INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**WELITON IRIS DE SOUSA**

# O CÁLCULO DE VOLUMES PARA ALGUNS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS ATRAVÉS DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI

CAJAZEIRAS
2020

WELITON IRIS DE SOUSA

# O CÁLCULO DE VOLUMES PARA ALGUNS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS ATRAVÉS DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

**Orientador:** Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares
**Coorientador:** Prof. Me. Francisco Airton Alves de Sousa

CAJAZEIRAS
2020

Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

S725c

Sousa, Weliton Iris de

O cálculo de volumes para alguns sólidos geométricos através do Princípio de Cavalieri / Weliton Iris de Sousa; orientador Leonardo Ferreira Soares; coorientador Francisco Airton Alves de Sousa.- Cajazeiras, 2020.
41 f.: il.

Orientador: Leonardo Ferreira Soares.
TCC (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2020.

1. Sólidos geométricos 2. Princípio de Cavalieri I. Título.

514(0.067)

Weliton Iris de Sousa

# O CÁLCULO DE VOLUMES PARA ALGUNS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS ATRAVÉS DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 12 / 03 / 2020

BANCA EXAMINADORA

Leonardo Ferreira Soares

Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares (IFPB-CZ)
Orientador

Reginaldo Amaral C. Junior

Prof. Me. Reginaldo Amaral Cordeiro Junior (IFPB-CZ)

Clebson Huan de Freitas

Prof. Me. Clebson Huan de Freitas (IFPB-CZ)

Dedico aos meus pais, professores e colegas da graduação.

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre me dar força em todos os momentos da minha vida, aos meus pais Francisco Severino de Sousa e Rosa Maria de Sousa pelo apoio em todo o percurso desta graduação.

Agradeço a todos os meus professores do ensino médio. Em especial ao meu coorientador e amigo, Francisco Airton Alves de Sousa, por todos os incentivos e orientações, sou muito grato por tudo.

Agradeço aos meus professores da graduação em especial ao meu orientador, o professor Leonardo Ferreira Soares, por todo as orientações e apoio dados ao longo deste trabalho.

Agradeço a todos os meus colegas de curso, em especial, Beatriz Marim, Mayrla Carreiro, Valéria Lopes, Valdigley Campos, João Marcos, Orminda Heloana, Anamélia e Ana Nonato. Obrigada pelo companheirismo e pela amizade sólida que construímos neste período da graduação.

*No meio da dificuldade encontra-se a oportunidade*

Albert Einstein

# RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma abordagem do Princípio de Cavalieri para obtenção de expressões para o cálculo de volumes de alguns sólidos geométricos. A escolha de usar este princípio como proposta principal, deu pelo fato que, na maioria das vezes o cálculo de volumes no Ensino Médio se resume a usar métodos conhecidos, dessa maneira, apresentamos o Princípio de Cavalieri como postulados em aplicações, buscando um maior rigor matemático para uma melhor compreensão dos alunos. Esse trabalho está organizado em quatro capítulos, sendo que, no primeiro destacamos uma nota histórica do matemático Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), responsável pelos resultados chamados de princípios de cavalieri que está na sua obra mais famosa que é o livro "*Geometria indivisibilibus*". No segundo capítulo abordamos algumas noções elementares de geometria plana e espacial como: ponto, reta e plano, além das definições de polígono e de alguns sólidos geométricos como: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera. No terceiro capítulo definimos a ideia do conceito de volume, e também demostramos a expressão para o volume do bloco retangular. O quarto capítulo foi direcionado para demostrações de algumas expressões de cálculo de volume dos sólidos geométricos usando o Princípio de Cavalieri.
**Palavras-chaves:** Volumes; Sólidos geométricos; Princípio de Cavalieri.

# ABSTRACT

In this work, we present an approach of Cavalieri's Principle to obtain expressions for the calculation of volumes of some geometric solids. The choice to use this principle as the main proposal it was due to the fact that, in most cases, the calculation of volumes in High School is limited to using known methods, in this way, we presente the Cavalieri's Principle as postulates in applications, seeking greater mathematical rigor for a better understanding of students. This work is organized in four chapters, thus, in the first we highlight a historical note about the mathematician Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), who was responsible for the results called Cavalieri's Principle, which is in his most famous work "Indivisibilibus Geometry". In the second one we approach some elementary notions of plane and spatial geometry, as: Point, line and plane, beyond the definitions of polygon and some geometric solids, like, prism, pyramid, cylinder, cone and sphere. In the third chapter, we define the idea of the volume concept, and we also demonstrate the expression for the volume of the rectangular block. Finally, the fourth chapter was directed to demonstrations of some expressions for calculating the volume of geometric solids using the Cavalieri's Principle.


**Keywords:** Volume; Geometric solids; Cavalieri's Principle.

# Lista de Figuras

# Sumário

# Introdução

A geometria espacial é um ramo da matemática que se ocupa em estudar as diversas propriedades dos objetos tridimensionais, a exemplos os sólidos geométricos. Dentre esses sólidos, destacamos aqueles que são mais comuns como: prisma, cilindro, pirâmide, cone e esfera. No entanto, há sólidos cujos formatos apresentam deformações e dificultam a sua visualização espacial. No cotidiano, geralmente, temos mais contato com esse primeiro grupo de sólidos, inclusive, nas habilidades da Base Nacional Comum Curricular para Ensino Médio prioriza, em especial, o estudo deles. A principal justificativa para essa abordagem é a vasta aplicabilidade desses sólidos no cotidiano.

No Ensino Médio, os alunos da Educação Básica estudam com mais profundidade a geometria Espacial. Essa abordagem se desdobra, basicamente, em analisar a posição dos elementos geométricos no espaço e obter o volume de determinados sólidos geométricos. Entretanto, na maioria das situações, o cálculo de volumes fica restrito a sólidos que possuem formas específicas e assim é usado modelos matemáticos conhecidos, uma vez que em sólidos deformados necessitamos de outras ferramentas de estudos que muitas vezes não está presente na grade curricular dos alunos nesta etapa estudantil, pois exige um conhecimento mais avançado, como por exemplo o Cálculo Diferencial e Integral. Pensando nisso o foco principal desse trabalho é uma abordagem do Princípio de Cavalieri voltado para a obtenção de expressões para o cálculo de volumes de alguns sólidos geométricos.

A escolha de usar o Princípio de Cavalieri como ferramenta neste trabalho, deu-se pelo fato que, na maioria das vezes o cálculo de volumes no Ensino Médio se resume a usar métodos conhecidos. Dessa maneira, buscaremos por meio desse trabalho contribuir com esses métodos e ainda ampliar com mais recursos de cálculo de volumes utilizando uma abordagem do Princípio de Cavalieri, pois isso se configura mais um recurso didático a serviço do educador.

Esse trabalho está organizado em quatro capítulos, sendo que, no primeiro destacamos uma nota histórica do matemático Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), responsável pelos resultados chamados de Princípios de Cavalieri que está na sua obra mais famosa que é o livro *Geometria indivisibilibus*. No segundo capítulo abordamos algumas noções elementares de geometria plana e espacial como: ponto, reta e plano além das definições de polígono e de alguns sólidos geométricos como: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera. No terceiro capítulo definimos a ideia do conceito de volume e também apresentamos a demostração para expressão do cálculo de volume de um bloco retangular cujas arestas são números racionais e irracionais.

O quarto capítulo foi direcionado para demostrações de algumas expressões de cálculo de volume dos sólidos geométricos definidos no segundo capítulo deste trabalho. Para estas demostrações utilizemos como ferramenta principal o Princípio de Cavalieri.

# Capítulo 1

# Aspectos históricos dos Princípios de Cavalieri

Neste trabalho, apresentaremos a importância do Princípio de Cavalieri para demonstrar expressões do cálculo de volumes de sólidos geométricos muito utilizadas pelos alunos do Ensino Médio. Portanto, neste capítulo destacamos um pouco da história de um dos grandes nomes nesta área de estudo, o matemático Bonaventura Cavalieri e os seus métodos conhecidos como os Princípios de Cavalieri.

A carência de saber calcular volumes de sólidos geométricos e área de figuras planas vem desde os tempos remotos, e que ao longo do tempo desenvolveram métodos bastante práticos e eficientes, isso deve-se a curiosidade e a genialidade de grandes matemáticos. Segundo Eves, (2011, p.425) “o matemático Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão no ano de 1598, tornou-se jesuado aos 15 anos de idade, foi aluno de Galileu e atuou como professor de matemática da Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano de sua morte”. Esse genial matemático e religioso deixou grandes contribuições na área da geometria e astronomia, com vasto material publicado nesta área de estudo. No entanto, a obra de maior reconhecimento, e que o projetou como um dos grandes matemáticos do século XVII, é o tratado *Geometria indivisibilibus.* É nesse trabalho que Cavalieri expressa a ideia do que seria indivisíveis, ideia essa baseada em pilares como Demócrito (c. 410 a.C.) e Arquimedes (c. 287-212 a.C.) mas sua inspiração pode-se está associado ao esforço de Kepler de calcular determinadas áreas e volumes (EVES, 2011).

Mas a final o que Cavalieri entendia por indivisíveis? Essa pergunta é um pouco complexa para ter uma resposta exata, pois na sua obra Geometria indivisibilibus, não ficou bem esclarecido, mas segundo Eves (2011, p.425), “tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido”. A partir disso, conclui-se que ele entendia que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de secções planas paralelas (EVES, 2011)

Desde da Grécia antiga, os grandes pensadores, Demócrito e Arquimedes já discutiam problemas que envolvia os indivisíveis, pensado muitos séculos depois por Cavalieri, podemos citar como exemplo que Demócrito já pretendia demostrar que considerando duas pirâmides de bases equivalentes e alturas iguais possuem o mesmo volume. Mas como Demócrito deve ter obtido a solução desse problemas?

> A chave é fornecida por Plutarco, ao relatar o dilema a que chegou certa vez Demócrito quando considerou a possibilidade de um cone ser formado de uma infinidade de secções planas paralelas à base. Se duas secções "adjacentes" fossem do mesmo tamanho, o sólido seria um cilindro e não um cone. Se, por outro lado, duas secções adjacentes tivessem áreas diferentes, a superfície do sólido seria formada de uma série de degraus, o que certamente não se verifica. Neste caso se assumiu que o volume do cone pode ser subdividido indefinidamente (ou seja, numa infinidade de secções planas atômicas), mas que o conjunto dessas secções é contável, no sentido de que, dada uma delas, há uma outra que lhe é vizinha; suposição que se situa, até certo ponto, entre as duas já consideradas sobre a divisibilidade de grandezas. Demócrito pode ter argumentado que se duas pirâmides de bases equivalentes e alturas iguais são seccionadas por planos paralelos às bases, verificando-se a divisão das alturas numa mesma razão, então as secções correspondentes assim formadas são equivalentes. Portanto as pirâmides contêm mesmo número infinito de secções planas equivalentes, o que implica que seus volumes devem ser iguais. Tem-se aí o que seria um exemplo primitivo do chamado método dos indivisíveis de Cavalieri. (EVES, 2011, p.420)

Portanto podemos dizer que com muita maestria o matemático Bonaventura Cavalieri aperfeiçoou métodos de indivisíveis já existente e que deixou uma grande contribuição para cálculos de áreas e volumes, apesar de que para alguns dos matemáticos do século XVII como: Paul Guldin (1577-1642) e Gilles Persone de Roberval (1605-1675) demostraram grande insatisfação pelo o que Cavalieri apresentava por indivisíveis, pois segundo eles faltavam um maior rigor matemático.

Bonaventura Cavalelieri deixou um grande legado e um vasto conhecimento para a história da matemática, destacando-se com os seus princípios, mais conhecidos como os princípios de Cavalieri. Entretanto, adotamos nesse trabalho os princípios como postulados, um corresponder a áreas e o outro a volumes. Vejamos os seguintes postulados:

**Postulado 1.0.1.** *Sejam duas regiões limitadas de um mesmo plano. Considere uma reta dada nesse plano, de modo que, qualquer reta paralela a essa reta dada, intersecta as duas regiões estabelecendo segmentos proporcionais. Então essas regiões possuem áreas seguindo a mesma proporção.*

**Postulado 1.0.2.** *Sejam dois sólidos de mesma altura e situados no mesmo semiespaço, e seja um plano dado, de modo que, qualquer plano paralelo a esse plano dado, secciona os dois sólidos estabelecendo secções de áreas iguais. Então esses sólidos têm o mesmo volume.*

Atualmente esses postulados, mais conhecidos como os Princípios de Cavalieri, configuram ferramentas muito utilizadas no Ensino Médio para calcular áreas e volumes.

# Capítulo 2

# Noções Elementares de Geometria Plana e Espacial

No capítulo anterior apresentamos um pouco da história do matemático Bonaventura Francesco Cavalieri, e as contribuições dos seus princípios para o cálculo de áreas e volumes. Neste capítulo abordaremos alguns conceitos primitivos da geometria plana e espacial e definiremos os principais sólidos geométricos que, geralmente, são objetos de estudo no Ensino Médio. Desde já, destacamos que todos os conceitos e definições deste capítulo foram extraídos de [1], [4], [5] e [9].

## 2.1 Conceitos de ponto, reta e plano

Sempre que falarmos em ponto, reta e plano, é importante que nosso leitor saiba que esses conceitos são estabelecidos através de noções primitivas, que são adotadas por meio da observação ou prática. No livro *I* de *Os Elementos*, Euclides já afirmava que:

- Ponto é aquilo que nada é parte, ou seja, é adimensional;
- Reta é uma linha que está posta por igual com os pontos sobre si mesma, ou seja, uma linha em que todos os seus pontos são colineares e possui infinitos pontos que não tem dimensão;
- Plano é uma superfície plana que está posta por igual com as retas sobre si mesma.

Esses são os três pilares de toda teoria da geometria euclidiana e espacial, e a partir deles introduziremos a definição de polígonos e de alguns sólidos geométricos.

Quando esses conceitos primitivos são apresentados para os alunos do Ensino Médio, podem surgir algumas indagações, em especial, por que em determinados casos, os mesmos têm dificuldades em diferenciar definições, postulados e resultados. A respeito disso, Lima (2016) afirma que a geometria está alicerçada em alguns noções que não têm definição e postulados, que não são apresentados com uma demostração, portanto, cabe ao professor prestar esclarecimentos, que isto ocorre com qualquer teoria matemática.

## 2.2 Polígonos

Os polígonos são figuras planas que estão presentes por toda parte, seja na construção civil, na natureza e nas obras de artes. Enfim, basta observar em nossa volta que veremos a sua aplicabilidade e importância para o cotidiano. Em razão disso, dedicamos essa seção para que possamos abordar a definição de polígonos, uma vez que, ao longo deste trabalho, vez ou outra, será necessário ter conhecimento desse conceito.

**Definição 2.2.1.** Seja $(A_1, A_2, \ldots, A_n), n \geq 3$, uma sequência de pontos distintos de um plano onde três pontos consecutivos não são colineares. Chamaremos de *polígono*, a reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$, em que $A_{n-1}, A_n$ e $A_1$ são consecutivos, assim como $A_n, A_1$ e $A_2$.

É muito comum representarmos um polígono apenas por $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$. Mas é importante destacar que, $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n = \overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \ldots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$.

**Definição 2.2.2.** Seja $(A_1, A_2, \ldots, A_n), n \geq 3$, uma sequência de pontos distintos de um plano onde três pontos consecutivos não são colineares. Chamaremos de *polígono convexo*, se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overline{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto $A_j$, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina $A_n, A_1$ e $A_2$.

O triângulo é um polígono convexo de três lados.

### 2.2.1 Semelhança de triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma. Assim, sendo que $ABC$ e $EFG$ são dois triângulos semelhantes e se $A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow F$ e $C \leftrightarrow G$ é a correspondência biunívoca que designa a semelhança, conforme a Figura 2.1.

Então as seguintes relações são válidas:

- $\hat{A} = \hat{E}, \quad \hat{B} = \hat{F} \quad$ e $\quad \hat{C} = \hat{G}$

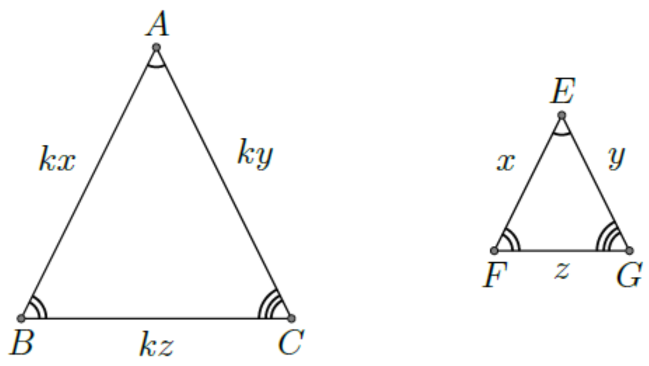


Figura 2.1: Triângulos semelhantes

- $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{GE}} = k$

A razão entre as medidas dos lados correspondentes denomina-se *razão de proporcionalidade*.

Os itens a seguir estabelecem as condições suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes e assim são chamados de *casos de semelhança de triângulos*, cujas demonstrações são encontradas em [1]. São eles:

(i) **Caso Ângulo Ângulo**. Se em dois triângulos $ABC$ e $EFG$ tem-se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então, os triângulos $ABC$ e $EFG$ são semelhantes.

(ii) **Caso Lado Ângulo Lado**. Se em dois triângulos $ABC$ e $EFG$ tem-se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{GE}}$, então, os triângulos $ABC$ e $EFG$ são semelhantes.

(iii) **Caso Lado Lado Lado**. Se em dois triângulos $ABC$ e $EFG$ tem-se $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$, então, os triângulos $ABC$ e $EFG$ são semelhantes.

Esses importantes casos de semelhança serão úteis para que posteriormente possamos desenvolver outros resultados.

## 2.3 Sólidos geométricos

O objetivo dessa seção é apresentar as definições dos principais sólidos geométricos estudados no Ensino Médio: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera, bem como expor alguns elementos de maior relevância nós respectivos sólidos que serão retomados no próximo capítulo para demostração de determinados modelos matemáticos suficiente para cálculos volumes.

### 2.3.1 Prisma

Os primas são sólidos geométricos que apresentam vários formatos e estão presentes em diversos locais, basta observar o nosso meio, como por exemplo, em uma simples embalagem de um produto de supermercado ou grandes edifícios da construção civil e até mesmo na natureza. Pensando nisso, dedicamos esta subseção para abordar a definição, seus elementos e a classificação.

**Definição 2.3.1.** Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) ABC... MN situado num plano $\alpha$ e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja reta que contém $\overline{PQ}$ intercepta o plano $\alpha$. Chama-se prisma (ou prisma convexo) a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a $\overline{PQ}$, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semiespaço dos determinados por $\alpha$.

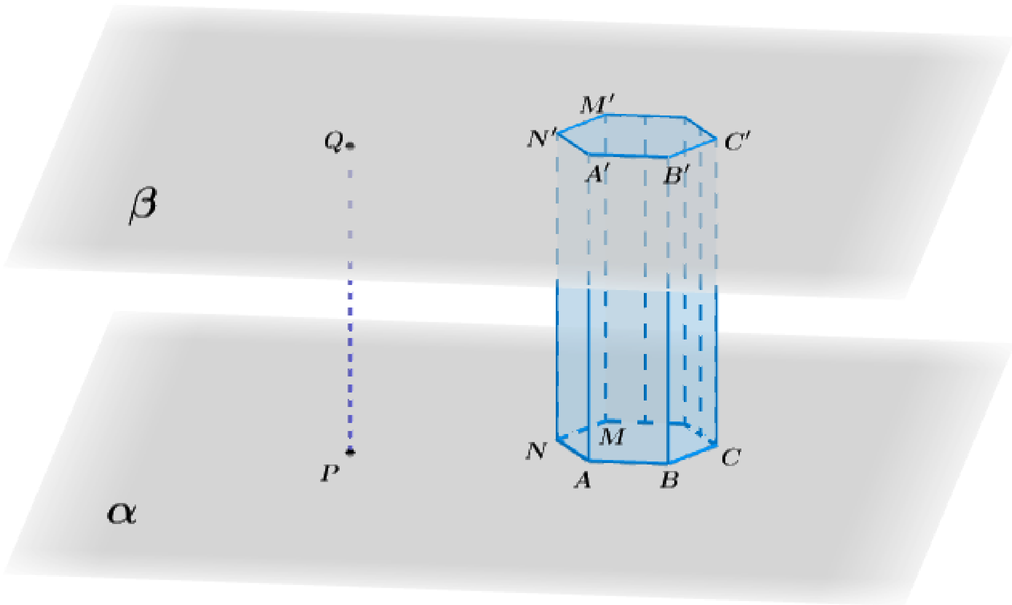


Figura 2.2: Prisma

**Elementos**

- O prisma possui: 2 bases congruentes, $n$ faces laterais (paralelogramos), $(n+2)$ faces, $n$ arestas laterais, $3n$ arestas, $2n$ vértices, $3n$ diedros e $2n$ triedros, onde os diedros e triedros são ângulos obtidos entre dois e três semiplanos, respectivamente, não contido no mesmo plano. .

- A altura de um prisma é a distância entre os planos das bases.

Segundo [5] para o prisma convexo é válida a relação de Euler:

$$V - A + F = 2n - 3n + (n + 2) = 2 \Rightarrow V - A + F = 2$$

**Classificação**

Conforme a Figura 2.3, os prismas classificam-se como:

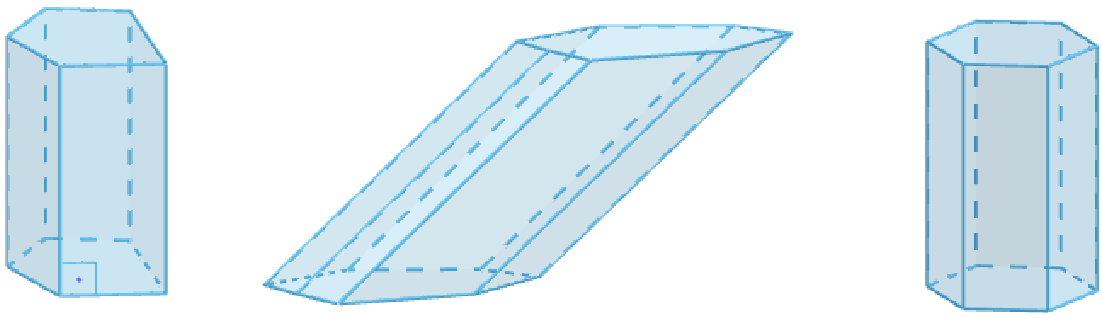

Figura 2.3: Prismas reto, oblíquo e regular (a base é um hexágono regular)

- Prisma reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto as faces laterais são retângulos.
- Prisma oblíquo é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases.
- Prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

### 2.3.2 Pirâmide

As pirâmides são sólidos geométricos que despertam a curiosidade no homem desde os tempos remotos, a exemplo, temos as pirâmides do Antigo Egito. Além disso, este sólido é abordado no Ensino Médio com estudo bem amplo. Portanto, abordaremos a definição de pirâmide, seus elementos e natureza.

**Definição 2.3.2.** Consideramos um polígono convexo (região poligonal convexa) ABC. . . MN situado num plano $\alpha$ e um ponto $V$ fora de $\alpha$. Chama-se pirâmide (ou pirâmide Convexa) a reunião dos segmentos com uma extremidade em $V$ e a outra nos vértices do polígono. $V$ é o vértice e o polígono $ABC...MN$ é base da pirâmide.

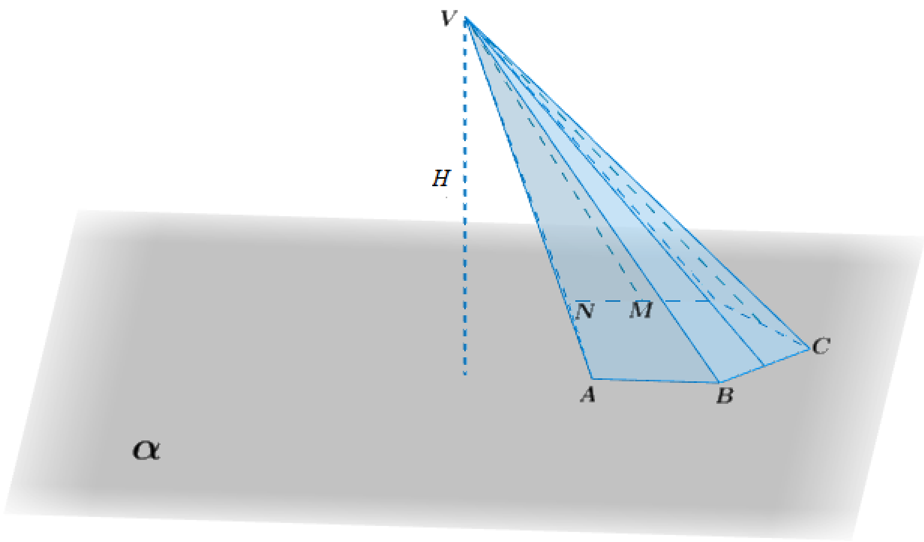


Figura 2.4: Pirâmide

**Elementos**

- Uma pirâmide possui: 1 base, $n$ faces laterais (triângulos), $n+1$ faces, $n$ arestas laterais, $2n$ arestas, $2n$ diedros, $n+1$ vértices, ângulos poliédricos e $n$ triedros.

- A altura de uma pirâmide é a distância $h$ entre o vértice e o plano da base.

Segundo [5] para a pirâmide convexa é válida a relação de Euler:

$$V - A + F = (n+1) - 2n + (n+1) = 2 \Rightarrow V - A + F = 2$$

**Natureza**

Uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, etc, conforme a base for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

### 2.3.3 Cilindro

O cilindro é um sólido geométrico bastante comum no cotidiano do homem, podemos observar esse formato de sólido, à exemplo, em construções de algumas caixas para armazenar água. Além disso, o seu estudo é abordado de forma bem ampla no Ensino Médio e pensando nisso abordaremos a definição de cilindro, seus elementos e classificação.

Consideremos uma região $R$ em um plano $\alpha$ e um segmento de reta $\overline{PQ}$ não paralelo a $\alpha$. Chamamos de cilindro de base $R$ a reunião de todos os segmentos de reta paralelos a $\overline{PQ}$ com uma das extremidades em $R$ e a outra em $\beta$, onde $\beta$ é um plano paralelo a $\alpha$.

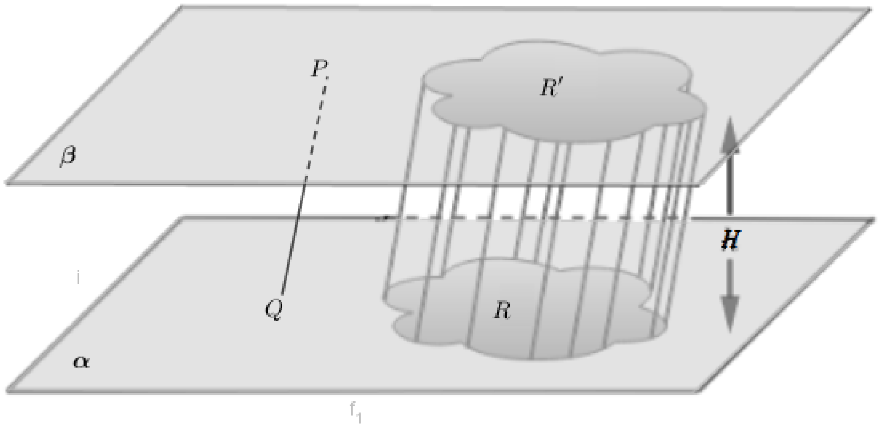


Figura 2.5: Cilindro

Note que as extremidades dos segmentos paralelos que formam o cilindro e não pertencem à base $R$ constituem uma outra região plana $R'$ contida no plano $\beta$ e congruente a $R$.

Um cilindro em que a base é um círculo é chamado de cilindro circular e é dito cilindro circular reto quando as geratrizes são perpendiculares a base. Tem-se também que um cilindro reto é equilátero quando a altura é igual ao diâmetro da base. Assim, a secção meridiana é um quadrado.

**Elementos**

- O cilindro possui: 2 bases congruentes situados em planos paralelos.
- Qualquer um dos segmentos de reta é chamado geratriz do cilindro..
- A distância entre os planos $\alpha$ e $\beta$ é chamada altura do cilindro.

**Classificação**

- Se as geratrizes são oblíquas aos planos das bases, temos um cilindro circular oblíquo.
- Se as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases, temos um cilindro circular reto.
- O cilindro circular reto é também chamado cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados.

### 2.3.4 Cone

Cone é um dos importantes sólidos geométricos dentro da geometria espacial e que geralmente seu estudo é abordado de uma forma mais ampla no Ensino Médio, pensando nisso, abordaremos a definição de cone, seus elementos e classificação.

**Definição 2.3.3.** Consideremos um círculo (região circular) de centro $O$ e raio $r$ situado num plano $\alpha$ e um ponto $V$ fora de $\alpha$. Chama-se cone circular à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em $V$ e a outra nos pontos do círculo.

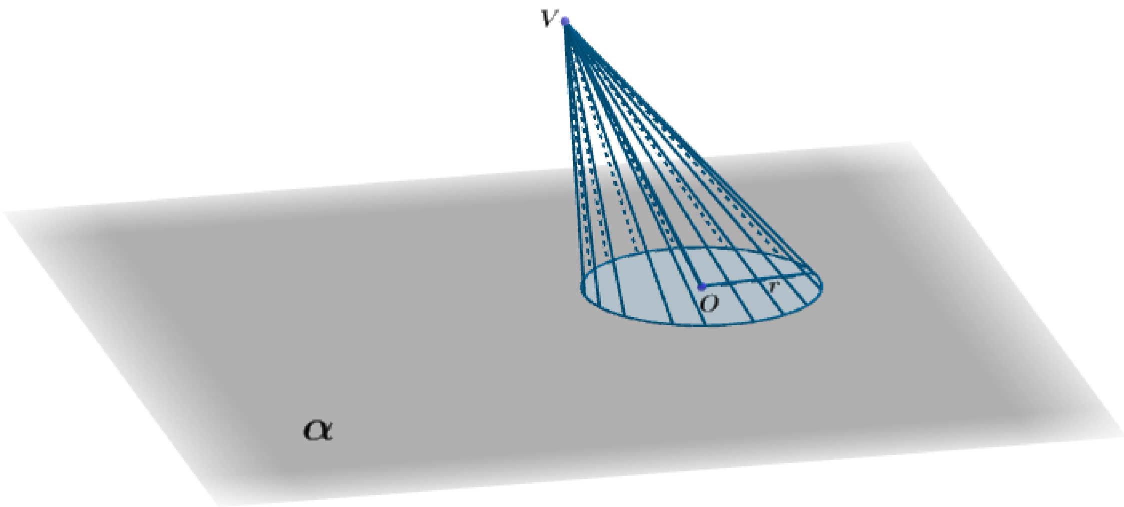


Figura 2.6: Cone

**Elementos**

- O cone circular possui uma base: o círculo de centro $O$ e raio $r$.
- Geratrizes: são os segmentos com uma extremidade em $V$ e a outra nos pontos da circunferência da base. O ponto $V$ é o vértice e $r$ é raio da base.
- A altura de um cone é a distância entre o vértice e o plano da base.
- O cone circular reto é também chamado cone de revolução, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.

**Classificação**

Os cones podem ser classificados pela posição do segmento $\overline{VO}$ em relação ao plano da base:

- Se o segmento $\overline{VO}$ é oblíqua ao plano da base, temos um cone oblíquo.

- Se o segmento $\overline{VO}$ é perpendicular ao plano da base, temos um cone reto.

### 2.3.5 Esfera

A esfera é um sólido geométrico que apresenta um formato digno de apreciação, é também fácil de perceber esse formato de sólido no cotidiano, como por exemplo uma bola de futebol. O seu estudo é abordado de forma mais ampla no Ensino Médio, pensando nisso, apresentaremos a definição de esfera e seus elementos.

**Definição 2.3.4.** Consideramos um ponto $O$ e um segmento de medida $r$. Chama-se esfera de centro $O$ e raio $r$ ao conjunto dos pontos $P$ do espaço, tais que a distância $\overline{OP}$ seja menor ou igual a $r$.

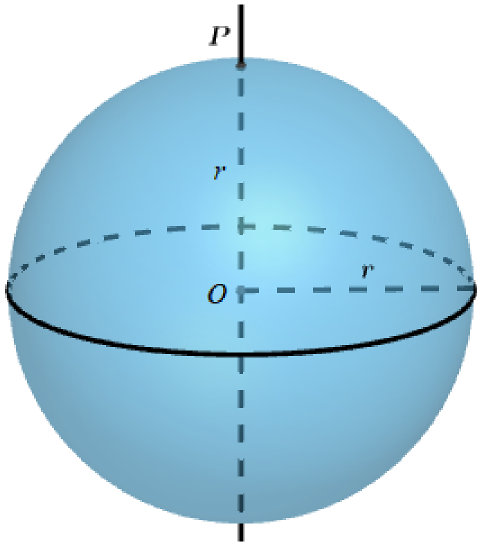


Figura 2.7: Esfera de centro $O$ e raio r

#### Elementos

Considerando a superfície de uma esfera, como na Figura 2.8 temos:

- Pólos: são as interseções da superfície da esfera com o eixo.

- Equador: é a circunferência perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície.

- Paralelo: é uma circunferência perpendicular ao eixo. É “paralela“ ao equador.

- Meridiano: é uma circunferência cujo plano passa pelo eixo.

- A esfera é também sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

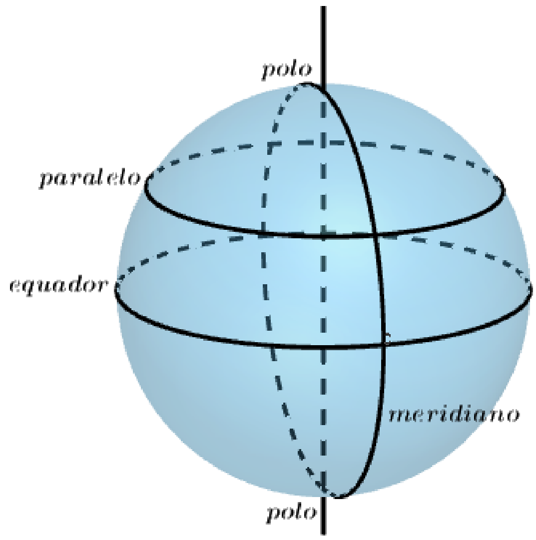


Figura 2.8: Esfera

# Capítulo 3

# Volume

Diante da utilidade prática no cotidiano percebemos a importância do cálculo de volumes, e essas utilidades ficam bem evidente no estudo da geometria espacial. Pensando nisso, neste capítulo abordamos a ideia inicial de volumes, partindo de um bloco retangular com arestas medindo um número inteiro e em seguida para números racionais e irracionais.

## 3.1 Noção intuitiva de volume

Podemos imaginar que para calcular o volume de um sólido qualquer, basta comparar com o volume de um objeto já preestabelecido. Esta ideia não é viável para calcular grandes volumes, é apenas uma noção intuitiva para alguns sólidos. Para se obter determinado volume é preciso definir uma unidade base de medição e compará-la com o espaço ocupado tendo em vista que, para Lima (2011, p.67), "o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada". Existe diferentes técnicas de cálculo de volumes, entre elas o Princípio de Cavalieri e o Cálculo Diferencial e Integral, que são os métodos mais gerais que podem ser usados tanto para sólidos com formas específicas como também para os que apresentam irregularidades no seu formato. Dedicamos esse capítulo para abordar essa primeira técnica.

## 3.2 Volume de um bloco retangular

Um bloco retangular é um sólido limitado por seis retângulos, conhecidos como faces, cujos lados são chamados de arestas. Esses retângulos constituem três pares nos quais, em cada par, os retângulos são iguais. Desse modo um bloco retangular fica definido quando conhecemos três de suas arestas que concorrem em um dos pontos. O cubo é um caso particular de um bloco retangular, no qual todas as arestas possuem o mesmo comprimento, ou seja, as seis faces do cubo são quadrados.

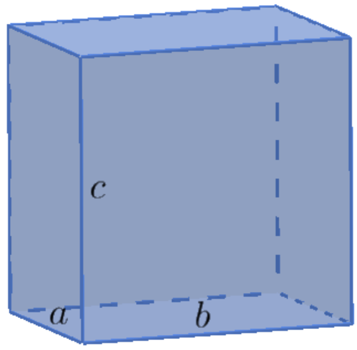


Figura 3.1: Bloco retangular definido pelas arestas $a, b, c$.

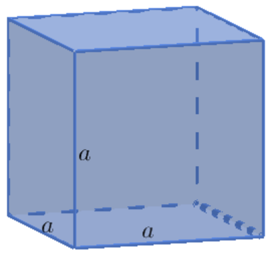


Figura 3.2: Cubo de aresta $a$.

**Teorema 3.2.1.** *Se a medida da aresta de um cubo $C$ é um número real positivo $a$, então o volume do cubo será $a^3$.*

**Demonstração.**

Consideremos um cubo em que a aresta mede uma unidade de comprimento, também conhecido como cubo unitário, então, por definição, o seu volume é 1 unidade de volume. A partir disso, se $a$ é um numero natural e $C$ um cubo cuja aresta mede $a$ unidade de comprimento, então, como $C$ pode ser decomposto em $a^3$ cubos unitários justapostos, o volume de $C$ é $a^3$.

Suponha agora um cubo $C$ unitário e vamos particionar cada uma de suas arestas em um número inteiro $q$ de segmentos de mesmo comprimento. Assim obteremos $q^3$ cubinhos justapostos, cada um com aresta medindo $\frac{1}{q}$. Portanto, se $V_C$ é o volume do cubo $C$, então

$$V_C = \frac{1}{q^3}$$

Suponha agora um cubo $C$ com aresta racional de medida $a$, tal que $a = \frac{p}{q}$ com $p$ e $q$ inteiros positivos. Se dividirmos cada aresta $a$ em $p$ partes iguais, cada uma de comprimento $\frac{1}{q}$, o cubo $C$ ficará decomposto por $p^3$ cubos justapostos, cada um com aresta $\frac{1}{q}$ e, portanto, o volume de $C$ é dado por

$$V_C = p^3 \cdot \frac{1}{q^3} = \left(\frac{p}{q}\right)^3.$$

Assim, se a aresta de um cubo tem como medida um número racional $a = \dfrac{p}{q}$, então seu volume será igual a $a^3$.

Suponha agora que um cubo $C$ tenha aresta com medida $a$ qualquer. Queremos mostrar que $V_C = a^3$. Seja $x$ um número real, tal que $x < a^3$. Assim, existe um número racional $r$ tal que $x < r^3 < a^3$. Logo, o cubo $C$ com aresta de medida $a$ contêm um cubo $D$ cuja aresta tem como medida o número racional $r$. Assim, o volume do cubo $D$ é numericamente menor que o volume do bloco $C$. Sendo $V_D$ o volume do cubo $D$ com $V_D = r^3$ e $r^3 < a^3 = V_C$ e ainda $x < r^3$, isso implica que $x < V_C$

Seja $y$ um número real, tal que $a^3 < y$, então existe um número racional $s$, tal que $a^3 < s^3 < y$. Logo, o cubo $C$ que possui aresta de medida $a$ está contido em um cubo $E$ cuja aresta tem medida $s$. Assim, o volume do cubo $E$ é numericamente maior que o volume do cubo $C$. Sendo $V_E$ o volume do cubo $E$ com $V_E = s^3$ e $V_C = a^3 < s^3$ e ainda $a^3 < y$, isso implica que $V_C < y$. Portanto,

$$V_C = a^3.$$

∎

**Teorema 3.2.2.** *Se as medidas das arestas de um bloco retangular $\mathcal{B}$ são os números reais positivos $a, b$ e $c$, então o volume do bloco retangular será $a \cdot b \cdot c$.*

**Demonstração.** Suponha um bloco retangular $\mathcal{B}$ com arestas de medidas $a$, $b$ e $c$ e denotamos o volume de $\mathcal{B}$ por $V_{\mathcal{B}}$. Suponha que as medidas dessas arestas sejam números racionais, logo $a = \dfrac{m}{q}, b = \dfrac{n}{q}$ e $c = \dfrac{p}{q}$ com $m, n, p$ e $q$ números inteiros positivos. Note que se decompormos as arestas de medidas comprimento $m, n$ e $p$ em segmentos de comprimento $\dfrac{1}{q}$, temos que o bloco retangular $\mathcal{B}$ ficará decomposto em $m, n$ e $p$ cubos justapostos, cada um dos quais com arestas medindo $\dfrac{1}{q}$. Assim, o volume de cada cubo é $\dfrac{1}{q^3}$, e portanto o volume do bloco retangular $\mathcal{B}$ será

$$V_B = m \cdot n \cdot p \cdot \frac{1}{q^3} = \frac{m}{q} \cdot \frac{n}{q} \cdot \frac{p}{q} = a \cdot b \cdot c$$

Suponha agora que um bloco retangular $\mathcal{B}$ cujas arestas são as medidas $a$, $b$ e $c$ quaisquer. Seja $x$ um número real, tal que $x < a \cdot b \cdot c$. Então existe números racionais $r, s$ e $t$ tal que $x < rst$ com $r < a$, $s < b$ e $t < c$. Logo, o bloco retangular $\mathcal{B}$ contêm o bloco $Q$, cujas arestas têm medidas $r$, $s$ e $t$. De $r < a$, $s < b$ e $t < c$, temos que $rbc < abc$, $sac < abc$ e $tab < abc$, concluímos que $rsta^2b^2c^2 < a^3b^3c^3$. Sendo $V_Q$ o volume do bloco $Q$ com $V_Q = rst$ e $rst < abc = V_{\mathcal{B}}$ e ainda $x < rst$, isso implica que $x < V_{\mathcal{B}}$.

Seja $y$ um número real, tal que $abc < y$, então existe $m, n$ e $p$ tais que $mnp < y$ e $a < m$, $b < n$ e $c < p$. Logo, o bloco retangular $x < V_{\mathcal{B}}$ está contido em um bloco retangular $O$ de arestas $m$, $n$ e $p$. De $a < m$, $b < n$ e $c < p$, temos que $abc < mbc$, $abc < nac$ e $abc < abp$, o que podemos concluir que $a^3b^3c^3 < mnpa^2b^2c^2$. Sendo $V_O$ o volume do bloco $O$ com $V_O = mnp$ e $V_B = abc < mnp$ e ainda $mnp < y$, isso implica que $abc < y$. Portanto,

$$V_{\mathcal{B}} = a \cdot b \cdot c.$$

Assim, o volume de um bloco retangular $V_{\mathcal{B}}$ com área da base igual a $ab$ e altura $h$ é

$$V_{\mathcal{B}} = ab \cdot h.$$

■

# Capítulo 4

# Aplicações do Princípio de Cavalieri

No Capitulo 2, definimos os principais sólidos geométricos que normalmente são estudados durante a educação básica. Neste capítulo, continuaremos com o estudo desses sólidos, aplicando o Princípio de Cavalieri para demostrar algumas expressões para o cálculo de volumes. Antes disso, é importante ressaltar que a maioria dos resultados e ideias apresentadas ao longo dessa abordagem foram retirados dos livros [5] e [8].

Utilizaremos agora por meio da Proposição 4.0.1 a aplicação do postulado 1.0.1 para a obter-se a área de uma elipse. Essas aplicações e enunciados foram retiradas de [10].

**Proposição 4.0.1.** *A área de uma região elíptica de semieixos $a$ e $b$ é $\pi ab$.*

Demonstração: Seja $R$ uma região elíptica no sistema de coordenadas cartesianas com centro na origem e eixos $a$ e $b$, cuja inequação é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad y > 0 \tag{4.1}$$

e seja $S$ uma uma região circular definida pela inequação

$$x^2 + y^2 \leq b^2, \quad y > 0. \tag{4.2}$$

Ao escrevermos $x$ em função de $y$, na inequação 4.1, obtemos que

$$x^2 = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \cdot a^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \cdot a^2} \Rightarrow x = \pm a\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Logo,

$$x_1 = a\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} \;\text{ e }\; x_2 = -a\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

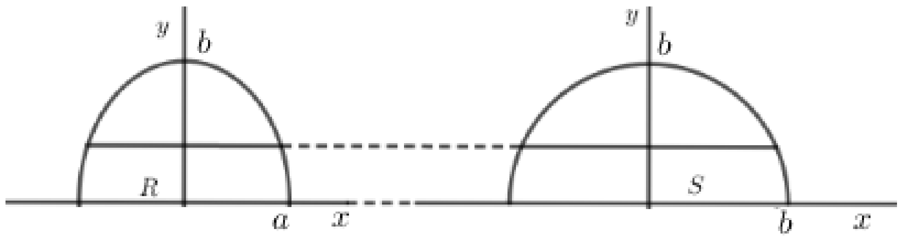


Figura 4.1: Representação gráfica das regiões $R$ e $S$.

satisfazem 4.1.

E, ao escrevermos $x$ em função de $y$, na inequação 4.2, obtemos que

$$x^2 = b^2 - y^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{b^2 - y^2}.$$

Logo, $x_1' = \sqrt{b^2 - y^2}$ e $x_2'' = -\sqrt{b^2 - y^2}$ satisfaz 4.2.

Daí, se tomarmos uma reta $t$ secante a $R$ e $S$ e paralela e não coincidente ao eixo $Ox$ de ordenada $y$, a interseção dessa reta com as regiões $R$ e $S$ são segmentos de comprimento

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} - \left(-a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\right) &= 2a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \\ &= 2a\sqrt{\frac{b^2 - y^2}{b^2}} \\ &= \frac{2a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}. \end{aligned}$$

e

$$x_2' - x_1' = \sqrt{b^2 - y^2} - \left(-\sqrt{b^2 - y^2}\right) = 2\sqrt{b^2 - y^2}.$$

Assim, a razão entre esses comprimentos é dada por

$$\frac{x_2 - x_1}{x_2' - x_1'} = \frac{\frac{2a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}}{2\sqrt{b^2 - y^2}} = \frac{a}{b}$$

e, portanto, pelo Princípio de Cavalieri,

$$\mathrm{A}_R = \frac{a}{b} \cdot \mathrm{A}_S = \frac{a}{b} \cdot \frac{\pi b^2}{2} = \frac{\pi ab}{2}.$$

Logo, se $A_{el}$ é a área da elipse, então

$$A_{el} = 2 \cdot \mathrm{A}_R = 2 \cdot \frac{\pi ab}{2} = \pi ab.$$

## 4.1 Volume do prisma

Nesta seção, abordaremos o Princípio de Cavalieri para obtermos a expressão do cálculo de volume de um prisma.

**Proposição 4.1.1.** *O volume do prisma é o produto da área da base pela medida da altura.*

**Demonstração.** Sejam $Q_1$ um bloco retangular de altura $H$ e base $B_1$ e $Q_2$ um prisma qualquer de altura $H$ e base $B_2$, onde $B_1$ e $B_2$ pertencem ao um mesmo plano $\alpha$ e possui áreas iguais. Sejam $A_{B_1}$ e $A_{B_2}$ as áreas de $B_1$ e $B_2$ respectivamente e $\beta$ um plano paralelo ao plano $\alpha$, que secciona $Q_1$ e $Q_2$ gerando secções $B_1'$ e $B_2'$, conforme ilustramos na Figura 4.2.

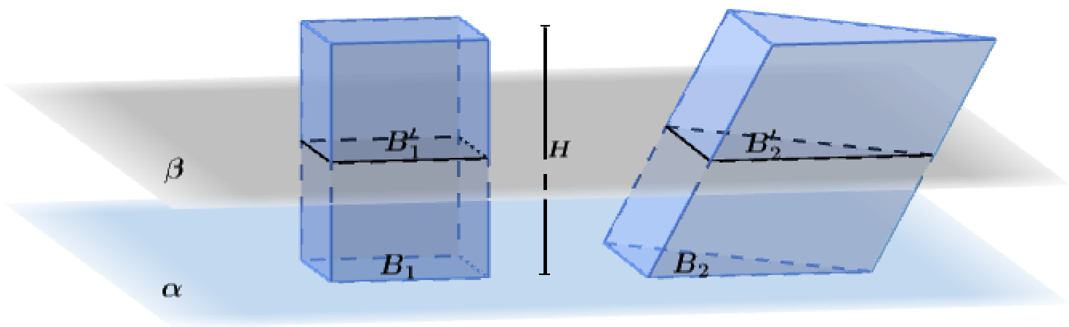


Figura 4.2: Volume do prisma pelo Princípio de Cavalieri.

Seja $A_{B_1'}$ e $A_{B_2'}$ as áreas de $B_1'$ e $B_2'$. Como $A_{B_1} = A_{B_1'}$ e $A_{B_2} = A_{B_2'}$ tem-se que $A_{B_1'} = A_{B_2'}$. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, o bloco retangular $Q_1$ e o prisma $Q_2$ têm o mesmo volume. Assim, seja $V_{Q_1}$ e $V_{Q_2}$, os volumes de $Q_1$ e $Q_2$, respectivamente, então $V_{Q_1} = V_{Q_2}$. No entanto, como o volume do bloco retangular é $V_{Q_1} = A_{B_1}H$, donde seque que

$$V_{Q_2} = A_{B_2}H. \tag{4.3}$$

Portanto, o volume do prisma é igual ao produto da área da base pela altura. ∎

## 4.2 Volume da pirâmide

Nesta seção, abordaremos o Princípio de Cavalieri para obtermos a expressão do cálculo de volume de uma pirâmide. Para isso, usaremos os lemas 4.2.1 e 4.2.2.

**Lema 4.2.1.** *A secção e a base de uma pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é* $\dfrac{h}{H}$.

**Demonstração.** Sejam $P$ uma pirâmide de base triangular $ABC$ e altura $H$ e $DEF$ uma secção de $P$ paralela a base a uma distância $h$ do vértice da pirâmide.

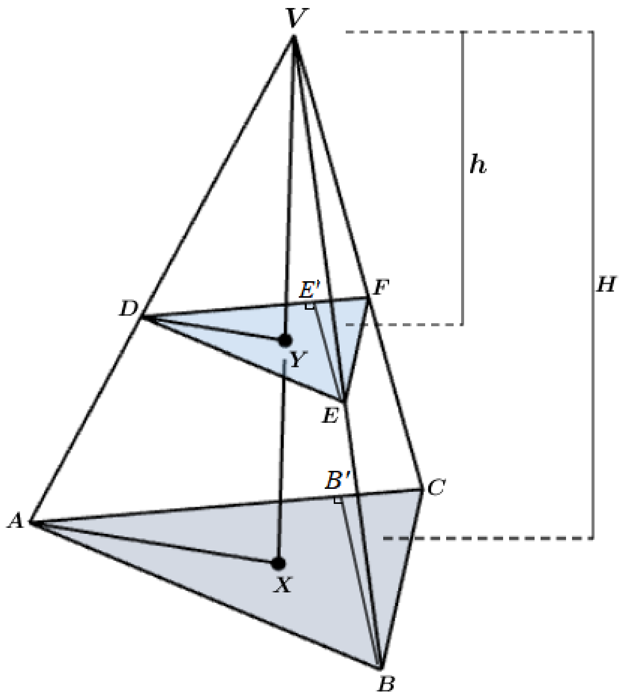


Figura 4.3: Pirâmides

Com o auxílio da Figura 4.3 , temos que os segmentos $\overline{DY}$ e $\overline{AX}$ são paralelos, pois são interseções de planos paralelos por um terceiro. Logo, os triângulos $VYD$ e $VXA$, pelo **caso ângulo ângulo**, são semelhantes, assim as arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão, e portanto:

$$\frac{\overline{VD}}{\overline{VA}} = \frac{\overline{VY}}{\overline{VX}} = \frac{h}{H}. \tag{4.4}$$

Mostraremos agora que a secção $DEF$ e a base $ABC$ são triângulos semelhantes. Note que os ângulos de $DEF$ e os ângulos de $ABC$, por terem lados respectivamente paralelos, são congruentes. Assim, pelo **caso ângulo ângulo**, são triângulos semelhantes.

Da expressão 4.4, a razão de semelhança é $\frac{h}{H}$. Então, da semelhança dos triângulos $VDE$ e $VAB$, ver na Figura 4.3, temos que

$$\frac{\overline{VD}}{\overline{VA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \Longrightarrow \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{h}{H} \Longrightarrow \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{h}{H}.$$

Portanto, os triângulos que determinam a secção $DEF$ e a base $ABC$ são semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{h}{H}$.

■

**Lema 4.2.2.** *A razão entre áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.*

**Demonstração.** Sejam $E'$ e $B'$ os pés das alturas dos triângulos que definem a secção $DEF$ e a base $ABC$ da pirâmide, respectivamente, conforme a Figura 4.3, então $\overline{EE'}$ e $\overline{BB'}$ são as respectivas alturas da secção e da base. Assim teremos que

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{BB'}} \Longrightarrow \frac{\overline{EE'}}{\overline{BB'}} = \frac{h}{H}$$

Logo, sejam $A_{(DEF)}$ e $A_{(ABC)}$ as respectivas áreas da secção e da base, então

$$\begin{aligned} \frac{A_{(DEF)}}{A_{(ABC)}} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{DF} \cdot \overline{EE'}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BB'}} \\ &= \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{EE'}}{\overline{BB'}} \\ &= \frac{h}{H} \cdot \frac{h}{H} \\ &= \left(\frac{h}{H}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto, a razão entre as áreas da secção $DEF$ e da base $ABC$ é igual ao quadrado da razão de semelhança $\frac{h}{H}$. ■

**Proposição 4.2.1.** *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume.*

**Demonstração.** Sejam $Q_1$ e $Q_2$ duas pirâmides de mesma base $B$ e mesma altura $H$, onde $B$ pertence a um plano $\alpha$, e seja $\beta$ um plano qualquer paralelo a $\alpha$ que secciona $Q_1$ e $Q_2$ a uma altura $h$ dos vértices dessas pirâmides e gera as secções $B_1$ e $B_2$, conforme ilustramos na Figura 4.4.

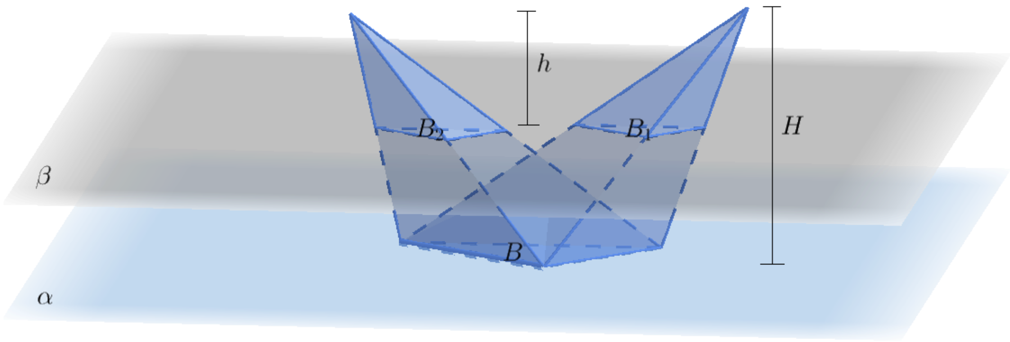


Figura 4.4: Volume da pirâmide pelo Princípio de Cavalieri

Assim, sejam $A_B$, $A_{B_1}$ e $A_{B_2}$ as áreas de $B$, $B_1$ e $B_2$, respectivamente. Então, dos lemas 4.2.1 e 4.2.2, segue que

$$\frac{A_{B_1}}{A_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_{B_2}}{A_B}$$

e, portanto, $A_{B_1} = A_{B_2}$. A partir disso, concluímos, por meio do Princípio de Cavalieri, que o volume de $Q_1$ é igual ao volume de $Q_2$. ■

Sempre que movemos o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo à sua base, o volume da pirâmide não se altera.

**Proposição 4.2.2.** *O volume de uma pirâmide triangular é um terço do produto da área da base pela altura.*

**Demonstração.** Para demonstrar esse resultado iremos considerar um prisma $P$ de base triangular, conforme ilustrado na Figura 4.5 e a partir desse prisma obteremos três tetraedros como os que esboçamos na Figura 4.6.

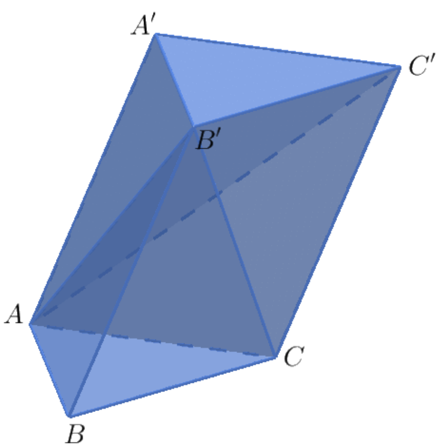


Figura 4.5: Ilustração do prisma $P$

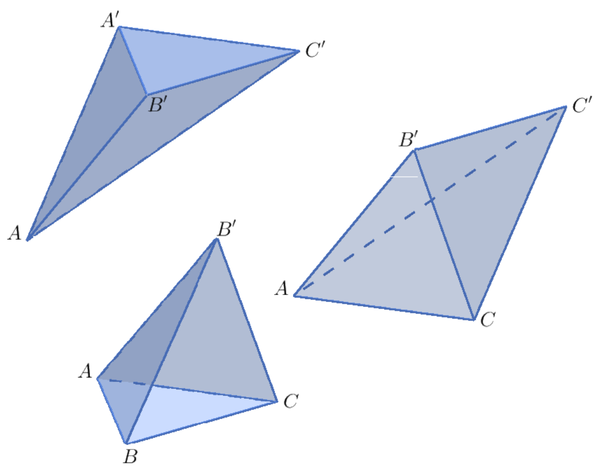


Figura 4.6: Obtenção dos tetraedros

Cada um desses tetraedros foi obtido do prisma $P$ através da decomposição que ilustramos na Figura 4.5.

Para facilitar o estudo das propriedades desses tetraedros estabelecemos uma notação específica que consiste basicamente em denotar um tetraedro de base $A_1A_2A_3$ e vértice $A_4$ por $A_4 - A_1A_2A_3$ e exprimir o volume desse tetraedro por $V(A_4 - A_1A_2A_3)$.

E, a partir disso, basta observar que, se $V_P$ é o volume de $P$, então

$$V_P = V(A - A'B'C') + V(B' - ACC') + V(B' - ABC)$$

Com o auxílio da Figura 4.7, obtemos os seguintes resultados

$$\begin{aligned} V(A - A'B'C') &= V(A - A'BC') \\ &= V(A - A'BC) \\ &= V(A' - ABC). \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} V(B' - ACC') &= V(B - ACC') \\ &= V(C' - ABC) \end{aligned}$$

que também é equivalente a $V(B' - ACC')$.

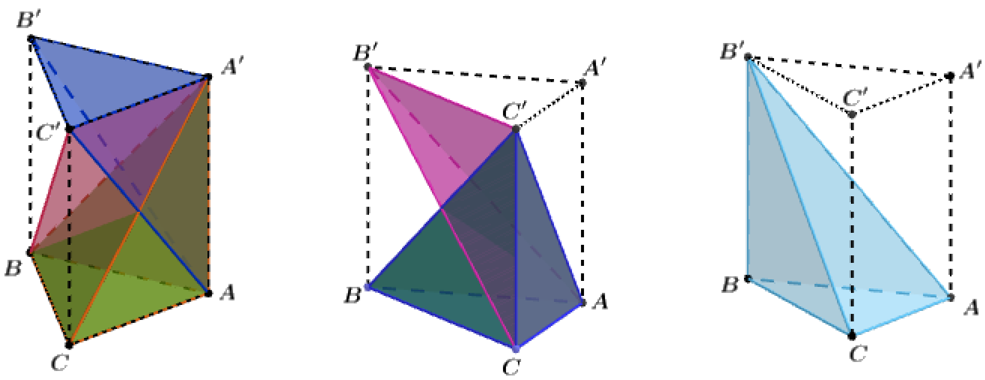


Figura 4.7: Tetraedros

Daí, $V_P = V(A' - ABC) + V(C' - ABC) + V(B' - ABC)$ e assim, como $A' - ABC$, $C' - ABC$ e $B' - ABC$ possuem a mesma base e a mesma altura que o prisma. Pela Proposição 4.2.1 $V(A' - ABC) = V(C' - ABC) = V(B' - ABC)$. Portanto,

$$V(A' - ABC) = \frac{V_P}{3}, \quad V(C' - ABC) = \frac{V_P}{3} \;\text{ e }\; V(B' - ABC) = \frac{V_P}{3}.$$

Donde segue que o volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do volume do prisma com mesmas base e altura da pirâmide. ∎

**Teorema 4.2.1.** *O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

**Demonstração.** Para verificar basta observar que qualquer pirâmide $\mathcal{P}$ com base $B$ e altura $H$ conforme ilustramos na Figura 4.8 pode ser dividida em pirâmides de bases triangulares. Essa decomposição é feita obtendo as diagonais do polígono da base e construindo triângulos justapostos a partir delas e, nesse caso, o vértice de cada uma dessas pirâmides coincide com o vértice de $\mathcal{P}$.

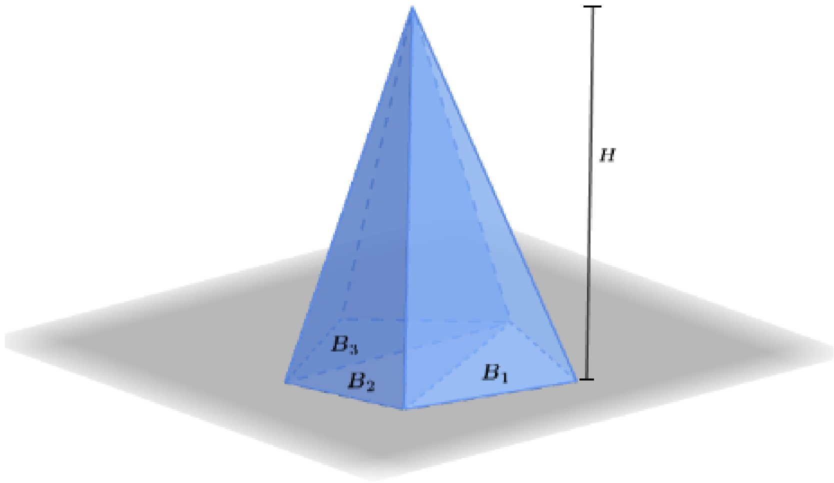


Figura 4.8: Cálculo do volume da pirâmide

Assim, a pirâmide $\mathcal{P}$ que foi decomposta em $n$ pirâmides de bases $B_1, B_2, \ldots, B_n$, todas triangulares. Então, como o volume da pirâmide $\mathcal{P}$ é igual a soma dos volumes de cada uma dessas pirâmides. Seja $V_{\mathcal{P}}$ o volume da pirâmide $\mathcal{P}$, pela Proposição 4.2.2 temos que

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{P}} &= \frac{1}{3}A_{B_1}H + \frac{1}{3}A_{B_2}H + \ldots + \frac{1}{3}A_{B_n}H \\ &= \frac{1}{3}(A_{B_1} + A_{B_2} + \ldots + A_{B_n})H \end{aligned}$$

onde $A_{B_1}, A_{B_2}, \ldots, A_{B_n}$ são as áreas de $B_1, B_2, \ldots, B_n$, respectivamente. Daí, se $A_B$ é a área de $B$, com $A_B = A_{B_1} + A_{B_2} + \ldots + A_{B_n}$ então, segue que

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{P}} &= \frac{1}{3}(A_{B_1} + A_{B_2} + \ldots + A_{B_n})H \\ &= \frac{1}{3}A_BH. \end{aligned}$$

■

## 4.3 Volume do cilindro

**Proposição 4.3.1.** *O volume de um cilindro é o produto da área da base pela medida da altura.*

**Demonstração.** Sejam $Q_1$ um prisma de altura $H$ e base $B_1$ e $Q_2$ um cilindro qualquer de altura $H$ e base $B_2$ , onde $B_1$ e $B_2$ pertencem ao um mesmo plano $\alpha$ e possuem áreas iguais. Seja $\beta$ um plano qualquer, paralelo a $\alpha$ que secciona $Q_1$ e $Q_2$ gerando as secções $B_1'$ e $B_2'$, conforme ilustramos na Figura 4.9

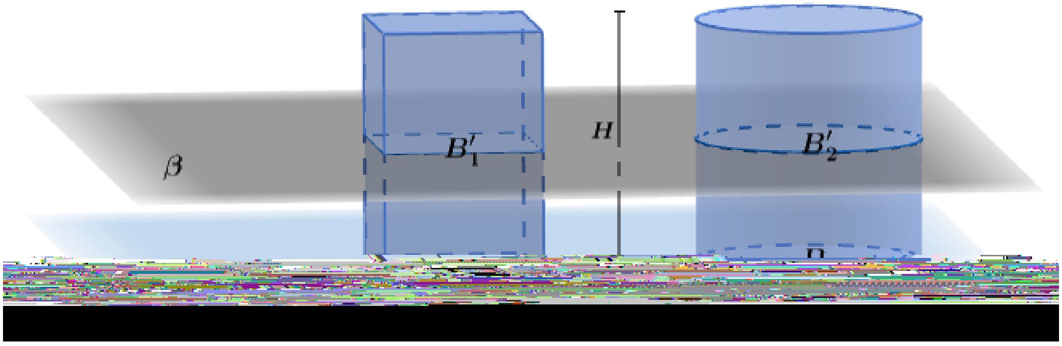


Figura 4.9: Volume do cilindro pelo Princípio de Cavalieri

Sejam $A_{B_1}$ e $A_{B_2}$ as áreas de $B_1$ e $B_2$ e $A_{B_1'}$ e $A_{B_2'}$ as áreas das secções $B_1'$ e $B_2'$, respectivamente e como $A_{B_1} = A_{B_1'}$, $A_{B_2} = A_{B_2'}$ e $A_{B_1} = A_{B_2}$ conclui-se que $A_{B_1'} = A_{B_2'}$. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, o prisma $Q_1$ e o cilindro $Q_2$ têm o mesmo volume. Assim, seja $V_{Q_1}$ e $V_{Q_2}$, os volumes do prisma $Q_1$ e do cilindro $Q_2$, respectivamente, de 4.3, temos que

$$V_{Q_2} = A_{B_2}H.$$

Mostrando assim que o volume do cilindro é o produto da área da base pela altura. ■

## 4.4 Volume do cone

Nesta seção abordamos o Princípio de Cavalieri para obtermos a expressão do cálculo do volume de um cone.

**Proposição 4.4.1.** *O volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura.*

**Demonstração.** Sejam $Q_1$ uma pirâmide de altura $H$ e base $B_1$ e $Q_2$ um cone qualquer de altura $H$ e base $B_2$, onde $B_1$ e $B_2$ pertencem a um plano $\alpha$ e possuem áreas iguais. Seja $\beta$ um plano qualquer paralelo à $\alpha$, que secciona $Q_1$ e $Q_2$ a uma distância $H - h$ das bases e sejam $A_{B_1}$ e $A_{B_2}$ as áreas de $B_1$ e $B_2$ e $A_{B_1'}$ e $A_{B_2'}$ as áreas das secções $B_1'$ e $B_2'$ como mostra a figura 4.10, obtidas a partir da secção de $\beta$ com $Q_1$ e $Q_2$, respectivamente.

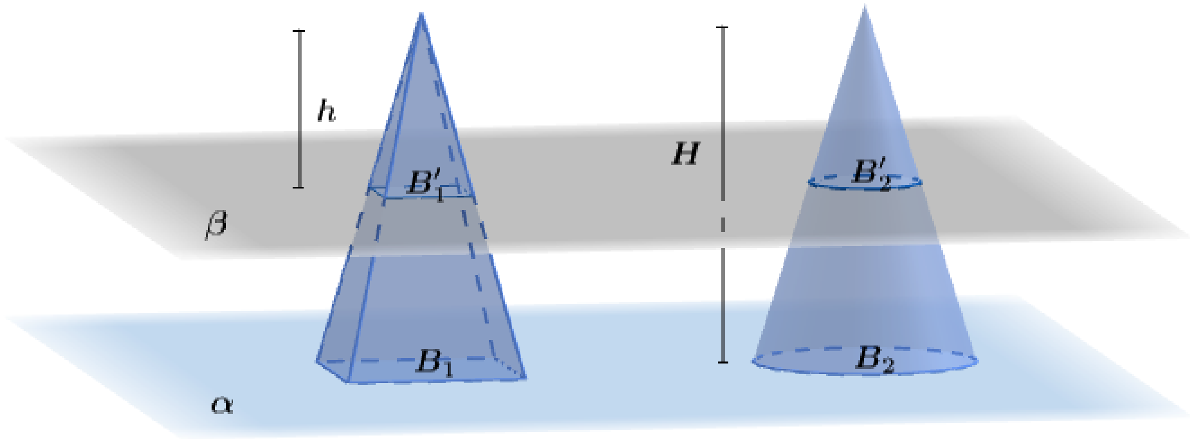


Figura 4.10: Volume do cone pelo Princípio de Cavalieri

De 4.2.2, temos que $\dfrac{A_{B_1'}}{A_{B_1}} = \left(\dfrac{h}{H}\right)^2$ e $\dfrac{A_{B_2'}}{A_{B_2}} = \left(\dfrac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{A_{B_1'}}{A_{B_1}} = \dfrac{A_{B_2'}}{A_{B_2}}$. Assim, como as áreas $A_{B_1} = A_{B_2}$ temos que $A_{B_1'} = A_{B_2'}$. Logo, pelo Princípio de Cavalieri a pirâmide $Q_1$ e o cone $Q_2$ têm o mesmo volume. Sejam $V_{Q_1}$ e $V_{Q_2}$ os volumes de $Q_1$ e $Q_2$, respectivamente. Segue que $V_{Q_1} = V_{Q_2}$. portanto, como o volume da pirâmide $Q_1$ é $V_{Q_1} = \dfrac{1}{3}A_{B_1}H$, temos que o volume do cone $Q_2$ é dado por

$$V_{Q_2} = \frac{1}{3}A_{B_2}H.$$

■

## 4.5 Volume da esfera

Nesta seção, abordaremos o Princípio de Cavalieri para obtermos a expressão do cálculo do volume de uma esfera.

**Proposição 4.5.1.** *O volume da esfera de raio $r$ é $\dfrac{4}{3}\pi r^3$*

**Demonstração.** Seja um cilindro $Q_1$ equilátero de raio $r$ e altura $2r$ e seja $O$ o ponto médio do eixo do cilindro. Considere dois cones que tem como vértice o ponto $O$ e bases que coincidem com às do cilindro.

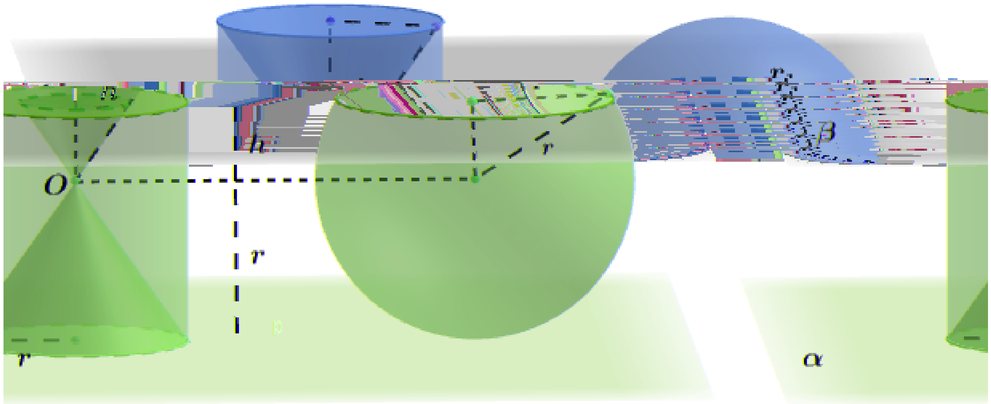


Figura 4.11: Volume da esfera pelo Princípio de Cavalieri

A junção dos dois cones é um sólido chamado de clépsidra. Retirando os dois cones do cilindro obtemos um novo sólido chamado de anticlépsidra que denotamos $A_t$.

Seja uma esfera $Q_2$ de raio $r$, considerando um plano $\alpha$ dado, de modo que a esfera $Q_2$ seja tangente ao plano $\alpha$ e que o cilindro $Q_1$ que gerou a anticlépsidra tenha a base também em $\alpha$.

Considere qualquer plano $\beta$ paralelo ao plano $\alpha$ e que seccione a esfera e a anticlépsidra a uma altura $h$ do ponto $O$. A secção de $\beta$ gera um círculo na esfera com raio $r_1$, e na anticlépsidra, uma coroa circular, com um círculo maior de raio $r$ e um círculo menor de raio $r_2 = h$, obtida pela semelhança de triângulos. Sejam $A_{cc}$ a área da coroa circular e $A_c$ a área do círculo, temos que $A_{cc} = \pi(r^2 - {r_2}^2)$. Como $r_2 = h$, temos que $A_{cc} = \pi(r^2 - h^2)$.

Já para a área do círculo obtemos que $A_c = \pi {r_1}^2$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que ${r_1}^2 = r^2 - h^2$. Logo, $A_c = \pi(r^2 - h^2)$. Assim $A_{cc} = A_c$.

Portanto, como as secções tem áreas iguais, pelo Princípio de Cavalieri, a esfera possui volume igual ao da anticlépsidra. Sejam $V_{A_t}$ e $V_{Q_2}$ os volumes da anticlépsidra $A_t$ e da esfera $Q_2$ respectivamente, segue que $V_{A_t} = V_{Q_2}$. Como $V_{A_t}$ é igual ao volume do cilindro menos duas vezes o volume do cone, obtemos que

$$\begin{aligned} V_{A_t} &= \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r \right) \\ &= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi r^3$. ∎

# Referências Bibliográficas


[1] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] BICUDO, I. **Os elementos Euclides**. São Paulo: Unesp, 2009.

[3] BRASIL, MEC, **Base Nacional Comum Curricular** - BNCC, versão aprovada pelo CNE, novembro de 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCCEIEF110518versaofinalsite.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2020.

[4] DOLCE, O. **Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005. v. 9.

[5] DOLCE, O. **Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005. v. 10.

[6] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

[7] LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria** . 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[8] LIMA, E. L. et al **A Matemática do Ensino Médio, 2**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[9] NETO, Antonio de Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar**. v. 2. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[10] PATERLINI, R. R. Os teoremas de Cavalieri. Rio de Janeiro: **Revista do Professor de Matemática**, n. 72, p. 43-47, 2010.