INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARIA MICAELY JUVÊNCIO PEREIRA

PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO MÉDIO: O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL COM DEMONSTRAÇÕES

CAJAZEIRAS
2021

MARIA MICAELY JUVÊNCIO PEREIRA

PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO MÉDIO: O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL COM DEMONSTRAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciada em Matemática**.

Orientador(a):

Prof(a). Me. José Doval Nunes Martins.

Cajazeiras

2021

MARIA MICAELY JUVÊNCIO PEREIRA

PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO MÉDIO: O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL COM DEMONSTRAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciada em Matemática**.

Data de aprovação: 07/06/2021

Banca Examinadora:

José Doval Nunes Martins

Prof. Me. José Doval Nunes Martins
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Francisco Aureliano Vidal

Prof(a). Me. Francisco Aureliano Vidal
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

Leonardo F. Soares

Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

P436p

Pereira, Maria Micaely Juvêncio

Propostas de sequências didáticas para o ensino médio: o ensino de geometria espacial com demonstrações / Maria Micaely Juvêncio Pereira; orientador José Doval Nunes Martins.- 2021.
73 f.: il.

Orientador: José Doval Nunes Martins.
TCC (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2021.

1. Geometria espacial 2. Sequência didática 3. Demonstrações - Geometria espacial I. Título

514(0.067)

Dedico e agradeço este trabalho à minha família, principal pilar na minha formação humana.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida e saúde.

A todos os meus familiares e amigos pelo apoio e estrutura familiar que me ajudaram a manter-me firme no meu propósito, sempre me incentivando e apoiando ao longo de toda a minha trajetória no curso.

Ao meu orientador, o professor Me. José Doval Nunes Martins, por ter se disponibilizado a me orientar na realização deste trabalho, bem como pela forma atenciosa e solícita com a qual esclareceu duvidas, me corrigiu e me guiou ao longo do percurso.

Aos demais professores, por todos os ensinamentos que me deram dentro e fora da sala de aula, os quais foram indispensáveis na minha formação profissional.

Agradeço também a todos os demais que ajudaram direta ou indiretamente na conclusão deste trabalho.

A geometria existe por toda a parte. [...] É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreende-la e alma para admira-la.

Malba Tahan, O homem que calculava

RESUMO

A geometria espacial tem inúmeras aplicabilidades em várioas outras ciências, sendo importante não apenas no âmbito da matemática, mas também no trabalho com outras disciplinas, possibilitando uma abordagem interdisciplinar. Por outro lado, o uso de demonstrações no ensino de matemática favorece uma efetiva aprendizagem, uma vez que justifica as fórmulas e propriedades estudadas. Assim, o principal objetivo desse trabalho é apresentar três propostas de sequência didática abordando os principais tópicos da Geometria espacial com enfoque nas demonstrações, de modo a servir de subsídio pedagógico e material de apoio para o professor de Ensino Médio. A metodologia utilizada é classificada como aplicada, descritiva, qualitativa, hipotético-dedutiva e bibliográfica. O resultado deste trabalho são as sequências didáticas propriamente ditas, as quais podem ser trabalhadas por professores do Ensino Médio.

Palavras-chave: Sequência didática. Geometria espacial. Demonstrações.

ABSTRACT

Spatial Geometry has numerous applications in many fields of science, being important not only in the scope of mathematics, but working with other disciplines too, making possible an interdisciplinary approach. On the other hand, the use of demonstrations, favors effective learning in the mathematic's teaching once that the formulas and properties studied are justified. Thus, the main objective of this work is to present three proposals of didactic sequences reaching the main Spatial Geometry's topics, highlighting the demonstrations so that they attend as pedagogical and material support to the highschool teachers. The methodology used is classified as applied, demonstrative, qualitative, hypothetical-deductive and bibliographic. The work's result are the didactic sequences properly, which can be adopted by highschool teachers.

Keywords: Didactic sequence. Spatial geometry. Demonstrations.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Espacial, também chamada de Geometria Euclidiana Espacial, pode ser entendida como a parte da Matemática que estuda as figuras geométricas e seus elementos (curvas e planos) do espaço tridimensional. A mesma baseia-se nos princípios da Geometria Euclidiana Plana, sendo imprescindível o conhecimento desta para uma boa aprendizagem.

A geometria espacial possui aplicações em várias ciências, como a engenharia civil (construções arquitetônicas, tais como prédios e estufas, que possuem o formato de um prisma), a zoologia (os favos de mel das colmeias tem formato de um prisma hexagonal, devido a maior capacidade de volume que esta forma comporta), a astrologia (planetas possuem a forma esférica por questões relacionadas à massa e a gravidade), a biologia (a estrutura de dupla hélice do DNA é semelhante a um sólido irregular), a química (cada molécula tem uma geometria molecular que influencia na forma que a mesma terá), a indústria de alimentos (latas e embalagens que possuem a forma de determinados sólidos geométricos por questões de maior volume e economia de material), dentre outros vários exemplos.

De fato, pode-se dizer que a presença de conteúdos da geometria, tanto a plana (no ensino fundamental) quanto a espacial (no ensino médio) na grade curricular é de suma importância, pois contribui de várias formas para a formação do indivíduo. Como pontua Lorenzato:

> Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, eles dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da matemática torna-se distorcida. (LORENZATO, 1995, p. 5)

O principal objetivo desse trabalho é apresentar três sequências didáticas sobre Geometria espacial com enfoque nas demonstrações. Para tal, foram delimitados os seguintes objetivos específicos: apresentar, através de uma pesquisa bibliográfica, a importância da

Geometria Espacial e do uso de demonstrações no tocante ao ensino de Matemática; fazer um resumo do conteúdo abordado pela sequência didática, apresentando as definições e demonstrações que serão trabalhadas e explanar sobre sequência didática: o que é e como é composta; bem como apresentar as sequências didáticas propriamente ditas.

O uso das demonstrações matemáticas, segundo pesquisas recentes, é uma poderosa ferramenta que auxilia no desenvolvimento do pensamento lógico e na construção do conhecimento, bem como permite aos alunos tomar familiaridade com o rigor matemático. Tendo em vista que o trabalho com as demonstrações pode ser realizado de diversas formas, tais como a exposição no quadro, uma atividade de resolução de problemas ou de modelagem matemática, ou até mesmo através de uma discussão na qual os alunos sejam instigados a propor uma forma de provar determinada afirmação geométrica com base no que já foi estudado, entre outras; a utilização das demonstrações a nível médio (respeitando-se o nível de conhecimento dos alunos e utilizando-se de uma linguagem simples) é bastante viável.

Assim, o presente trabalho tem como justificativa a criação dessas sequências didáticas, objetivando servir de subsídio pedagógico e material de apoio ao professor, auxiliando-o a trabalhar a geometria espacial com enfoque nas demonstrações, de modo a levar o aluno a aprender não apenas as classicas fórmulas de área e volume de sólidos, mas também saber o porquê dessas fórmulas, o que são os sólidos estudados (definição e elementos).

Na sequência didática desenvolvida, composta por 16 aulas, serão abordados os seguintes conteúdos: Introdução a Geometria espacial, Prismas e Cilindro, Pirâmide e Cone, Esfera. O corpo deste trabalho é composto da seguinte forma: após esta introdução, o capitulo 2 discorre sobre a importância da Geometria espacial e das demonstrações no ensino médio. No capítulo 3 é apresentado o conteúdo, o qual será trabalhado nas sequências. Serão apresentadas as definições, bem como as demonstrações das fórmulas de área e volume dos principais sólidos. A linguagem utilizada busca ser simples e concisa e as demonstrações são apresentadas de forma sequencial e didática, de modo a tornar a leitura acessível ao público alvo, isto é, professores do 2° do Ensino Médio.

No capítulo 4 são apresentadas as sequências didáticas propriamente ditas. Em cada uma das três sequências, é apresentada o conteúdo que será trabalhado, os objetivos, a duração prevista, a metodologia utilizada, os recursos necessários e a avaliação. Por último, são apresentadas as considerações finais acerca do trabalho desenvolvido e em seguida as referências consultadas. Nos apêndices constam ainda quatro atividades sugeridas para trabalhar em determindas aulas, sendo que fica a critério do professor o uso (ou não) e a adaptação desse material.

2 A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA ESPACIAL E DAS DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

2.1 A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA ESPACIAL NO CURRÍCULO FORMAL

A escolha de se trabalhar a geometria espacial se justifica pela importância desse tópico no currículo formal, devido às suas inúmeras aplicabilidades, bem como pela inegável relevância que esse tópico goza dentro da matemática. Além disso, a geometria espacial é um conteúdo importante não apenas no âmbito da matemática, mas também no trabalho com outras disciplinas, possibilitando a abordagem interdisciplinar entre química, física e geografia, por exemplo. A BNCC (2018) e os PCN's (1998), principais documentos que orientam a educação a nível nacional, corroboram a importância desse tópico do conteúdo.

A maioria das latas de refrigerante tem um formato cilíndrico o que se justifica por várias razões: primeiro, o formato cilíndrico apresenta conforto no manuseio para o consumidor que, na maioria das vezes, consome o produto diretamente da lata. Além disso, o círculo (base do cilindro) é a figura plana de maior área e menor comprimento, sendo a forma geométrica que apresenta maior custo beneficio para o fabricante. (BOTELHO, 2014).

Uma das principais informações acerca de um ar-condicionado é o seu BTU (medida de potência que indica a quantidade de energia para elevar a temperatura). O cálculo do BTU leva em consideração a área do cômodo, o número de pessoas e os equipamentos eletrônicos nesse cômodo. Ao comprar um ar-condicionado o consumidor deve levar em consideração tais particularidades, de modo a realizar uma compra satisfatória. (BOTELHO, 2014). Esses são apenas alguns dos inúmeros exemplos da presença da aplicabilidade da geometria espacial.

Segundo os PCN's, uma das finalidades do ensino da matemática no ensino médio é: "Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas."(PCN, 1998, p. 42). Assim, a geometria espacial é um conteúdo importante não apenas no âmbito da matemática, mas também no trabalho com outras disciplinas, tais como a Geografia, a Física e a Química. Dessa forma, a aquisição desse conhecimento pelos discentes possibilita um trabalho interdisciplinar entre a matemática e tópicos de outras ciências.

Por exemplo, existem partes da superfície terrestre associados aos termos usados na Geografia. Termos esses como, por exemplo, calotas polares, linha do equador, meridianos de Greenwich, polos norte e sul, círculos polares, hemisférios norte e sul, ocidente e oriente, dentre outros. Assim, é possível trabalhar, de forma interdisciplinar, o conteúdo de esferas (definição e partes da esfera) juntamente com os conteúdos geográficos referentes à superfície terrestre.

Nos estudos de geometria, um dos conceitos mais relevantes é o de volume. Embora essa noção provavelmente já seja conhecida de forma intuitiva pelos alunos, nessa etapa da educação básica é necessária uma abordagem mais formal, abordando o que seria o volume de um sólido qualquer, bem como formas de calcular volumes de sólidos regulares.

Na organização curricular da BNCC, na parte de geometria e medidas, uma das habilidades é:

> Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. (BRASIL, 2018, p. 547).

Além disso, o paragrafo destacado acima mostra que os alunos também devem, com o auxílio dos mecanismos apresentados, no caso, o princípio de Cavalieri, ser incentivados a pensar sobre formas de obtenção das fórmulas de determinados sólidos. Também seria interessante levantar questões e propor exercícios abordando, por exemplo, o cálculo do volume de sólidos irregulares, de troncos e de poliedros regulares tais como o icosaedro e o dodecaedro.

Além disso, a BNCC também coloca como habilidade específica do ensino de matemática a nível médio:

> Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 547).

Como já discutido acima, a geometria espacial esta presente em vários aspectos da vida cotidiana, sendo que, assim como nos demais conteúdos, é importante destacar, durante as aulas ou em um momento específico, a aplicabilidade dessa ciência.

Existem muitos aplicativos, tais como o geogebra, que quando bem utilizados, constituem-se em ferramentas úteis para o ensino da geometria. Embora seja interessante o trabalho com esses aplicativos durante as aulas, a BNCC destaca que o ensino da geometria não deve estar baseado na utilização desses recursos tecnológicos, sendo que os mesmos devem ser apenas um subsídio para o ensino.

Os discentes do ensino médio devem, durante um curso de geometria espacial, além de aprender os principais conceitos, desenvolver a habilidade de visualização, bem como a capacidade de analisar problemas, sendo capazes de reconhecer quais as características do sólido, quais as informações explícitas e implícitas, o que a questão pede e quais as informações necessárias para encontrar a solução. Ou seja, é preciso entender a situação geométrica que cada questão trás, de modo a desenvolver estratégias viáveis de solução.

2.2 DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Antes de falar sobre a importância das demonstrações no âmbito do Ensino Médio, é necessário antes discutir sobre as demonstrações propriamente ditas. Primeiramente, na matemática alguns dos conceitos mais relevantes são os de axioma, definição, teorema e demonstração.

Primeiro, “Definição é a caracterização de objetos matemáticos, através de propriedades que os mesmos possuem e que os caracterizam.” (FILHO, 2013, p. 134). Objetos matemáticos são basicamente tudo que é estudado na matemática, como por exemplo, ângulos, polígonos, segmentos, poliedros, etc. Por exemplo, o conjunto de pontos de um plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo é a definição de uma circunferência, isto pois, para caracterizar o conjunto de pontos que formam uma circunferência qualquer basta indicar seu centro e seu raio.

“Um axioma ou postulado é uma sentença matemática que não é uma definição e é aceita como válida, sem precisar ser demonstrada. Chamam-se noções primitivas aos conceitos escolhidos para serem os primeiros e serem adotados sem ser preciso defini-los.” (FILHO, 2013, p. 104).

Já “Um teorema é uma sentença matemática válida, cuja validade é garantida por uma demonstração matemática.” (FILHO, 2013, p. 104). Um teorema possui duas partes: a hipótese e a tese, sendo que estas partes podem ou não aparecer de forma explícita no enunciado. Na demonstração matemática, utilizando-se das informações que a hipótese fornece e fazendo uso de argumentos válidos, chega-se, como consequência lógica, na tese.

Geralmente, o enunciado de um teorema se estrutura na forma:

$$\textit{Se } H \textit{ (Hipótese) então } T\textit{(Tese).}$$

Ou seja, se a hipótese se verifica, a tese é verdadeira. A hipótese e a tese também podem aparecer de forma menos clara no enunciado e, nesse caso, o leitor deve discernir o que pode considerar como verdadeiro (hipótese) e o que pretende demonstrar (tese). Por exemplo:

Todo triângulo isósceles possui os ângulos da base congruentes.

A sentença acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

Se um triângulo possui dois lados de igual medida, então os ângulos opostos correspondentes possuem igual medida.

Dessa forma, fica fácil identificar a tese e a hipótese.

Embora não exista uma definição fixa sobre o que seria uma demonstração, pode-se entender as demonstrações como um processo no qual, a partir dos axiomas e hipóteses, usando a lógica, se verifica uma proposição matemática.

Também existem as chamadas conjecturas. “Uma conjectura é uma afirmação cuja falsidade ou verdade ainda não foi possível determinar.” (FILHO, 2013, p. 115).

Segundo os PCN (1998, p. 42), uma das finalidades do ensino de matemática no Ensino Médio é proporcionar ao aluno a habilidade de “expressar-se oral, escrita e verbalmente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em matemática.” Esse trecho deixa clara à importância que um dos principais documentos que tratam da educação nacional atribui à demonstração no ensino dessa ciência.

De fato, uma aprendizagem efetiva da matemática não pode se resumir a memorização de fórmulas e propriedades, devendo se alicerçar no entendimento do porquê, ou seja, na demonstração de tais propriedades e fórmulas, bem como na capacidade de desenvolver argumentos congruentes e lógicos para explicar e justificar pontos de vista e estratégias de resolução adotadas.

Devido à importância das mesmas, “[...] as demonstrações devem ser parte integrante no processo de aprendizagem, pois legitimam as verdades enunciadas e contribuem para maturidade do desenvolvimento matemático do estudante.” SENA (2018, p. 11).

Ainda segundo (SENA, 2018, p. 10):

> [...] as demonstrações devem naturalmente participar do processo de ensino, não apenas por serem parte da natureza intrínseca da Matemática, como pelo seu significado na construção do conhecimento. O valor de uma demonstração para um aluno do ensino básico está tanto na experiência do convencimento pela razão, como pelo aprendizado do rigor científico que a Matemática exige.

Dessa forma, pode-se dizer que o uso de demonstrações possibilita um contato mais próximo com a matemática, na medida em que demonstrações, definições e axiomas são a base da estrutura lógica dessa ciência que, embora seja repleta de aplicações, podendo ser observada em todas as ciências e na vida cotidiana, é também repleta de estereótipos, tais como a extrema dificuldade em aprende-la e a inutilidade da mesma no mundo real fora dos muros da escola, estereótipos esses que dificultam o relacionamento e, consequente, a aprendizagem dessa ciência pelos alunos.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (2018) uma das competências que devem ser atingidas no ensino de matemática é:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 542).

O trabalho com as demonstrações pode ser realizado de diversas formas, tais como a exposição no quadro, uma atividade de resolução de problemas ou de modelagem matemática, ou até mesmo através de uma discussão na qual os alunos sejam instigados a propor uma forma de provar determinada afirmação geométrica com base no que já foi estudado, entre outras formas. Recursos tecnológicos, tais como softwares de geometria dinâmica e sites educativos, também podem ser utilizados como ferramentas de apresentação de demonstrações, uma vez que tais recursos favorecem uma melhor visualização da situação geométrica.

Outra competência que deve ser atingida refere-se a:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 537)

Por último, o aluno, além de conhecer diferentes estratégias de resolução de problemas matemáticos, de modo a obter resultados, também deve saber analisar tais resultados, isto é, refletir se o resultado encontrado é possível e adequado, sendo que, para tal, é necessário um bom entendimento do contexto que a questão apresenta, bem como dos passos seguidos para obter a solução.

3 GEOMETRIA BÁSICA ESPACIAL

Ao longo desse capítulo, será apresentado o conteúdo trabalhado pelas três sequências didáticas. Ao longo das três subsecções, estudaremos os principais tipos de sólidos geométricos, a saber: prismas, cilindro, pirâmide, cone e esfera.

O desenvolvimento desse capítulo tem como base a referencia [3].

3.1 PRISMAS E CILINDRO

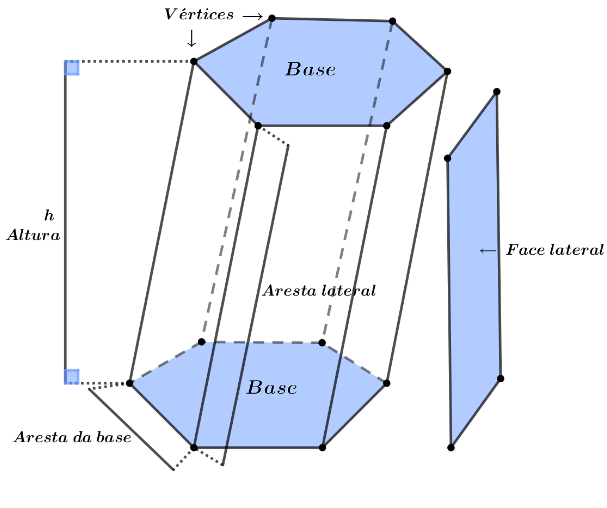
No cotidiano, existem vários objetos com formato semelhante a prismas, tais como caixas de papelão e madeira, embalagens diversas, prédios e casas, entre outros. Com relação ao cilindro, dentro os objetos que possuem forma semelhante, podemos citar as velas, pilhas, latinhas de refrigerante, baldes e embalagens.

3.1.1 Prismas: Definição, Elementos e Classificação

Definição 1 *Consideremos um poliedro convexo $A_1A_2A_3...A_n$ situado num plano α e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intercepta o plano α. Chama-se prisma convexo à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos à $\overline{PQ}$, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α.*

Como indicado na figura 3.1, um prisma tem como elementos:

Figura 3.1 – Elementos do prisma

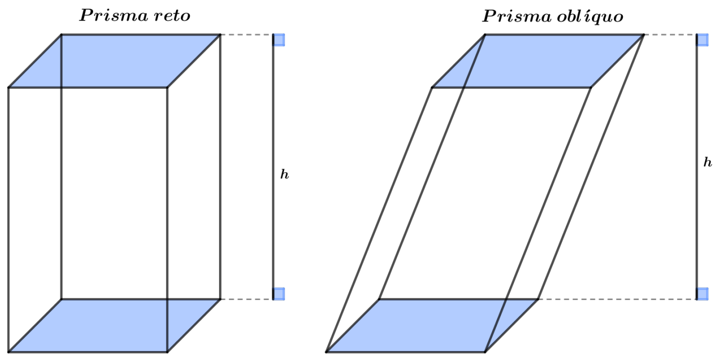


Fonte: Arquivo pessoal.

Bases - são polígonos congruentes e paralelos;
Vértices - são os vértices dos polígonos da base;
Aresta da base - são os lados dos polígonos da base;
Face lateral - são os quadriláteros que compõe as faces laterais;
Aresta lateral - são os lados dos quadriláteros que formam a lateral;
Altura - é a distância h entre as bases.

Um prisma pode ser classificado em:
Prisma reto - quando as arestas laterais são perpendiculares as bases;
Prisma oblíquo - quando as arestas laterais são oblíquas as bases.

Figura 3.2 – Prisma reto e Prisma oblíquo

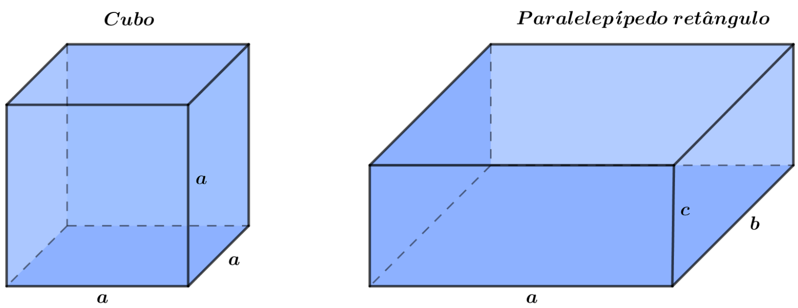


Fonte: Arquivo pessoal.

Com relação ao tipo de polígono que compõe as bases, um prisma pode ainda ser classificado em regular ou irregular, triangular (se as bases forem triângulos), quadrangular (se as bases forem quadrados), pentagonal (se as bases forem pentagonos), hexagonal (se as bases forem hexagonos), etc.

3.1.2 Paralelepípedo retângulo e Cubo

Figura 3.3 – Paralelepípedo e Cubo



Fonte: Arquivo pessoal.

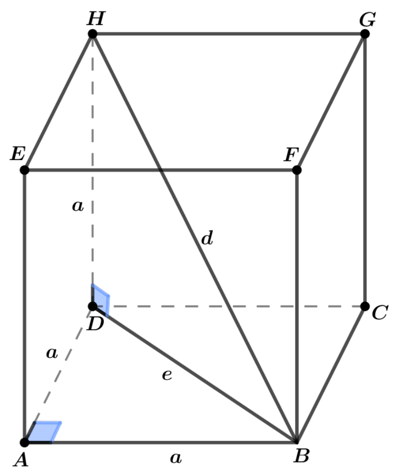
A área total do cubo é a soma das áreas dos seis quadrados que formam suas faces. Como a área de um quadrado é igual ao quadrado da medida do seu lado, temos que um cubo de aresta a possui área igual a: $A = 6a^2$.

Já a área de um paralelepípedo retângulo será a área dos seis retângulos que o compõe. Note que, as faces opostas são retângulos congruentes. Como a área de um retângulo é dada pelo produto entre suas dimensões, temos que a área de um retângulo de dimenões a, b, c será:

$$A = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow A = 2(ab + ac + bc).$$

Um cubo também possui quatro diagonais, todas de igual medida. O cálculo da diagonal do cubo é feito da seguinte maneira:

Figura 3.4 – Diagonal do Cubo



Fonte: Arquivo pessoal.

A diagonal $\overline{BH} = d$ é a hipotenusa do triângulo retângulo BDH, de catetos $\overline{DH} = a$ (aresta do cubo) e $\overline{BD}$ (diagonal de uma face).

Note que $\overline{BD} = e$ é hipotenusa do triângulo retângulo ABD de catetos de medida a. Assim, vale a relação:

$$e^2 = a^2 + a^2$$

$$e^2 = 2a^2$$

$$e = a\sqrt{2}.$$

Aplicando o teorema de pitágoras no triângulo retângulo BDH, obtemos:

$$d^2 = a^2 + e^2$$

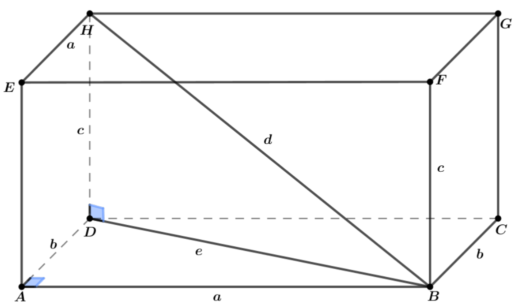
$$d^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2$$

$$d^2 = a^2 + 2a^2$$

$$d^2 = 3a^2$$

$$d = a\sqrt{3}.$$

Figura 3.5 – Diagonal do Paralelepípedo



Fonte: Arquivo pessoal.

A diagonal d do paralelepípedo é a hipotenusa do triângulo retângulo BDH.
Note que $\overline{DH} = c$ (aresta do paralelepípedo) e $\overline{BD}$ é a diagonal da face de dimensões a e b, ou seja, $\overline{DB} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Aplicando o teorema de pitágoras no triângulo retângulo BDH, obtemos a medida da diagonal:

$$d^2 = c^2 + \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$$
$$d^2 = c^2 + a^2 + b^2$$
$$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Consideremos um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c. Para todo valor de $a, b, c \in \mathbb{R}$, o volume desse sólido será dado por: $V = abc$.

Obs.: Tal proposição tem demonstração, mas pelo fato da mesma ser relativamente complexa, não será trabalhada nesse material.

Como o cubo é um tipo de paralelepípedo retângulo cujas dimensões são iguais, temos, portanto, que o volume (V): de um cubo de aresta a é dado por: $V = a^3$.

3.1.3 Princípio de Cavalieri

O princípio de Cavalieri é enunciado da seguinte maneira:

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um plano dado, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes). (DOLCE OSVALDO; POMPEO, 2013, p. 169).

Tal princípio permite demonstrar o volume de vários sólidos, como será usado mais adiante, sendo bastante útil no estudo da geometria espacial. Embora esse princípio possua demonstração, a mesma não será apresentada devido ao seu grau de complexidade.

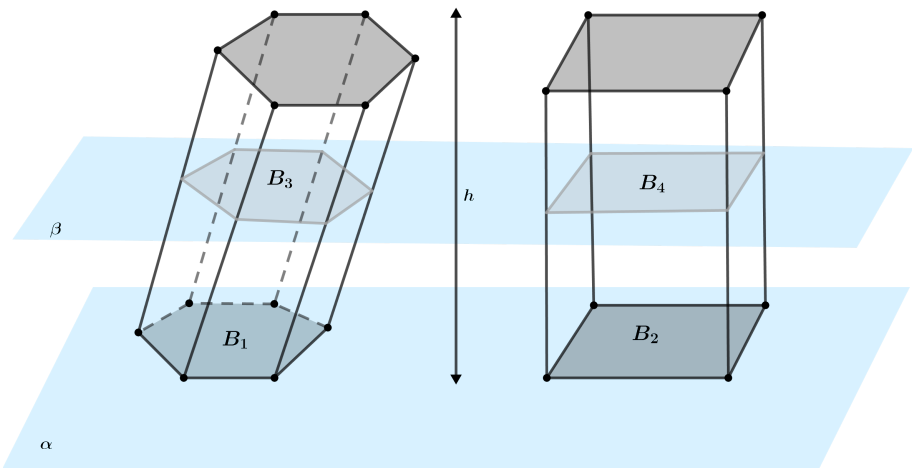
3.1.4 Área e Volume do Prisma

A área de um prisma qualquer cujas bases são polígonos de n lados será a soma da área dos polígonos (área da base) com a área dos n quadriláteros que formam a lateral (área lateral). Por exemplo, tomando um prisma quadrangular reto, sua área será a soma das áreas dos dois quadrados das bases e dos quatro retângulos que compõe as faces laterais.

Dessa forma, o cálculo da área depende do tipo de polígono que forma as bases e do número e tipo de quadriláteros que formam a lateral. Assim, não existe uma fórmula que permita calcular a área de um prisma qualquer.

O volume de um prisma qualquer de altura h e área da base B é dado por: $V = Bh$.

Figura 3.6 – Volume do prisma



Fonte: Arquivo pessoal

Consideremos dois sólidos, um prisma e um paralelepípedo, ambos de mesma medida de área de base, mesma altura h, e com base sobre um plano α, situados num mesmo semi espaço dos determinados por α. Agora, tomemos um plano β, paralelo à α, como representado na figura 3.6.

Tal plano seccionará os dois sólidos e, além disso, a área dessas secções será igual à área da bases dos respectivos sólidos, ou seja, $B_1 = B_3$ e $B_2 = B_4$. Como, por hipótese, $B_1 = B_2$, temos que $B_3 = B_4$.

Assim, tomando qualquer plano paralelo à α, a área das secções será igual à área da base. Portanto, pelo princípio de Cavalieri, o volume de um prisma qualquer (V) é igual ao volume de um paralelepípedo (V_P).

Como o volume do paralelepípedo de dimensões a, b e c é igual ao produto de susas dimensões, tomando o retângulo de dimensões a e b como base (nesse caso, $ab = B_2$) e a medida c como a altura h, teremos:

$$V_P = abc \Rightarrow V_P = B_2 h.$$

Assim, $V = V_P \Rightarrow V = B_2 h$. Como, por hipótese, $B_2 = B_1$, concluimos que $V = B_1 h$.

Logo, fica provado que o volume de um prisma qualquer de altura h e área da base de medida B é dado por: $V = Bh$.

3.1.5 Diagonais de um Prisma

Dado um prisma cujos polígonos da base tem n lados, o número de diagonais desse prisma é: $D = n(n-3)$.

Consideremos um prisma cujas bases são polígonos de n lados.

Partindo de um vértice de uma base até os vértices da outra base, obtemos $(n-3)$ diagonais, pois desconsidera-se duas diagonais de face e uma aresta. Como existem n vértices na base tomada, podemos concluir que o número de diagonais de um prisma qualquer é dado por:

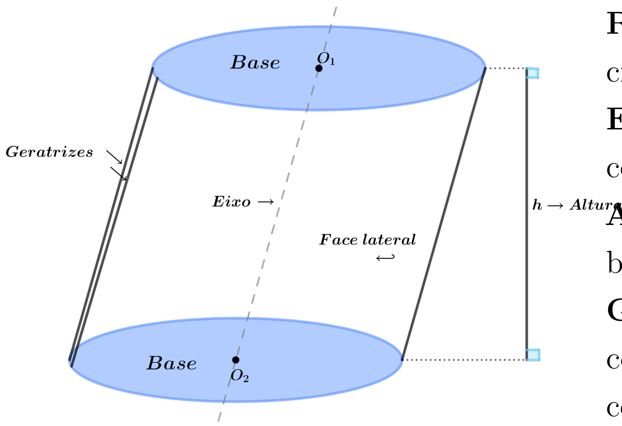
$$D = n(n-3).$$

3.1.6 Cilindro: Definição, Elementos e Classificação

Definição 2 *Consideremos um círculo de centro O e raio r num plano α e um segmento de reta $\overline{PQ}$, não nulo, não paralelo e não contido em α. Chama-se cilindro circular ou simplesmente cilindro à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a $\overline{PQ}$, com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α.*

Como indicado na figura 3.26, os principais elementos de um cilindro são:

Figura 3.7 – Elementos do cilindro



Fonte: Arquivo pessoal.

Bases - são dois círculos congruentes e paralelos;

Raio da base - é o raio dos círculos que formam as bases;

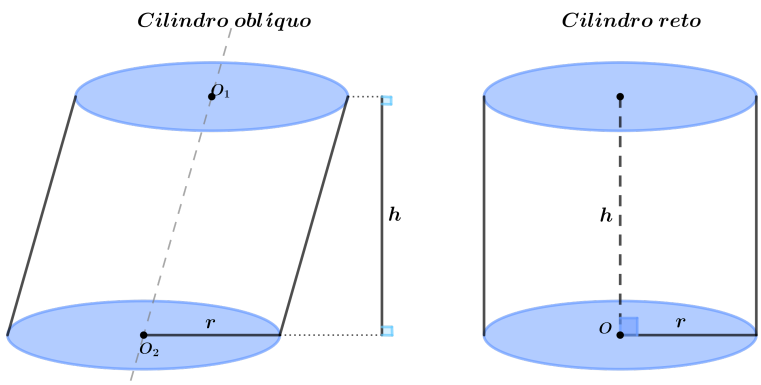
Eixo - é a reta que passa pelos centros dos círculos da base

Altura - é a distância h entre as bases;

Geratrizes - são os segmentos com extremidades em pontos correspondentes das circunferências das bases;

Existem basicamente dois tipos de cilindro: os retos e os oblíquos, sendo que, essa classificação é feita com base na posição das getratizes em relação as bases. Conforme a figura 3.8, temos:

Figura 3.8 – Cilindro reto e Cilindro oblíquo



Fonte: Arquivo pessoal.

Cilindro reto - quando as geratrizes são perpendiculares as bases;

Cilindro oblíquo - quando as geratrizes são oblíquas as bases.

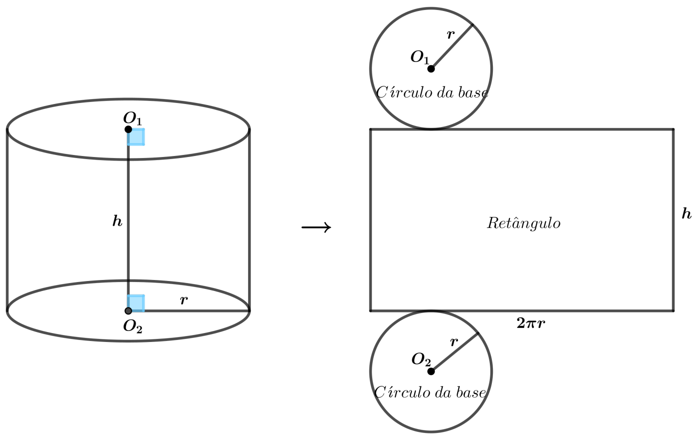
3.1.7 Área e Volume do Cilindro

A área de um cilindro de altura h e raio r é dada por: $A = 2\pi r(r + h)$.

Podemos obter essa fórmula por indução, através da observação da planificação do cilindro.

Consideremos um cilindro reto de altura h e raio da base r. Da figura 3.9, podemos observar que a planificação de um cilindro reto qualquer será composta por dois círculos iguais e um retângulo.

Figura 3.9 – Planificação do cilindro reto



Fonte: Arquivo pessoal.

A área das bases (equivalente a área dos dois círculos), aqui denotada por A_B será: $A_B = 2\pi r^2$. Já a área lateral (A_L) será a área do retângulo de dimensões h (altura do cilindro) e $2\pi r$ (comprimento do círculo da base): $A_L = 2\pi rh$.

Assim, a área total será:

$$A_T = A_B + A_L$$
$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
$$A_T = 2\pi r(r+h).$$

Caso o cilindro seja oblíquo a fórmula demonstrada também é valida pois, nesse caso, a área do cilindro será igual a área dos dois círculos que formam a base com a área do paralelograma que forma a lateral.

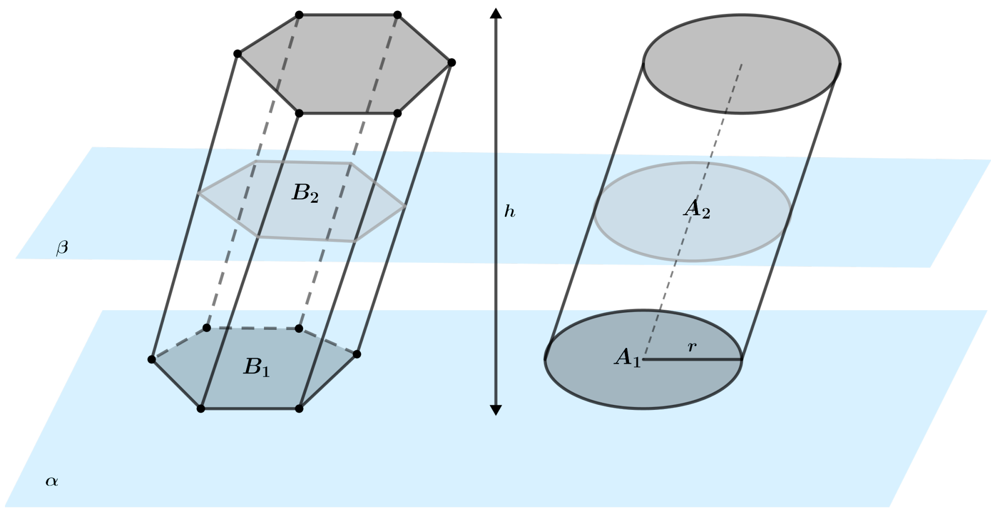
Como a área do paralelograma é igual ao produto entre a sua altura e o comprimento de sua base cujas medidas correspondem a, respectivamente, a altura do próprio cilindro e ao comprimento do círculo da base, é fácil verificar que a fórmula acima também é válida para o cálculo da área dos cilindros oblíquos.

O volume de um cilindro qualquer será o produto da área de sua base pela altura. Ou seja, considerando um cilindro circular de raio r e altura h, teremos:

$$V = \pi r^2 h.$$

Consideremos um cilindro de raio r e um prisma hexagonal, ambos com mesma área da base e mesma altura h, com bases sobre um plano α e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α, como representado pela figura 3.10.

Figura 3.10 – Volume do cilindro



Fonte: Arquivo pessoal.

Tomemos um plano β, paralelo a α, interceptando os dois sólidos. As secções desse plano β com o cilindro e o prisma são, respectivamente, um círculo e um hexagono, sendo estes congruentes à base do respectivo sólido. Logo, essas secções tem mesma área da base. Ou seja, $B_1 = B_2$ e $A_1 = A_2$.

Como, por hipótese, $B_1 = A_1$, por consequência, temos $B_2 = A_2$ e, pelo princípio de Cavalieri, os dois sólidos considerados tem o mesmo volume.

Como o volume do prisma (V_P) é igual ao produto da área da base pela altura, o volume do cilindro (V) será:

$$V = V_P$$

$$V = B_1 h$$

$$V = A_1 h$$

$$V = (\pi r^2)h$$

$$V = \pi r^2 h.$$

Obs.: A demonstração acima poderia ter sido feita considerando um prisma qualquer.

3.2 PIRÂMIDE E CONE

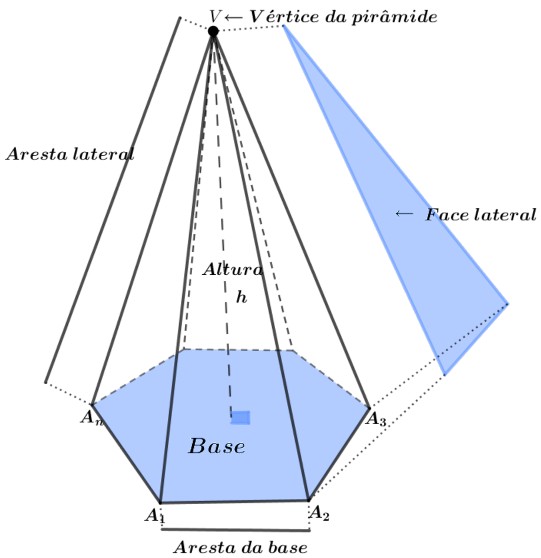
As conhecidas pirâmides do Egito, a pirâmide invertida do museo do Louvre, dentre outros monumentos, são exemplos da presença das pirâmides no mundo real. Já com relação aos cones, no cotidiano também existem inúmeros objetos que possuem a forma desse sólido, como, por exemplo, o cone de sinalização, a casquinha de sorvete e o chapéu de festa de aniversário.

3.2.1 Pirâmide: Definição, Elementos e Classificação

Definição 3 *Consideremos um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$ situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se pirâmide convexa à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e outra nos pontos do polígono.*

Conforme a figura 3.11, os principais elementos de uma pirâmide são:

Figura 3.11 – Elementos da pirâmide



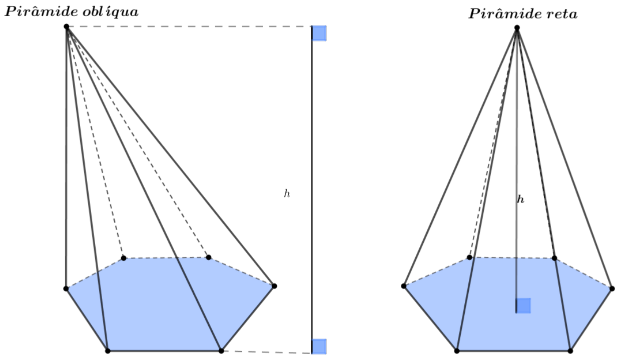
Vértice- é o ponto V da definição;
Base- é o polígono $A_1A_2A_3...A_n$;
Aresta da base- são os lados do polígono da base;
Face lateral- São os triângulos $A_1VA_2, A_2VA_3, ..., A_nVA_{n+1}$;
Aresta lateral- São os lados dos triângulos que formam as faces laterais;
Altura- é a distância h do vértice V à base.

Fonte: Arquivo pessoal.

Existem basicamente trê tipos de classificações referente as pirâmides: a classificação quanto ao número de lados do polígono da base, quanto a posição da altura em relação à base e quanto a regularidade (ou irregularidade) do poligono base.

De forma análoga à classificação dos primas, uma pirâmide pode ser classificada como quadrangular (se sua base for um quadrilátero), pentagonal (se sua base for um pentagono), etc, dependendo do tipo do polígono da base.

Figura 3.12 – Pirâmide reta e Pirâmide Oblíqua



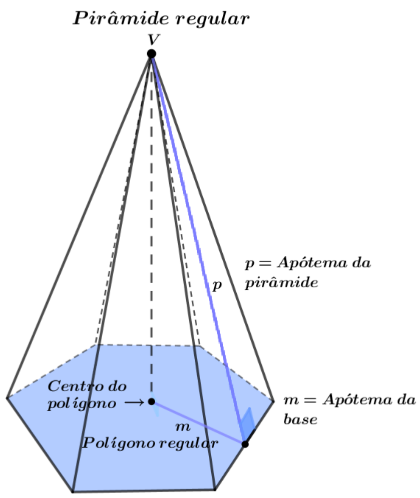
Fonte: Arquivo pessoal.

Pirâmide reta– a altura é perpendicular ao plano da base.

Pirâmide oblíqua– a altura é oblíqua ao plano da base.

Um tipo especial de pirâmide são as chamadas pirâmides regulares. **Pirâmide regular** é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Nesse tipo de pirâmide, as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes. Vale destacar que toda pirâmide regular é, necessariamente, uma pirâmide reta, mas nem toda pirâmide reta é regular. Nesse tipo de pirâmide, outros elementos importantes são os apótemas.

Figura 3.13 – Apótema da pirâmide e apótema da base



Fonte: Arquivo pessoal.

O **Apótema da pirâmide** é a altura (relativa à aresta da base) de uma face lateral.
Já o **Apótema da base** é o apótema do polígono da base. Ou seja, é o segmento com extremidades no centro do polígono regular e no ponto médio de um lado desse polígono.

O apótema da base, bem como o apótema da pirâmide, só existem em pirâmides regulares.

3.2.2 Tetraedro

O tetraedro é uma pirâmide cuja base é um triângulo. O tetraedro regular é uma pirâemide regular cuja base (e também as faces laterais) são triângulos equiláteros congruentes.

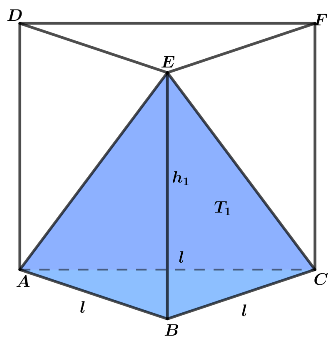
O volume de um tetraedro qualquer de altura h e área da base B é dado por: $V = \dfrac{Bh}{3}$.

Consideremos um prisma triangular regular cuja altura (H) e a aresta da base (l) possuem a mesma medida, ou seja, $l = H$.

Consideremos os seguintes tretraedros internos a esse prisma:

T_1 é o tetraedro com base no triângulo ABC e vértice E, representado pela figura 3.14.

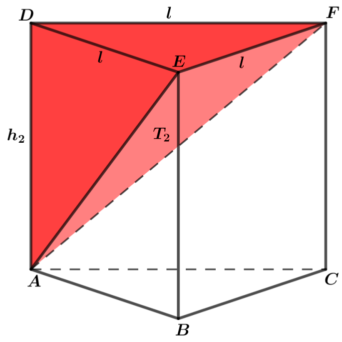
Figura 3.14 – Tetraedro 1



Fonte: Arquivo pessoal

T_2 é o tetraedro com base no triângulo DEF e vértice A, representado pela figura 3.15.

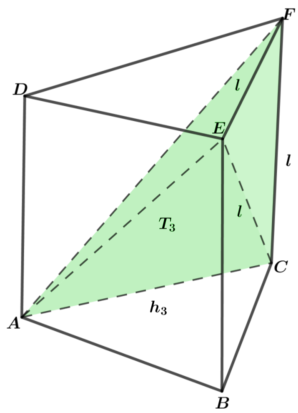
Figura 3.15 – Tetraedro 2



Fonte: Arquivo pessoal

T_3 é o tetraedro com base no triângulo CEF e vértice E, representado pela figura 3.16.

Figura 3.16 – Tetraedro 3



Fonte: Arquivo pessoal

Provemos que os tetraedros T_1, T_2 e T_3 são equivalentes, ou seja, possuem mesmo volume. Para isto, utilizaremos um teorema que diz que se duas pirâmides possuem mesma área da base e mesma altura, estão esta pirâmides possuem volumes iguais.

Como os tetraedros considerados preenchem completamente o prisma e não possuem pontos internos em comum, podemos concluir que a soma dos volumes de T_1, T_2 e T_3 representados, respectivamente, por V_1, V_2 e V_3, é igual ao volume (V_P) do prisma, ou seja, $V_P = V_1 + V_2 + V_3$.

Além disso, como os três tetraedros possuem mesmo volume, e o volume do prisma

(V_P) é igual ao produto de sua altura (H) por sua área da base (A_B), podemos reescrever:

$$V_P = 3V_1$$

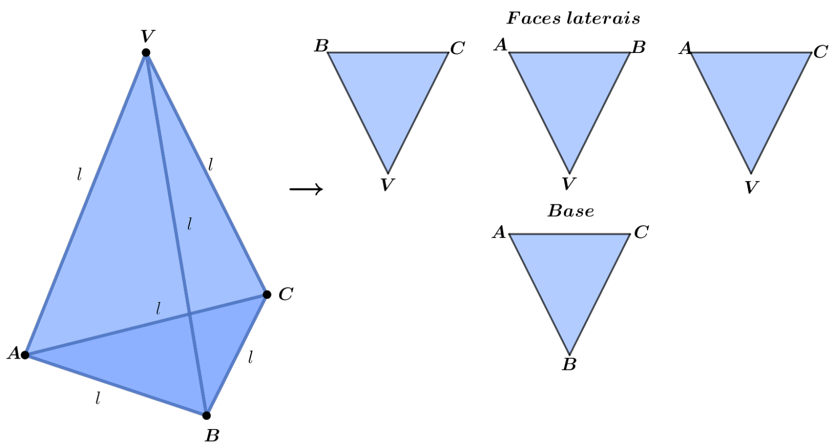
$$3V_1 = A_B H$$
$$V_1 = \frac{A_B H}{3}.$$

Note que a área da base do prisma coincide com a área da base do tetraedro T_1 e a altura do prisma coincide com a altura desse tetraedro $(H = h_1)$. Assim, podemos concluir que o volume de um tetraedro qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Dado um tetraedro regular de lado l, sua área (A) é dada por: $A = l^2\sqrt{3}$.

Consideremos um tetraedro regular de lado l.

Figura 3.17 – Área do tetraedro regular



Fonte: Arquivo pessoal.

Como podemos observar na figura 3.17, esse tetraedro é formado por 4 triângulos equiláteros congruentes de lado l e, portanto, a área desse sólido será igual a soma das área desses triângulos.

Da geometria plana, sabe-se que a área (A_T) de cada um desses triângulo equiláteros é: $A_T = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Assim, podemos concluir que a área do tetraedro regular será dada por:

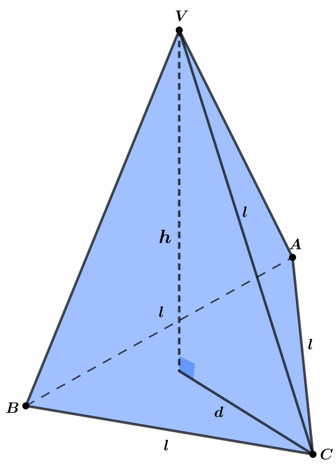
$$A = 4A_T$$

$$A = 4\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$A = l^2\sqrt{3}.$$

Dado um tetraedro regular de lado l, seu volume (V) é dado por: $V = \dfrac{l^3\sqrt{2}}{12}$.

Consideremos o tetraedro regular da figura 3.18.

Figura 3.18 – Tetraedro regular



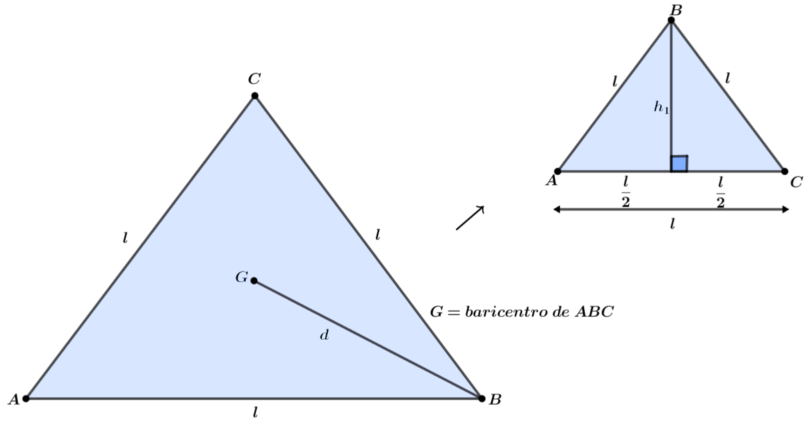
Fonte: Arquivo pessoal.

Sendo l a medida dos lados de ABC, a área desse triângulo, ou seja, a área da base do tetraedro (A_B) será:

$$A_B = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Agora observemos o triângulo base ABC.

Figura 3.19 – Altura do tetraedro regular



Fonte: Arquivo pessoal.

A altura (h_1) desse triângulo, será igual a:

$$h_1^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$h_1^2 = \left(\frac{l^2}{4}\right) - l^2$$

$$h_1 = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Já o ponto G é o baricentro do triângulo base, sendo que sua medida é igual a dois terços da medida da altura h_1, ou seja, $\overline{BG} = d = \frac{2}{3}h_1$. Logo,

$$d = \frac{2}{3}h_1$$

$$d = \frac{2}{3}\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$d = \frac{l\sqrt{3}}{3}.$$

Agora, podemos calcular a medida da altura h do tetaedro através do Teorema de Pitágoras:

$$h^2 + d^2 = l^2$$

$$h^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2 = l^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{3l^2}{9}$$

$$h^2 = \frac{9l^2 - 3l^2}{9}$$
$$h^2 = \frac{6l^2}{9}$$
$$h = \sqrt{\frac{6l^2}{9}}$$
$$h = \frac{l\sqrt{6}}{3}.$$

Como o volume de um tetraedro qualquer será igual a um terço do produto entre a altura e a área da base, temos que o volume (V) do tetraedro regular será igual a: $V = \dfrac{A_B h}{3}$.

Substituindo os valores encontrados para A_B e h, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l\sqrt{6}}{3}$$
$$V = \frac{l^3\sqrt{18}}{36}$$
$$V = \frac{3l^3\sqrt{2}}{36}$$
$$V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}.$$

3.2.3 Área e Volume da Pirâmide

A área de uma pirâmide será igual à soma das àrea das faces laterais e da base. Por exemplo, tomando uma pirâmide quadrangular, para calcular sua área soma-se as áreas do quadrado base e dos quatro triângulos que formam a lateral.

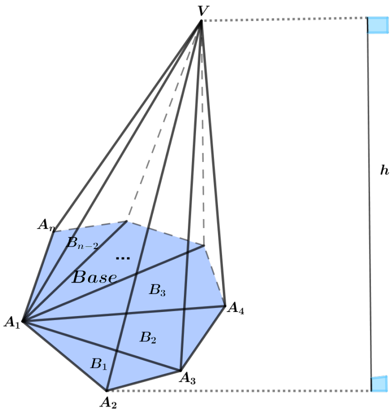
Como a àrea de uma pirâmide qualquer depende da base (a qual pode ser um polígono de $3, 4, 5, ..., n$ lados) e a das faces laterais (as quais podem ser $3, 4, 5, ..., n$ triângulos), não existe uma fórmula fixa para o cálculo da área desse sólido.

Porém, no caso especifico dos tetraedros regulares, por serem um tipo muito especial de pirâmide, é importante conhecer suas fórmulas de área e volume.

Uma pirâmide com altura h e área da base B possui volume $V = \dfrac{1}{3}Bh$.

Tomemos uma pirâmide de altura h e base formada por um polígono de n lados, cuja área representaremos por B, conforme representado na figura 3.20.

Figura 3.20 – Pirâmide



Fonte: Arquivo pessoal.

Esse polígono pode ser dividido em $(n-2)$ triângulos e, tomando como base cada um desses triângulos e o vértice V, podemos formar $(n-2)$ tetraedros.

Representemos a área de cada um desses triângulos por $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ e o volume de cada tetraedro por por $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$.

A soma dos volumes desses tetraedros será igual ao volume da própria pirâmide (V). Assim:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$$
$$V = \frac{1}{3}B_1h + \frac{1}{3}B_2h + \frac{1}{3}B_3h + ... + \frac{1}{3}B_nh$$
$$V = \frac{1}{3}h(B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n).$$

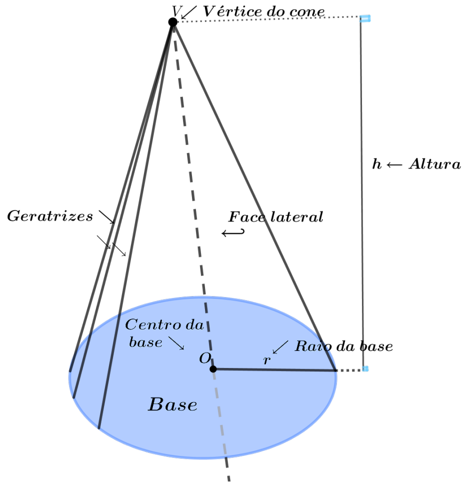
Como a soma das áreas de todos os triângulos é igual à área da base da pirâmide, podemos concluir que, o volume de uma pirâmide qualquer é $V = \dfrac{1}{3}Bh$.

3.2.4 Cone: Definição, Elementos e Classificação

Definição 4 *Consideremos um círculo de centro O e raio r num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se cone circular ou simplesmente cone à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e outra nos pontos do círculo.*

Como indicado na figura 3.21, os principais elementos de um cone são:

Figura 3.21 – Elementos do cone



Fonte: Arquivo pessoal.

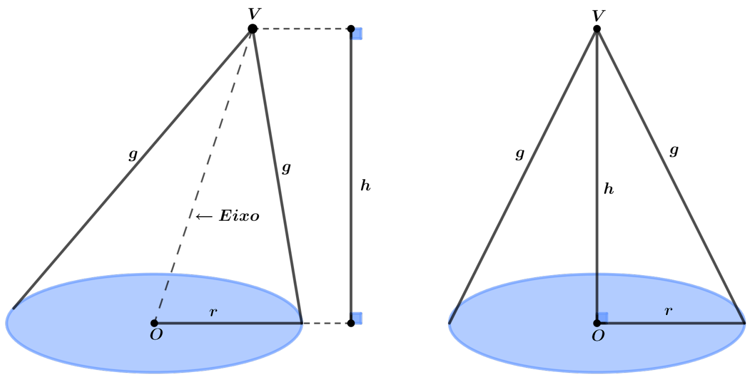
Vértice- é o ponto V;
Base- círculo de centro O e raio r;
Eixo- é a reta que passa pelo vértice do cone e pelo centro da base
Altura- é a distância h entre o vértice e a base;
Geratrizes- são os segmentos com extremidades no vértice e nos pontos da circunferência da base.

O cone pode ser classificado em cone reto e oblíquo, dependendo da posição do segmento com extremidades no vértice e no centro da base ($\overline{VO}$) em relação ao plano da base:

Cone reto - O segmento $\overline{VO}$ é perpendicular ao plano da base do cone;
Cone oblíquo- O segmento $\overline{VO}$ é oblíquo ao plano da base.

Nos cones oblíquos, se verifica a sequinte relação entre o raio, a altura e a geratriz: $r^2 + h^2 = g^2$.

Figura 3.22 – Cone reto e Cone oblíquo

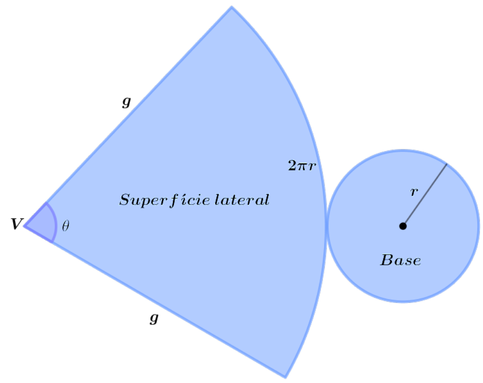


Fonte: Arquivo pessoal.

3.2.5 Área e Volume do Cone

A área de um cone qualquer de raio r, geratriz g e altura h é dada por: $A = \pi r(r+g)$. Consideremos um cone circular reto de altura h, raio r, geratriz g e ângulo do vértice θ, cuja planificação está representada na figura 3.23.

Figura 3.23 – Planificação do cone reto



Fonte: Arquivo pessoal.

A área da base (A_B) será a área do círculo da base: $A_b = \pi r^2$.

A planificação da superfície lateral desse cone é um setor de ângulo θ de um círculo cujo raio é g, sendo seu comprimento igual a $2\pi r$. Além disso, o comprimento total do círculo esta para a área total, assim como o comprimento do arco esta para a área do setor:

$$\frac{2\pi g}{\pi g^2} = \frac{2\pi r}{A_l}$$

$$(2\pi g)A_l = (\pi g^2)(2\pi r)$$

$$A_l = \pi r g.$$

Logo, a área total (A) será:

$$A = A_l + A_b$$

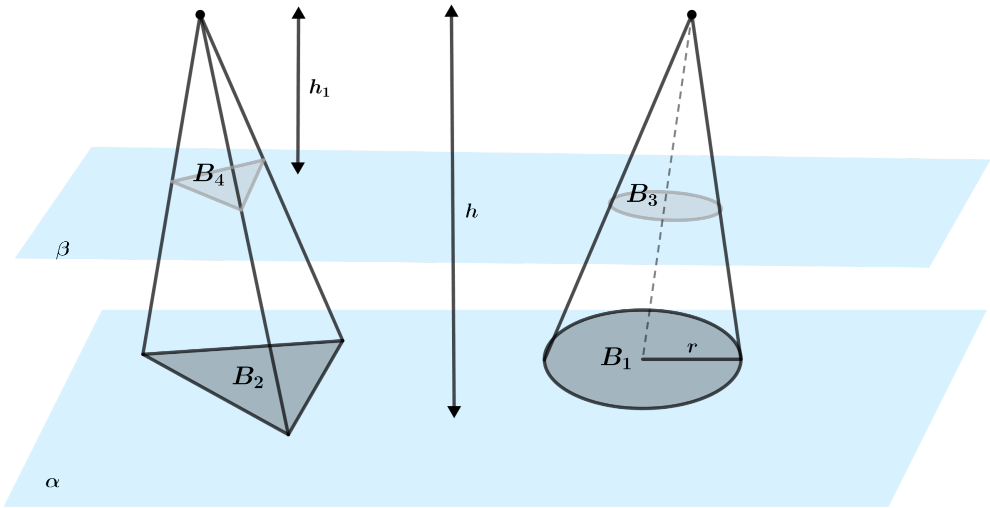
$$A = \pi r g + \pi r^2.$$

Portanto, a área de um cone qualquer de raio r é dada por: $A = \pi r(r+g)$.

O volume de um cone qualquer de raio r e altura h é dada por: $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

Suponhemos dois sólidos, um cone e um tetraedro, ambos com base em um plano α, mesma altura h, mesma medida da área da base e situados em um mesmo semi espaço dos determinados por α, como representado na figura 3.24.

Figura 3.24 – Volume do Cone



Fonte: Arquivo pessoal.

Tomando um plano β, paralelo à α, distante h_1 dos vértices do cone e do tetraedro. Esse plano seccionará ambos os sólidos.

Representemos as àreas das secções do plano β no cone e no tetraedro por, respectivamente, B_3 e B_4, temos: $\dfrac{B_3}{B_1} = \left(\dfrac{h_1}{h}\right)^2$ e $\dfrac{B_4}{B_2} = \left(\dfrac{h_1}{h}\right)^2$. Ou seja,

$$\frac{B_3}{B_1} = \frac{B_4}{B_2}.$$

Como, por hipótese, $B_1 = B_2$, podemos concluir que $B_3 = B_4$ e como as áreas das secções são iguais, pelo princípio de Cavalieri, os dois sólidos tem mesmo volume, ou seja, o volume do cone (V) é igual ao volume do tetraedro (V_T):

$$V = V_T$$

$$V = \frac{1}{3}B_2 h$$

$$V = \frac{1}{3}B_1 h.$$

Logo, o volume de um cone de raio r e altura h, é dado por:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

3.3 ESFERA

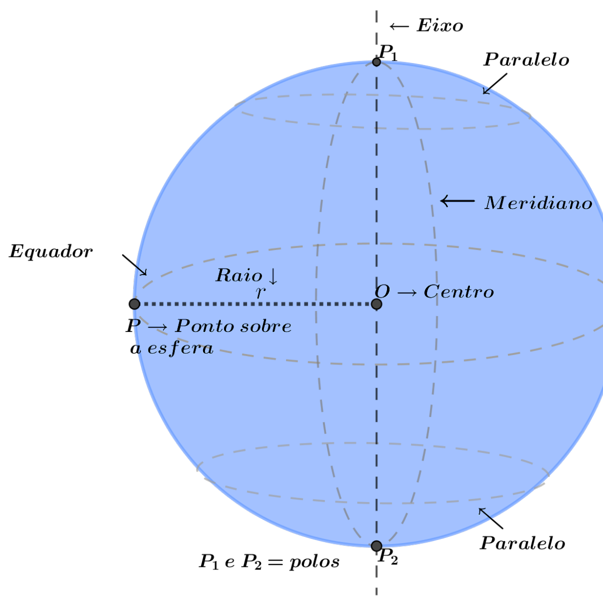
Os diversos tipos de bola (de futebol, de praia, de volei) e os planetas, incluindo a terra, são exemplos de objetos com formato semelhante à esfera.

3.3.1 Definição e Elementos

Definição 5 *Considere um ponto O do espaço e um segmento de medida (não nula) r. Chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto de pontos P do espaço tais que a distâncias $\overline{OP}$ seja menor ou igual a r.*

Se a distância d em relação a O de um ponto do espaço é menor que r, esse ponto está no interior da esfera; se essa distâcia for maior que r, esse ponto não pertence a esfera, estando localizado em seu exterior e, por último, se essa distância for igual a r então esse ponto está sobre ou pertence a superfície dessa esfera.

Figura 3.25 – Elementos da esfera



Fonte: Arquivo pessoal.

Conforme a figura 3.25, a esfera possui os seguintes elementos:

Polos- são os pontos extremos de um diâmetro;

Eixo- é a reta que passa pelos polos;

Equador- é o círculo que contém o centro da esfera e cujo plano é perpendicular ao eixo;

Paralelo- é qualquer círculo cujo plano é paralelo ao plano do equador;

Meridiano- é o circulo cujo plano contém o eixo.

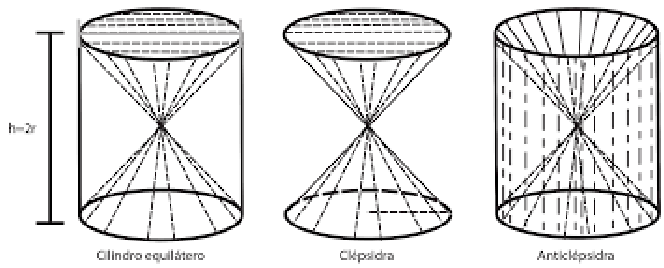
3.3.2 Volume da Esfera

O volume de uma esfera de raio R é dado por: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Tomemos um cilindro de raio R e altura H igual ao dobro do raio ($H = 2R$) e seja S o ponto médio do eixo desse cilindro. Consideremos dois cones no interior desse cilindro, tendo as bases sobre as do cilindro e sendo S o vértice comum.

A reunião desses dois cones é um sólido chamado clépsidra. A anticlépsidra é o nome do sólido que esta no interior do cilindro e fora dos cones, como indicado na figura 3.26.

Figura 3.26 – Clépsidra e Anticlépsidra



Fonte: cejarj.cecierj.edu.br.

O volume (V_x) da anticlépsidra será igual ao volume do cilindro menos o volume dos dois cones. O volume de cada cone é igual à um terço do produto da área da base (no caso, a área do círculo da base) pela altura (a altura do cone será metade da altura do cilindro, ou seja, será igual à R). Assim, temos:

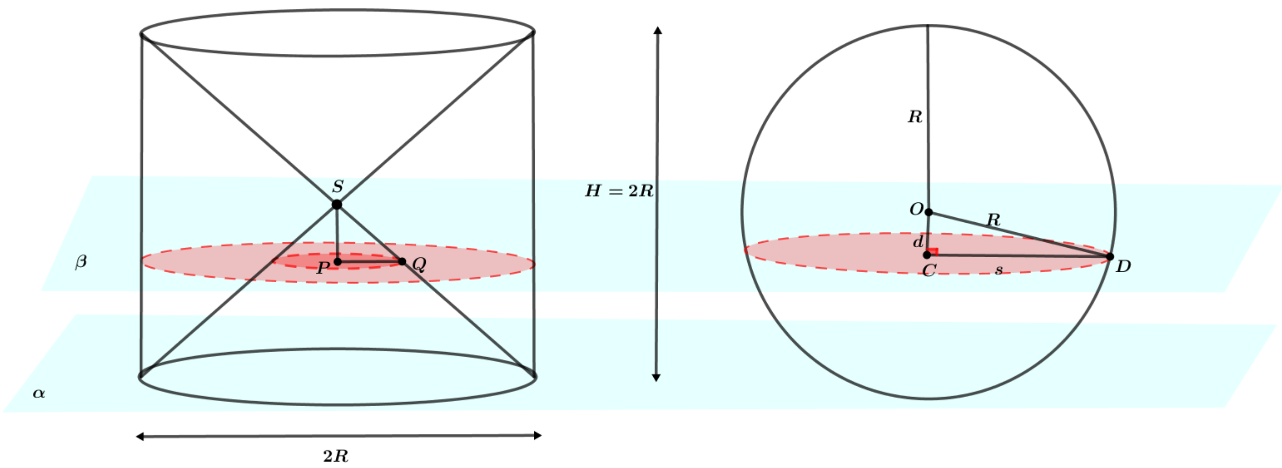
$$V_x = (\pi R^2)H - 2\left(\frac{\pi R^2 \cdot R}{3}\right)$$
$$V_x = \pi R^2(2R) - \frac{2\pi R^3}{3}$$
$$V_x = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3}$$
$$V_x = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3}$$
$$V_x = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Agora consideremos a anticlépsidra acima e uma esfera de raio R.

Suponhemos que a esfera seja tangente a um plano α e que o cilindro (que originou a antclépsidra considerada) tenha base em α e que os dois sólidos estejam situados em um mesmo semi espaço dos determinados por α.

Seja β um plano qualquer, paralelo à α e distânte d do centro da esfera e do vértice da anticlépsidra. Esse plano intercepta os dois sólidos, como representado pela figura 3.27.

Figura 3.27 – Volume da esfera

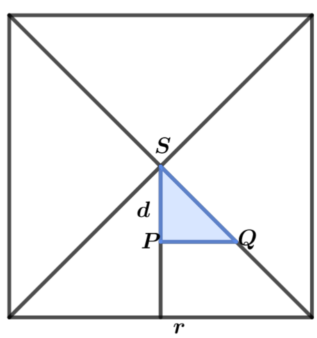


Fonte: Arquivo pessoal.

A secção determinada na esfera é uma circunferência de raio s. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OCD, obtemos a relação: $d^2 + s^2 = R^2$.

Já a secção determinada na anticlépsidra é uma coroa circular. Para calcular sua área, basta calcular a área do círculo maior (de raio R) e subtrair pela área do círculo menor.

Figura 3.28 – Triângulo SPQ

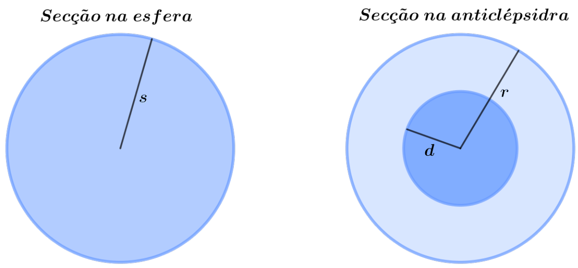


Fonte: Arquivo pessoal.

Analisando a figura 3.28, podemos concluir que o triângulo SPQ é isósceles de base $\overline{SQ}$, o que implica, $\overline{SP} = \overline{PQ} = d$. Ou seja, o raio do círculo menor é igual a medida d.

A figura 3.29 representa a secção determinada pelo plano β na esfera e na anticlépsidra (a coroa circular em azul claro).

Figura 3.29 – Área das secções



A área dessas secções será:
Área da secção na esfera (círculo): $\pi s^2 = \pi(R^2 - d^2)$.
Área da secção na anticlépsidra (coroa circular): $\pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2)$.

Fonte: Arquivo pessoal.

Como as áreas das secções são iguais, pelo princípio de Cavalieri, os volumes da esfera e da anticlépsidra são iguais, ou seja:

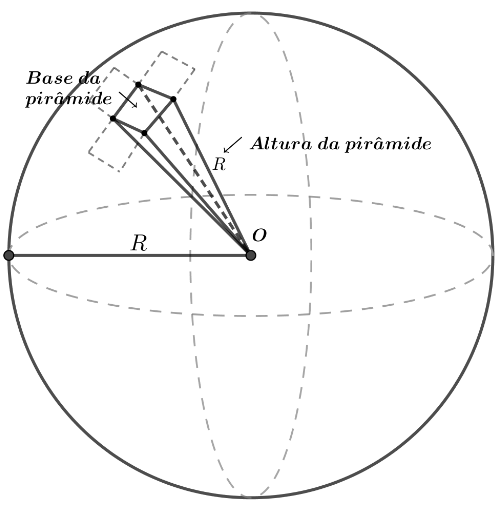
$$V = V_x$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

3.3.3 Área da Esfera

A área de uma esfera de raio R é dada por: $A = 4\pi R^2$.

Tomemos uma esfera de centro O e raio R.

Figura 3.30 – Area da esfera



Consideremos, sobre a superfície dessa esfera, n quadriláteros, como representado na figura 3.30. Tomando como vértice o centro O e como base cada um dos n quadriláteros, formam-se n pirâmides que, juntas, preenchem todo o interior da esfera.

Fonte: Arquivo pessoal.

O volume de cada pirâmide será igual à um terço do produto da altura (no caso, a altura será igual ao próprio raio da esfera) pela área da base, denotada por $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$.

A soma do volume de cada uma dessas n pirâmides, denotado por $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$, será igual ao volume (V) da esfera: $V = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$.

Sabendo que o volume de uma esfera de raio R é dado por $\frac{4}{3}\pi R^3$, temos o que segue:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}A_1 R + \frac{1}{3}A_2 R + \frac{1}{3}A_3 R + ... + \frac{1}{3}A_n R$$
$$\frac{1}{3}R(4\pi R^2) = \frac{1}{3}R(A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n)$$
$$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n = 4\pi R^2$$
$$A = 4\pi R^2.$$

Logo, a área de uma esfera de raio R é dada pela expressão: $A = 4\pi R^2$.

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo será discutido o que é uma sequência didática (SD), bem como são apresentadas as três sequências propostas.

4.1 O QUE É SEQUÊNCIA DIDÁTICA?

Antes de apresentar as sequências, é necessário apresentar a definição de sequência didática, bem como quais as suas características e vantagens.

Segundo Peretti e Tonin:

> A sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. (PERETTI LISIANE; TONIN, 2013, p. 6)

Assim, pode-se dizer que a sequência didática é um planejamento. Assim como num plano de aula, existem os conteúdos a serem ensinados, os objetivos a serem alcançados a cada etapa, a metodologia e os recursos necessários. A principal diferença está no fato de que a sequência é um planejamento mais amplo, um roteiro, com o auxílio do qual o professor, fazendo uso de uma metodologia, apresenta conteúdos e atividades, guiando o processo educativo a longo prazo.

Para a elaboração de uma sequência didática é necessário:

> [...] efetuar um levantamento prévio dos conhecimentos dos alunos e, a partir desses, planejar uma variedade de aulas com desafios e/ou problemas diferenciados, jogos, análise e reflexão. Aos poucos, faz-se necessário aumentar a complexidade dos desafios e orientações permitindo um aprofundamento do tema proposto. (PERETTI LISIANE; TONIN, 2013, p. 6)

Assim, a criação de uma sequência didática exige, por parte do professor, conhecimento prévio da turma, de modo a elaborar atividades adequadas levando em consideração o grau de conhecimento geral do público alvo acerca do tópico abordado. Tais atividades não devem ser nem muito aquém do conhecimento dos alunos nem muito fáceis, respeitando o nível dos alunos e possibilitando um aprendizado satisfatório.

Embora no começo o professor deva ter um esboço da sequência, a mesma pode e deve ser adaptada à turma, levando em consideração a aceitação e evolução dos discentes ao longo das aulas e durante as atividades.

Em relação às vantagens desse instrumento metodológico, podemos citar: a possibilidade de potencializar o trabalho com a interdisciplinaridade e a modelagem uma vez que, como há mais tempo, torna-se viável trabalhar várias metodologias de forma integrada; experimentação de novas metodologias, técnicas e abordagens de ensino para um conteúdo específico, além de possibilitar uma avaliação mais conscisa do processo de ensino apendizagem, através da observação dos avanços, retrocessos, facilidades e dificuldades encontradas ao longo do processo.

4.2 PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

A seguir são apresentadas as SDs. Antes, porém, serão feitas algumas considerações. Primeiramente, foram escolhidos os principais conteúdos referente à geometria espacial, excluindo-se o estudo de troncos (de pirâmide, prisma e cone) e inscrição e circunscrição de sólidos. Vale destacar que as fórmulas estudadas não se aplicam a sólidos irregulares. Para esse tipo de sólido, é necessário o uso de outros artifícios, como por exemplo, as fórmulas de área e volume de Pappus Guldin.

Na resolução de problemas de geometria espacial, é fundamental a interpretação e visualização geométrica dos dados que a questão apresenta. Nesses problemas, um bom desenho é imprescindível, pois, através dos mesmos, torna-se possível analisar a situação geométrica e, a partir daí, com base nos conhecimentos de geometria espacial, traçar possíveis caminhos para a resolução do problema. Tendo em vista a importância do desenho, é importante incentivar nos alunos essa habilidade. Para tal, recomenda-se que durante a resolução de questões, o professor sempre faça um esboço da situação, bem como incentivar os alunos a fazer o mesmo, de modo a treinar essa habilidade. O docente também pode falar um pouco sobre a representação de figuras 3D no espaço 2D (desenhos de sólidos geométricos no papel), abordando de que forma essa representação se dá e técnicas de desenhos. O uso de régua e compasso é recomendado, mas não é absolutamente necessário.

4.2.1 1° Sequência didática

Esta primeira sequência didática aborda os conteúdos Prismas e Cilindros e é composta por seis aulas de 45 minutos cada, estando divididas em cinco atividades, que serão apresentadas a seguir.

Atividade 1

Conteúdo: Introdução à Geometria Espacial.

Objetivos:
- Apresentar os objetos de estudo da geometria espacial, destacando algumas aplicações dessa geometria;
- Expor a classificação dos sólidos geométricos em poliedros e corpos redondos, bem como os elementos de um poliedro;
- Conceituar a área e o volume de um sólido.

Duração: 1 aula (45 minutos).

Recursos necessários: Data show, projetor multimídea e material concreto.

Metodologia:

Nos quinze minutos iniciais, o professor irá fazer uma breve introdução em que explicará o que é a geometria espacial, destacando quais os objetos de estudo dessa ciência e sua diferença em relação à geometria plana, além de algumas aplicações.

Em seguida, será apresentada a classificação dos sólidos geométricos em poliedros e corpos redondos, dando seguimento com a exposição da definição de sólidos geométricos, após isso, serão citados exemplos de objetos com formato de sólidos geométricos.

Para melhor exemplificar, o professor poderá desenhar alguns sólidos no quadro e/ou objetos. Recomenda-se que o professor prepare um material a parte, como por exemplo, slides com imagens dos sólidos geométricos, contendo fotos e gravuras de objetos, construções e seres naturais que possuam formas geométricas. Caso a escola possua material concreto, como sólidos de madeira, vidro ou um geoplano, é sobremodo recomendado a utilização durante as aulas.

Posteriormente, o professor apresentará a classificação dos sólidos: poliedros e corpos redondos. Com o auxílio dos slides (ou de desenhos no quadro), o professor fará a seguinte pergunta aos alunos: Com base na definição dada, quais dos sólidos apresentados são poliedros e quais são corpos redondos? Após os alunos realizarem as classificações, serão feitas as devidas considerações.

Em seguida, serão apresentados os conceitos de área e de volume de um sólido, destacando as principais medidas utilizadas no cálculo dessa grandeza. Faz-se interessante relacionar os conceitos de volume com a capacidade de um determinado recipiente. Após esse momento, serão apresentados os principais elementos de um poliedro.

Por fim, o docente poderá fazer os seguintes questionamentos: Os corpos redondos possuem os mesmos elementos? Quais são os elementos compartilhados entre eles? Quais os elementos que apenas os poliedros possuem e quais os elementos que apenas os corpos redondos possuem?.

Nessa primeira aula, o professor pode recomendar aos alunos alguns softwares de geometria espacial, os quais podem ser utilizados como ferramenta de apoio pedagógico; são sugeridos o Geogebra e o Poly. Caso a escola possua um laboratório de informática, é interessante haver a realização de atividades com o auxílio desses softwares; ademais, caso o professor tenha disponibilidade, poderia ministrar aulas a parte para o ensino da manipulação de um desses softwares.

Esses softwares serão utilizados apenas na primeira e última aula, uma vez que o enfoque deste trabalho são as demonstrações e não a utilização de recursos tecnológicos. Porém, é recomendável que o docente aconselhe os alunos a fazerem download de um dos softwares apresentados no computador, mas, caso não possuam computador, propor que baixem aplicativos no celular. Utilizando esses aplicativos e softwares, o discente poderá, sempre que necessário, visualizar a situação geométrica que a questão apresenta e comparar a resposta calculada com a resposta correta.

Avaliação: A avaliação se dará através da observação, pelo docente, da interação e participação dos alunos durante a aula, bem como através da realização dos exercícios propostos.

Atividade 2

Conteúdo: Prismas e princípio de Cavalieri.

Objetivos:
- Reconhecer a definição matemática de prisma, seus elementos e as diferentes classificações;
- Apresentar o princípio de Cavalieri.

Duração: 1 aula (45 minutos).

Recursos necessários: Data show e projetor multimídia, computadores e internet Wi-fi.

Metodologia:

Inicialmente será apresentada a definição formal de prisma, seguido de exemplos de objetos encontrados no cotidiano que tenham a forma desse sólido. Posteriormente, serão apresentados os elementos do prisma e suas classificações; serão trabalhadas três classificações: a classificação quanto ao número de lados do polígono da base; prisma reto e oblíquo; prisma regular e irregular.

É interessante que o professor traga algumas planificações, de modo a treinar a visualização geométrica dos alunos. Para gerar reflexões, o professor poderá fazer alguns questionamentos, como por exemplo: As bases de todos os prismas são necessariamente iguais? Se considerarmos um polígono côncavo na definição, o sólido obtido ainda será um prisma?.

Logo depois, será apresentado o princípio de Cavalieri. É importante frisar que tal princípio possui demonstração, mas por essa demonstração ser complicada e extensa, não será apresentada. Como forma de facilitar a visualização do princípio de Cavalieri, sugere-se a utilização de uma construção no GeoGebra.

Na segunda parte da aula, será trabalhado o tópico de diagonais do prisma. Para isso, após revisar os conceitos de diagonal de face e diagonal de poliedro, o professor pode pedir que os alunos, individualmente ou em grupos, determinem o número das diagonais de certos prismas (triangular, quadrangular, pentagonal e hexagonal) e, após apresentar o raciocínio, desafiar os alunos a encontrar a expressão que permita calcular o número de diagonais de um prisma qualquer.

Avaliação: A avaliação se dará através da observação, pelo docente, da interação e participação dos alunos durante a aula.

Atividade 3

Conteúdo: Cubo e Paralelepípedo.

Objetivo:

- Estudar o cubo e o paralelepípedo através do estudo da diagonal, da área e do volume desses prismas.

Duração: 1 aula (45 minutos).

Recursos necessários: Quadro branco, Lápis pincel e apagador.

Metodologia:

Primeiramente, serão apresentados o paralelepípedo e o cubo, destacando os seus elementos. Nesse momento podem ser utilizados slides e/ou construções do GeoGebra; caso não seja possível, o docente poderá fazer desenhos no quadro e/ou utilizar material concreto (como o Geoplano).

Após explicar que o paralelepípedo é formado por seis retângulos e o cubo por seis quadrados, o docente questionará os alunos acerca de como calcular a área desses sólidos. Será proposto, como exercício, o cálculo da área desses sólidos por parte dos alunos. Caso necessário, devem ser revisadas as fórmulas de área de retângulo e quadrado.

Da mesma forma, serão apresentadas e verificadas as fórmulas da medida da diagonal do cubo e do paralelepípedo. Caso necessário, o professor poderá revisar os conceitos de diagonal de face e diagonal de um poliedro.

Em seguida, sugere-se que o docente, com o auxílio de um desenho no quadro ou de um material impresso, demonstre a diagonal do cubo; como exercício extraclasse, recomenda-se que o docente peça que os alunos, utilizando o mesmo processo, determinem a medida da diagonal do paralelepípedo em função das suas dimensões.

Posteriormente, serão trabalhadas as fórmulas de volume. Para isso, a fórmula do volume do paralelepípedo será apresentada e aceita sem demonstração. O professor pode, então, questionar aos alunos o porquê da fórmula do volume do cubo ser igual ao cubo da medida de sua aresta. Os alunos também podem ser desafiados a justificar, sabendo como se calcula o volume do cubo, porque o volume do paralelepípedo é dado pelo produto de suas dimensões.

Avaliação: A avaliação se dará através da observação, pelo docente, da interação e participação dos alunos durante a aula.

Atividade 4

Conteúdo: Área e Volume do prisma.

Objetivo:

- Compreender os processos de demonstração das fórmulas de área e volume do prisma.

Duração: 1 aula (45 minutos).

Recursos necessários: Quadro branco, lápis pincel, apagador e planificações de prismas.

Metodologia:

Após retomar os conceitos de área e volume de sólidos geométricos e tomando como verdade a fórmula do volume do paralelepípedo estudada na aula passada, será demonstrada a fórmula do volume do prisma.

Utilizando o princípio de Cavalieri e através da comparação entre um prisma reto cuja base é um polígono de n lados e um paralelepípedo retângulo que possuam mesma altura e mesma área da base, demonstrar-se-á a fórmula do cálculo do volume do prisma. Nesse momento, poderão ser feitos os seguintes questionamentos: Essa fórmula serve para todos os tipos de prismas? Esta fórmula também se aplica para prismas oblíquos? Por quê?.

No segundo momento da aula, será estudado a área do prisma. Recomenda-se que o discente traga a planificação de alguns prismas para a aula. Uma vez familiarizados com as planificações, o docente, então, perguntará aos alunos qual seria uma forma de calcular a área dos prismas.

Feita as devidas considerações, o docente argumentará que não existe uma fórmula geral que determine a área de qualquer prisma, uma vez que tal variável depende do tipo de polígono da base que determinará a quantidade e o tipo de polígonos que comporão as faces.

Avaliação: A avaliação se dará através da observação, pelo docente, da interação e participação dos alunos durante a aula.

Atividade 5

Conteúdo: Cilindro.

Objetivos:
- Reconhecer a definição matemática de cilindro, bem como seus principais elementos e classificações;
- Compreender os processos de demonstração das fórmulas de área e volume.

Duração: 1 aula (45 minutos).

Recursos necessários: Quadro branco, lápis pincel, apagador e planificação do cilindro.

Metodologia:

Primeiramente, após apresentar a definição de cilindro, fazer um esboço no quadro (ou até mesmo fazer uma construção no GeoGebra) e indicar os nomes dos elementos do cilindro, o professor perguntará aos alunos quais são cada um desses elementos e como se dá a classificação de um cilindro em reto ou oblíquo.

O professor desenhará no quadro um cilindro circular reto qualquer de altura h e raio r e, ao lado, a sua planificação. Em seguida, proporá como exercício aos alunos que determinem a expressão da área desse cilindro (no caso, os alunos devem perceber que a área total é dada pela soma das áreas laterais, que é formada por um retângulo, e das bases, que são círculos). Nesse momento, o docente pode perguntar se o mesmo procedimento poderia ser utilizado para um cilindro oblíquo e o porquê. Também pode ser questionado o porquê do cilindro não poder ser considerado um prisma, uma vez que possui duas bases congruentes.

Na segunda parte da aula, será trabalhada a fórmula do volume. Como o processo é semelhante ao de outras demonstrações trabalhadas, sugere-se que sob a orientação do professor, os alunos tentem demonstrar a fórmula do volume. Uma vez concluído o exercício e feitas as devidas considerações, o professor fará os seguintes questionamentos: A fórmula encontrada serve para todo tipo de cilindro? Por quê? Todo cilindro possui como bases círculos? Círculo e forma circular são a mesma coisa?

Ao final da aula, como atividade extraclasse, recomenda-se que o professor indique algumas questões.

Avaliação: A avaliação se dará através da observação, pelo docente, da interação e participação dos alunos durante a aula, como também através da realização dos exercícios extraclasse.

4.2.2 2° Sequência didática

A segunda sequência didática é composta por cinco aulas, estando dividida através de quatro atividades.

Atividade 1

Conteúdo: Pirâmide e Cone.

Objetivo:

- Reconhecer as definições matemáticas de pirâmide e do cone, bem como seus principais elementos e suas classificações.

Duração: 1 aula (45 minutos).

Recursos necessários: Quadro branco, lápis pincel, apagador e material concreto.

Metodologia:

Primeiramente, será apresentada a definição formal de pirâmide, seguida de seus elementos. Em seguida, serão apresentadas as três classificações de pirâmide: a classificação referente ao número de lados do polígono da base, pirâmides retas e oblíquas e por último, pirâmides regular e irregular.

Posteriormente, ao contrário de apresentar a definição do cone, o professor fará um desenho desse sólido geométrico no quadro, destacando seus principais elementos e pedirá que os alunos, com base nas definições vistas anteriormente, opinem sobre quais objetos geométricos são utilizados na sua definição (círculo da base, ponto, planos). Em seguida será apresentada a definição formal de cone.

Logo depois, o professor desenhará dois cones, um reto e oblíquo; com base nos desenhos e nos conhecimentos adquiridos nas aulas passadas, os alunos deverão determinar como se dá a classificação de um cone em reto ou oblíquo. Nessa aula, recomenda-se a utilização de material concreto (como, por exemplo, o Geoplano), ou construções no GeoGebra, de modo a facilitar a visualização de tais objetos tridimensionais por parte dos discentes.

De modo a gerar debates e reflexões, sugere-se que o docente faça os seguintes questionamentos: Uma pirâmide pode ser irregular e reta? Toda pirâmide oblíqua é irregular? Pirâmides regulares e irregulares possuem os mesmos elementos? De acordo com as definições apresentadas, por que um cone não pode ser considerado uma pirâmide, já que também possui uma base e um vértice? Apenas pirâmides regulares tem apótema? dentre outros.

Avaliação: A avaliação se dará através da observação, pelo docente, da interação e participação dos alunos durante a aula.

Atividade 2

Conteúdo: Área da Pirâmide e do Cone.

Objetivo:

- Compreender os processos de demonstração das fórmulas da área da pirâmide e do cone.

Duração: 2 aulas (1 hora e 30 minutos).

Recursos necessários: Atividades impressas em papel A4, folha, caneta, lápis e borracha.

Metodologia:

Inicialmente, sugere-se que seja feita uma rápida revisão dos elementos da pirâmide e do cone. A seguir, para trabalhar a fórmula da área do cone e o processo para o cálculo da área de uma pirâmide, será feita uma atividade de modelagem (apêndices A e B).

Na primeira atividade (apêndice A), os alunos, divididos em três grupos, deverão calcular as áreas da pirâmide triangular, quadrangular, e hexagonal (cada grupo ficará responsável por calcular a área de uma dessas pirâmides). Caso seja necessário, o docente fará a revisão acerca da área das figuras planas que constituem as bases; ao final dessa parte, o professor destacará que não existe uma fórmula para cálculo da área de qualquer pirâmide, uma vez que esta área dependerá do tipo do polígono da base, tal qual ocorre com os prismas. Ao cabo da resolução desta atividade, o professor deverá destacar que a área de uma pirâmide depende do polígono da base, de modo que não é possível determinar uma fórmula única para o cálculo da área de uma pirâmide qualquer.

Na segunda atividade (apêndice B), será trabalhada a área do cone. Na realização dessa atividade de modelagem, indica-se que sejam seguidos os seguintes passos:

- Dividir os alunos em grupos com três, quatro ou cinco integrantes;
- Cada grupo, munido da planificação da atividade impressa, deverá tentar encontrar a fórmula da área do cone;
- O professor deverá atuar como um mediador do processo. Quando todos os grupos finalizarem a atividade dar-se-á uma discussão na qual cada grupo debaterá acerca do raciocínio utilizado para a obtenção das respostas e dos desafios encontrados.

Ao final da aula, depois de feitas as devidas considerações e sanadas as possíveis duvidas, o professor poderá passar uma lista de exercícios, objetivando a fixação e conceitos das fórmulas recém estudadas.

Avaliação: A avaliação se dará através da observação, pelo docente, da interação e participação dos alunos durante a aula, bem como da realização das atividades propostas.

Atividade 3

Conteúdo: Tetraedro regular.

Objetivo:
- Estudar o tetraedro regular.

Duração: 1 aula (45 minutos).

Recursos necessários: Quadro branco, lápis pincel, apagador, planificação do tetraedro e construção do GeoGebra.

Metodologia:

Nos primeiros cinco minutos, o professor apresentará o tetraedro e em seguida o tetraedro regular, destacando que este é um tipo especial de tetraedro cujas faces são triângulos equiláteros congruentes. Após revisar a fórmula de cálculo da área de um triangulo equilátero, justificar-se-á a formula da área do tetraedro regular. Também recomenda-se que seja utilizada a planificação do tetraedro.

Logo depois, será apresentada e provada a fórmula do volume. Para isso, o professor poderá argumentar que tomando um prisma regular triangular e um tetraedro, ambos com mesma altura e área da base, três desses tetraedros cabem nesse prisma, o que justifica a fórmula apresentada (o volume total do tetraedro é um terço do volume do prisma triangular, ou seja, um terço do produto da área da base e da altura). Para ilustrar tal fato, deve ser apresentada uma imagem (como as das figuras 14, 15 e 16), ou até mesmo utilizar material concreto e/ou uma construção no GeoGebra 3D.

Como exercício extraclasse, propõe-se que os alunos considerem que o volume de uma pirâmide é um terço do produto da altura pela área da base e demonstrem a fórmula do volume do tetraedro regular.

Avaliação: A avaliação se dará através da observação, pelo docente, da interação e participação dos alunos durante a aula, bem como da realização das atividades extraclasse.

Atividade 4

Conteúdo: Volume da Pirâmide e do Cone.

Objetivo:
- Compreender os processos de demonstração das fórmulas de volume da pirâmide e do cone.

Duração: 1 aula (45 minutos).

Recursos necessários: Quadro branco, lápis pincel e apagador.

Metodologia:

Para começar a aula, serão apresentadas as fórmulas do volume da pirâmide e do cone. Para provar a fórmula do volume da pirâmide, toma-se uma pirâmide qualquer cuja base é um polígono de n lados e divide-se essa pirâmide em (n-2) tetraedros; uma vez que já foi determinada a fórmula do volume de um tetraedro, basta somar os volumes desses (n-2) tetraedros. Após apresentar esse raciocínio e fazer um esboço no quadro, o professor pedirá que os alunos tentem fazer a demonstração sozinhos.

Para a demonstração da fórmula do volume do cone, sendo o processo semelhante a outras demonstrações já trabalhadas, sugere-se que também fique como atividade para os alunos. Para isso, primeiramente, o docente deverá revisar o princípio de Cavalieri e, em seguida, explicar o passo a passo da demonstração do volume.

Ao final da aula, de modo a aplicar e fixar as fórmulas recém estudadas, recomenda-se a resolução de algumas questões. Como exercício extraclasse, podem ser selecionadas uma série de questões mais difíceis, com o objetivo de desafiar os alunos.

Avaliação: A avaliação se dará através da observação, pelo docente, da interação e participação dos alunos durante a aula, bem como da realização das atividades extraclasse.

4.2.3 3° Sequência didática

Esta sequência, composta por cinco aulas de 45 minutos cada, está dividida em duas atividades; a primeira atividade é composta por três aulas e a segunda atividade por duas aulas.

Atividade 1

Conteúdo: Definição e elementos da Esfera.

Objetivo:

- Reconhecer a definição matemática de esfera, bem como seus elementos.

Duração: 3 aulas (2 horas e 15 minutos).

Recursos necessários: Quadro branco, lápis pincel, apagador, Globo terrestre e atividade impressa em papel A4.

Metodologia:

Iniciando com o objetivo de gerar debates, no início da aula será feito o seguinte questionamento aos alunos: O que vocês (alunos) entendem por esfera? Após ouvir as respostas, o docente pedirá que os alunos tentem descrever uma esfera. Posterior aos alunos responderem e serem feitas as devidas considerações, será apresentada a definição formal de esfera. O docente também poderia interacionar a esfera com a circunferência e o círculo, destacando, por exemplo, que a esfera é obtida através da rotação de um círculo ao redor de seu diâmetro, o que faz com que a esfera seja considerada um sólido de revolução.

Em seguida, o professor desenhará um esboço da esfera no quadro e a partir desse desenho apresentará os principais elementos da esfera. Para exemplificar, sugere-se citar exemplos de objetos esféricos, trazer alguns objetos para a sala de aula ou até mesmo utilizar material concreto.

O globo terrestre possui sua forma semelhante a uma esfera, de modo que linhas imaginárias (meridianos e linha do equador), fuso horário, localização de pontos sobre o globo (latitude e longitude) são exemplos de conteúdos geográficos que poderiam ser estudados numa aula interdisciplinar (entre Geografia e Matemática) envolvendo o estudo de esferas. Desse modo, estimula-se que seja trabalhada uma atividade interdisciplinar, a qual consta no apêndice C. Para se trabalhar tal atividade, recomenda-se o seguinte passo a passo:

- Com o auxílio do globo terrestre e do desenho no quadro, o professor de Matemática apresentará os elementos da esfera, tais como polo, meridiano, centro e paralelos;
- Com o auxílio dos conceitos matemáticos recém-explicados, o professor de Geografia fará uma breve revisão do conteúdo específico já trabalhado;
- Após essa explicação, divididos em grupos de 4 a 5 integrantes, os discentes farão uma atividade com questões envolvendo os conteúdos matemático e geográfico de forma interligada.

Como o conteúdo geográfico é mais extenso, sugere-se que após a aula introdutória, o professor de geografia trabalhe os conteúdos específicos em aulas à parte e só após esse estudo seja realizada a atividade, de modo a melhor fixar e inter-relacionar os conhecimentos estudados.

Avaliação: A avaliação se dará através da observação, pelo docente, da interação e participação dos alunos durante a aula, bem como da realização das atividades.

Atividade 2

Conteúdo: Área e volume da esfera.

Objetivo:

- Compreender os processos de demonstração das fórmulas de área e volume.

Duração: 2 aulas (1 hora e 30 minutos).

Recursos necessários: Quadro branco, lápis pincel, apagador, atividade impressa em papel A4.

Metodologia:

Nos cinco primeiros minutos da aula, serão apresentados dois novos sólidos: a clépsidra e a anticlépsidra. Para facilitar a visualização desses sólidos, o docente poderá utilizar uma construção no GeoGebra, uma figura ou até mesmo um material concreto.

Logo em seguida, com o auxílio dos novos sólidos e utilizando o princípio de Cavalieri, será demonstrada a fórmula do volume da esfera. Como essa demonstração é mais sofisticada que as demais, sugere-se que o docente divida a demonstração em passos, explicando calma e claramente cada raciocínio.

Posteriormente, será apresentada a fórmula da área da esfera. Como exercício extraclasse e utilizando a atividade do apêndice D, os alunos tentarão, como desafio, demonstrar a fórmula da área da esfera. Na aula seguinte, recomenda-se que o docente apresente a prova matemática, de modo a sanar possíveis dúvidas.

Na segunda aula, o professor deverá resolver algumas questões, de modo a aplicar as fórmulas recém estudadas. Também poderá preparar uma lista de exercícios e/ou propor algumas questões-desafio (podem ser selecionadas algumas questões da OBMEP, de vestibulares ou do livro didático). É interessante que estas questões tenham um nível crescente de dificuldade, de modo a desafiar os estudantes na busca por soluções. **Avaliação:** A avaliação se dará através da observação, pelo docente, da interação e participação dos alunos durante a aula, bem como da realização das atividades extraclasse.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo elaborar três sequências didáticas abordando os principais tópicos do conteúdo de Geometria espacial com enfoque nas demonstrações. Dessa forma, buscou-se elaborar um material que apresentasse o conteúdo com certo rigor matemático, apresentando ao aluno as definições e demonstrações próprias dessa ciência.

Em cada aula, foram propostas atividades (as quais podem ser encontradas nos Apêndices A, B, C e D) e questionamentos, de modo a gerar debates e discussões e incentivar nos alunos o pensamento crítico e o raciocínio lógico. Na parte do conteúdo, além das definições, elementos e classificações dos sólidos, também são apresentadas as demonstrações das fórmulas de área e volume dos principais sólidos. Como cada turma tem as suas particularidades, o professor pode (e deve) realizar as devidas adaptações nas sequências, bem como nas atividades propostas.

Vale destacar que, devido ao momento crítico ocasionado pela pandemia de Covid-19, o que impossibilita a realização de aulas presenciais, em que este trabalho foi escrito (período de 2020-2021), não foi viável a aplicação dessas sequências em uma turma de Ensino Médio, bem como a posterior verificação dos resultados, o que constitui-se na maior limitação desse trabalho. Posteriormente, pretende-se aplicar estas sequências em aulas presenciais, de modo a aferir as potencialidades, limitações e adaptações necessárias, além de analisar e publicar os resultados em um artigo acadêmico.

Devido à relevância do conteúdo e a sua pouca exploração nesse sentido, existe um enorme leque de possibilidades para novas pesquisas, seja na criação de novas propostas de sequências didáticas ou na aplicação e verificação das potencialidades e limitações das mesmas, seja na criação de atividades (interdisciplinares, de modelagem, de resolução de problemas) que trabalhem a geometria espacial sob esse viés de maior rigor matemático.

REFERÊNCIAS

BOTELHO, H. N. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, **Geometria Espacial Métrica: uma abordagem com conceitos básicos, aplicações e reflexões.** 2014. Disponível em: <https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 15 mar. 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 30 fev. 2020.

DOLCE OSVALDO; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar 10: Geometria Espacial Posição e métrica.** 7. ed. São Paulo: ATUAL Editora, 2013. v. 10.

FILHO, D. C. D. M. **Um convite a Matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LORENZATO, S. Por quê não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista- SBEM**, v. 17, n. 4, Jan./jun. 1995. Disponível em: <http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2020.

PCN, P. C. N. Matemática. **Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF**, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 30 fev. 2020.

PERETTI LISIANE; TONIN, G. M. d. C. Sequência didática na matemática. **Revista de Educação do Instituto de Desenvolvimento Educacional do Alto Uruguai.**, v. 17, n. 8, Jan./jun. 2013. Disponível em: <https://www.bage.ideau.com.br/wp-content/files_mf/7ff08743d52102854eaaf22c19c4863731_1.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2020.

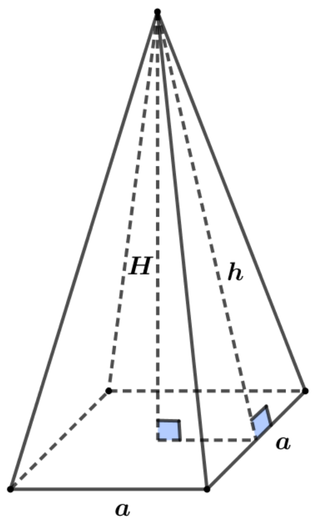
SENA, C. O. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, **Demonstrações no Ensino Médio**. Ouro Preto: [s.n.], 2018. Disponível em: <https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 10 mar. 2020.

APÊNDICE A – ATIVIDADE 1: ÁREA DA PIRÂMIDE

QUESTÕES

1. Considere a pirâmide regular abaixo, representada pela figura A.1.

Figura A.1 – Pirâmide 1



Fonte: Arquivo pessoal.

a) Calcule a sua área lateral, a área da base e a are total.

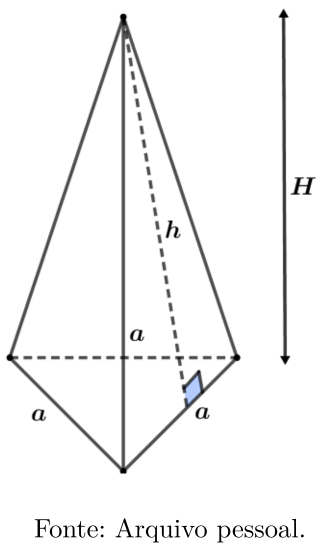
b) Desenhe a planificação da pirâmide.

c) Determine uma expressão que relacione a altura H da pirâmide, a altura h dos triângulos que formam as faces laterais e a medida da base.

d) Essa pirâmide possui apótema? Qual é a medida do apótema da base em função de a? tomando $a = 10\ cm$ e $H = 2\sqrt{14}\ cm$, qual será a medida do apótema da pirâmide?

2. A figura A.2 representa uma pirâmide oblíqua cuja base é um triângulo equilátero. Responda o que se pede.

Figura A.2 – Pirâmide 2



Fonte: Arquivo pessoal.

a) Esta pirâmide é regular?.

b) Desenhe a planificação dessa pirâmide.

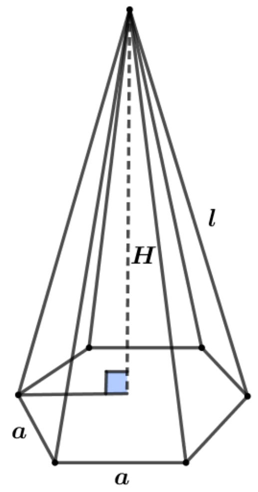
c) Determine a altura dos triângulos que compõe das faces laterais.

d) Determine uma expressão para calcular a área lateral dessa pirâmide.

e) Tomando $a = 3\ cm$ e $H = 7\ cm$, calcule a área lateral área da base, a área lateral e a área total dessa pirâmide.

3. A figura A.3 representa uma pirâmide hexagonal regular.

Figura A.3 – Pirâmide 3



Fonte: Arquivo pessoal.

a) Todos os triângulos que formam as faces laterais tem mesma área? Por quê?

b) Determine a medida da altura dos triângulos das faces laterais.

c) Desenhe a planificação dessa pirâmide.

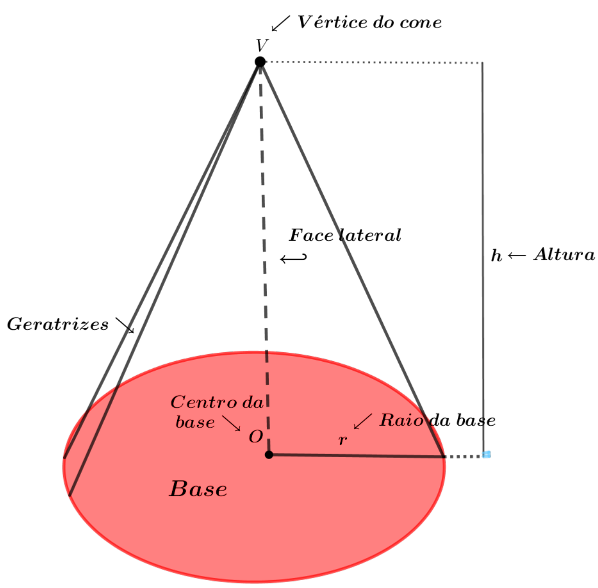
d) Determine uma expressão que permita calcular as áreas da base, lateral e total dessa pirâmide.

APÊNDICE B – ATIVIDADE 2: ÁREA DO CONE

QUESTÕES

Observe a figura abaixo que ilustra os principais elementos de um cone circular reto:

Figura B.1 – Elementos do cone



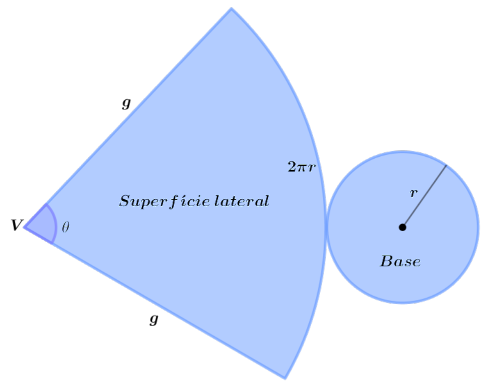
1. A imagem acima representa um cone reto. Além desse tipo de cone, também existe o cone oblíquo. Qual a principal diferença entre um cone reto e um cone oblíquo?
2. Com base na imagem acima, e com base em seus conhecimentos geométricos, deduza uma relação matemática entre a geratriz g, o raio r e a altura h de um cone reto.
3. A relação matemática deduzida no item anterior também vale para os cones oblíquos? Justifique.
4. O que seria a área de um cone?
5. Dado um cone reto de altura $h = 5cm$, raio da base $r = 1cm$ e geratriz $g = 7cm$, faça o que se pede:

   a) Desenhe a planificação do cone em questão.

b) Com base na planificação desenhada, de que forma pode ser feito o cálculo da área desse cone?

6. A figura abaixo representa a planificação de cone circular reto genérico. Com base na figura, determine:

Figura B.2 – Planificação do cone



a) A expressão que permite calcular a área da base desse cone.

b) A expressão que permite calcular a área lateral desse cone.

c) Sabendo que a área total de um cone reto é dado pela soma das áreas lateral e da base e com as expressões encontradas nos itens a) e b), determine uma fórmula que permita calcular a área de um cone circular reto qualquer.

7. A fórmula encontrada na questão anterior serve para o cálculo da área de qualquer cone ou apenas cone retos? De que maneira poderia ser deduzida a fórmula da área de um cone oblíquo?

8. Com base na fórmula encontrada na questão 6, calcule a área dos cones reto cujas medidas são dadas abaixo.

a) Geratriz e raio iguais a 5 cm.

b) Geratriz igual a $\dfrac{1}{2}r$ e sabendo que $r + g = 3$.

c) Raio igual a 7 e altura igual a 15.

APÊNDICE C – ATIVIDADE 3: ESFERA E GLOBO

QUESTÕES

1. Embora o planeta terra tenha uma forma semelhante à uma esfera (assim como todos os outros planetas), o nosso planeta nao pode, porém, ser considerado uma esfera perfeita. Isso pois, a terra possui um achatamento nos polos, de modo que seu diâmetro equatorial é levemente maior que o diâmetro polar.

   Teoricamente, a verdadeira forma da terra é um **Geóide**, porém devida a alta complexibilidade física desse modelo, para efeito de cálculos aproximdos a terra é considerada um **elipsóide de revolucão** (sólido gerado pela rotação, em torno de seu eixo, de uma elipse).

   a) Levando em consideração suas características físicas, do ponto de vista matemático, explique porque a terra não pode ser considerada uma esfera.

   b) Faça um esboço do elipsóide de revolução, apresentando seus principais elementos.

2. Existem inúmeras divisões do território terrestre, tanto físicas como geopolíticas como, por exemplo, a divisão em seis continentes, países, estados e regiões. O planeta também pode ser dividido em Hemisfério norte e Hemisfério sul e em Ocidente e Oriente. Com o auxílio de um mapa mundi, responda os itens a seguir.

   a) Explique qual a relação entre estas divisões e as linhas imaginárias do equador e do meridiano de greenwich.

   b) Indique em qual hemisfério se localiza cada um dos continentes e o Brasil.

3. O Meridiano de Greenwich e a Linha do equador são, respectivamente, o meridiano principal e a principal linha imaginária sobre o globo terrestre, sendo usados para localização de qualquer ponto sobre a terra. Caso essas linhas imaginárias fossem redefinidas, um mesmo ponto sobre a superfície terrestre teria as mesmas coordenadas no mesmo sistema de localização? por quê?

4. Considerando a terra uma esfera de 360 graus, cada um dos 24 fuso horários equivale a 15 graus. Explique qual a direção adotada, por padrão internacinal, para determinação das horas.

5. Na matemática, a principal medida para ângulos é o grau. Também existem os submúltiplos do grau: o minuto (60 minutos equivalem a 1 grau) e o segundo (60

segundos equivalem a 1 minuto). Além disso, há também os ângulos negativos que são aqueles medidos no sentido horário. A latitude e a longitude são distâncias medidas pelo grau e seus submúltiplos. Transcreva, utilizando a linguagem matemática e indicando a direção, os seguintes pontos da superfície terrestre indicados abaixo.

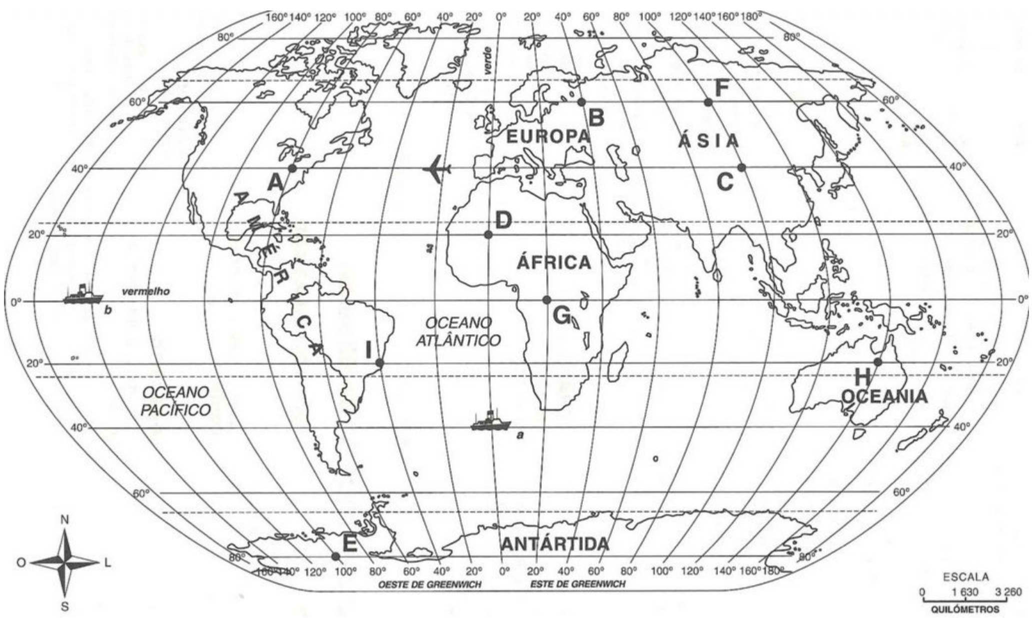
a) 7 horas, 6 minutos e 54 segundos ao sul e 35 horas, 51 minutos e 47 segundos ao norte (João pessoa).

b) 6 horas, 53 minutos e 11 segundos ao sul e 38 horas, 33 minutos e 41 segundos a oeste (Cajazeiras).

Explique, com base no sentido adotado como positivo para o cálculo de distâncias, de que forma são utilizados os ângulos negativos na representação das coordenadas.

6. Com base na imagem abaixo, responda as questões o que se pede.

Figura C.1 – Mapa Mundi



Fonte: RevistaZunai.com.br

a) Determine as coordenadas geográficas dos pontos representados no mapa.

b) Uma mulher viaja de avião do Brasil (ponto I) para a Oceania (ponto H). Determine a data e a hora em que ela chegará ao seu destino, sabendo que o voo internacional escolhido tem duração de 12 horas e que ela partiu do Brasil em 31 de janeiro de 2020 às $12:45$.

c) Um grupo de amigos planejam passar um final de semana na Europa (ponto B) para participar de um festival local que ocorrerá no sábado pela manhã, entre as $7:00$ às $12:00$. Partindo da África (ponto B), eles pretendem pegar um voo internacional às $20:15$ da sexta-feira da semana do evento com duração de 4 horas. Porém, o voo atrassa 3 horas e, ao chegar ao local, eles precisam de mais 5 horas para fazer check in no hotel, guardar malas e descansar um pouco, além de 1 para ir de carro do hotel para o local do evento. Nessas circunstâncias, eles chegaram a tempo no evento?

d) Um casal viajando em motorhome, parte do ponto I do mapa as $14:00$ horas no dia 26 de março, chegando no ponto A ás $6:45$ horas quatro meses depois. Quando o casal chega nos EUA, que horas são no Brasil?

e) Suponha que a linha do equador e o meridiano de Greenwich, respectivamente, estivessem 20 graus mais a oeste e 20 graus mais ao sul. Redetermine as coordenadas dos pontos do mapa.

PARA PESQUISAR E REFLETIR...

- Assim como a terra, todos os planetas até agora descobertos possuem um forma semelhante a da esfera. Você já se perguntou por que isso acontece? Com base em pesquisas, explique, com as suas palavras, por que todos os planetas possuem uma forma semelhante a uma esfera.

- A terra realiza dois principais movimentos: o movimento de rotação (rotação em torno do próprio eixo que a terra realiza no período de 24 horas) e o movimento de translação (rotação em torno do sol que a terra realiza no período de 365 dias e 6 horas). Assim como o movimento de rotação esta relacionado aos fuso horários, o movimento de translação esta relacionado com as estações do ano. Pesquise e explique um pouco sobre como o movimento de tranlação se relaciona com a determinação das estações do ano.

- Existem outras formas de determinar a localização de um ponto qualquer sobre a superfície da terra? pesquise (pode ser em livros, sites, revisas ou até mesmo no youtube) pelo menos um outro sistema de localização e fale um pouco sobre ele.

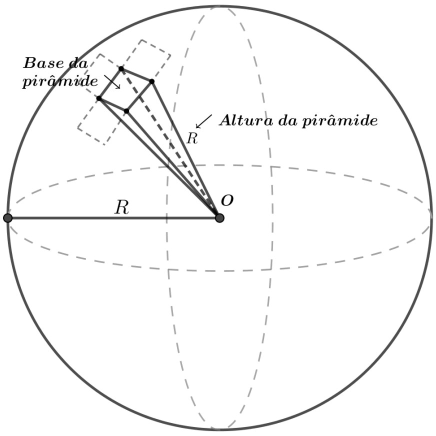
- Os mapas são a representação plana de uma determinada região. De que forma a superfície esférica terrestre pode ser desenhada em uma superfície plana? Os mapas são representações reais, impessoais, exatas e completamente confiáveis do espaço físico? Se não, justifique porque.

APÊNDICE D – ATIVIDADE 4: ESFERA

QUESTÕES

1. Considere uma esfera de centro O e raio R.Como provado na aula passada, o volume de uma esfera é dada por $\dfrac{4}{3}\pi R^3$. Com base nessa informação e seguindo as dicas abaixo, demonstre que a área dessa esfera é dada por $4\pi R^2$.

Figura D.1 – Área da esfera



Fonte: Arquivo pessoal.

DICAS

I- Considere, sobre a superfície dessa esfera, n quadriláteros. Tomando como vértice o centro O e como base cada um dos n quadriláteros, ficam determinadas n pirâmides. Cada uma dessas pirâmides tem como altura o próprio raio da esfera e como base um dos quadriláteros.

II- Note que quando tomamos um número muito grande de quadriláteros, a soma das áreas desses quadriláteros se aproxima cada vez mais da área total da superfície da esfera. Se, portanto, considerarmos um infinito número de quadriláteros, teremos um infinito número de pirâmides cuja soma dos volumes pode ser considerada igual ao volume da esfera.

III- Sabendo que o volume de uma pirâmide é igual ao terço do produto da altura pela área da sua base, demonstre o que se pede.

2. A esfera é considerada um sólido de revolução. Isto, pois, pode ser gerada através da rotação de 360 graus de um semi círculo em torno de seu diâmetro (ou eixo). Já a superfície esférica, ou seja, o conjunto de pontos que estão sobre a esfera, é

obtida através da rotação de 360 graus de uma semi circunferência em torno de seu diâmetro (ou eixo). Além dos seus elementos, em uma esfera também é possível determinar fusos, cunhas e calotas, as chamadas partes da esfera.

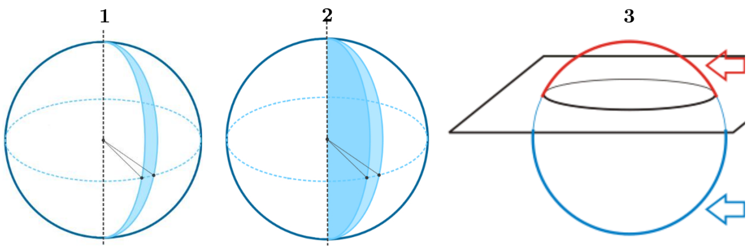
O **fuso esférico** é a superfície da esfera gerada pela rotação de α graus de uma semi circunferência em torno de seu eixo.

A **cunha esférica** é a parte da esfera gerada pela rotação de α graus de um semi círculo em torno de seu eixo.

A **calota esférica** é o solido determinado pela intersecção de um plano com uma esfera. Se um plano intercepta uma esfera ficam determinadas duas calotas (uma calota maior e uma menor). Caso esse plano seja perpendicular ou contenha o eixo da esfera, as calotas serão duas semi esferas.

Com base nas definições dadas e na figura 2, preencha a coluna abaixo.

Figura D.2



Fonte: Arquivo pessoal.

() Calota
() Fuso
() Cunha

Ainda com relação às partes da esfera, responda:

a) O fuso possui área e volume? a cunha possui área e volume? por quê?

b) Considerando que a superfície do fuso é uma parte da superfície da esfera e que dada uma esfera qualquer, basta determinar o ângulo central para que o fuso correspondente fique definido, de que forma é possível calcular a área desse fuso?

c) Utilizando o mesmo raciocínio do item anterior, como se determina a área e o volume de uma cunha?