é abordada nos livros do ensino médio e do ensino superior, torna-se de cunho fundamental, pois não examina apenas a percepção dos alunos, mas também a abordagem que os professores desenvolvem para promover um melhor aprendizado, através do livro didático, identificando algumas lacunas que podem ser superadas por meio do seu planejamento pedagógico.

Assim, esse estudo desperta uma nova visão de abordagem para os livros de Matemática, que seja útil, para que o aluno consiga criar relações entre o que aprendeu no ensino médio e o que lhe será apresentado no ensino superior, já que, mediante as observações feitas, a maioria dos livros que foram analisados não relacionam esses conteúdos com a educação básica. Diante da ausência dessa relação e tendo como base o contexto histórico da reta tangente, é interessante que os professores usem a contextualização da matemática como recurso metodológico, para auxiliar em sua prática, rompendo com esse obstáculo existente na maioria dos alunos e aproximando o mundo matemático do universo do estudante e da realidade que o cerca.

Examinando as circunstâncias em que a reta tangente está inserida, a metodologia deste trabalho trata-se de uma revisão bibliográfica, utilizando livros didáticos. Para responder nossa pergunta de pesquisa, inicialmente, foi feito um estudo sobre a reta tangente, a fim de situar nossa pesquisa em contexto histórico, observando estudos desenvolvidos por outros matemáticos, definições e demonstrações, além de suas aplicações. Posteriormente, realizamos uma seleção de livros de cálculo, onde selecionamos as bibliografias para a realização deste trabalho. Os critérios utilizados para os livros do ensino médio, referem-se às bibliografias mais atuais, de acordo com o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2016. Já nos livros do ensino superior, a seleção foi feita de acordo com a indicação de professores atuantes na área, além do contato obtido com os livros que utilizei para estudo, na disciplina de Cálculo, durante a minha graduação.

Deste modo, estruturaremos este trabalho da seguinte forma: no segundo capítulo temos uma reflexão que abrange os conceitos existentes sobre a reta tangente, trazendo assim, uma revisão histórica dos principais matemáticos que contribuíram diretamente para a sua criação e, por consequência, para a criação do cálculo, onde serão apresentados vários conceitos desenvolvidos por matemáticos, que fazem uso da reta tangente em outros tipos de curvas, desencadeando assim, uma abordagem geral que possa ser utilizada para todos os casos. Além disso, apresentaremos os métodos desenvolvidos para encontrar retas tangentes a curvas, métodos esses que serão apresentados por Descartes, Fermat e Isaac Barrow (FARIA, 2018).

No terceiro capítulo, inicialmente, temos as análises dos livros didáticos do ensino médio, onde, a partir da leitura e exploração dos dados, foi apresentado o que cada livro trazia como abordagem sobre a reta tangente. Em todos os livros do ensino médio analisados mais precisamente nos da 3ª série este assunto era encontrado na parte de circunferência. Além disso, em alguns livros foi necessário observar outros capítulos, pois a abordagem do coeficiente angular não era citado junto ao conceito de reta tangente. Assim como nos livros anteriores, nos livros do ensino de Cálculo, a análise foi feita na introdução do conteúdo de derivada.

O estudo exploratório se deu a partir das seguintes bibliográfias. Os livros explorados com a pesquisa foram: Matemática: ciência e aplicações (IEZZI, *et al,* 2016); Matemática: padrões e relações (LONGEN, 2016) e Conexões com a Matemática (LEONARDO, 2016). Nos livros do ensino superior, mais precisamente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, a análise foi feita apenas nos capítulos em que a reta tangente foi introduzida nos conteúdos de derivadas, nos seguintes livros: Cálculo segundo Munem Foulis (FOULIS, 2005); Cálculo A: Funções, limites, derivação e integração (FLEMMING e GONÇALVES, 2006); Introdução à análise matemática (NETO, *et al,* 1985) e Cálculo segundo James Stewart (STEWART, 2013).

Por fim, no último capítulo, trazemos as considerações obtidas através do nosso estudo, onde, nos livros do ensino médio, percebemos que a maior carência está na abordagem feita sobre a reta tangente, que se apresenta de forma pouco explorada. Já nos livros do ensino superior, a maioria dos livros não faz um paralelo para evidenciar o que o aluno aprendeu no ensino médio e o que ele irá aprender no ensino superior, fazendo com que o professor precise utilizar outros recursos para sanar essa dificuldade, dentre eles: uso de plataformas e programas digitais, além de apresentar o conteúdo inserindo o contexto histórico de forma didática. Feita as observações, serão expostas as percepções desenvolvidas a partir das decorrentes análises, evidenciando tanto a parte descritiva, quanto a parte crítica de nossa pesquisa.

2 – EXPLORANDO A RETA TANGENTE

De acordo com Soares (2013), o século XVII foi fundamental na história da matemática, pois foi a época em que surgiu uma nova geometria. Descartes e Fermat são responsáveis pelo início do que veio se configurar como a geometria analítica. Assim como muitos outros conceitos em matemática, não se pode definir a data de criação da geometria analítica, muito menos seus inventores, mas, sabemos que grandes foram as mudanças, para obter-se o formato existente hoje.

Segundo a obra *Geometria Analítica e Plana*, de Sebastião e Silva, publicada em 1956;

> “A ideia básica desta área consiste em definir a posição de cada ponto por meio dum sistema de números (dois números, em geometria plana, e três, em geometria do espaço), o que permite traduzir integralmente a linguagem da geometria na linguagem precisa e maleável da análise: as figuras geométricas passam então a ser descritas por meio de equações e inequações; os problemas da geometria transformam-se em problemas de álgebra ou de cálculo infinitesimal; os teoremas da geometria tornam-se demonstráveis por meio da análise.” (Silva, 1970, p. 5).

Para Descartes, a geometria analítica revolucionou a matemática, tornando mais fácil enxergar relações entre números e compreender conceitos abstratos (PELLANDA, 2014). Além disso, ela foi criada a partir da necessidade da inclusão da álgebra na geometria tradicional. Uma das áreas pertencentes à geometria analítica é o estudo das retas, tais como: a reta tangente, a secante e externa à circunferência. A história da reta tangente pode ser confundida com a história do cálculo e se tornou um dos princípios para a criação dessa área, no século XVII.

Alguns estudiosos apresentam definições para a reta tangente, dentre eles, Heath (1956, p.1) ao dizer que: uma linha reta diz-se que toca um círculo se, encontrando o círculo e sendo prolongada, não corta o círculo. Explorando este conceito, o uso do termo “tangente”, se dá ao fato da expressão “toca um círculo” não ser tão comum, como dito a seguir por Machado (2003):

> “Analisando esta definição, pelos parâmetros atuais, esperar-se-ia encontrar o nome “tangente” na própria definição, uma vez que a terminologia “toca um círculo” não é comum atualmente. Contudo, esta definição, tal como é apresentada, pretende ser uma tradução fiel do original grego, levando em consideração o fato de não existir

> um termo em grego para "tangente"- etimologicamente o termo tangente deriva do latim *tangentem*, particípio presente de *tangere*, que significa "tocar" (Machado, 2003, p. 268).

Alguns Matemáticos apresentam conceitos associados a criação da reta tangente, destacando a influência do seu uso do decorrer de suas descobertas. Para Euclides, em seu livro Elementos, a reta tangente é descrita no livro III. A primeira definição desta reta diz que a tangente à circunferência é a reta que a encontra sem cortá-la. Já para Arquimedes, foi na espiral, principal curva estudada por ele, que é descrita pela composição de dois movimentos: um de rotação de uma semirreta com origem fixa e o outro de deslocamento sobre esta semirreta, onde ele utilizou a ideia para encontrar a reta tangente nesta curva. Com a mesma ideia de Arquimedes, Roberval estudou curvas geradas por composição de movimentos e suas tangentes como sendo a "soma vetorial" das tangentes às curvas que a determinam. De acordo com as ideias de Apolônio de Perga, a reta tangente foi estudada em suas construções geométricas, com uso equivalente hoje à equação $y^2 = 2px + qx^2$, em coordenadas cartesianas para as cônicas (CARVALHO, 1919).

Grandes nomes, como Descartes, Fermat, Isaac Barrow, Newton e Leibnitz, dedicaram-se ao problema de como encontrar essa reta e de como encontrar a curva que passa por esse ponto, que tem essa reta como tangente nesse ponto. Vale ressaltar que a reta tangente teve sua história confundida com a história do cálculo, se tornando um dos princípios para a criação do Cálculo Diferencial, no século XVII, assim como descrito em Ferrão, (2012):

> "Com o desenvolvimento da Geometria Analítica no século XVII, o interesse por tangentes a curvas reaparece quando Descartes e Fermat introduzem as coordenadas cartesianas. Nesta época, Fermat munido de técnicas analíticas resolveu dedicar-se ao antigo Problema das Tangentes e percebeu que o conceito euclidiano de tangente (reta que encontra a curva em um único ponto) precisava ser reformulado, pois embora válido para a circunferência e elipse é inaceitável no caso geral" (FERRÃO, 2012, p. 175).

Considerada uma das disciplinas mais tradicionais do ensino superior de ciências exatas, o Cálculo Diferencial serve de base referencial para a compreensão tanto do desenvolvimento tecnológico, quanto do científico, desde que foi sugerido, como disciplina por Newton (1646-1727) na Inglaterra e Leibnitz (1646-1716) na Alemanha, cerca de trezentos anos atrás.

Embora sejam consideradas sua grande relevância e modernidade como conhecimento, o ensino do Cálculo Diferencial e Integral, até agora, preserva sua composição original. À vista disso, é tida como uma das disciplinas na qual os alunos demonstram grandes dificuldades de aprendizado, devido à sua complexidade, quando ingressam no nível superior (BOYER, 2012).

A seguir, serão abordados os métodos matemáticos para o cálculo da reta tangente, desenvolvidos por Descartes, Fermat e Isaac Barrow, que foram fundamentais para a criação do Cálculo Diferencial. Vale ressaltar que, todos os tópicos descritos a seguir baseiam-se nas ideias de Faria (2018), em seu trabalho intitulado “*A origem da Derivada e da Integral*”.

2.1 MÉTODO DE DESCARTES

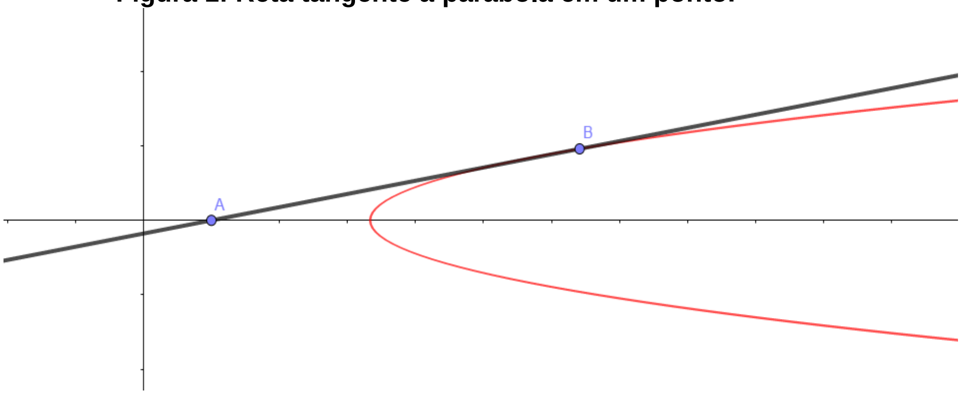
No seu livro *Geometria,* livro 2, Descartes trata do problema da tangente de uma maneira geral. O tratamento cartesiano de tangência foi de encontrar o círculo que tangencia a curva no ponto, e então, o círculo e a curva terão a mesma tangente neste ponto. Como a tangente ao círculo já era conhecida por Euclides, bastando para isto achar o raio do círculo, o que Descartes chamou de normal à curva no ponto. A tangente fica então determinada pela reta ortogonal a esta normal no ponto de contato. Para a tangência à curva por um ponto fora dela, a construção cartesiana foi pela sub-tangência (CARVALHO, 1919). Vejamos os três métodos desenvolvidos por Descartes para a construção da tangente.

Primeiro método de Descartes

Seguindo todo processo mencionado acima, através de um exemplo, podemos compreender melhor o método que Descartes descreveu. Se utilizarmos a equação $y^2 = 3x - 2$, então devemos determinar a tangente em algum ponto dessa parábola, como vemos na figura 1. Neste caso, temos que:

$$f(x,y) = 3x - y^2 - 2 = 0$$

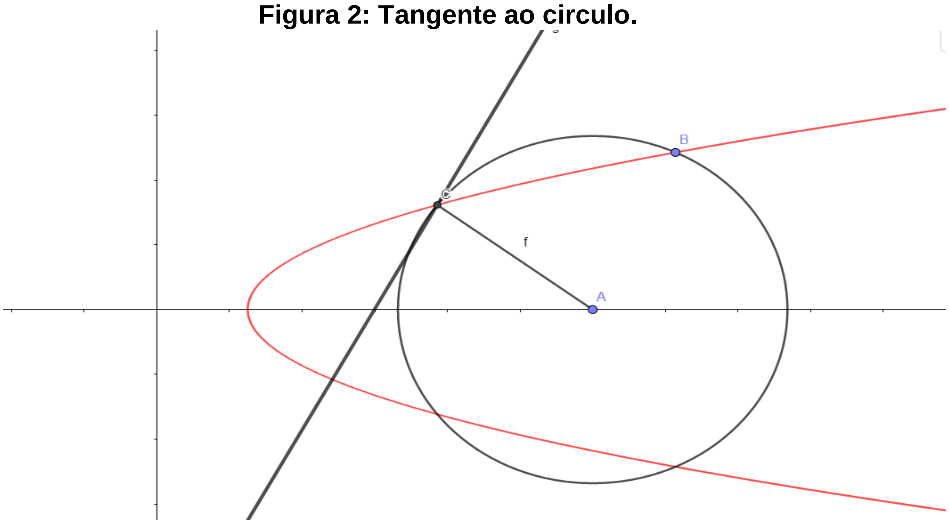
Figura 1: Reta tangente a parábola em um ponto.



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra.

Se observarmos a figura 2, vemos que a circunferência arbitrária centrada no eixo x, intercepta a parte de cima da parábola em, no mínimo, dois pontos, sendo um deles o ponto onde iremos obter a tangente.

Figura 2: Tangente ao circulo.



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra.

Se considerarmos os pontos (x, y) que estão na Parábola e na Circunferência ao mesmo tempo, eles satisfazem o sistema a seguir:

$$\begin{cases} (x-b)^2 + y^2 = r^2 \\ y^2 = 3x - 2 \end{cases} \qquad (1)$$

Nele, temos que o centro da circunferência é dado por um ponto $B = (b, 0)$. Sabendo disso, se isolarmos o y^2 na primeira equação do sistema (1), temos:

$$y^2 = r^2 - (x - b)^2 = r^2 - x^2 + 2xb - b^2. \qquad (2)$$

Substituindo (2) na segunda equação de (1), podemos encontrar:

$$3x - 2 = r^2 - (x - b)^2 = r^2 - x^2 + 2xb - b^2$$

Ou seja, obtemos uma equação do 2º grau em x

$$x^2 + (3 - 2b)x + b^2 - 2 - r^2 = 0 \qquad (3)$$

Calculando o determinante desta equação, temos:

$$\Delta = (3 - 2b)^2 - 4b^2 - 8b - 4r^2 = 17 - 12b + 4r^2$$

Sabemos que a equação (3) possui duas raízes, pois a circunferência intercepta a parábola em quatros pontos e chamaremos essas raízes de x_1 e x_2. Conhecendo o fato que cada raiz possui dois pontos que são correspondentes com o eixo das ordenadas e que são simétricos em relação ao eixo das abscissas, então, essas raízes são justamente as coordenadas que são encontradas nos eixos das abscissas e interceptam a parábola com a circunferência. Para a equação (3) possuir duas raízes reais, ela deve satisfazer o fato de que o discriminante seja maior que zero. Logo, na expressão do discriminante obtida acima, temos que $\Delta > 0$ se, e somente se, $b < \frac{17}{12} + \frac{r^2}{3}$.

Se fizermos com que a circunferência toque a parábola em dois pontos que sejam simétricos ao eixo das ordenadas, então, em um desses pontos, podemos calcular o coeficiente angular da reta tangente. Portanto, se considerarmos $x_1 = x_2 = \delta$, podemos formar uma equação quadrática (3), que pode ser reescrita na forma $(x - \delta)^2$, ou seja:

$$x^2 + (3 - 2b)x + b^2 - 2 - r^2 = (x - \delta)^2 = x^2 - 2\delta x + \delta^2.$$

Utilizando a propriedade de igualdade de polinômios, temos:

$$(3 - 2b) = - 2\delta$$

e

$$b^2 - 2 - r^2 = \delta^2$$

Isolando b na primeira e depois r^2 na segunda, encontramos:

$$b = \frac{(2\delta - 3)}{2} \qquad (4)$$

e

$$r^2 = b^2 - 2 - \delta^2 \qquad (5)$$

Como supomos que a raiz é dupla, então, para encontrar a tangente no ponto (x, y) que pertence a parábola, devemos tomar que $x = \delta$ e $y = \pm\sqrt{3x - 2}$. Sendo assim, o ponto da tangência é dado da seguinte forma $(\delta,$

$\pm\sqrt{3\delta - 2}$). Em seguida, substituindo o valor de δ em (4), encontramos o valor de b e consequentemente o centro da circunferência:

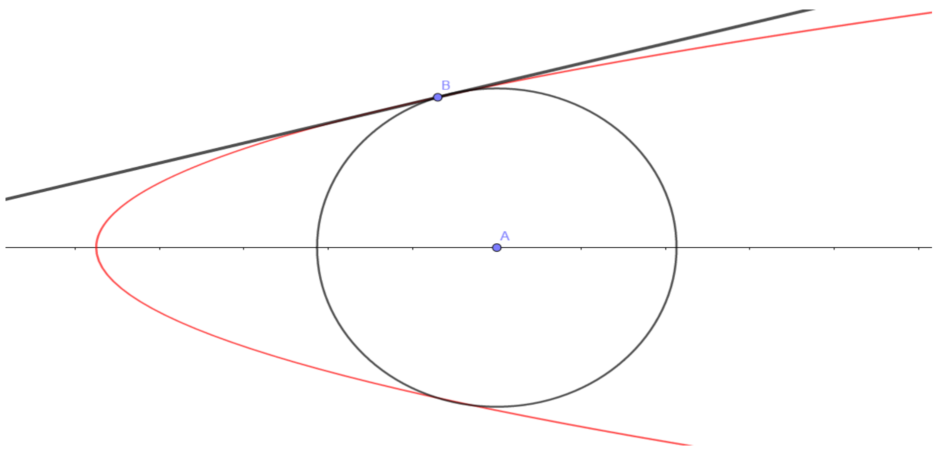
$$B = (b, 0) = (\frac{(2\delta-3)}{2}, 0). \qquad (6)$$

Substituindo o valor de b em (5) devemos encontrar o raio da circunferência.

$$r = \sqrt{\left(\frac{2\delta-3}{2}\right)^2 - 2 - \delta^2}\ . \qquad (7)$$

Como encontramos o centro e o raio da circunferência, podemos encontrar a reta normal e, em seguida, encontrar a reta tangente à circunferência, que agora também é tangente à parábola. Para isso, devemos obter uma equação da reta tangente calculando o coeficiente angular, chamando-a de m_n da reta normal, que passa pelo ponto de tangência, e em seguida, obtemos o coeficiente angular da reta tangente, onde iremos chamar de m_t. Para finalizar, encontramos a equação da reta tangente.

Figura 3: Tangente a circunferência e a curva.



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra.

Conhecendo o centro da circunferência (6) e o ponto de tangencia $(\delta, \pm\sqrt{3\delta - 2})$, vamos encontrar primeiro m_n. Assim, temos:

$$m_n = \frac{0-y}{B-x} = \frac{0-(\pm\sqrt{3\delta-2})}{\frac{2\delta+3}{2}-\delta} = \frac{-2(\pm\sqrt{3\delta-2})}{3} \qquad (8)$$

Dessa forma, iremos encontrar o valor do coeficiente angular da reta tangente que é dada por m_t. Então, temos:

$$m_t = \frac{1}{m_n} = \frac{1}{\frac{2(\pm\sqrt{3\delta-2})}{3}} = \frac{3(\pm\sqrt{3\delta-2})}{6\delta-4}.$$

Portanto, a equação da reta tangente é:

$$y = \frac{3(\pm\sqrt{3\delta-2})}{6\delta-4}(\ x - \delta) + (\pm\sqrt{3\delta - 2}).$$

Todos esses passos foram feitos através do método de Descartes, já encontrado em alguns estudos antes mesmo da criação do cálculo. Para comprovar tal fato, basta derivarmos a função e aplicarmos a derivada no ponto de tangência. Isso significa o mesmo que encontrar o coeficiente angular da reta tangente para determinadas curvas.

Temos que $y^2 = 3x - 2$, temos:

$$y = \pm\sqrt{3x-2} = \pm(3\mathrm{x} - 2)^{\frac{1}{2}}$$

Utilizando a regra da cadeia para derivar y em relação a x, temos:

$$y'(x) = \pm\frac{1}{2}(3x-2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\ (\pm\sqrt{3x-2})} = \frac{3\ (\pm\sqrt{3x-2})}{6\mathrm{x}-4} \qquad (9)$$

Considerando o ponto de tangencia $(\delta,\ \pm\sqrt{3\delta-2})$, que pertence a parábola, temos que a inclinação da reta tangente a parábola neste ponto é dado por:

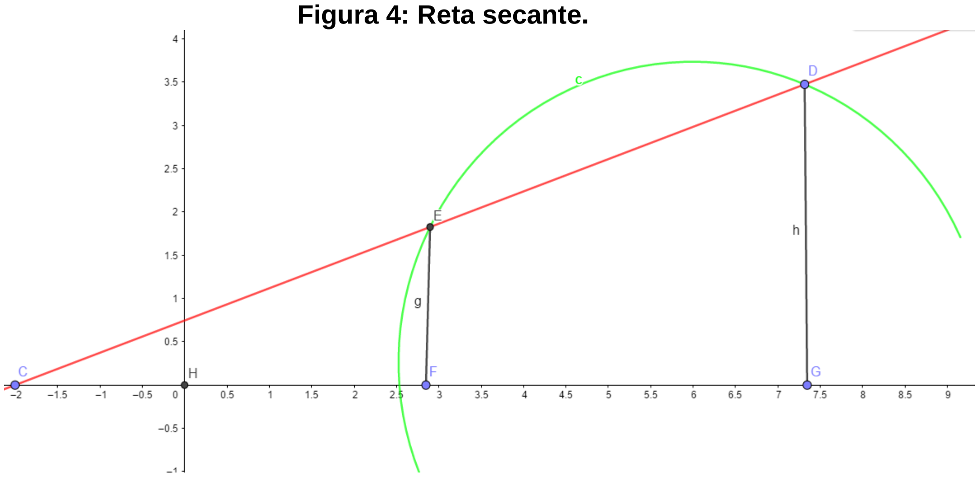
$$y'(\delta) = \frac{3(\pm\sqrt{3\delta-2})}{6\delta-4}\ . \qquad (10)$$

Segundo/Terceiro método de Descartes

A partir das bibliografias encontradas, todos os autores evidenciam que o terceiro método é idêntico ao segundo. Então, diante disso, iremos apresentar somente o terceiro método.

Para determinar o terceiro método, Descartes traça uma reta secante a uma curva, fazendo com que essa reta passe pelo ponto, no qual possamos descobrir a reta tangente, como mostra a figura 4:

Figura 4: Reta secante.



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra

Se for considerado que o ponto E de coordenadas (x, y), é o ponto no qual queremos calcular a reta tangente e o ponto D, o ponto por onde a reta secante pode passar, então, temos que C seja o ponto onde a reta toque o eixo das abcissas. Iremos obter a reta tangente quando D assumir valores muito próximos de E na curva $f(x, y) = 0$.

Definimos os seguimentos de reta da mesma forma que Descartes utilizava: $HF = x$, $FE = y$, $CF = a$, $FG = e$ e $DG = h$, onde $f(x, y) = 0$.

Sejam os triângulos TDG e CEF, Descartes percebeu que existia semelhança de triângulos entre eles. Assim, temos:

$$\frac{a}{(a+e)} = \frac{y}{h}$$

Manipulando, temos que:

$$h = y(1 + \frac{e}{a})$$

Como *e* assume valores muitos próximos de zero, Descartes assumia que:

$$f(x, y) = f(x + e, y(1 + \frac{e}{a})) = 0$$

Através de um exemplo, podemos compreender melhor como é utilizado esse método para calcular a reta tangente. Considerando E um ponto que tem como coordenadas (x, y), a curva $y^2 = 5x$, temos que a igualdade a seguir:

$$f(x + e, y(1 + \frac{e}{a})) = 0 \qquad (11)$$

se torne

$$y^2 \left(1 + \frac{e}{a}\right)^2 - 5(x + e) = 0$$

ou seja,

$$y^2(1 + \frac{2e}{a} + \frac{e^2}{a^2}) - 5x - 5e = 0$$

Aplicando a propriedade da distributiva, obtemos:

$$y^2 + \frac{2ey^2}{a} + \frac{e^2y^2}{a^2} - 5x - 5e = 0 \qquad (12)$$

Simplificando em (12) em relação a $y^2 = 5x$, encontramos:

$$\frac{2ey^2}{a} + \frac{e^2y^2}{a^2} - 5e = 0$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por *e*, obtemos:

$$\frac{2y^2}{a} + \frac{ey^2}{a^2} - 5 = 0$$

Sabendo que o valor de *e* vai se tornando cada vez mais próximo de zero, então os termos que estão sendo multiplicados por *e,* podemos simplificar. Assim, temos:

$$\frac{2y^2}{a} = 5 \Leftrightarrow a = \frac{2y^2}{5} \Leftrightarrow a = 2x$$

Portanto, $a = 2x$. Se olharmos para figura 4, *a* é o mesmo que o seguimento CF, onde Descartes chamava de subtangente e utilizava para poder encontrar a reta tangente. Tendo encontrado a subtangente, imediatamente Descartes encontrava o valor de $C = (x - 2x, 0) = (-x, 0)$. Com esse valor encontrado, já se pode calcular o coeficiente angular da reta que passe por C e $E = (x, y)$. Dessa forma, temos:

$$m_t = \frac{y-0}{x-(-x)} = \frac{\sqrt{5}}{2x} = \frac{5}{2\sqrt{5x}} .$$

Se derivarmos a equação $y^2 = 5x$, temos:

$$y = 5x^{\frac{1}{2}}$$

$$y'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$$

Se observarmos o resultado que Descartes utilizava para encontrar reta tangente a curvas, percebemos que é o mesmo que utilizamos atualmente para o Cálculo Diferencial, comprovando assim, que Descartes já utilizava o resultado antes mesmo da criação do Cálculo.

2.2 MÉTODO DE FERMAT

O processo de Fermat para achar a tangente a uma curva era baseado no de encontrar o máximo e mínimo de uma função. Alguns historiadores afirmam que ele se baseou na afirmação de Kepler de que a variação de uma função é mínima perto de um dos pontos de máximo ou mínimo (CARVALHO, 1919).

.

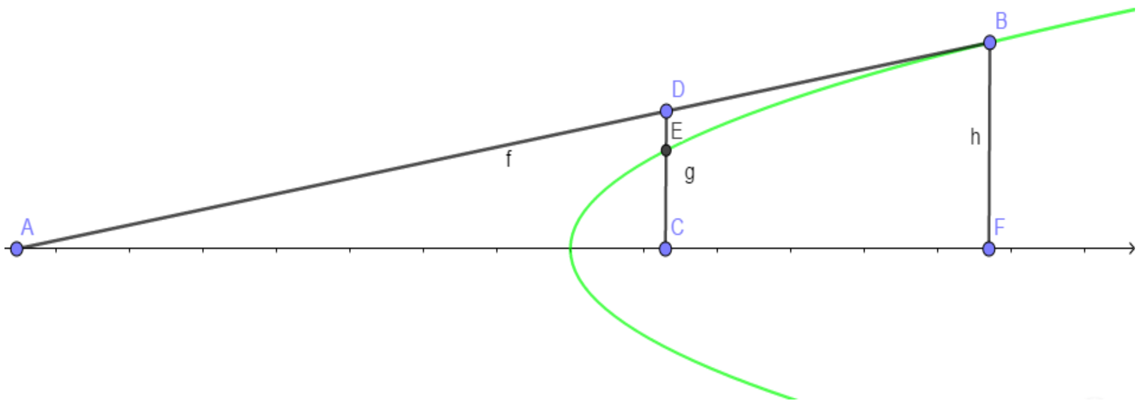
Primeiro método de Fermat

O primeiro método utilizado por Fermat consiste em encontrar a subtangente. Segundo (PINTO, 2020), através de uma abordagem com a notação de coordenadas e eixo cartesiano, o método utilizava a ideia de subtangente, que corresponde a um segmento de reta que vai do ponto de tangência perpendicularmente ao eixo das abscissas.

Partindo desse contexto, para encontrar essa subtangente, Fermat partia da ideia de manipular curvas na forma $f(x, y) = 0.$ Para isso, ele assume que já existe uma reta tangente à uma curva e assim, podemos chegar na subtangente, determinando, enfim, sua inclinação. Para ajudar a nossa observação, utilizaremos a parábola $y^2 = 2x - 1$, como exemplo.

Observando a figura 5, devemos então calcular o coeficiente angular da reta tangente. Para isso, tendo um ponto B que tem como coordenadas (x, y), Fermat considerava um ponto E de coordenadas (x_1, y_1) que seja muito próximo a uma curva. Neste caso, estamos utilizando a curva $y^2 = 2x - 1.$ Assim, podemos visualizar que $C = (x_1, 0)$ e $F = (x, 0)$, onde o comprimento de CF é e. Com isso, podemos denotar que $E = (x - e, y_1).$ Sendo A o ponto onde essa reta tangente toca o eixo das abcissas, denotamos por a o seguimento AF, ou seja, a subtangente.

Figura 5: Parábola com as estruturas de seguimentos.



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra.

Sabendo que AE é a subtangente e conhecendo a curva que é $y^2 = 2x - 1$ e o ponto E, então, para encontrar o seu comprimento, Fermat utilizava os seguintes cálculos:

$$y_1^2 = 2(x - e) - 1 \qquad (13)$$

Multiplicando (1) por y^2, encontramos:

$$y_1^2 y^2 = (2x - 2e - 1)y^2$$

Sabendo que $y^2 = 2x - 1$ e substituindo apenas do lado esquerdo, temos:

$$y_1^2(2x - 1) = (2x - 2e - 1)y^2$$

E obtemos:

$$\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{2x-1}{2x-2e-1} \qquad (14)$$

Pela figura 5, podemos afirmar que $DC > y_1$. Então, temos:

$$\frac{y^2}{DC^2} < \frac{2x-1}{2x-2e-1}$$

Observando os triângulos ABF e ADC, por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{y}{DC} = \frac{AF}{AC}$$

Sabendo que $AF = a$ e $AC = a - e$, encontramos:

$$\frac{y}{DC} = \frac{AF}{AC} = \frac{a}{a - e}$$

Substituindo em (14), encontramos:

$$\frac{a^2}{(a-e)^2} < \frac{2x-1}{2x-2e-1}$$

Assim, temos:

$$a^2(2x - 2e - 1) < (2x - 1)(a - e)^2$$

Manipulando essa desigualdade, obtemos:

$$-2ea^2 < -4xae + 2xe^2 + 2ae - e^2$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade por $2ea$, temos:

$$-a < -2x + \frac{xe}{a} + 1 - \frac{e}{2a} \qquad (15)$$

Chegando na desigualdade (15), Fermat argumenta que podemos desconsiderar o seguimento DE, pois sua diferença é o mesmo comprimento. Usando essa linha de raciocínio, se o ponto E se aproxima de B por toda a extensão da curva, então essa desigualdade (15) torna-se uma igualdade, pois a diferença tende a diminuir, caso o ponto E alcança B. Conhecendo a definição de e, então, ao passo que E for se aproximando de B, o valor de e vai ficando cada vez menor. No ponto que quando E alcançar B, ele irá se tornar zero. Por isso, os termos da desigualdade (15) que estiverem sendo multiplicados por e somem, fazendo com que vire uma igualdade, ou seja, $-a = -2x + 1$, que é o mesmo que, $a = 2x - 1$. Conseguindo assim, encontrar o valor da subtangente a.

Dessa forma, obtemos $A = (x - (-2x - 1), 0) = (-x - 1, 0)$. Sabendo do ponto A, podemos calcular o coeficiente angular da reta tangente. Assim, temos:

$$m_t = \frac{\mathrm{y}-0}{\mathrm{x}-(-\mathrm{x}-1)} = \frac{\mathrm{y}}{2\mathrm{x}-1} = \frac{\sqrt{2\mathrm{x}-1}}{2\mathrm{x}-1} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \ . \qquad (16)$$

Derivando a função $y^2 = 2x - 1$, encontramos:

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

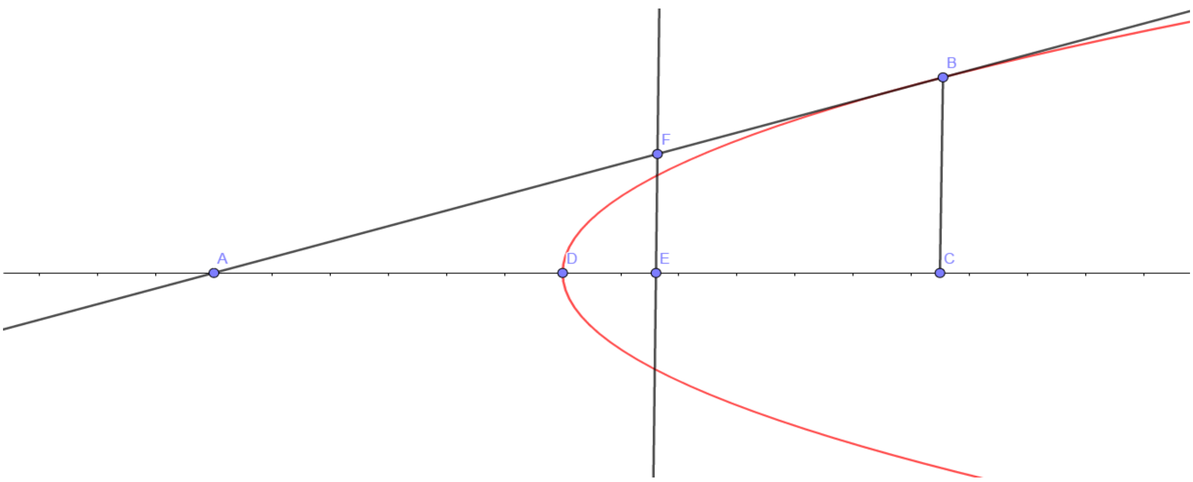
Que é igual ao coeficiente angular em (16), obtido por Fermat.

Segundo método de Fermat

Neste segundo método, que é semelhante ao primeiro, a diferença é apenas que Fermat considerava um seguimento de reta perpendicular ao eixo x, onde, olhando a figura 6, temos o seguimento FE. Sabendo disso, o ponto arbitrário F se encontra na reta tangente e o ponto E no eixo x. Ainda de acordo com a figura 6, Fermat considerava dois triângulos, ABC e AFE, onde

B é o ponto da curva onde queremos encontrar a reta tangente, C é o ponto do eixo x e o seguimento BC é perpendicular ao eixo x. Além disso, o seguimento BC é paralelo ao eixo y, A é o ponto que corta o eixo x e DC é o comprimento da subtangente.

Figura 6: Reta tangente a parábola.



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra.

Para entedermos melhor como Fermat vizualizava, utilizaremos a parábola $x = y^2 - 2$. Sabendo que $B = (x, y)$, definimos os comprimentos da seguinte forma: $CE = \beta$, $CA = \theta$ e $FE = \delta$.

Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{\delta}{y} = \frac{\theta - \beta}{\theta}.$$

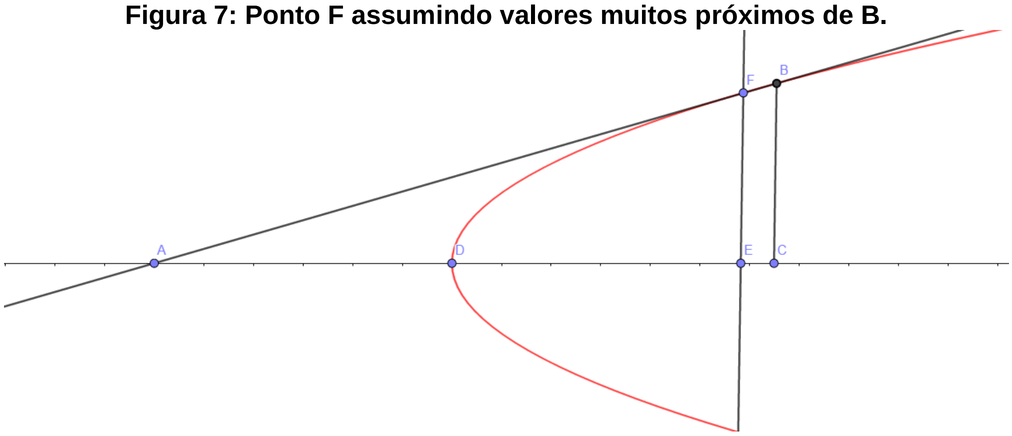
Ou seja,

$$\delta = y(\frac{\theta-\beta}{\theta}). \qquad (17)$$

Observe agora que se fizermos β se aproximar de zero, então F irá se aproximar de B e E vai se aproximar de C. Então, as coordenadas de F são dadas por $F = (x - \beta, \delta)$, ou seja, $F = (x - \beta, y(\frac{\theta-\beta}{\theta}))$.

Conforme a figura 7, enquanto E for se aproximando do ponto $B = (x, y)$, chegará um momento que não será possível identificar se E está na parábola ou na própria reta tangente.

Figura 7: Ponto F assumindo valores muitos próximos de B.



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra.

Para entender melhor como Fermat utilizava este método, aplicaremos na parábola $x = y^2 - 2$. Sabendo que β possa ser muito pequeno, então, em um dado momento, o ponto E pertence a parábola. Assim, o ponto, $F = (x - \beta, y(\frac{\theta-\beta}{\theta}))$ irá satisfazer o nosso exemplo. Dessa forma, temos:

$$x - \beta = y^2\left(\frac{\theta-\beta}{\theta}\right)^2 - 2$$

Sabendo que $x = y^2 - 2$, e desenvolvendo a equação, encontramos:

$$y^2 - 2 - \beta = y^2 - \frac{2\beta y^2}{\theta} + \frac{\beta^2 y^2}{\theta^2} - 2$$

Ou seja,

$$-\beta = -\frac{2\beta y^2}{\theta} + \frac{\beta^2 y^2}{\theta^2} \qquad (18)$$

Dividindo por β a equação (18), obtmos:

$$-1 = -\frac{2y^2}{\theta} + \frac{\beta y^2}{\theta^2}. \qquad (19)$$

Como β foi considerado suficientemente pequeno, então os termos que estão sendo multiplicados por β na equação (19) somem. Então, encontramos:

$$-1 = -\frac{2y^2}{\theta} \Leftrightarrow \theta = 2y^2. \qquad (20)$$

Após isso, encontramos a subtangente e, em seguida, obtemos as coordenadas de $A = (x - \beta, 0) = (x - 2y^2, 0)$ e por consequência a reta tangente. Dessa forma, podemos encontrar o coeficiente angular da reta tangente. Então, temos:

$$m_t = \frac{\mathrm{y}-0}{\mathrm{x}-(-\mathrm{x}-2\mathrm{y}^2)} = \frac{\mathrm{y}}{2\mathrm{y}^2} = \frac{1}{2\mathrm{y}} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x+2}}{2x+4}. \qquad (21)$$

Derivando a função $y = \sqrt{x+2}$, encontramos:

$$y'(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{2x+4}.$$

Que é igual ao coeficiente angular em (21), obtido por Fermat.

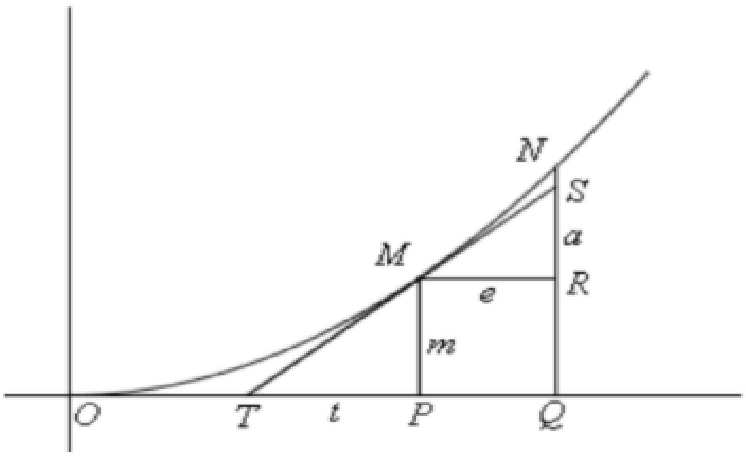
2.3 MÉTODO DA TANGENTE DE ISAAC BARROW

Segundo ALVES [s.d.], Issac Barrow descreve um método de tangentes que é similar ao usado no cálculo diferencial. Apresenta-se de forma semelhante ao de Fermat, porém utiliza duas quantidades, em vez da letra e única de Fermat. Essas quantidades equivalem aos termos modernos Δx e Δy.

Para entendermos melhor o método de Barrow, iremos observar a figura 8 abaixo, e utilizaremos os termos modernos na Matemática.

Para Barrow poder calcular a reta tangente no ponto M, que tem coordenadas (x, y), na curva $f(x, y)$, primeiramente, ele considerava a intercepção da reta tangente com o eixo das abcissas, que seria o ponto T, além do seguimento MP que é paralelo ao eixo y. Além disso, leva em consideração que existia um acréscimo bem pequeno de M na curva, onde chama de N, gerando assim um pequeno arco, que foi gerado por MN. Logo em seguida, traçava os seguimentos MP e NQ, sabendo que P e Q são os pontos equivalentes Barrow traçou MR paralelo ao eixo x. Por fim, nomeava os seguimentos da seguinte forma: MR de e, a subtangente TQ de t, o seguimento MP de m e NR de a. Os triângulos MNR e MSR são iguais, pois segundo ALVES [s.d.] “os pontos N e S são tão próximos que se confundem, podendo assumir a igualdade”. Isso era conhecido como *“triângulo diferencial”*.

Figura 8 : Tangente a curva por Barrow.



Fonte: Derivadas como no tempo de NEWTON e LEIBNIZ, ALVES [s.d.].

Barrow conseguiu perceber que as razões $\frac{a}{e}$ e $\frac{m}{t}$ são iguais, com isso, ele precisaria encontrar a razão $\frac{a}{e}$ para pontos infinitamente muito próximos, e imediatamente ele conseguia encontrar a inclinação da reta tangente.

Assim como Fermat, o método utilizado por Barrow era efetuar substituições de x e y por $x + e$ e $y + a$, em $f(x, y) = 0$. Considerando que os termos e e a apresentam valores muito pequenos, depois de alguns manuseios podemos desconsiderar os termos que estão sendo multiplicados por *e* e *a* maiores ou iguais a dois. Logo, depois de encontrar a razão $\frac{a}{e}$, obtinha também a razão $\frac{m}{t}$, e de modo consequente, encontrava a subtangente.

Para ilustrar o seu método, Barrow aplica à *curva de Lamé*, $x^3 + y^3 = r^3$. Veja como era aplicado:

Substituindo os valores de x e y por $x + e$ e $y + a$, temos:

$$(x - e)^3 + (y - a)^3 = r^3.$$

Desenvolvendo os termos dessa equação, obtemos:

$$x^3 + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 + y^3 + 3y2^2a + 3ya^2 + a^3 = r^3.$$

Desconsiderando os termos que estão sendo multiplicados por a e e maiores ou iguais a dois e substituindo $x^3 + y^3 = r^3$, encontramos:

$$3x^2e + 3y^2a = 0.$$

Ou seja,

$$\frac{a}{e} = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Sabendo que $\frac{m}{t} = \frac{a}{e} = -\frac{x^2}{y^2}$, podemos encontrar o valor da subtangente. Isto é:

$$t = \frac{my^2}{x^2} = -\frac{yy^2}{x^2} = -\frac{y^2}{x^2}.$$

Sabemos que a inclinação da reta tangente é dada por $-\frac{x^2}{y^2}$.

Derivando a função $y = (r^3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$ encontramos:

$$y'(x) = \frac{-3x^2}{3(r^3 - x^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{x^2}{y^2}$$

Resultado este obtido por Barrow antes mesmo da invenção do Cálculo Diferencial.

Portanto, Barrow com o seu método da tangente, é ate hoje considerado o matemático que mais se aproximou dos novos estudos feito por Newton e Leibniz.

Todos esses estudos são de extrema importância, pois esses métodos têm grandes relações com a criação do cálculo, que tinha por objetivo resolver quatro classes principais de problemas científicos e matemáticos daquela época. Um deles era a determinação da reta tangente a uma curva. Mesmo nas décadas que antecederam o cálculo, era possível ver como os matemáticos, utilizavam-se dessa ideia para encontrar essa reta. Assim, fica visível que, depois da criação do cálculo, se torna mais simples encontrar a reta tangente, utilizando apenas o método de derivação.

3 – A RETA TANGENTE NO LIVRO: abordagens, análises e discussões

Neste capítulo, serão abordadas as análises feitas nos livros didáticos. Todo esse estudo objetiva investigar e explorar criticamente o modo de abordagem do conteúdo de reta tangente e responder a questão norteadora deste trabalho que é: De que forma a reta tangente estudada no ensino médio é abordada no livro de Cálculo para introduzir o estudo das derivadas, visto que, nos direcionamos a verificar se existe uma relação entre ambas as abordagem.

Inicialmente, temos as análises dos livros da 3ª série do ensino médio onde os critérios utilizados para escolher estes livros, referem-se à bibliografias mais atuais, de acordo com o PNLD de 2016, onde, a partir da leitura, foi apresentado o que cada livro trazia como abordagem sobre a reta tangente. Em todos os livros analisados, este assunto era encontrado na parte de circunferência. Além disso, em alguns livros, foi necessário observar outros capítulos, pois o coeficiente angular não era citado onde era abordado o conceito de reta tangente. A partir disso, foi realizada uma análise crítica de toda a literatura encontrada. A seguir, iremos discorrer sobre os três (03) livros do ensino médio: Matemática: ciência e aplicações (IEZZI, *et al,* 2016); Matemática: padrões e relações (LONGEN, 2016) e Conexões com a Matemática (LEONARDO, 2016).

Em seguida, estão as análises dos livros do ensino superior, onde a seleção foi feita de acordo com a indicação de professores atuantes na área e com o contato obtido com os livros que utilizei para estudo, na disciplina de Cálculo, durante a minha graduação. Na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, a análise foi feita apenas nos casos em que a reta tangente foi introduzida nos conteúdos de derivadas, nos seguintes livros: Cálculo segundo Munem Foulis (FOULIS, 2005); Cálculo A: Funções, limites, derivação e integração (FLEMMING e GONÇALVES, 2006); Introdução à análise matemática (NETO, *et al,* 1985) e Cálculo segundo James Stewart (STEWART, 2013).

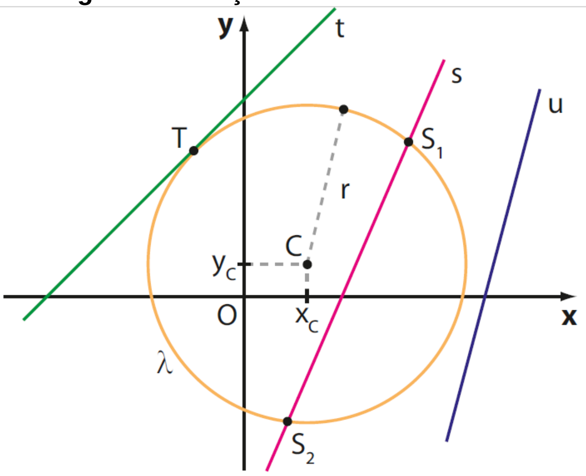
3.1 A RETA TANGENTE NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

3.1.1 A reta tangente no livro de Matemática – Ciência e aplicações

Neste livro, o assunto sobre reta tangente encontra-se no capítulo 3, que abrange toda a parte de circunferência, inserida na Geometria Analítica. Para falar sobre a reta tangente, os autores usam um subtópico, que retrata a posição relativa de reta e circunferência. Para que isso aconteça, os autores consideram uma circunferência, que chamam de λ e tem centro $C(x_c, y_c)$ com raio r. Então, os autores afirmam que existem retas que interceptam a circunferência em um ponto, em dois pontos e retas que não interceptam em nenhum ponto. Essas retas são chamadas de secantes, tangentes e externas à circunferência, nessa ordem.

Para que o aluno compreenda melhor como essas retas estão localizadas na circunferência, os autores trazem o seguinte gráfico:

Figura 9: Posições relativas das retas.



Fonte: IEZZI, *et al*, 2016.

Eles definem as retas da seguinte forma:

- $s \cap \lambda = \{S_1, S_2\}$, e s é secante à circunferência.
- $t \cap \lambda = \{T\}$, e t é tangente à circunferência.
- $U \cap \lambda = \emptyset$, e u é externa a circunferência.

Para finalizar, os autores trazem alguns exemplos em forma de exercícios resolvidos. Em um deles, solicitam que o aluno encontre a posição relativa entre a reta, a qual chamou de $r: 2x + y + 2 = 0$ e a circunferência

$\lambda: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5.$

Para a resolução desse problema, é verificado se existem pontos de intersecção entre a reta e a circunferência. Primeiramente, pode-se isolar y na equação da reta e, em seguida, substituir o valor na equação da circunferência, como mostra a seguir:

Isolando y de r, obtemos: $y = -2x - 2$, e substituindo em λ, encontramos:

$$(x - 1)^2 + \left((-2x - 2) - 1\right)^2 = 5$$

$$(x - 1)^2 + (-2x - 3)^2 = 5$$

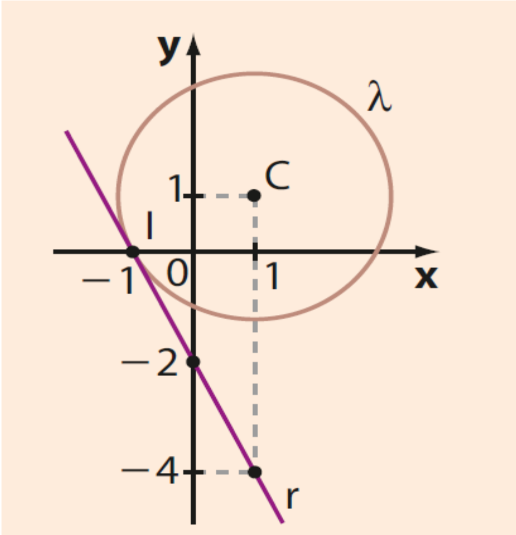
$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 12x + 9 = 5$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

Para encontrar o ponto em que a reta toca a circunferência, basta calcular o discriminante, que no caso dessa equação, temos: $\Delta = 4 - 4 = 0$, ou seja, essa equação possui apenas uma raiz real, que em outras palavras, significa que a reta toca a circunferência em apenas um ponto. Sendo assim, podemos concluir que a reta é tangente à circunferência.

O ponto que tangencia a circunferência é a raiz $x = \frac{-2}{2} = -1$. Sabendo do valor de x, é encontrado o valor de $y = -2x - 2 = -2(-1) - 2 = 0$. Portanto $I(-1, 0)$ é o ponto de tangência entre a circunferência r e λ. Conhecendo o $C(1, 1)$, então sabemos que a reta passa pelo ponto $y = 2(1) - 2 = -4$, ou seja $(1, -4)$ e pelo ponto -2. Dessa forma, para verificar como se comporta a reta tangente no gráfico, os autores trazem a imagem a seguir:

Figura 10: Reta tangente à circunferência.



Fonte: IEZZI, *et al*, 2016.

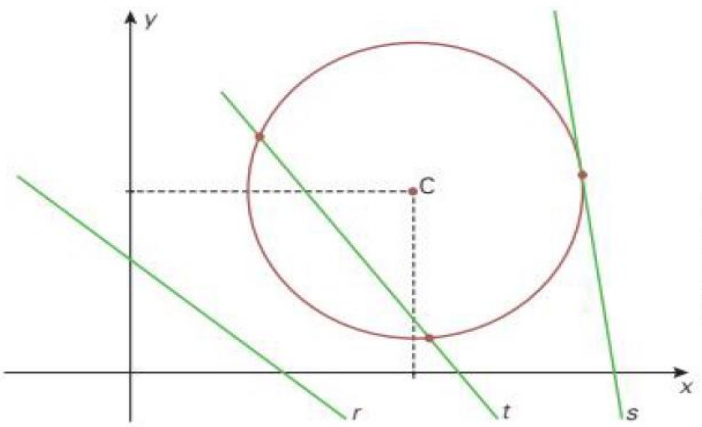
Comentário: Neste livro, pude observar que os autores optam por apresentar apenas a definição básica da reta tangente. Eles não trazem uma justificativa plausível para o uso da reta e não mostram aplicações, apenas consideram a circunferência, seu centro e raio, de forma arbitrária. Em seguida, apresentam o gráfico e trazem de imediato as definições, sem mostrar onde a reta tangente está inserida, expondo pouca informações sem nenhuma aplicabilidade, finalizando, com exemplos, onde mais uma vez, trazem apenas o básico, pedindo para encontrar a reta e fazendo o uso de representações gráficas. O modo como os autores apresentam a reta tangente não deixa claro o seu real valor, pois um dos princípios utilizados para o seu estudo é o coeficiente angular e os autores não trazem este conceito dentro do conteúdo de reta tangente. Mesmo sabendo que o conceito de coeficiente angular é apresentado em outro momento no livro, acredito que eles deveriam retomar o assunto nesta ocasião, e consequentemente, inserir esse contexto histórico tão importante para a reta tangente.

3.1.2 A reta tangente no livro de Matemática – Padrões e relações

Neste livro, podemos verificar que a reta tangente se encontra na unidade 2, ou seja, em geometria analítica. Esta unidade está dividida em 4 capítulos, no qual a reta tangente se encontra no capítulo 7, que tem como titulo: A circunferência no plano cartesiano. Dentro do capítulo, está o subtópico posições relativas entre reta e circunferência.

Para introduzir o assunto, fazendo uso de uma representação gráfica, o autor relata que, se olharmos para o plano cartesiano da figura 11, podemos ver que existem três retas, chamadas de r, s e t. Além das retas, pode-se verificar que existe uma circunferência. Observando o gráfico, vemos que a reta r e a circunferência não possuem ponto em comum. Porém, olhando a reta s podemos verificar que existe um ponto em comum, e por fim, olhando a reta t, vemos que possui dois pontos em comum.

Figura 11: Posições relativas das retas.



Fonte: LONGEN, 2016.

Dessa forma, o autor define essas três retas da seguinte forma:

- Caso a reta e uma circunferência não possuam pontos em comum, a reta é exterior à circunferência;
- Caso uma reta e uma circunferência possuam apenas um ponto em comum, a reta é tangente à circunferência;
- Caso uma reta e uma circunferência possuam dois pontos em comum, a reta é secante à circunferência.

Para que sejam encontradas essas retas, o autor relata que, dentro da Geometria Analítica, a reta e circunferência são representadas por meio de equações, onde podemos analisar algebricamente as posições relativas entre ambas. Dessa forma, podemos verificar por meio do seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \end{cases}$$

Diante disso, se o sistema admitir solução, então, temos que: se encontrarmos dois valores para x e y, isto é, dois pontos, a reta e a circunferência são secantes; se encontramos apenas um valor para x e y, ou seja, um ponto observamos que a reta e a circunferência são tangentes, e, caso não exista nenhum ponto, afirmamos que a reta é exterior a circunferência.

Além disso, se quisermos analisar somente a posição relativa entre a reta e a circunferência, precisamos calcular a distância do centro da circunferência e compará-la com a medida de seu raio, como apresentado no começo do capítulo 7 do livro analisado. Então, sabendo que r é o raio da circunferência com centro C, s uma reta e $d_{C,s}$ é a distância do centro à reta s, logo, o autor destaca as seguintes possibilidades:

- $d_{C,s} > r$, então a reta e a circunferência são exteriores;
- $d_{C,s} = r$, então a reta é tangente à circunferência;
- $d_{C,s} < r$, então a reta é secante à circunferência.

Por fim, o autor traz alguns exemplos que, utilizando apenas os que são úteis para o nosso objeto de estudo, temos o seguinte: é pedido ao aluno que obtenha uma equação da reta tangente à circunferência com a equação $(x^2 + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ no ponto $A(2,6)$.

Para a resolução desse problema, primeiramente, é verificado que a equação da reta é a reduzida, ou seja, podemos concluir que o centro é $C(-1,2)$. Como no exemplo foi dado o ponto A e conhecemos o centro da circunferência, calculou-se o coeficiente angular conforme apresentado no capítulo 5 deste livro. Então, encontramos:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

$$m_{AC} = \frac{2 - 6}{-1 - 2}$$

$$m_{AC} = \frac{4}{3}$$

Também apresentado no capítulo 5 deste livro, o autor utiliza a ideia de perpendicularidade, isto é, conhecendo que t seja a reta tangente à circunferência no ponto $A(2,6)$, então, é determinado o coeficiente angular dessa reta:

$$m_t = -\frac{1}{m_{AC}}$$

$$m_t = -\frac{1}{\frac{4}{3}}$$

$$m_t = -\frac{3}{4}$$

Dessa forma, é encontrada a equação da reta tangente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 6 = -\frac{3}{4}(x - 2)$$

$$4y - 24 = -3x + 6$$

$$3x + 4y - 30 = 0$$

Portanto, a equação da reta tangente é $3x + 4y - 30$.

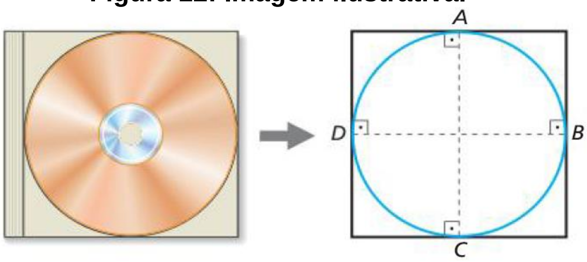
Comentário: Este livro aborda a reta tangente de forma mais abrangente se comparado com o primeiro livro analisado. O autor também apresenta representações gráficas, explorando as classificações das retas: secante, tangente e externa. Além de citá-las, ele demonstra como encontrar cada uma por meio de duas formas distintas. A primeira é utilizando um sistema composto pela equação da reta e pela equação da circunferência. A segunda forma é calculá-las através da distância entre a circunferência e a reta, conhecendo seu raio. Apresentando esses dois modos de encontrar as retas, o autor torna o aprendizado mais didático, possibilitando ao ao aluno outras formas de representação para compreender o comportamento das retas. Em síntese, o autor traz alguns exemplos por meio de exercícios resolvidos. Assim como no primeiro livro, o conceito de coeficiente angular não está presente na descrição do conteúdo, mesmo já tendo sido abordado em conteúdos anteriores. Porém, ao resolver os exemplos, o autor retoma este conceito. Apesar deste conceito aparecer nos exemplos, o autor deveria retomar a ideia do coeficiente angular na descrição das retas, mesmo que de forma mais resumida. Este fato tornaria as informações contidas no livro ainda mais relevantes e faria com que o aluno compreendesse melhor as relações existentes entre a reta tangente e o próprio coeficiente angular.

3.1.3 A reta tangente no livro de Conexões com a Matemática.

Encontrada do capítulo 6 deste livro, a reta tangente é estudada na parte de circunferência em Geometria Analítica. Dentro deste capítulo, a reta tangente faz parte do subtópico: posição relativa entre reta e circunferência.

Para ser introduzido o assunto, a autor traz uma imagem ilustrativa, como pode ser observada abaixo:

Figura 12: Imagem ilustrativa.

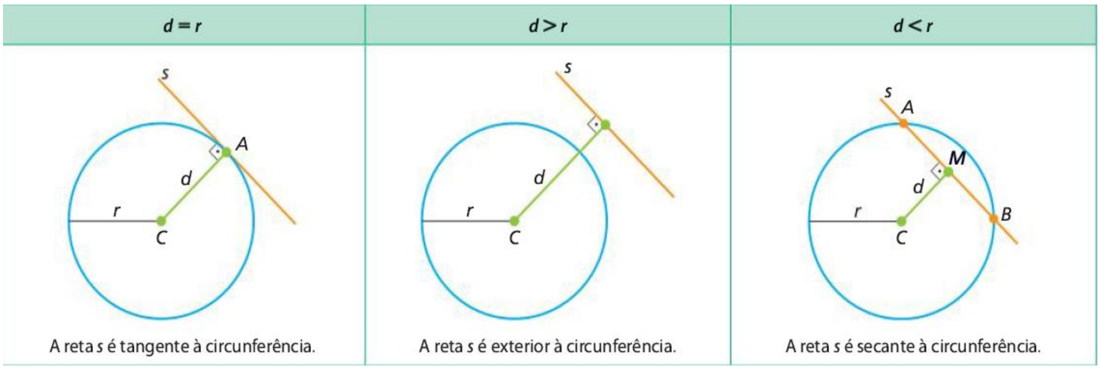


Fonte: LEONARDO, 2016.

Então, ele relata que se observarmos a parte da caixa onde se encontra o CD, podemos lembrar de um quadrado. Já as bordas do CD, nos fazem lembrar de uma circunferência. Se imaginarmos que as retas podem ser passadas pelos lados do quadrado, logo, cada uma dessas retas é tangente à circunferência da borda do CD.

Diante disto, o autor define a posição relativa entre reta e circunferência da seguinte forma: dadas uma reta s e uma circunferência λ de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r, ambas no mesmo plano, há três casos possíveis para a posição relativa entre s e λ, de acordo com a distância d entre a reta e o centro da circunferência, assim como o autor mostra nos gráficos abaixo:

Figura 13: Posições relativas das retas.



Fonte: LEONARDO, 2016.

Para encontrar essa distância da reta s, de uma equação $ax + by + c = 0$, a um ponto $C(x_0, y_0)$, é dada por:

$$d_{C,s} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Dessa forma, olhando os três casos apresentados no gráfico, podemos concluir que:

- se $d = r$, então $s \cap \lambda = \{A\}$ (s é tangente à circunferência λ);
- se $d > r$, então $s \cap \lambda = \emptyset$ (s é externa à circunferência λ);
- se $d < r$, então $s \cap \lambda = \{A, B\}$ (s é secante à circunferência λ).

Para finalizar, o autor traz alguns exemplos em forma de exercícios resolvidos. Direcionando-os para a nossa temática principal, no exemplo sobre a reta tangente, é dada uma equação da circunferência $\mu = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0$. Em seguida, ele solicita que seja determinada a equação geral da reta v tangente a circunferência no ponto $P(-3, -1)$.

Para a resolução desse problema, o autor primeiramente determina o centro da circunferência. Para isso, ele utiliza a equação geral circunferência e completa quadrados, ou seja, $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$. Portanto, $C(1, 1)$.

Além disso, o autor utilizou a ideia de perpendicularidade, isto é, que se v é tangente no ponto P, então v é perpendicular à reta que passa pelo centro e pelo ponto P, no qual chamou de w.

Com isso, o autor podia encontrar o coeficiente angular m_w da reta w:

$$m_w = \frac{y_C - y_P}{x_C - x_P} == \frac{-1 - 1}{-3 - 1} == \frac{1}{2}$$

Encontrado m_w, agora ele pode determinar o coeficiente angular da reta v:

$$m_v = \frac{-1}{m_w} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

E por fim, para ser encontrada a equação da reta, o autor substituiu os valores encontrados na equação $y - y_0 = m(x - x_0)$. Portanto, a equação da reta v é: $y + 1 = -2(x + 3) \Rightarrow 2x + y + 7 = 0$.

Comentário: Utilizando um exemplo do cotidiano, neste livro, o autor inicia sua ideia através de uma ilustração. Com essa figura, ele permite que o aluno percebe como a Matemática está inserida em seu dia-a-dia. Se comparado com os livros anteriormente analisados, ele inova ao comparar a circunferência e as retas com uma caixa de CD, induzindo o aluno a verificar que, se imaginar que o CD seja uma circunferência e as bordas da caixa sejam retas, como as bordas da caixa tocam no CD, então conclui-se que essa reta é tangente a circunferência. Definindo cada reta de forma arbitrária, considera uma reta e uma circunferência qualquer. Por outro lado, do mesmo modo que o primeiro livro, o autor traz apenas uma maneira de encontrá-las, que é achando a distância entre reta e um ponto dado, onde, mesmo depois de ter apresentado em outro capítulo, volta a abordar como encontrar essa distância. O conceito de coeficiente angular é exposto a partir dos exemplos, onde poderia ter retomado este conceito na parte que descreve as definições dessas retas, mesmo que de forma breve. Assim, proporcionaria ao aluno, entender que o coeficiente angular está relacionado com a reta tangente.

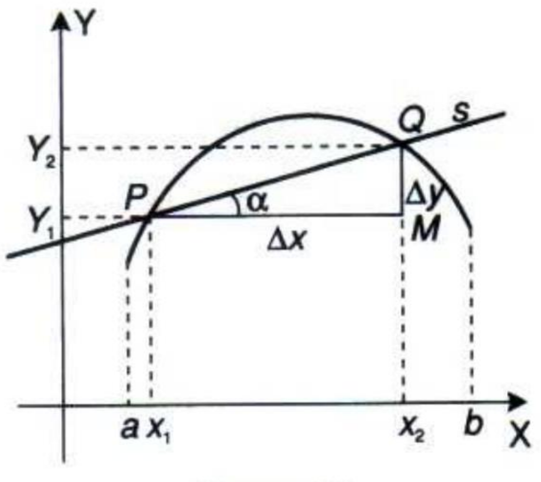
3.2 A RETA TANGENTE NOS LIVROS DE CÁLCULO

3.2.1 A reta tangente no livro de cálculo A

Em primeiro momento, o livro começa a definir a ideia em relação à reta tangente. Para definir, os autores fazem uso de uma função $y = f(x)$, para assim encontrar uma equação da reta tangente à curva em certo ponto dado.

Dessa forma, foram usadas as ideias que Newton e Leibnitz utilizaram em suas pesquisas, assim temos que: utilizou uma função (a que foi citada acima) e as coordenadas (a, b) como sendo uma curva definida nesse intervalo. Utilizou também dois pontos distintos à curva dada e chamou de $P(x_1,\ y_1)$ e $Q(x_2,\ y_2)$. Sendo assim, uma reta secante s, passando pelos pontos utilizados acima, dá origem a um triângulo retângulo PMQ, formando assim uma inclinação da reta s, formulando a equação da reta tangente que é dada por $tg\ \alpha\ = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Para observá-la melhor, os autores trazem o seguinte gráfico:

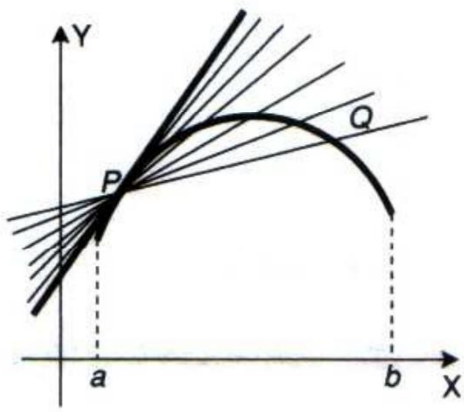
Figura 14: Reta secante a uma curva.



Fonte: FLEMMING e GONÇALVES, p. 115, 2006.

De acordo com o gráfico da figura 14, os autores agora mantém P fixo, fazendo com que Q se mova sobre a curva em direção a P. Isso faz com que a reta secante varie, e, na medida com que o ponto Q vai se aproximando de P, o valor do limite se torna constante, assim como mostra na figura 15. Sendo assim, o valor limite é chamado de inclinação da reta tangente a essa curva.

Figura 15: Variação da reta secante.



Fonte: FLEMMING e GONÇALVES, p. 116, 2006.

Seguindo com o raciocínio, os autores apresentam a seguinte definição: dada uma curva $y = f(x)$, seja $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto P é dada por:

$$m(x_1) = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

quando o limite existe. Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$ podemos reescrever o limite (1) na forma:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (2)$$

Conhecendo a inclinação da reta tangente à curva no ponto P, podemos encontrar a equação da reta tangente à curva em P.

Dessa forma, os autores definem equação da reta tangente da seguinte forma:

> Se a função $f(x)$ é contínua em x_1, então a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1,\ f(x_1))$ é:
>
> *(i)* A reta que passa por P tendo inclinação $m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$, se este limite existe, neste caso, temos a equação $y - f(x_1) = m(x - x_1)$.
>
> *(ii)* A reta $x = x_1$ *se* $m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ for infinito.

E por fim, os autores trazem o seguinte exemplo: ele pede para ser encontrada a inclinação da reta à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto $(x_1,\ y_1)$.

Para a resolução desse problema, sabendo que $f(x) = x^2 - 2x + 1$, então os autores substituem a função em $f(x_1 + \Delta x)$ *e* $f(x_1)$, para, em seguida, utilizar a definição usando o limite, como mostra a seguir:

$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 - 2(x_1 + \Delta x) + 1$$
$$= x_1^2 + 2x_1\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x + 1.$$

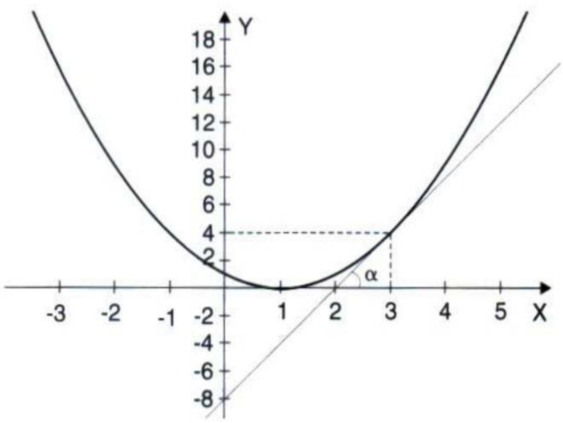
Usando (2), vem:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$
$$= \log_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x^2) - 2x_1 - 2\Delta x + 1 - (x_1^2 - 2x_1 + 1)}{\Delta \mathrm{x}}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + (\Delta x^2) - 2\Delta x}{\Delta \mathrm{x}}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x - 2)}{\Delta \mathrm{x}}$$
$$= 2x_1 - 2.$$

Portanto, a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto $(x_1,\ y_1)$ *é* $m(x_1) = 2x_1 - 2$.

Em seguida, para ilustrar o exemplo, os autores utilizaram $x_1 = 3$ para demostrar no gráfico, ou seja, $tg\ \alpha = m(3) = 2.3 - 2 = 4$.

Figura 16: Reta tangente a curva.



Fonte: FLEMMING e GONÇALVES, p. 117, 2006.

Já no segundo exemplo, os autores pedem para encontrar a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abscissa é 2.

Para a resolução desse problema, é encontrado o ponto da curva $y = 2x^2 + 3$, cuja abscissa é 2, ou seja, $P(2, f(2)) = (2, 11)$. Então, temos a inclinação da curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto $P(2, 11)$. Para isso, encontraremos primeiro a inclinação da curva num ponto $(x_1,\ y_1)$. Temos:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_1 + \Delta x)^2 + 3 - (2x_1^2 + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1^2 + 4x_1\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3 - 2x_1^2 - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4x_1 + 2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= 4x_1$$

Como $m(x_1) = 4x_1$, então $m(2) = 4.2 = 8$.

Usando a definição de reta tangente, escrevemos a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ em $P(2, 11)$. Temos:

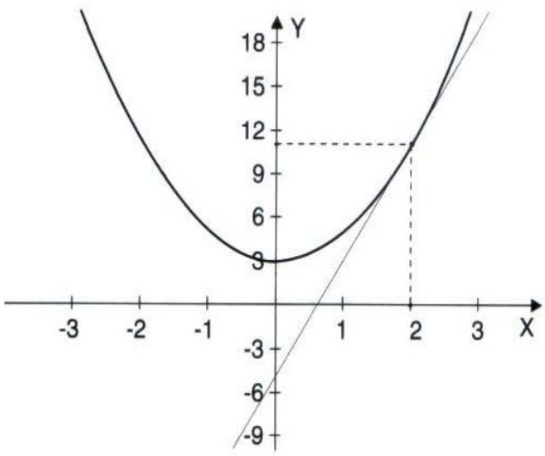
$$y - f(x_1) = m(x - x_1)$$

$$y - 11 = 8(x - 2)$$

$$8x - y - 5 = 0.$$

E mais uma vez, os autores usam um gráfico para demonstrar que a reta encontrada é tangente à curva.

Figura 17: Reta tangente à curva.



Fonte: FLEMMING e GONÇALVES, p. 118, 2006.

Comentário: No livro Cálculo A, os autores utilizam uma demonstração para iniciar o assunto. A forma como o conteúdo foi abordado é interessante, pois eles não apresentam a definição de imediato, mas, através da demonstração, mostrado como a reta se comporta, além de trazerem representações gráficas, fazendo com que o aluno tenha acesso a outros tipos de representações. Nesta demonstração, eles fazem uso da ideia de que, se for traçada uma reta secante sobre uma curva, então, sendo manipulada, essa reta se tornará uma reta tangente. Logo após, eles apresentam uma fórmula para calcular esta reta e em seguida, trazem a sua definição. Em contrapartida, os autores não fazem um paralelo, entre o que o aluno aprendeu no ensino médio e o conteúdo em questão, sendo que, por mais que o assunto seja abordado de forma diferente o conteúdo é o mesmo, diferenciando-se apenas pela definição, que no ensino superior, é usada a ideia de limite. Para finalizar, eles utilizam alguns exemplos: no primeiro, pedem para encontrar a inclinação da reta e, no segundo, pedem para encontrar a equação da reta. Em ambos os exemplos, eles utilizam a definição apresentada. A forma com que eles apresentaram os exemplos é muito enxuta, ou seja, eles poderiam acrescentar mais conhecimento, apresentar contexto histórico, instigar o estudante a pensar e não apenas fazer com que o aluno reproduza as fórmulas de forma mecânica.

3.2.2 A reta tangente no livro de cálculo de James Stewart

O autor inicia o assunto supondo que: se utilizarmos uma curva de uma equação, a qual ele chamou de $y = f\,(x)$, assim podemos encontrar uma reta tangente. Para isso, ele usou dois pontos $P(a, f(a))\ e\ Q(x, f(x))$, onde $x \neq a$, para poder calcular a inclinação da reta secante PQ, com a seguinte equação: $m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Em seguida, o autor fez com que Q se aproximasse de P, para que x possa tender a a. Em seguida, supôs que se m_{PQ} tender a um certo número, fica definido a tangente t como uma reta que passa por P e tem inclinação em um número que foi suposto acima, assim como mostra nas figuras a seguir.

Figura 18: Reta secante à curva

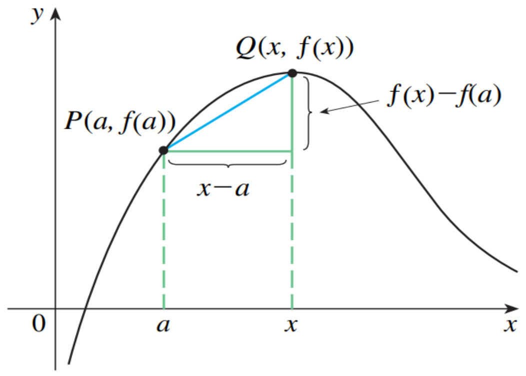
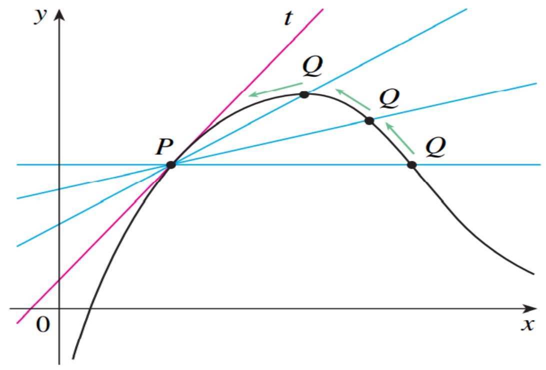


Figura 19: Inclinação da reta.



Fonte: STEWART, p. 131, 2013.

A reta tangente à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f\,(a))$ é a reta passando por P com inclinação:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

Em seguida, o autor usou a seguinte definição para reta tangente:

Para comprovar, o autor utiliza o seguinte exemplo: ele pede para encontrar uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1,1)$.

Para a resolução deste problema, temos que: $a = 1$ e $f(x) = x^2$, logo, pela definição, a inclinação é:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to a} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

Usando a forma ponto-inclinação da reta, encontramos que uma equação da reta tangente em $(1, 1)$ é:

$$y - 1 = 2(x - 1) \text{ ou } y = 2x - 1.$$

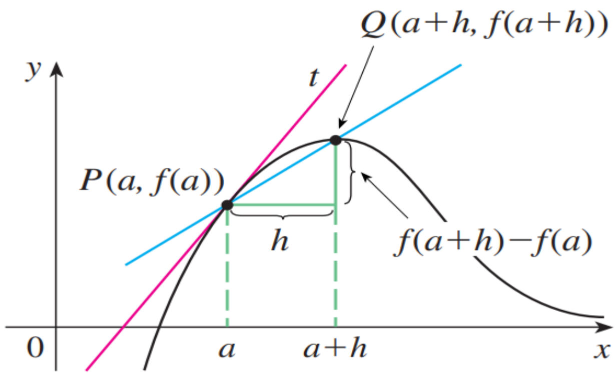
Onde a forma de ponto-inclinação da equação da reta por um ponto (x_1, y_1) com uma inclinação m é: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Por fim, o autor traz outra expressão para a inclinação da reta tangente e exalta que ela pode ser mais fácil de ser usada. Para trazer essa expressão, o autor supõe que, se $h = x - a$, então $x = a + h$ e a inclinação da reta secante PQ é:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (3)$$

Para demonstrar isso, o autor traz um gráfico:

Figura 20: Inclinação da reta secante.



Fonte: STEWART, p. 132, 2013.

E para finalizar, o autor usa outro exemplo: pede para encontrar uma equação da reta tangente à hipérbole $y = \frac{3}{x}$ no ponto $(3, 1)$.

Para a resolução desse problema, é substituído o ponto dado na função

$f(x) = \frac{3}{x}$, então, por (3), a inclinação da reta tangente é :

$$m_{PQ} = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3-(3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

Portanto, uma equação da reta tangente no ponto $(3, 1)$ é:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$$

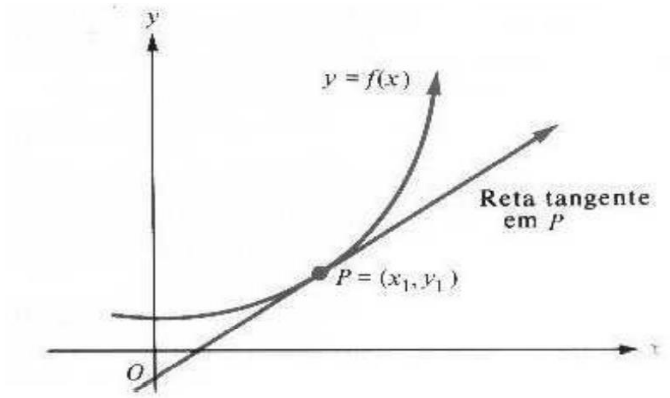
que significa para $x + 3y - 6 = 0$.

Comentário: O autor inicia a abordagem por meio da demonstração, utilizando a ideia de traçar uma reta a uma curva. É bastante relevante esta forma de abordagem, que traz uma demonstração de como é encontrada a reta tangente, pois induz o aluno a perceber como essa reta foi criada. Em seguida, é demonstrado como transformá-la na reta tangente, trazendo uma representação gráfica. Representar graficamente a reta faz com que o aluno enxergue a sua posição na curva, por isso a sua importância, afinal, uma gráfico traz mais praticidade para o conteúdo e permite uma melhor interpretação das informações dadas. Posteriormente, traz a definição da reta tangente, onde apresenta um exemplo pedindo para ser encontrada a equação dessa reta. A partir disso, o autor expõe uma expressão para calcular a inclinação da reta e, mais uma vez, apresenta outro exemplo, onde é pedido para calcular a equação da reta tangente. Neste quesito, o autor deveria relacionar os assuntos abordados no ensino médio com os do ensino superior, para proporcionar ao aluno uma melhor compreensão desta temática. Esta retomada do assunto faria com que fosse possível criar uma ponte entre o conteúdo do ensino médio e a ideia de reta tangente apresentada para introduzir a definição de derivadas, já que o conceito é o mesmo.

3.2.3 A reta tangente no livro de cálculo de Munem Foulis

Primeiramente, o autor não começa falando sobre a reta tangente no capítulo, a reta tangente se encontra como um subtítulo no capitulo apresentado. Para iniciar o ensino da reta, o autor supôs um ponto do gráfico no qual chamou de $P(x_1, y_1)$, tal que $y_1 = f(x_1)$. Em seguida, o autor relata que utilizou a função e o ponto para poder calcular a reta tangente no gráfico e ressalta que, isso só ocorre se essa reta tangente for a linha que contém o ponto P que "melhor se aproxima" do gráfico de f. Em seguida, o autor apresenta uma figura que representa o gráfico da reta tangente:

Figura 21: Reta tangente à curva.



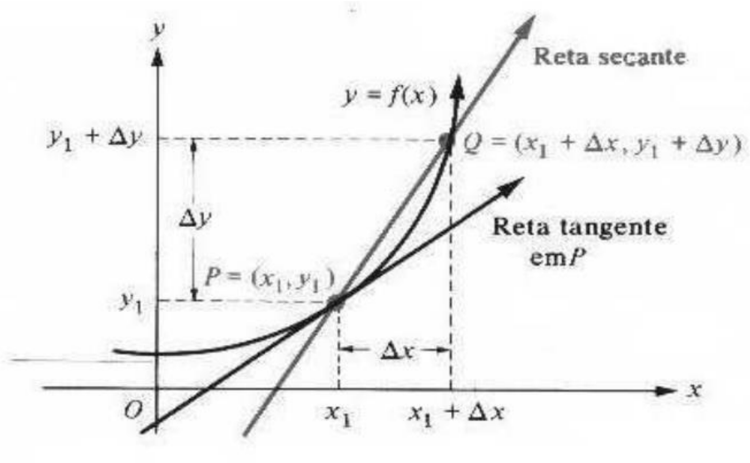
Fonte: FOULIS, p. 93, 2005.

A partir do gráfico da reta tangente, o autor se aprofunda mais e ressalta que, se encontramos uma linha reta quando conhecemos o seu coeficiente angular e o ponto P citado pertence a ela, então só precisamos calcular o coeficiente angular da reta tangente. Para isso, o autor fala que, se fazemos uso de um ponto Q no gráfico que se aproxima de P, e pegamos um segmento de reta PQ, que liga esses dois pontos de uma curva, então ele é chamado de reta secante desse gráfico.

O autor fala ainda que, como já sabemos, a coordenada de x no ponto P é x_1e se ela deferir de Q em uma pequena quantidade no qual chamou de Δx, então conclui-se que a coordenada x de Q é dada por $x_1 + \Delta x$.

Para demostrar o que foi falado, o autor traz o gráfico:

Figura 22: Reta secante e reta tangente à curva.



Fonte: FOULIS, p. 94, 2005.

Continuando o raciocínio, o autor fala que se Q pertente ao gráfico de f, então a coordenada y é dada por $f(x_1) + \Delta x$, sendo que essa coordenada mais uma vez difere da coordenada y de P, por uma pequena quantidade Δy. Então, temos que:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - y_1 = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$

Assim,

$$Q = (x_1 + \Delta x, f(x_1 + \Delta x)$$
$$= (x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y).$$

Pela forma do coeficiente angular, a inclinação da secante PQ é:

$$\frac{f(x_1+\Delta x) - y_1}{(x_1+\Delta x) - x_1} = \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Concluindo que a reta secante também tem inclinação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Em seguida, o autor fala que se fizermos Δx tender a 0, o ponto Q se moverá sobre a curva e irá tender ao ponto P, fazendo com que a reta secante gire em torno do ponto P, tendendo para a reta tangente. E então, a partir do momento que Δx tender a 0, a inclinação da reta secante irá tender para a inclinação m da reta tangente, como mostra a equação a seguir:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Tendo visto todas essas considerações, o autor nos traz a seguinte definição para reta tangente a um gráfico:

> Seja f uma função definida pelo menos em algum intervalo contendo o número x_1e seja $y_1 = f(x_1)$. Se o limite
>
> $$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$
>
> existe, diremos que a linha reta no plano xy contendo os pontos (x_1, y_1) e tendo coeficiente angular m é a reta tangente ao gráfico de f em (x_1, y_1).

Para finalizar, o autor traz o seguinte exemplo: ele pede para ser calculado o coeficiente angular m da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$, no ponto indicado $P(1, 1)$. E em seguida, esquematizar um gráfico de f mostrando a reta tangente em P.

Para a solução, o autor substitui a função e o ponto conforme a definição dada acima. Então, temos:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta \mathrm{x}) - f(1)}{\Delta \mathrm{x}}$$

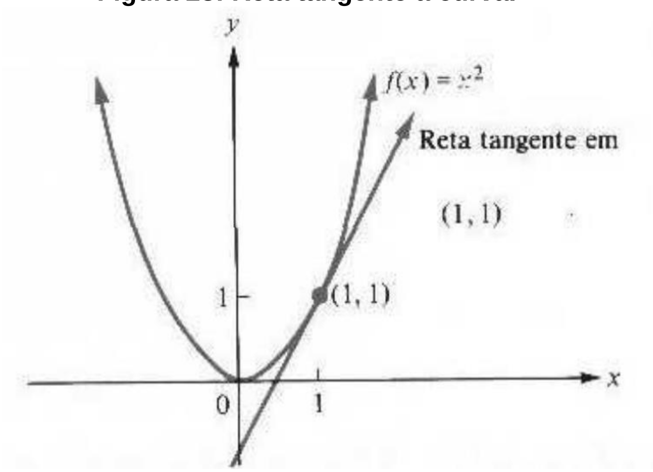
$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta \mathrm{x})^2 - 1^2}{\Delta \mathrm{x}}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1+2\Delta x+(\Delta x)^2-1^2}{\Delta \mathrm{x}}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2.$$

Sabendo que o limite existe, então, o autor representa o gráfico da seguinte forma:

Figura 23: Reta tangente à curva.



Fonte: FOULIS, p. 95, 2005.

Comentário: Diferentemente dos livros anteriores, o autor inicia sua abordagem mostrando como a reta tangente se comporta no gráfico. Como já dito, a importância do gráfico está ligada, sobretudo, à facilidade, por parte do aluno, de ilustrar e resumir as informações apresentadas, de diversas maneiras. Em seguida, o autor afirma que, para ser encontrada essa reta, precisamos encontrar o coeficiente angular. Dessa forma, por meio de uma demonstração, ele esboça como encontrar a expressão para determinar o coeficiente angular e, por consequência, encontrar a reta tangente, onde usa a ideia de limite. Mesmo que de forma genérica, acredito que isso irá situar o aluno, fazendo com que ele compreenda melhor essa reta antes de estudar a definição. Contudo, assim como nos livros anteriormente já citados, não foi feito um paralelo entre este conteúdo e o assunto apresentado no ensino médio, não permitindo ao aluno resgatar essas ideias. Ele finaliza com um exemplo, pedindo para encontrar o coeficiente angular, que para sua solução usa a definição abordada. Mesmo que seja útil, apenas um exemplo é insuficiente: o autor poderia apresentar outros exemplos mais contextualizados, trazendo para o cotidiano, a fim de proporcionar uma melhor fixação do conteúdo por parte do aluno.

3.2.4 A reta tangente no livro de introdução à análise matemática

Para iniciar a fala sobre a reta tangente, os autores iniciam falando que um dos problemas que levaram à definição de derivada foi de como se determina a equação da reta tangente à uma curva plana em um ponto. Para isso, os autores trazem o que eles entendem quando fala sobre reta tangente a uma curva. Então, eles dizem que, em Geometria Plana, geralmente define a reta tangente à circunferência como sendo a reta do plano da circunferência, que se encontra na circunferência em apenas um ponto, como mostra no primeiro exemplo da figura 24. Eles afirmam também, que essa definição serve para quando estamos falando de circunferência, mas se utilizarmos outras curvas parece não ser muito boa. Com isso, os autores trazem mais dois exemplos, onde no exemplo 2 a reta t é tangente à curva g no ponto A, mas encontra a curva em mais um ponto. No caso do exemplo 3, a reta s se encontra a curva h em apenas um ponto, mas não é tangente á curva nesse ponto.

Figura 24: Reta que tocam à curva.

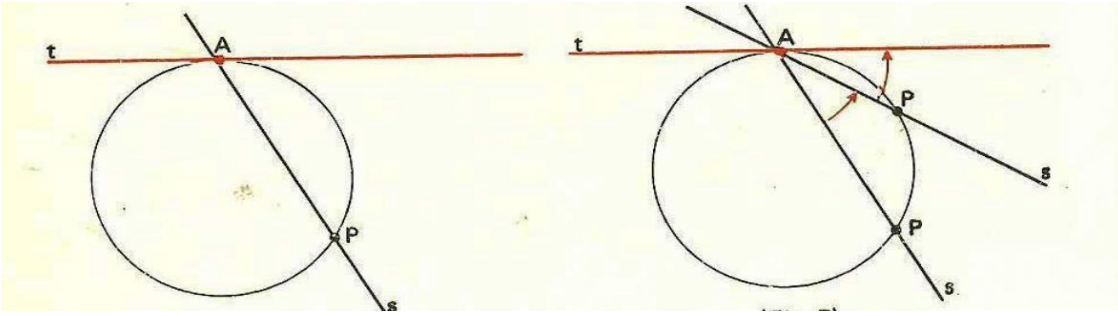
Fonte: NETO, *et al*, p. 179, 1985.

Tendo em vista isso, o autor fala que necessita de outra definição que sirva para todos os casos. Então, o autor diz que se consideramos uma circunferência C e uma reta t tangente a ela no ponto A, e tomamos sobre C um ponto P que seja distinto de A, então os pontos A e P irão determinar uma reta s, como mostra o primeiro exemplo da figura 25. Em seguida, o autor supôs que o ponto P se aproxima de A, ou seja, irá se aproximar de t assim como mostra o segundo exemplo da figura 17. E então, teremos uma nova definição:

- A tangente t no ponto A é o “limite”;
- Da reta s á medida que P “aproxima-se”;
- De A (se esse “limite” existir).

O autor ressalta que a palavra “limite” foi usada de modo formal, mas ela irá se tornar uma linguagem mais precisa.

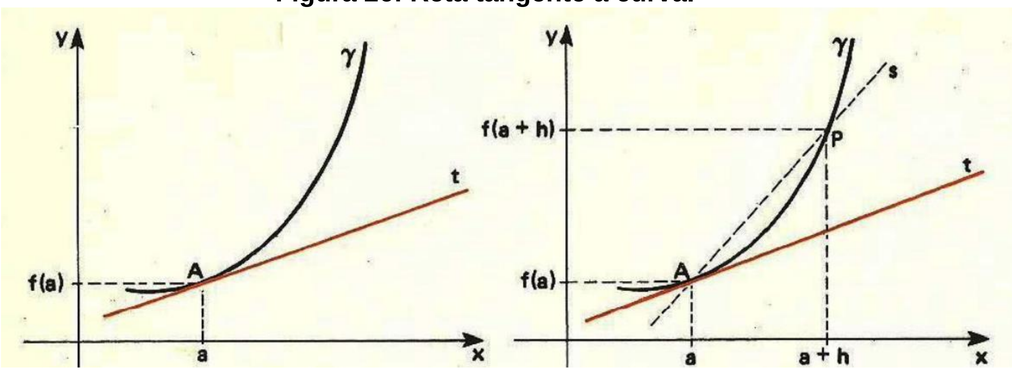
Figura 25: Comportamento da reta secante e tangente à curva.



Fonte: NETO, *et al*, p. 180, 1985.

Após trazer o conceito sobre reta tangente a uma curva, que serviu como parâmetro para iniciar o estudo da reta tangente ao gráfico de uma função, o autor resolve um problema para determinar uma equação da reta tangente a uma curva em um certo ponto. Então, ele considera no plano cartesiano um ponto no qual chamou de ponto A, e que ele irá pertencer a uma curva ?, que esteja no gráfico de uma função f e a reta tangente que foi chamada de t. Com isso, supôs inicialmente que o ponto A não seja extremo da curva, que a reta t não seja vertical e que as coordenadas do ponto A sejam a e $f(a)$, como o autor mostra nos gráficos a seguir:

Figura 26: Reta tangente à curva.



Fonte: NETO, *et al*, p. 182, 1985.

Logo, a equação de t é:

$$y - f(a) = m_t(x - a)$$

onde o m_t é chamado de coeficiente angular de t.

Contudo, para encontrar o m_t, o autor fala que se usamos um $h \neq 0$, e considerarmos sobre um ponto P que tenha coordenadas $a + h$ e $f(a + h)$, de modo que os pontos A e P determinem uma reta chamada por ele de s, então temos o seguinte coeficiente angular:

$$m_s = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Além disso, se usarmos P se aproximando de A, então teremos as seguintes considerações: h tendendo a zero, s tendendo a t e m_s tendendo a m_t, e assim irá definir m_t, caso o limite exista:

$$m_t = \lim_{h} \to 0 \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Para finalizar a parte de reta tangente, o autor traz o seguinte exemplo: ele pede para determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto A de abcissa 3.

Para a solução ele substitui o ponto de abcissa 3 na função. Assim temos, $f(3) = 9$, e então o ponto A tem coordenada 9 e a equação da reta t, tangente ao gráfico em A é:

$$y - 9 = m_t(x - 3) \qquad (4)$$

Mas de acordo com a fórmula do coeficiente angular, temos:

$$m_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(3 + \mathrm{h}) - f(3)}{\mathrm{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(3 + \mathrm{h})^2 - 3^2}{\mathrm{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{\mathrm{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{\mathrm{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(6 + h)}{\mathrm{h}}$$

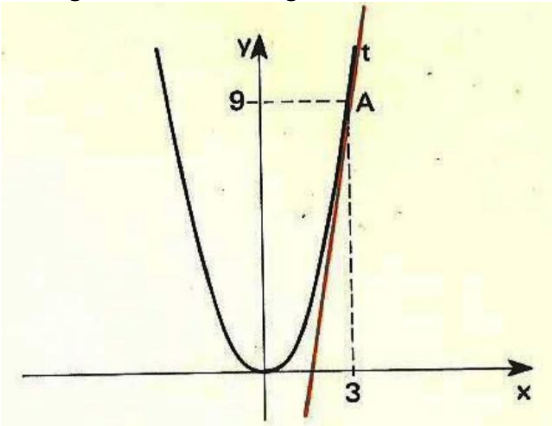
$$= \lim_{h\to 0}(6 + h) = 6.$$

Substituindo em (4), obtemos:

$$y - 9 = 6(x - 3)$$

$$y = 6x - 9.$$

Figura 27: Reta tangente à curva.



Fonte: NETO, *et al*, p. 183, 1985.

Depois de ter finalizado o conceito de reta tangente, o autor começa a introduzir o conteúdo de derivada de uma função, onde mostra como é importante falar sobre reta tangente antes de iniciar com a derivada, pois para definir derivada é feito o uso da fórmula do coeficiente angular m_t da reta tangente, definindo derivada da seguinte forma:

> A derivada de f no ponto a é o único número $f'(a)$ dado por:
>
> $$f'(a) = \log_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (5)$$
>
> se esse limite existir e for finito.

Por fim, o autor traz vários exercícios resolvidos, sendo que em um deles, ele dá a função $f(x) = x^2 + 2x$, e em seguida, pede para determinar $f'(1)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

Para a resolução desse problema, ele, primeiramente, encontra $f'(1)$, substituindo os valores na fórmula (5), onde é obtido:

$$\begin{cases} f(1) = 1^2 + 2(1) = 3 \\ f(1+h) = (1+h)^2 + 2(1+h) = h^2 + 4h + 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$f(1+h) - f(1) = (h^2 + 4h + 3) - 3 = h^2 + 4h$$

Assim,

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4h}{\mathrm{h}}$$

$$f'(1) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{h(h+4)}{\text{h}}$$

$$f'(1) \;=\; \lim_{h\to 0}(h+4) = 4.$$

O gráfico da função, na figura 28, é uma parábola e o ponto da abscissa é o ponto $A(1,3)$. A equação da reta t tangente ao gráfico em A é:

$$y - 3 \;=\; m_t(x - 1)$$

onde,

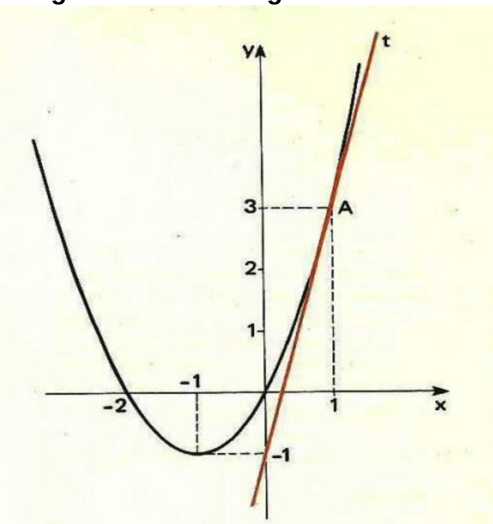
$$m \;=\; f'(1) \;=\; 4$$

Portanto, obtemos:

$$y - 3 \;=\; 4(x - 1)$$

$$y \;=\; 4x \;-1.$$

Figura 28: Reta tangente à curva.



Fonte: NETO, *et al*, p. 185, 1985.

Comentário: De forma totalmente distinta dos livros anteriores, os autores iniciam o conteúdo já relacionando-o com a forma que o conteúdo é abordado no ensino médio, trazendo a definição da reta tangente na Geometria Plana. Observando o objetivo deste trabalho e comparando-o com a forma de apresentação do conteúdo neste livro, percebo que ele atende à muitas de nossas expectativas e traz uma abordagem mais didática, por resgatar esses conceitos. Esta forma de abordagem facilita bastante o entendimento do aluno, pois, além de trazer representações gráficas que já facilitam a compreensão do assunto, faz com que o aluno entenda que a reta tangente apresentada no ensino superior, não é um conteúdo novo, ou algo difícil que só é trabalhado no ensino superior, assim como o aluno pensa. Em seguida, os autores afirmam que foi necessária uma definição que servisse para todos os casos, então eles começam a definir a reta, através de demonstrações, expondo como encontrar a equação geral da reta e o coeficiente angular. Além de abordar tudo isso, eles ainda fazem um paralelo entre a reta tangente e a derivada, trazendo de imediato a definição da reta como sendo a própria definição de derivada, mostrando como é importante falar sobre reta tangente antes de iniciar com a derivada, já que ao associar o conteúdo de reta tangente no ensino superior, com o que aprendeu no ensino médio, o aluno, muitas vezes não consegue identificar nenhuma relação entre ambos, retomando tudo isso nos exemplos apresentados em seguida. Acredito que quando o autor traz essa forma de abordagem, o aluno consegue perceber essa relação, facilitando assim, o seu entendimento.

4 – A RETA TANGENTE: nossas observações

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou um maior entendimento de como o conceito de reta tangente é abordado nos livros do ensino médio e superior, além de promover uma melhor compreensão de cada percepção e métodos desenvolvidos por cada matemático para o conceito da reta tangente, proporcionando as técnicas, notações e definições do cálculo que conhecemos hoje e valorizando ainda mais a descoberta do cálculo diferencial e integral. Além disso, foi possível perceber como a forma de abordagem da reta tangente nos livros influencia no aprendizado do aluno, pois, ao realizar as análises, tanto descritivas, quanto criticas, vimos que ainda há muito a se fazer para tornar o ensino mais eficaz.

Ao trazer várias definições da reta tangente, segundo vários filósofos e matemáticos, foi possível perceber que, tanto ao examinar contexto o histórico, quanto ao observar as suas funcionalidades, conseguimos desenvolver e fundamentar nossa pesquisa de forma muito rica, além de possibilitar que as análises feitas posteriormente tenham uma maior base cientifica e, ao demonstrar os métodos da tangente, foi possível perceber a matemática trabalhada no ensino médio e no ensino superior em uma mesma situação.

Observando as ideias principais de cada matemático, Descartes, em seus três métodos (aqui citados apenas dois, pois o segundo é evidentemente igual ao terceiro) teve seu marco na forma de encontrar o círculo que tangencia a curva no ponto, ideia essa já utilizada por Euclides, além de utilizar a ideia de subtangentes para encontrar a reta tangente. Enquanto isso, Fermat baseou-se na ideia de máximos e mínimos de uma função e assim com Descartes, utilizava a ideia de subtangente. O método desenvolvido por Isaac Barrow foi o que mais se aproximou da ideia utilizada no calculo diferencial sendo semelhante ao de Fermat, mudando apenas o fato de que, ao invés de uma quantidade, Barrow utilizava duas quantidades.

Ao concluir as análises dos livros, observamos como os autores apresentaram o conteúdo, de forma descritiva, para depois, expormos uma análise mais critica e reflexiva, observando todos os pontos presentes e ausentes, na forma de abordagem escolhida por cada autor. Toda essa estratégia desenvolvida possibilita um melhor entendimento do leitor, pois ao apresentar primeiro os livros do ensino médio, conseguimos fazer com que o leitor perceba que há uma relação existente entre a reta tangente estudada na educação básica e a que lhe será apresentada no ensino superior.

Em cada livro do ensino médio analisado, percebi que a abordagem da reta tangente é muito simplória. Nos três livros, não houve menção ao coeficiente angular no tópico observado, mesmo que abordado em outro momento nos livros. Os autores apresentam esse conceito apenas ao citar exemplos e não na introdução e desenvolvimento do conteúdo, ficando aqui uma sugestão quanto à essa questão, já que o coeficiente angular é uma parte essencial para o estudo da reta tangente. Dessa forma, os autores poderiam ter trago um contexto histórico, retomando os conceitos do coeficiente angular, pois não contextualizar historicamente a reta tangente faz com que não seja identificado o real valor que a reta possui para a matemática.

Ao nos debruçar sobre as análises nos livros de Cálculo, a fim de responder nossa pergunta de pesquisa, sobre a forma que a reta tangente estudada no ensino médio é abordada no livro de Cálculo para introduzir o estudo das derivadas, verificamos que, em três dos quatro livros do ensino superior analisados (FOULIS, 2005; FLEMMIMG e GONÇALVES, 2006; STEWART, 2013), os autores demonstram, definem e apresentam exemplos referentes à reta tangente de forma bem simples, não trabalhando o contexto histórico, sem resolução de problemas, apresentando o método mais convencional, de forma mecânica. Abordando o conteúdo dessa forma, os alunos não conseguem enxergar uma possível relação entre a reta tangente que foi estudada no ensino médio e a que está sendo apresentada no ensino superior, podendo criar uma ideia de que o assunto apresentado é totalmente distinto do já estudado. Entretanto, no livro de Neto, *et al* (1985), a forma como os autores apresentam a reta tangente é que mais se aproxima da abordagem que facilita a aprendizagem do aluno, retomando conceitos e ideias vistas no ensino médio, fazendo uma ponte entre o ensino médio e o ensino superior e, posteriormente, entre a reta tangente e a derivada.

Tomando como base este livro, percebo que, dessa forma, o aluno consegue compreender a reta tangente em sua totalidade e desperta para perceber que o assunto que ele está estudando, nada mais é do que algo que ele já viu, porém, agora, de forma mais aprofundada, exaltando que a definição de reta tangente é a propria definição de derivada, assunto a ser estudado posteriomente.

É importante ressaltar que essa pesquisa não está direcionada apenas para professores, ela também abrange o universo dos alunos e graduandos, a fim de perceber que, ao longo de toda a trajetória escolar, existem relações a serem feitas não somente no conteúdo de reta tangente. A maioria dos livros do ensino superior não trazem como proposta de abordagem uma relação com o que foi visto no ensino médio. Isso pode ocasionar a não percepção dessa relação por parte dos alunos. Associado à este fato, muitos professores se acomodam em sua forma de ensino e não procuram outros recursos para trazer esse paralelo em suas aulas.

Diante de tudo que foi apresentado, percebemos alguns elementos importantes quanto à abordagem dos conteúdos, entre eles, o uso da história no ensino da matemática, como auxílio na abordagem dos conteúdos, em especial, da reta tangente, pois, através dela os alunos compreendem como os conceitos se desenvolveram, aumentam a motivação para aprendizagem, além de contribuir para as mundanças de percepções dos alunos em relação à matemática. Percebo que os livros precisam melhorar na forma de abordagem do conteúdo, porém, na ausência deste, o professor não deve se limitar ao livro didático, podendo aprimorar a sua aula.

Para suprir as necessidades encontradas, deixamos claro que a responsabilidade da retomada do conteúdo fica a cargo do professor. Neste trabalho, trazemos como proposta, que o professor pode utilizar outros meios para apresentar o conteúdo, utilizando imagens, incluindo o contexto histórico no estudo e fazendo uso de diversas plataformas, programas e *softwares* amplamente difundidos como auxílio para professores de matemática, promovendo uma modelagem das situações cotidianas e sensibilizando o aluno a estudar matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, L. L. S. dos. **Derivadas como no tempo de Newton e Leibniz**. Brasília. [s.d.]. Disponível em: <https://www.passeidireto.com/arquivo/38550136/artigo-sobre-o-desenvolvimento-das-derivadas>. Acesso em: 15 de mar de 2021.

BEZERRA, J. **História da Matemática.** "Toda Matéria**"**; Rio de Janeiro, 27 de jan de 2021. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/historia-da-matematica/>. Acesso em: 22 de fev de 2021.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. [S.l.]: Editora Edgard Blücher, 252 p., 2012.

CARVALHO, A. S. G. A. de. **Teoria das tangentes antes da invenção do cálculo diferencial***.* Coimbra, 282 p. 1919*.*

FARIA, G. F. **A origem da Derivada e Integral**. 81 p. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Tecnólogica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

FERRÃO, N. S.; ALMEIDA, M. V.de.; MARCELINO, S. B. de. O Método das Tangentes de Newton: uma abordagem que associa história e tecnologia com o uso do software GeoGebra. **1ª Conferência Latino Americana de GeoGebra**. p.172-183, 2012.

FOULIS, M. **Cálculo.** 1 ed. UNIFOA, Volta Redonda, 676 p., 21 de nov de 2005.

FLEIMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**; Funções, limites, derivação e integração. 6. ed. [s.l.]:Pearson Universidades, 454 p. 28 de nov de 2006.

HEATH, T. L. **Euclid. The thirteen books of the Elements**. Vol 1, 2 e 3. New York: Dover Publications, Inc.,1956.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. **Matemática**: ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo : Saraiva, 2016.

LEORNADO, F. M. de. **Conexões com a Matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LONGEN, A. **Matemática**: padrões e ralações, 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2016.

LUIZ, R. "**Geometria analítica**". Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/definicao-geometria-analitica.htm>. Acesso em 07 de março de 2021.

MACHADO, J. P. **Dicionario Etimologico da Língua Portuguesa**, 5 Edição, 5 Vol. Lisboa: Livros Horizonte. 2003.

NETO, A. A.; LAPA, N.; SAMPAIO, J. L. P.; CAVALLANTTE, S. L. **Introdução à análise matemática**. Vol. 8, 203 p. São Paulo: ed. Moderna, 1985.

PELLANDA, A. **Os matemáticos mais importantes da História**. Nova Escola, 2014. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/3417/os-matematicos-mais-importantes-da-historia>. Acesso em: 26 de fev de 2021.

PINTO, L. G. **História de Cálculo**: Fermat. São Paulo, 12 p. 2020.

SILVA, L. P. M. "**O que é geometria?".** Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-geometria.htm>. Acesso em 07 de março de 2021.

SOARES, S. R. **Um estudo histórico do ensino de geometria analítica no curso de matemática da UFJF nas décadas de 1960 e 1970.** 141 p. 2013**.** Dissertação de mestrado (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Juiz de Fora, 2013.

STEWART, J.. **Cálculo**. 7ª ed. 661 p. São Paulo: Americana, 2013.