INSTITUTO FEDERAL
Paraíba

INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

Maria de Fátima Pereira Nogueira

Métodos e Soluções: um estudo específico de polinômios do terceiro grau e equações cúbicas no anel dos complexos

Cajazeiras-PB
Agosto de 2021

Métodos e Soluções: um estudo específico de polinômios do terceiro grau e equações cúbicas no anel dos complexos

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como requisito parcial para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof$^{\underline{a}}$. Ma. Kissia Carvalho

Cajazeiras-PB
Agosto de 2021

Maria de Fátima Pereira Nogueira

Métodos e Soluções: um estudo específico de polinômios do terceiro grau e equações cúbicas no anel dos complexos

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como requisito parcial para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Aprovado em: 25/08/2021.

BANCA EXAMINADORA

Kissia Carvalho

Profª. Ma. Kissia Carvalho
Instituto Federal da Paraíba–IFPB

Clebson Huan de Freitas

Prof. Me. Clebson Huan de Freitas
Instituto Federal da Paraíba–IFPB

Diego Dias Felix

Prof. Dr. Diego Dias Felix
Instituto Federal da Paraíba–IFPB

Cajazeiras-PB
Agosto de 2021

Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

N778m

Nogueira, Maria de Fátima Pereira

Métodos e soluções: um estudo específico de polinômios do terceiro grau e equações cúbicas no anel dos complexos / Maria de Fátima Pereira Nogueira; orientadora Kissia Carvalho.- 2021.
91 f.: il.

Orientadora: Kissia Carvalho.
TCC (Especialização em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2021.

1. Polinômios do terceiro grau 2. Equações cúbicas 3. Raízes 4. Métodos resolutivos I. Título

CDU 512.62(0.067)

Dedico este trabalho aos meus pais, familiares e amigos que sempre me incentivaram a seguir meus sonhos.

Agradecimentos

A Deus por colocar em meu coração sonhos desafiadores, por me encorajar, capacitar e conduzir ao alcance de cada um deles, ao meu senhor, minha gratidão.

À minha mãe, Bernadete, que desde os meus primeiros passos me incentiva, orienta, conforta e me ampara em seus braços. Mãe, muitíssimo obrigada por dar todo o suporte na minha caminhada e por ser luz na minha vida.

Ao meu pai Antônio Gabriel (em memória), que é minha inspiração de boa conduta, gentileza e simplicidade. Obrigada por ter exercido seu papel com dedicação e amor.

Ao meu padrinho José Lustosa (em memória), por ter despertado em meu coração o desejo de cursar um ensino superior. Muito obrigada por ter doado meus materiais escolares quando meus pais não tinham condições de comprar, isso fez toda a diferença.

Minha gratidão especial ao meu namorado e companheiro de todos os momentos, Rafael Figueiredo. Meu amor, obrigada por toda a sua dedicação, seu cuidado e carinho, não teria chegado até aqui sem o seu apoio.

Minha gratidão aos meus irmãos (Jucelino e Geovane), às minhas tias, às minhas cunhadas, aos meus primos e primas pelo incentivo e apoio.

Minha gratidão e admiração a minha excelente orientadora Kissia Carvalho, uma profissional dedicada, cuidadosa, amiga e muito atenciosa. Muito obrigada professora por ter me conduzido com tanto zelo e paciência, suas contribuições e orientações vão além da elaboração deste trabalho.

Aos professores Clebson Huan e Diego Dias, muito obrigada pela disponibilidade em aceitarem compor a banca examinadora deste trabalho.

De forma especial, agradeço ao professor Leonardo Ferreira por me incentivar a cursar e concluir a especialização e ao professor Vinicius Martins por ter me ajudado e orientando em diversos conteúdos e em muitas ocasiões.

Ao meu amigo Gabriel Almeida, um incentivador e parceiro de muitas batalhas, muito obrigada por ser sempre presente em minha vida e contribuir com minha formação.

À minha amiga Carla que tanto me ajudou e me incentivou a concluir este curso, minha eterna gratidão.

À minha amiga Damiana por me ajudar e estudar comigo, o meu muito obrigada.

Aos meus colegas do curso pelos bons momentos compartilhados, obrigada.

Agradeço também aos meus gatinhos de estimação que me confortaram nos momentos difíceis e são minha alegria diária.

Meu agradecimento especial a diretora do campus Lucrecia Petrucci, ao coordenador da especialização Stanley Borges, a todos os professores e funcionários do IFPB.

Resumo

Considerando a carência de aprofundamento no estudo de polinômios do terceiro grau e equações cúbicas, identificada em livros didáticos, especialmente do nível médio, bem como a insuficiência de uma sequência logicamente constituída que corrobore para apresentação específica das propriedades e definições ligadas a estes conteúdos, buscou-se a elaboração de uma complementação teórica mais representativa, a fim de promover um estudo minucioso sobre esses assuntos, contemplando dados históricos, definições fundamentais e os principais métodos resolutivos algébricos com a devida interpretação geométrica. Para tanto, foi imprescindível a narração dos principais aspectos históricos no surgimento das equações polinomiais do terceiro grau e dos números complexos, o estudo fundamentado das definições, características, métodos resolutivos e análise gráfica. A pesquisa realizada caracteriza-se do tipo procedimental bibliográfica, com abordagem qualitativa e finalidade básica pura, quanto ao objetivo, ela se configura como pesquisa exploratória. Nesta perspectiva, o presente trabalho possui dentre suas contribuições, a apresentação de um material específico para o estudo acerca de polinômios do terceiro grau e equações cúbicas, com uma estrutura organizacional pensada, compondo-se de ideias que se harmonizam e se complementam entre si.

Palavras-Chave: Polinômios do terceiro grau. Equações cúbicas. Raízes. Métodos resolutivos.

Abstract

Considering the lack of deepening in the study of third-degree polynomials as well as cubic equations, which is identified in textbooks, especially in high school, and also considering the insufficiency of a logically constituted sequence that grounds the specific presentation of the properties and definitions of such contents contents, this paper aims to elaborate a more representative theoretical complementation, in order to promote a detailed study on these subjects, contemplating historical data, fundamental definitions and the main algebraic solving methods with the proper geometric interpretation. Therefore, it was essential to narrate the main historical aspects in the emergence of the third-degree polynomial equations and complex numbers, the well-founded study of definitions, characteristics, resolving methods and graphical analysis. This research is characterized by the bibliographic procedural method, with a qualitative approach and pure basic purpose. Regarding the objective, it configures an exploratory research. In this perspective, the present work has among its contributions, the presentation of specific material for the study about third-degree polynomials and cubic equations, with a thought-out organizational structure, a sequence of well-adjusted and interconnected ideas.

KeyWords: Third degree polynomials. Cubic equations. Roots. Resolving methods.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Quando se busca analisar a Matemática numa perspectiva histórica, fica claro que as manifestações numéricas encontradas em distintos lugares, por povos diferentes e em variadas épocas, constituem a prova de que o homem desde a pré-história utiliza conceitos matemáticos para solucionar problemas no meio em que vive e como forma de representar fenômenos encontrados na natureza. Sobre isso, Guimarães (2006) [13] nos fala:

> Como salientou Galileu Galilei, os fenômenos da Natureza devem ser descritos por meio de uma linguagem adequada, que é a Matemática. Não é de surpreender, por essa razão, que essa descrição envolva manipulações algébricas que, em boa parte das vezes, desembocam em equações que devem ser resolvidas para que possamos obter a descrição desejada. Assim, procedimentos utilizados para estudar os fenômenos que ocorrem na natureza muitas vezes se confundem com a necessidade de resolvermos equações algébricas. (GUIMARÃES, 2006, p. 7).

Tratando-se de equações polinomiais de terceiro grau, Souza (2010) [29] nos conta que um dos grandes acontecimentos no campo da Matemática no século XVI foi a descoberta da solução deste tipo de equação. Enquanto Boyer (2012) [4] afirma que a solução da equação cúbica publicada no ano de 1545, em *Ars Magna* de Girolamo Cardano, foi um progresso tão notável e imprevisto que causou grande impacto aos algebristas da época, de tal forma que o ano de 1545 ficou marcado como o início do período moderno na Matemática.

Neste contexto, fica destacado a grande relevância histórica que a descoberta das equações polinomiais e dos polinômios trouxeram para o desenvolvimento da Matemática. E o mais incrível no estudo destes temas são as inúmeras possibilidades a serem exploradas, pois, quem se dispuser a aprofundar-se encontrará uma verdadeira riqueza de caminhos e formas diversificadas de abordagem dos mesmos, o que provoca a sensação atraente e fascinante de querer inteirar-se cada vez mais em tais conteúdos.

No entanto, essa abundância não é identificada nos livros do Ensino Médio, pelo contrário, os mesmos apresentam carência no aprofundamento do estudo de equações de grau três e polinômios do terceiro grau, uma vez que não destinam um capítulo ou seção que trate especialmente destes conteúdos e que façam a exposição das principais características, definições, propriedades, métodos resolutivos, aplicações e análise geométrica, ou seja, não é observada uma atenção especial nestes conteúdos assim como é feito na abordagem de equações de primeiro e segundo grau e nas funções afins e quadráticas.

Ainda, os capítulos dos livros que contemplam definições relacionadas às equações cúbicas e aos polinômios do terceiro grau, além de trazerem um enfoque sucinto e discreto, apresentam contextualização histórica mínima ou inexistente e se destinam a fazer um estudo de caráter geral de equações algébricas e polinômios, isto é, não separam as equações cúbicas e os polinômios do terceiro grau das equações e polinômios que possuem grau diferente de três, o que pode comprometer a compreensão adequada e satisfatória de tais conteúdos e impedir um estudo sequencial e lógico.

Destacamos que as observações previamente apresentadas foram possíveis após uma investigação simples em alguns livros didáticos de diferentes autores e épocas, que são: Dante (2016) [8], Giovanni e Bonjorno (2005) [10], Iezzi et al. (2014) [15], Leonardo (2016) [18], Souza (2010) [29], Silva e Barreto (2005) [27].

Nesta perspectiva, o presente trabalho é fruto da inquietação em buscar explorar com maior profundidade os conceitos e definições no estudo de polinômios do terceiro grau e equações cujo grau também é três, e a partir deste anseio surge a pergunta norteadora deste estudo: *é possível promover um estudo sequencial e compacto de polinômios do terceiro grau e equações cúbicas, que apresente aspectos históricos, definições, propriedades, métodos resolutivos e interpretação geométrica?*

Buscando responder a questão norteadora, a escolha do objeto de estudo surge do anseio em produzir uma alternativa de complementação teórica para professores de diferentes níveis de escolaridades, ou até mesmo estudantes que tenham interesse em consultar um material mais completo, razoavelmente estruturado e minucioso sobre polinômios do terceiro grau e equações cúbicas.

Neste seguimento, o objetivo geral deste trabalho é promover um estudo detalhado de polinômios do terceiro grau e equações cúbicas, contemplando aspectos históricos, as definições fundamentais, os principais métodos resolutivos, analisados numa perspectiva algébrica e com interpretação geométrica.

Para alcançar a finalidade deste estudo, foi feita a descrição dos principais acontecimentos históricos que contribuíram para o surgimento das equações de terceiro grau e dos números complexos, uma revisão de estruturas algébricas essenciais para o estudo de polinômios com coeficientes em anéis e uma apreciação das características de polinômios de grau três e equações cúbicas, suas definições, raízes, métodos resolutivos e interpretação geométrica dos resultados obtidos.

A pesquisa desenvolvida é do tipo procedimental bibliográfica, com abordagem qualitativa e finalidade básica pura, pois objetiva apenas o aprofundamento do conhecimento científico sobre polinômios de terceiro grau e equações cúbicas, sem intenção de buscar soluções para situações práticas no meio social. Com relação à classificação quanto ao objetivo, ela se caracteriza como pesquisa exploratória, uma vez que o suporte teórico é buscado na literatura em forma de levantamento bibliográfico.

O referido levantamento bibliográfico foi possível a partir de uma pesquisa categórica em livros de Álgebra I e II de nível superior, em livros didáticos do ensino médio, nos repositórios acadêmicos da UFC, UFCG, UFG, UFS e UNICAMP, em base de dados acadêmicos como SciELO, Google Acadêmico e em revistas especializadas da área como RPM e RMU.

Com base nas referências bibliográficas selecionadas, inicialmente foi realizada uma descrição histórica de como se deu o processo de acontecimentos matemáticos, ao longo das épocas, que impulsionaram o conhecimento das equações de terceiro grau e dos números complexos. Em seguida, no Capítulo 2, foi feita uma revisão concisa de algumas estruturas algébricas necessárias para a compreensão da definição de polinômios com coeficientes em anéis e corpo de frações, neste momento a abordagem das definições é feita para polinômios de forma geral.

Esta abordagem de polinômios a partir de estruturas algébricas não é comumente encontrada em trabalhos acadêmicos que estudam polinômios do terceiro grau e equações cúbicas, embora que estudar polinômios nesta perspectiva nos permita trabalhar com propriedades bem definidas que nos possibilitam a realização bem embasada de cálculos matemáticos. Sobre o isso, Neto (2011) [25] complementa:

> [...] do ponto de vista da Álgebra, um polinômio não deve ser visto como um objeto isolado, mas antes como um elemento de um conjunto de polinômios onde os elementos possam ser somados e também multiplicados, uma estrutura, chamada anel de polinômios. Faz sentido, portanto, falarmos em soma e em produto de matrizes, de polinômios e de funções, embora tais objetos não sejam números. Isso se dá porque tais objetos podem ser organizados em conjuntos munidos de uma ou mais operações binárias, o que dá a cada um desses conjuntos uma estrutura algébrica. (NETO, 2011, p. 7).

Adquirida a base necessária para a realização de operações com polinômios, os capítulos seguintes demandaram maior atenção e dedicação, por exigir, em muitas ocasiões, a criação de exemplos próprios. No Capítulo 3 é destacado as características de polinômios do terceiro grau e equações cúbicas, nesta parte, já definido soma, multiplicação e corpo de frações no capítulo anterior, evidenciamos a divisão entre polinômios e dissertamos sobre os tipos de raízes possíveis para equações cúbicas. Depois disso, no Capítulo 4 apresentamos alguns métodos resolutivos de equações cúbicas e também a interpretação geométrica dos resultados encontrados.

Posteriormente, nas Considerações Finais busca-se relatar se os objetivos foram alcançados e discorre sobre elementos inerentes a este estudo. Nesta acepção, espera-se que o presente trabalho proporcione conhecimento sobre o tema estudado e possa ser útil a quem debruçar-se a estudá-lo.

1. Estudo das Equações de Terceiro Grau

Para discutir sobre os aspectos relacionados ao estudo das equações de 3° grau e os métodos de resolução das mesmas, é necessário, previamente, o estudo dos acontecimentos históricos que impulsionaram a descoberta dos resultados obtidos nesse campo da matemática. Neste sentido, o presente capítulo aborda os principais fatos históricos na descoberta de equações polinomiais do terceiro grau e do conjunto dos números complexos.

Para tal apreciação histórica foram utilizadas as seguintes referências: Boyer (2012) [4], Carneiro (2015) [6], Dante (2016) [8], Garbi(2010) [9], Guimarães (2006) [13], Lima (1987) [19], Lima (2012) [21] e Queiroz (2013) [26].

1.1. Aspectos Históricos das Equações de Terceiro Grau

As antigas manifestações matemáticas conduzidas para a resolução de questões algébricas elementares, pertencentes a uma época em que não era conhecida a definição formal deste assunto, foram essenciais para o aprofundamento e exploração de problemas cada vez mais complexos.

E por meio desta inquietação em obter resultados satisfatórios para os diversos questionamentos levantados, os avanços na manipulação dos números, tratados direta ou indiretamente por meio de equações, propiciaram a normalização dos conceitos atualmente utilizados no estudo das equações algébricas.

Segundo Garbi (2010) [9], Equações Algébricas são aquelas em que a incógnita aparece apenas submetida às operações algébricas de: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação.

Em referência ao surgimento dessas equações, Boyer (2012) [4] nos confirma que alguns registros antigos, denominados de papiros, evidenciaram a existência das equações algébricas a aproximadamente 4000 anos e trazem diferentes caminhos que levam às soluções. E com a publicação dos axiomas enunciados por Euclides em sua obra "Os Elementos" de Euclides foi possível a conquista do método de resolução de uma equação polinomial do 1° grau, ainda em vigor nos dias atuais.

O conhecimento da técnica empregada nas resoluções de equações de 1° grau viabilizou o alcance de um método capaz de resolver as equações de 2° grau.

A famosa fórmula de Bhaskara, ao contrário do que se pensa, não foi descoberta pelo matemático indiano Bhaskara (1114-1185), ela foi desenvolvida no século XI pelo matemático hindu Sridhara e registrada em uma obra que não chegou ao conhecimento dos matemáticos atuais. Quanto ao método utilizado para sua descoberta, registros evidenciam que os hindus apoiaram-se na ideia de reduzir o grau da equação detentora de grau dois para o primeiro grau, por meio da extração de raízes quadradas. Nesta época, os matemáticos ao se deparem com resoluções cujo o resultado era a raiz quadrada de um número negativo eles concluíam que não havia solução para este tipo de equação (GARBI, 2010) [9].

Vale destacar que, segundo Guimarães (2006) [13], o algoritmo de resolução da equação de segundo grau passou a ser denominado "fórmula de Bhaskara" no Brasil aproximadamente em 1960 e que esta intitulação associada ao matemático Bhaskara não é encontrada na literatura internacional.

E solucionado o problema das equações de 2° grau, os matemáticos passaram a dedicar-se à procura de soluções para equações de 3° grau.

Na Babilônia, as primeiras tentativas em solucionar equações do terceiro grau aconteceram por volta de 1800 a 1600 a.C.. Os matemáticos babilônicos, engenhosamente, elaboraram tabelas de cubos e raízes cúbicas para facilitar na busca de um número nas condições de uma suposta equação de grau três (GARBI, 2010) [9].

Ainda de acordo com Garbi (2010) [9], em 1225 o Imperador Frederico II desafiou o matemático italiano Leonardo de Pisa (1175-1250), mais conhecido como Fibonacci, para uma competição em que uma das questões tinha o propósito de desafiar o encontro do valor de x, por métodos euclidianos, que satisfizesse a equação $x^3+2x^2+10x-20=0$. Fibonacci foi capaz de provar que não era possível obter as raízes por métodos euclidianos, no entanto, ele encontrou uma solução numérica que estava correta até a nona casa decimal cujo valor foi de $1,3688081075$.

As competições envolvendo a resolução de desafios matemáticos eram comuns na antiguidade. Na maioria das vezes, foram conduzidas por pessoas influentes e contavam com a presença de muitos telespectadores. Isto porque o bom desempenho nos duelos poderia resultar na conquista de um emprego como professor temporário ou até mesmo permanente em universidades.

E graças a esta prática, a busca por resolução algébrica de equações de terceiro grau atingiu seu ápice na Itália por volta de 1500 d.C., uma vez que os matemáticos que mais aperfeiçoaram as equações cúbicas foram predominantemente italianos.

No entanto, conforme Lima (1987) [19], o renomado professor de Matemática Frei Luca Pacioli (1455-1514) e também autor da obra "*Summa de Aritmética e Geometria*" afirmou em 1494 que não existia uma regra geral para a solução de problemas da forma $x^3+px=q$ ou "cubo e coisas igual a número" como era chamada na época, haja vista que x era denominada "a coisa", x^2 era "censo", x^3 era "cubo" e $x^4 =$ censo censo.

A afirmação errônea de Pacioli dividiu opiniões entre os gênios matemáticos da época, muitos não questionaram a declaração do frei e aceitaram sua afirmativa como verdadeira. No entanto, o desafio de apresentar uma versão coerente para o problema das equações de terceiro grau instigou Scipione Ferro (1465-1526), um professor da universidade de Bolonha, a resolver os problemas de 3 mil anos: "cubo e coisas igual a número" ($x^3 + px = q$) e "cubo igual a coisas e número" ($x^3 = px + q$). Um fator intrigante é que Ferro nunca publicou sobre suas descobertas matemáticas, o que nos leva a pensar que ele preferiu o sigilo de suas habilidades para utilizá-las em um momento mais oportuno, como por exemplo, uma competição matemática. Não ocorrendo uma real necessidade de apresentar o que havia descoberto sobre as equações cúbicas, Scipione Ferro, antes de falecer, confiou a revelação de seu segredo aos seus discípulos Annibale Della Nave e seu aluno Antonio Maria Fior (LIMA, 1987) [19].

Inteirado de que tinha em mãos uma das mais excepcionais descobertas matemáticas da época, Fior desafiou em 1535 Nicolá Fontana (1499-1557), mais conhecido como Tartaglia, para uma disputa cujo objetivo era a resolução de trinta problemas. O vencedor seria àquele que solucionasse corretamente as questões elaboradas pelo seu adversário.

Como já era de se esperar, Fior utilizou a carta na manga deixada por Ferro e elaborou trinta problemáticas que necessitariam de conceitos relacionados a equações de terceiro grau para serem solucionadas. Já Tartaglia, brilhante professor de Veneza, produziu seus problemas de forma diversificada, contando apenas com sua admirável inteligência e experiência em disputas anteriores.

Surpreendentemente, após muitas tentativas fracassadas, Tartaglia conseguiu resolver as equações propostas por Fior e desmistificou a dedução da fórmula geral da equação de terceiro grau $x^3 + px + q = 0$, faltando apenas oito dias para a duelo. Com este grande feito, venceu a disputa, solucionando as trinta questões.

Minuciosamente, de acordo com Garbi (2010) [9] e Boyer (2012) [4] a merecida vitória de Tartaglia é justificada por uma razão simples: ele além de conseguir resolver equações do tipo x^3+px+q, tinha aprendido também a solucionar equações em que cubos e quadrados aparecem igualados a um número, que não eram do conhecimento de Fior. E assim, astuciosamente, Tartaglia elaborou as questões do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$ para Fior, e isso impossibilitou o pobre Fior de resolver qualquer uma das trinta questões. Cabe destacar que na época da disputa os matemáticos estudavam vários tipos de equações cúbicas, pois não haviam descoberto ainda a fórmula geral que representasse os diferentes formatos que este tipo de equação pode assumir.

Sobre a vida de Nicolá Fontana, Guimarães (2006) [13] e Lima (1987) [19] nos contam que ele ficou órfão de pai aos seis anos e enfrentou muitas outras situações de sofrimento. Um desses episódios foi em 1512 quando os franceses saquearam sua cidade natal conhecida como Bréscia, na Itália, e ele, assim como boa parte da população, se dirigiu a igreja em busca de abrigo, no entanto, os soldados invadiram o local e desferiram vários golpes de sabre pelo corpo de Nicolá, mesmo com a presença de sua mãe no santuário. Os ferimentos ocasionaram dificuldades na fala, o que justifica seu apelido "Tartaglia", que quer dizer gago em italiano. Embora tivesse que encarar muitas adversidades na vida, Tartaglia foi perseverante em seus estudos e no fascínio pela Matemática e seguiu estudando mesmo quando sua mãe o retirou da escola, por necessidades financeiras. O cemitério de sua cidade passou a servir como local de estudos, Tartaglia frequentava seu inusitado ambiente de aprendizagem pela noite e fazia suas anotações com carvão sobre as lápides dos túmulos. Mais tarde, alcançou o merecido reconhecimento como professor em Veneza e Verona, localizadas também na Itália. Foi autor da obra "*Nova Scientia*" no ano de 1537, criando a balística, que tem como objeto de estudo o movimento de projéteis. Escreveu também sobre aritmética popular e teve a honra de ser o primeiro italiano a fazer a publicação (1543) de uma versão do livro "Os Elementos" de Euclides em latim.

Informações sobre o bom desempenho de Tartaglia nas resoluções de desafios se propagaram rapidamente e despertaram a curiosidade de outro grande gênio da época, Girolamo Cardano (1501-1576), um nobre professor de matemática italiano, nascido em Pávia, que destacou-se também na Medicina, Filosofia, Astronomia e na Física.

Cardano tinha um bom histórico de livros publicados e na época da descoberta de Tartaglia sobre a resolução das cúbicas, dedicava-se na produção de mais um, intitulado "*Practica Arithmetice*" (GUIMARÃES, 2006) [13].

O referido livro abordava noções de Geometria, Aritmética e Álgebra, sendo uma grande oportunidade para apresentar a descoberta em questão. Assim, Cardano atraiu Targalia para sua residência em Milão e apelou para que ele revelasse seu método. Obviamente, Targalia recusou-se, pois, queria ter honra de publicar seus resultados em uma obra de sua autoria.

Após muitos juramentos e súplicas de Cardano, em 1539 Targalia acabou cedendo e o encaminhou um poema com a regra para resolver a equação $x^3 + px = q$. É importante salientar que a escrita algébrica da época era muito limitada, havendo distintas notações, e isto contribuiu para que Cardano não conseguisse descifrar o poema. Não obstante, Cardano continuou a solicitar a revelação do segredo, só que agora, implorava por uma versão mais clara e detalhada que facilitasse a compreensão, e felizmente teve seu pedido atendido.

O estudo minucioso das equações cúbicas proporcionou a obtenção de alguns resultados como nos conta Lima (1987) [19]:

> Cardano mostrou que a substituição $x = y - \frac{a}{3}$ permite eliminar o termo em x^2 e, ao todo, deduzir as fórmulas para resolver 13 tipos de equações do terceiro grau! Evidentemente, hoje essas fórmulas se reduziram a uma única. Mas é preciso observar que as equações daquele tempo eram todas numéricas. (O uso de letras para representar números em Álgebra teve início com Fraçois Viéte em 1591.) Logo, a rigor, não havia fórmulas e sim receitas ou regras, explicadas com exemplos numéricos, uma regra para $x^3 + px = q$, outra para $x^3 = px + q$, outra para $x^3 + px^2 = q$, etc. (LIMA, 1987, p. 14).

A dedicação de Cardano e do seu discípulo Ludovico Ferrari (1522-1557) no estudo dessa temática originou valiosos resultados, pois, conforme Lima (1987) [19] foi possível o reconhecimento das raízes múltiplas em diversos casos, relação entre os coeficientes, admissão de raízes negativas, irracionais, imaginárias e sobretudo a solução por radicais da equação do quarto grau, obtida por Ferrari. Porém, mesmo diante de tantas conclusões à respeito das equações, Cardano nunca deixou evidenciado claramente que uma equação de grau três deveria possuir três raízes e uma de quarto grau deveria ter quatro raízes.

Diante de tantas descobertas no estudo das equações, Cardano e Ferrari dispunham de uma quantidade satisfatória de conteúdos para a produção de um novo livro, a única objeção que os impediam de realizar esta publicação era o juramento de Cardano feito a Tartaglia, no qual declarou o sigilo do segredo lhe confiado. Entretanto, Cardano e Ferrari conseguiram, através de Della Nave, acesso aos manuscritos de Ferro sobre a solução da equação $x^3 + px = q$, esse privilégio aconteceu em 1542 quando ambos foram à Bolonha. Em função disso, Cardano entendeu que o juramento não fazia mais sentido, pois teve conhecimento à descoberta de uma outra maneira. Logo, ele não demorou muito para fazer a publicação das informações adquiridas, de tal forma que em 1545 lançou um de seus mais importantes livros "*Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis*", mais conhecido como "*Ars Magna*", contendo as demonstrações das equações cúbicas e vários elogios à Tartaglia e a Scipione Ferro.

Os elogios não foram suficientes para que Tartaglia perdoasse a traição do juramento Bíblico lhe concedido, e isto motivou uma relação hostil entre eles, marcada por denúncias e ofensas. A busca de Tartaglia pelo mérito na descoberta das soluções das equações cúbicas ficou evidente em 1546 com a publicação de "*Quesiti e Inventioni Diverse*", um livro de sua autoria que contemplava a coletânea de problemas já solucionados por ele ao longo das disputas e da rotina de estudos; abordava também aspectos autobiográficos, e explicitava rispidamente sua versão na desavença com Cardano.

Em reposta ao "*Quesiti e Inventioni Diverse*", Ferrari publicou em 1547 um espécie de panfleto buscando resguardar a boa imagem de seu mestre e isso estimulou Tartaglia a publicar um panfleto também, como forma de rebater a audácia do discípulo de Cardano.

Novamente, Ferrari sentiu-se no dever de responder com a publicação de mais um panfleto. Enfim, o "duelo" de panfletos teve duração de um ano, dando origem a produção de 12 panfletos (seis de cada um) e os conduziu para uma disputa mais séria. Tal disputa aconteceu em Milão e o desfecho não ficou bem definido, porém, acarretou consequências negativas para Tartaglia, tendo em consideração que as autoridades de Bréscia (onde Tartaglia lecionava) não se deram por satisfeitas com o desempenho do matemático na disputa e decidiram romper seu contrato. Logo após essa grande decepção, o pobre Tartaglia retornou à Veneza para viver uma vida de solidão e faleceu nove anos depois.

O compreensível esforço de Tartaglia pelo reconhecimento na fórmula que solucionava alguns tipos de equações cúbicas de nada foi útil. O mérito pela grande descoberta foi dado totalmente a Girolamo, o método ficou conhecido como Fórmula de Cardano.

Embora a história revele que Cardano se sujeitou a várias outras situações que envergonham a honra de homem, não há o que refutar no fato de que a publicação do livro "*Ars Magna*" foi um grande passo para as futuras descobertas no campo da Matemática. Sobre isso, Garbi (2010, p. 34) [9] revela: "Cardano legou à posteridade um livro que, à época, era sem dúvida o maior compêndio algébrico existente". Enquanto Boyer (2012) [4] afirma que a publicação desta obra somada a publicação de "*Practica Arithmetice*", meia dúzia de anos antes, o tornaram o mais competente algebrista da época na Europa.

Sendo apropriados ou não os elogios concedidos a Cardano, a verdade é que a publicação de "*Ars Magna*" gerou grandes esperanças entre os intelectuais da época, uma vez que conhecida a Fórmula de Cardano, os matemáticos acreditavam que estava resolvido o problema das equações de terceiro grau. No entanto, as esperanças deram lugar a um mar de dúvidas. Muitos problemas foram surgindo à medida que a fórmula de Cardano era utilizada para solucionar algumas equações cúbicas. Um dos principais questionamentos levantados é como poderia a fórmula de Bhaskara fornecer duas raízes nas equações de 2° grau e a fórmula encontrada para as equações de 3° grau apresentar uma única raiz. (GARBI, 2010) [9].

Na fala de Boyer (2012) [4] é possível constatar que o próprio Cardano se viu desafiado ao aplicar o método em alguns exemplos de equações cúbicas, tais como a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. Sem muitos esforços, é possível inferir que $x = 4$ é uma raiz, contudo, aplicando a fórmula obtém-se $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, ou seja, a equação do 3° grau apresentava uma solução real explícita ($x = 4$), mas a utilização da fórmula apresentava raízes quadradas de números negativos no desenvolvimento da solução. As circunstâncias dos fatos eram de uma natureza intrigante, Cardano não conseguia compreender como sua fórmula poderia fazer sentido naquela situação, pois, sempre que se deparava com as raízes quadradas de números negativos concluía que o resultado do problema era "tão sútil quanto inútil".

Nos diferentes segmentos da sociedade, na maioria das vezes, o novo é tido como inadequado e difícil de ser admitido, essa postura também é muito observada no processo de desenvolvimento da Matemática, a julgar pela dura possibilidade de aceitação na extensão do conceito de número, tendo em vista que houve impacto à medida que o conhecimento colocava em pauta a existência dos números inteiros, racionais, irracionais e o mesmo estava ocorrendo com os números complexos.

Ainda nesse contexto, Garbi (2010) [9] complementa:

> Aqui estava uma questão realmente séria e que não poderia ser simplesmente ignorada. Quando, nas equações do 2° grau, a fórmula de Bhaskara levava a raízes quadradas de números negativos, era fácil dizer que aquilo indicava a inexistência de soluções. Agora, entretanto, estava-se diante de equações do 3° grau com soluções evidentes, mas cuja determinação passava pela extração de raízes quadradas de números negativos. (GARBI, 2010, p. 48).

De fato, o êxito na compreensão do desenvolvimento de cúbicas que apresentavam raízes quadradas de números negativos exigiam um entendimento além do que se conhecia na época, em outras palavras, era necessário o conhecimento sobre operações com os números complexos.

A espera pelos primeiros estudos acerca dos números complexos foram sendo consolidados ao longo dos séculos XVI, XVII, XVIII e início do XIX. E o personagem por trás da publicação das primeiras ideias é Rafael Bombelli (1526-1572), um engenheiro hidráulico natural da Bolonha, Itália. A partir do estudo de publicações sobre Álgebra, Bombelli buscou associar o resultado encontrado por Girolamo ao aplicar a fórmula de Cardano na equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ com a raiz $x = 4$. Em detalhe, ele revelou em 1572 no livro "*L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica*" que sua técnica fundamentava-se em um "pensamento rude" onde $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ eram respectivamente números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, ou seja, eles seriam o que identificamos atualmente como números complexos conjugados que conduziram ao resultado $x = 4$.

Para que seja possível a compreensão do raciocínio de Bombelli, Garbi (2010) [9] nos informa que ele escreveu:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$$

e concluiu que a=2 e b=1 visto que

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3.2^2.\sqrt{-1} + 3.2.(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3$$

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} + (-6) + (-\sqrt{-1})$$

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2+11\sqrt{-1}$$

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2+\sqrt{-121}.$$

De maneira análoga

$$(2-\sqrt{-1})^3 = 2-\sqrt{-121}.$$

Logo,

$$x = (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4.$$

Além dos desenvolvimentos de cálculos, Bombelli elaborou algumas regras para serem trabalhadas com $\sqrt{-1}$ (GARBI, 2010) [9].

Diante das ideias lançadas, não há dúvidas quanto ao grande papel desempenhado por Rafael Bombelli para que fosse possível a obtenção dos resultados disponíveis atualmente no estudo dos Números Complexos.

Outra personalidade a divulgar ideias sobre o conjunto de números em questão foi René Descartes (1596-1650), nascido em La Haye, na França, tornou-se conhecido por seu gosto peculiar pela vaidade, contato com a nobreza, fama e polêmicas. Em contrapartida, desenvolveu respeitáveis trabalhos na Filosofia, Psicologia e na Matemática, sendo considerado o co-inventor da Geometria Analítica. A citação de seu nome no seguimento da história dos números complexos, deve-se a sua denominação de "número imaginário" para $\sqrt{-1}$ e sua declaração publicada em "*La Géométrie*" de 1637 (apêndice de seu livro "Discurso sobre o Método para bem conduzir a Razão e encontrar a Verdade nas Ciências"): "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias".

De acordo com Garbi (2010) [9] e Boyer (2012) [4], pode-se afirmar que no século XVIII surgiu outro grande nome para compor a lista de intelectuais que dedicaram atenção ao estudo dos números complexos, Leonhard Euler (1707-1783), nascido em Basileia, Suíça, foi pai de 13 filhos e ficou conhecido por sua personalidade gentil e bem humorada. No meio científico é lembrando por sua memória prodígio, talento universal e facilidade em dominar vários idiomas. Aos vinte e seis anos já era considerado o principal matemático da Academia de S. Pertersburgo na Rússia. Atualmente é famoso por ser lembrado como o matemático que mais publicou obras, estima-se que ultrapassou 800 trabalhados sobre diferentes áreas: Cálculo, Álgebra, Teoria dos Números, Mecânica, Teoria das Probabilidades, Topologia, Música, Números Complexos, etc. Sua habilidade matemática era admirável e por essa razão foi dito que ele "calculava com a facilidade com que os outros respiram". A propósito, sua dedicação no estudo dos números complexos o fez introduzir o i como forma de representação de $\sqrt{-1}$, além de aquirir o mérito em ser apontado como o homem que dominou os referidos números.

Em conformidade com Dante (2016) [8] podemos citar ainda o suíço Jean-Robert Argand (1768-1822) que elaborou a representação geométrica dos números complexos em 1806. No entanto, Argand não era um matemático famoso o suficiente para ter notoriedade em suas publicações. Foi somente cerca de 30 anos depois que o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) adotou essa representação e divulgou em seus trabalhos que as ideias tornaram-se reconhecidas. Tal representação refere-se ao plano cartesiano no qual estão representados os números complexos, atualmente conhecido como "plano complexo" ou "plano de Argand-Gauss", tendo vista que alguns pesquisadores defendem que os idealizadores chegaram às mesmas ideias sobre a representação dos números complexos no plano.

A respeito do legado deixado por Friedrich Gauss, Garbi (2010) [9] o destaca como o maior matemático de todos os tempos, além de descrever com riqueza de detalhes fatos surpreendentes sobre a habilidade de Gauss na matemática e nos explica também que

> Quando se estuda a obra matemática de Gauss tem-se a sensação de que em todos os campos onde atuou ele não apenas fez o melhor possível mas, também, nada deixou para que os outros no futuro, viessem a superá-lo. Assim, por exemplo, aconteceu com seu doutoramento, aos 21 anos, em 1799, quando apresentou o que ainda hoje é considerado por muitos a maior tese de doutorado em Matemática de todos os tempos. Ela nos interessa diretamente por ser o mais importante dos alicerces da teoria das equações algébricas e é conhecida como o ***Teorema Fundamental da Álgebra*** (denominação dada pelo próprio Gauss). Este teorema afirma que ***toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz***. (GARBI, 2010, p. 114, grifo do autor) .

Sobre a quantidade de raízes das equações polinomiais, Cardano presumia que as equações de terceiro grau possuíam três raízes e as do quarto grau possuíam quatro raízes. Outros matemáticos ousaram enunciar que uma equação polinomial de grau n possuía exatamente n raízes, mas não conseguiram demonstrar tal afirmação. Em 1746 o matemático francês Jean Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) apresentou uma prova para o mencionado teorema. No entanto, Gauss afirmou em sua tese que a demonstração apresentada por d'Alembert, anos antes, era "insatisfatória e ilusória" , além disso, expôs uma demonstração irrefutável do Teorema Fundamental da Álgebra. ***"Portanto, ao demonstrar que as equações polinomiais têm pelo menos uma raiz no campo complexo, Gauss demonstrou que elas têm exatamente*** n ***raízes, sendo*** n ***o grau do respectivo polinômio"***. (GARBI, 2010, p. 116, grifo do autor) [9].

Neste capítulo nos foi dada a oportunidade de conhecer a curiosa narrativa que nos leva a descoberta das equações cúbicas e dos números complexos, a qual contempla também os principais personagens e fatos que tornaram este apanhando histórico surpreendente. No próximo capítulo estudaremos a definição de Polinômios com Coeficientes em Anéis sob uma perspectiva geral e, para isso, inicialmente, será feita a revisão de conceitos essenciais para o entendimento deste conteúdo.

2. Polinômios

2.1.Noções Preliminares

Nesta seção faremos um estudo sucinto e acanhado de algumas estruturas algébricas fundamentais para o estudo de Polinômios com Coeficientes em Anéis. Apresentamos a definição formal de anel, anel comutativo, anel com unidade, anel sem divisores de zero, domínio, subanel, corpo e subcorpo, além disso, exploramos alguns exemplos úteis para melhor compreensão destes conceitos.

Ressaltamos que o nosso estudo não tem por objetivo a demonstração dos resultados acerca dos conteúdos anteriormente mencionados, contudo, a exposição minuciosa e detalhada de tais resultados poderá ser encontrada nas referências que apoiam as ideias expressas nesta seção, a saber: Cavalcante (2015) [7], Gonçalves (2013) [11], Hefez e Villela (2018) [14], Janesch e Taneja (2011) [17] e Marques (1999) [23].

2.1.1.Anéis

Definição 2.1.1. Seja A um conjunto não vazio no qual estão definidas duas operações, *soma* e *produto*, denotadas respectivamente por $+$ e $\cdot$, assim, segue que

$$\begin{array}{rcl} + : A \times A & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : A \times A & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \longmapsto & x \cdot y. \end{array}$$

A terna $(A, +, \cdot)$ será um anel se satisfizer os seguintes axiomas para quaisquer $x, y, z \in A$:

(i) *Comutatividade da soma*: $x + y = y + x$.

(ii) *Associatividade da soma*: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(iii) *Existência do elemento neutro da adição*: Existe $0_A \in A$ tal que $x + 0_A = 0_A + x = x$.

(iv) *Existência do simétrico aditivo*: Para todo $x \in A$ existe um único $(-x) \in A$, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(v) *Associatividade do produto*: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(vi) *Distributividade do produto*: $x \cdot (y + z) = x \cdot y \; + \; x \cdot z$ e $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

Um anel $(A, +, \cdot)$ munido das operações "+" e "·" pode ser denotado apenas por A. Para efeitos de simplificação, em alguns momentos poderemos usar a segunda denotação para se referir a um anel $(A, +, \cdot)$.

Observação.

1) No axioma (iii), o elemento 0_A é dito *elemento neutro* ou simplesmente, o *zero* do anel A. Nas ocasiões em que apenas o anel A for considerado, será escrito 0 ao invés de 0_A.

2) O elemento $-x \in A$, observado no axioma (iv), é chamado *simétrico* do elemento $x \in A$. Dessa forma, se $x, y \in A$ então $x, -y \in A$, logo, é possível efetuar a operação $x+(-y)$. Visando a simplificação de escrita, poderemos adotar $x-y$ para indicar $x+(-y)$, ou seja, $x + (-y) = x - y$. Chamamos de *subtração* em A a operação que a cada $(x, y) \in A \times A$ associa $x - y \in A$, em símbolos

$$\begin{array}{rccl} - \;:\; & A \times A & \longrightarrow & A \\ & (x, y) & \longmapsto & x - y. \end{array}$$

Exemplo 2.1.1. Os conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, e $\mathbb{C}$ com as operações de adição e multiplicação usuais são exemplos de anéis.

É importante destacar que alguns anéis podem apresentar condições adicionais, sendo assim, quando isto ocorrer eles receberão nomes específicos.

Definição 2.1.2. Um anel A é *comutativo* quando

$$x \cdot y = y \cdot x, \text{ para todo } x, y \in A.$$

Definição 2.1.3. Um anel A é dito *unitário* ou *com unidade* se existir

$$1_A \in A, \text{ tal que } 1_A \cdot x = x \cdot 1_A = x, \text{ para todo } x \in A.$$

Nessas condições, o elemento 1_A é único, podendo ser chamado de unidade do anel A. Caso não haja possibilidade de confusão sobre o anel considerado, podemos indicar a unidade do anel A apenas por 1 em vez de 1_A.

Observação. Dizemos que A é um anel com *divisor de zero*, se existe $x, y \in A$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$, tal que $x \cdot y = 0$ ou $y \cdot x = 0$.

Definição 2.1.4. Um anel A é um anel *sem divisor de zero* quando

$$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0, \text{ para } x, y \in A.$$

Definição 2.1.5. Um *domínio de integridade* é um anel comutativo, unitário, e sem divisores de zero.[1]

[1] As expressões "anel de integridade" e "domínio" poderão também ser utilizadas para designar que o anel é um domínio de integridade.

Definição 2.1.6. Um *corpo* K é um anel comutativo com unidade que satisfaz a seguinte propriedade

$$\text{Para todo } x \in K, \text{ com } x \neq 0, \text{ existe } y \in K, \text{ tal que } x \cdot y = y \cdot x = 1.$$

Na Definição 2.1.6, o elemento y é chamado de *inverso* do elemento $x \in A$. Dessa forma, teremos que um elemento $x \neq 0$ de um anel A é dito *invertível* ou que apresenta inverso se, e somente se, existir $y \in A$, tal que $x \cdot y = 1$. Logo, podemos dizer que um corpo é um anel com unidade e comutativo, de forma que todo elemento diferente de zero possui inverso.

Observação. O termo *simétrico* quando utilizado na adição usual é chamado de *simétrico aditivo*, representando o termo que adicionado a um outro fornece o elemento neutro da adição, o zero. Ao usarmos a palavra *simétrico* na multiplicação usual, ela fará referência ao *simétrico multiplicativo* que é quando multiplicamos um número ao seu oposto e o resultado dessa multiplicação é 1, o elemento neutro da multiplicação. De maneira análoga, utiliza-se o termo *inverso*, que na adição é dito *inverso aditivo* e na multiplicação é mencionado como *inverso multiplicativo*. Diante da pluralidade de terminologia, usaremos apenas simétrico para designar *simétrico aditivo* e *inverso* para representar o *inverso multiplicativo*.

Exemplo 2.1.2. Com as operações usuais de $+$ (soma) e $\cdot$ (produto), $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo, uma vez que é um anel comutativo com unidade e para todo $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 0$, existe $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$, ou seja, todo elemento não nulo tem inverso.

Diante do que foi exposto, podemos destacar alguns resultados importantes, tais como o da Proposição a seguir.

Proposição 2.1.1. Se K é um corpo, então K é um domínio.

O próximo exemplo nos garante que a recíproca da Proposição 2.1.1 não é verdadeira. Em outras palavras, existe domínio que não é corpo.

Exemplo 2.1.3. Com as operações usuais, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é domínio que não é corpo. De fato, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é domínio, pois é comutativo, sem divisores de zero e possui unidade. Contudo, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não é corpo, pois $2 \in \mathbb{Z}$, no entanto, não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $2 \cdot x = 1$.

Exemplo 2.1.4. São também exemplos de corpos $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Vejamos agora algumas propriedades elementares de anéis.

Proposição 2.1.2. Seja A um anel e $x, y, z \in A$, vale as seguintes propriedades:

(1) A lei do cancelamento é válida para a soma, assim, se $\cancel{x} + y = \cancel{x} + z$, então $y = z$.

(2) O zero, elemento neutro aditivo, é único.

(3) O simétrico é único.

(4) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

(5) $-(-x) = x$.

(6) $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

(7) $y = z \Rightarrow x \cdot y = x \cdot z$ e $y \cdot x = z \cdot x$.

(8) $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$.

(9) $(x - y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z$.

(10) $-(x + y) = -x - y$.

(11) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Casos em que o anel A tem unidade, vale a Proposição a seguir.

Proposição 2.1.3. Seja A um anel unitário, temos que:

(1) A unidade é única.

(2) Se $x \in A$, $x \neq 0$ e x possui inverso em A, então o inverso de x é único.

(3) Se um anel unitário A tem $1_A = 0$, então $A = \{0\}$ é chamado de *anel trivial*.

Definição 2.1.7. Seja A um anel, com $x \in A$ e $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \neq 0$, definimos:

(1) Se o anel A tem unidade, então defini-se $x^0 = 1_A$.

(2) $x^1 = x$.

(3) $x^{n+1} = x^n \cdot x, \ n \geq 1$.

Proposição 2.1.4. Seja A um anel, $x, y \in A$ e $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Segue que:

(1) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

(2) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.

(3) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$, sempre que $x \cdot y = y \cdot x$.

2.1.2.Subanéis e Subcorpos

Definição 2.1.8. Seja A um anel. Consideramos um subconjunto B do anel A que é diferente de vazio e fechado para operações $+$ e $\cdot$ de A. Dizemos que B é um *subanel* de A quando

(1) As operações de A são operações em B, ou seja, se $x, y \in B$, então $x + y \in B$ e $x \cdot y \in B$.

(2) B é um anel.

Em outras palavras, B será um subanel de A se admitindo as operações de A, B permanecer ainda sendo um anel. É importante salientar que todo anel A possui pelo menos dois subanéis, os chamados *subanéis triviais*, são eles $\{0\}$ e o próprio A.

Na proposição a seguir veremos um critério para que um subconjunto B de um anel A possa ser dito um subanel do anel A.

Proposição 2.1.5. Seja A um anel. Seja B um subconjunto do anel A. Teremos que B é um subanel de A se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

(1) $0 \in B$ (o elemento neutro aditivo de A pertence a B).

(2) Se $x, y \in B$, então $x - y \in B$ (B é fechado para a diferença).

(3) Se $x, y \in B$, então $x \cdot y \in B$ (B é fechado para o produto).

Observação. Dado um anel A e um subconjunto B do anel A, se B for um subanel de A, indicaremos por $B \subseteq A$.

Exemplo 2.1.5. Com as operações usuais $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é subanel de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é subanel de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um subanel de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Em símbolos $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Exemplo 2.1.6. O conjunto dos números pares $P = \{2k; k \in \mathbb{Z}\}$ é um subanel de $\mathbb{Z}$. Dado que a diferença e o produto de números pares sempre resultará em um número par.

Exemplo 2.1.7. O conjunto dos números ímpares $I = \{2k + 1; k \in \mathbb{Z}\}$ não é um subanel de $\mathbb{Z}$. Com efeito, $1 \in I$ e $5 \in I$, no entanto, $5 - 1 = 4 \notin I$.

Proposição 2.1.6. Seja A um anel e B um subanel do anel A.

(1) Se o anel A é comutativo então B é comutativo.

(2) Se A é sem divisores de zero então B é sem divisores de zero.

Vale destacar que o anel e o subanel têm a mesma unidade. Assim, dizemos que o subanel é *subanel unitário* do anel.

Observa-se que todo subanel A de $\mathbb{C}$ contém necessariamente $\mathbb{Z}$, já que possui 0 e 1, além de ser fechado para as operações de adição e subtração. Posto isso, $\mathbb{Z}$ é um subanel de A. Além disso, tendo em vista que $\mathbb{C}$ é um domínio de integridade, pode-se afirmar que todo subanel de $\mathbb{C}$ é também um domínio de integridade.

Definição 2.1.9. Se B for um subconjunto de um corpo K, que estando munido das operações de adição e multiplicação de K continua ainda sendo um corpo, diremos que B é um *subcorpo* de K.

Exemplo 2.1.8. O corpo $\mathbb{Q}$ é um subcorpo $\mathbb{R}$ e o corpo $\mathbb{R}$ é um subcorpo de $\mathbb{C}$. Ademais, o corpo $\mathbb{Q}$ também é um subcorpo de $\mathbb{C}$.

2.2.Definição de Polinômio a partir da Estrutura Algébrica Anel

Estudamos na seção 2.1 que um anel é um conjunto diferente de vazio, no qual estão definidas operações que satisfazem propriedades bem determinadas. Assim, a definição de anel sucede do desejo em buscar conhecer conjuntos que contenham propriedades aritméticas bem definidas e que nos permitem fazer contas.

À vista disso, nesta seção estudaremos Polinômios com Coeficientes em Anéis e Corpo de Frações, para que se tenha acesso a conceitos bem definidos primariamente à respeito das operações de adição e multiplicação de polinômios. A compreensão de tais conceitos será essencial para o estudo de polinômios do terceiro grau e equações cúbicas, assunto do terceiro capítulo.

As referências que deram suporte à escrita desta seção foram: Araújo (2009) [3], Gonçalves (2013) [11], Hefez e Villela (2018) [14], Iezzi (2014) [15], Marques (1999) [23] e Villela (2009) [30].

2.2.1.Polinômios com coeficientes em Anéis

Seja A um anel. Dado um símbolo x que não pertence ao anel A, este será chamado de *indeterminada sobre* A.

Para cada número $j \geq 0$ pertencente ao conjunto dos naturais, empregaremos um símbolo x^j, e será escrito x^j para representar $x^{j-1} \cdot x$, desse modo, $x^0 = 1$ e $x^1 = x$.

Definição 2.2.1. Um *polinômio* $f(x)$ *com coeficientes em* A é dado por

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,$$

em que n é um número natural e $a_j \in A$, para todo $0 \leq j \leq n$.

Posto que $0 \leq j \leq n$, os elementos a_j são denominados de *coeficientes* do polinômio $f(x)$. Cada uma das parcelas $a_j x^j$ corresponde a um *termo*, sendo a_0 o *termo constante* e os termos $a_j x^j$ tais que $a_j \neq 0$ são os *monômios de grau* j do polinômio $f(x)$.

Para representar o conjunto de todos os polinômios com coeficientes no anel A, usamos $A[x]$, isto é,

$$A[x] = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n ; a_j \in A, 0 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Temos um *polinômio constante* quando $f(x) = a_0$. Já o *polinômio nulo* é aquele que apresenta todos os coeficientes iguais a zero, ou seja, $f(x) = 0$, é uma expressão da forma

$$f(x) = 0 + 0x + ... + 0x^n, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

É convencional não escrever o termo $a_j x^j$ sempre que $a_j = 0$, quando o polinômio apresentar algum termo não-nulo.

Vale ressalvar que na escrita de um polinômio, suas j-ésimas potências de x poderão aparecer organizadas sem preocupação quanto à ordem, entretanto, é preferível que estas se apresentem respeitando um ordenamento crescente ou decrescente.

Exemplo 2.2.1. Dados os números inteiros $a_0 = 5$, $a_1 = -2$, $a_2 = 4$, $a_3 = -1$, temos $f(x) = 5 - 2x + 4x^2 - x^3$ que consiste em um polinômio pertencente ao conjunto de todos os polinômios com coeficientes no anel $\mathbb{Z}$ e escrevemos $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Exemplo 2.2.2. Dados os números reais $a_0 = \pi$, $a_1 = \sqrt{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -2$, temos $g(x) = \pi + \sqrt{2}x - 2x^3$ que consiste em um polinômio pertencente ao conjunto de todos os polinômios com coeficientes no anel $\mathbb{R}$ e escrevemos $g(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Exemplo 2.2.3. As expressões $u(x) = x^{-3} + 2\sqrt{x} - x^5$ e $v(x) = 2\sqrt[3]{x} - 3x^3 + 5$ não são polinômios, dado que nem todos os expoentes da indeterminada x são naturais.

É possível grafarmos o polinômio

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in A[x]$$

como

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + ... + 0x^m,$$

para todo m,n $\in \mathbb{N}$ tal que m $>$ n. Sendo assim, ao compararmos dois polinômios $f(x)$, $g(x) \in A[x]$, é possível assumir que os termos de ambos possuem as mesmas potências de x.

Definição 2.2.2. Sejam $f(x) \in A[x]$ e $g(x) \in A[x]$ dois polinômios definidos por

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x + ... + a_nx^n \text{ e}$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x + ... + b_nx^n,$$

dizemos que eles são *polinômios iguais* se, e somente se, $a_j = b_j$ para todo $0 \leq j \leq n$. Denotamos $f(x) = g(x)$. Casos em que $f(x)$ e $g(x)$ *não são iguais* decorrem da existência de algum número natural j em que $a_j \neq b_j$, com $0 \leq j \leq n$.

Exemplo 2.2.4. Dados os polinômios $h(x) = 3x^4 - x^2 + 2x - 4$, $r(x) = x^5 - 2x^3 - 5x - 4$ e $t(x) = -4 + 2x - x^2 + 3x^4$, podemos identificar que $h(x) = t(x)$, pois, seus coeficientes a_j das j-ésimas potências x^j são idênticos. Em contrapartida, $h(x) \neq r(x)$ e $t(x) \neq r(x)$, pelo fato dos coeficientes dos termos serem diferentes.

Se $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + ...$ é tal que $a_n \neq 0$ e $a_j = 0$ para todo $j > n$, indicamos n como o *grau do polinômio* $f(x)$, escrevemos $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x + ... + a_nx^n$, e denotamos por $gr(f(x)) = n$ para evidenciar que o grau de f é n. Neste caso, a_n é chamado de *coeficiente líder* de $f(x)$.

São chamados de *polinômios mônicos* àqueles cujo coeficiente líder é a unidade do anel, ou seja, o polinômio tem grau n e possui coeficiente líder $a_n = 1$.

Observação. Não definimos o grau do polinômio que apresenta todos os coeficientes iguais a zero, polinômio nulo, $f(x) = 0$.

Exemplo 2.2.5. O polinômio $s(x) = 3$ não é identicamente nulo e tem $gr(s(x)) = 0$. Os Exemplos 2.2.1 e 2.2.2 apresentam $gr(f(x)) = gr(g(x)) = 3$. Revendo o Exemplo 2.2.4, é possível identificar que $gr(h(x)) = gr(t(x)) = 4$ e $gr(r(x)) = 5$.

Mediante ao que já foi exposto, pode-se destacar que:

$$gr(f(x)) = 0 \text{ se, e somente se, } f(x) = a \neq 0,\ a \in A.$$

A partir das operações de adição e multiplicação de A, somos capazes de definir operações de adição e multiplicação no conjunto $A[x]$.

Definição 2.2.3. Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j$ em $A[x]$. Define-se a operação de *adição* dos polinômios $f(x)$ e $g(x)$ em $A[x]$ por

$$f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{n} c_jx^j, \text{ onde } c_j = a_j + b_j, \text{ para } 0 \leq j \leq n.$$

Chama-se de *soma* o resultado da adição de dois polinômios.

Exemplo 2.2.6. Sejam $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x + 3$, $g(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ e $h(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ em $\mathbb{Z}[x]$. Então,

$$\begin{aligned}
f(x) + g(x) &= (-2+3)x^3 + (3+4)x^2 + (-1+2)x + (3+(-1)) \\
&= x^3 + 7x^2 + x + 2. \\
f(x) + h(x) &= (-2+2)x^3 + (3+(-5))x^2 + (-1+3)x + (3+(-5)) \\
&= 0x^3 - 2x^2 + 2x - 2 \\
&= -2x^2 + 2x - 2.
\end{aligned}$$

Na adição de polinômios é válida a seguinte propriedade do grau: Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, com $a_n \neq 0$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, com $b_m \neq 0$. Se $f(x) + g(x) \neq 0$ então

$$gr(f(x) + g(x)) \leq max\left\{gr(f(x)), gr(g(x))\right\} = max\left\{n, m\right\},$$

ficando a igualdade válida sempre que $gr(f(x)) = n \neq m = gr(g(x))$.

Definição 2.2.4. Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ em $A[x]$. Definimos a *multiplicação* dos polinômios $f(x)$ e $g(x)$ em $A[x]$ por

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j$$

em que

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 \cdot b_0 \\
c_1 &= a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 \\
c_2 &= a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 \\
&\vdots \\
c_j &= a_0 \cdot b_j + a_1 \cdot b_{j-1} + ... + a_j \cdot b_0 = \sum_{\lambda+\mu=j} a_\lambda \cdot b_\mu \\
&\vdots \\
c_{n+m} &= a_n \cdot b_m.
\end{aligned}$$

Chama-se de *produto* o resultado da multiplicação de dois polinômios.

Observação. Em consequência da definição de multiplicação de polinômios, verifica-se que:

(1) Para quaisquer n, $m \in \mathbb{N}$, vale a identidade: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$.

(2) Se $f(x) = a$ e $g(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m$, então

$$\begin{aligned}
f(x) \cdot g(x) = a \cdot g(x) = a \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) &= \sum_{j=0}^{m} (a \cdot b_j)\, x^j \\
&= (a \cdot b_0) + (a \cdot b_1)\, x + ... + (a \cdot b_m)\, x^m,
\end{aligned}$$

pois, no caso em questão, $a_0 = a$, $n = 0$ e $c_j = a_0 \cdot b_j = a \cdot b_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Nesta ocasião, vejamos que a adição e a multiplicação de polinômios em $A[x]$ possuem propriedades que decorrem das propriedades da adição e da multiplicação do anel A.

Proposição 2.2.1. A adição e a multiplicação em $A[x]$ possuem as seguintes propriedades, para quaisquer $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ em $A[x]$:
(*Associatividade*) $(f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x))$ e
$(f(x)\cdot g(x))\cdot h(x) = f(x)\cdot(g(x)\cdot h(x))$;
(*Comutatividade*) $f(x)+g(x) = g(x)+f(x)$ e
$f(x)\cdot g(x) = g(x)\cdot f(x)$;
(*Distributividade*) $f(x)\cdot(g(x)+h(x)) = f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot h(x)$;
(*Existência de elemento neutro aditivo*) O polinômio nulo é tal que $f(x) = 0+f(x) \in A[x]$;
(*Existência de simétrico*) Seja $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, o polinômio simétrico de $f(x)$ é o polinômio

$$-f(x) = (-a_0) + (-a_1)x + ... + (-a_n)x^n;$$

(*Existência de elemento neutro multiplicativo*) O polinômio constante 1 é tal que $1\cdot f(x) = f(x)$, para todo $f(x) \in A[x]$.

Considerando as propriedades das operações de $A[x]$, apresentadas da Proposição 2.2.1, podemos afirmar que, o conjunto dos polinômios $A[x]$, munido das operações de adição e multiplicação apresentadas nas Definições 2.2.3 e 2.2.4, é um anel. Pelo fato de $A[x]$ estar sobre um anel, dizemos que $A[x]$ é um *Anel de Polinômio*.

Neste seguimento, como $A[x]$ é um Anel de Polinômio, é possível realizar muitas operações em $A[x]$ para encontrar as raízes de polinômios dados. Este fato será bastante útil nos próximos capítulos.

Vejamos o exemplo a seguir, que trata da multiplicação de polinômios.

Exemplo 2.2.7. Sejam $f(x) = x^3+2x^2+3x-5$ e $g(x) = 2x^2+3x+1$ em $\mathbb{Z}[x]$. Então,

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) &= (x^3+2x^2+3x-5)\cdot(2x^2+3x+1) \\ &\overset{(1)}{=} x^3\cdot(2x^2+3x+1)+2x^2\cdot(2x^2+3x+1)+3x\cdot(2x^2+3x+1)+ \\ &\quad (-5)\cdot(2x^2+3x+1) \\ &\overset{(2)}{=} (2x^5+3x^4+x^3)+(4x^4+6x^3+2x^2)+(6x^3+9x^2+3x)+(-10x^2-15x-5) \\ &\overset{(3)}{=} 2x^5+(3+4)x^4+(1+6+6)x^3+(2+9-10)x^2+(3-15)x-5 \\ &\overset{(4)}{=} 2x^5+7x^4+13x^3+x^2-12x-5 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

As igualdades acima foram assim obtidas:

(1) distribuição das parcelas de $f(x)$ na multiplicação por $g(x)$;

(2) obtenção do produto de cada multiplicação dos termos de $f(x)$ pelos termos de $g(x)$;

(3) utilização da definição da adição de polinômios;

(4) adição dos coeficientes das parcelas de x que possuem o mesmo expoente.

Voltando ao Exemplo 2.2.7 podemos observar que

$$gr(f(x) \cdot g(x)) = gr(f(x)) + gr(g(x)) = 5. \tag{2.1}$$

A igualdade 2.1 é justificada pela seguinte propriedade do grau em $A[x]$: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios não nulos em $A[x]$, em que A é um domínio de integridade. Se $f(x)$ possuir coeficiente líder a_n e $g(x)$ tiver como coeficiente líder b_m, então o polinômio $f(x) \cdot g(x)$ apresentará $a_n \cdot b_m$ como coeficiente líder. Isto ocorre porque $a_n \neq 0$ e $b_n \neq 0$ são elementos não nulos de um domínio de integridade, e assim, seu produto também é não nulo. De maneira particular, se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios não nulos, então $f(x) \cdot g(x)$ é não nulo, e neste caso, $A[x]$ também é um domínio de integridade. Ademais,

$$gr(f(x) \cdot g(x)) = gr(f(x)) + gr(g(x)).$$

A referida propriedade é denominada de *propriedade multiplicativa do grau.*

Observação. Vale salientar que, se A não é um domínio de integridade, mas possui o coeficiente líder de $f(x)$ ou de $g(x)$ invertível, a propriedade multiplicativa do grau será válida.

2.2.2. Corpo de Frações

Vimos na Subseção 2.1.1 , Exemplo 2.1.3, que o conjunto dos números inteiros é um domínio de integridade, isto é, o conjunto $\mathbb{Z}$ é anel unitário, comutativo e sem divisores de zero. Dessa forma, o anel dos inteiros satisfaz a *lei do cancelamento*:

$$\text{Se } a,\ b,\ c \in \mathbb{Z},\ a \neq 0 \text{ e } \cancel{a} \cdot b = \cancel{a} \cdot c, \text{ então } b = c.$$

De fato, se $a \cdot b = a \cdot c$, teremos que $0 = a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$, com $a \neq 0$, daí $b - c = 0$ e $b = c$. Ainda, no estudo do anel dos inteiros percebe-se que apenas 1 e -1 possuem inversos. Ou seja, $1 \cdot 1 = 1$ e $(-1) \cdot (-1) = 1$, logo, o inverso multiplicativo de 1 é ele mesmo e o inverso multiplicativo de -1 é o próprio -1. Em virtude disso, o conjunto $\mathbb{Z}$ não é um corpo.

Definimos o conjunto dos números racionais por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\},$$

em que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a_1}{b_1}$ se, e somente se, $a \cdot b_1 = b \cdot a_1$.

Todo elemento da forma $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ é denominado de *fração*, onde a é chamado de *numerador* e b de *denominador* da fração.

No conjunto dos racionais as operações de adição e multiplicação são definidas, respectivamente, por

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot c} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$

de forma que as operações de adição e multiplicação no numerador e no denominador das frações são as operações dos inteiros. Se

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} \text{ e } \frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1},$$

então

$$\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1}{b_1 \cdot d_1} \quad e \quad \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a_1 \cdot c_1}{b_1 \cdot d_1},$$

haja vista que a soma e produto independem da representação da fração e os produtos cruzados são coincidentes.

Considerando-se essas operações, verifica-se que o conjunto $\mathbb{Q}$ é um corpo que compreende $\mathbb{Z}$ como um subanel. Assim, os elementos do conjunto $\mathbb{Z}$ podem ser encarados como frações cujo denominador é 1. Ainda, $\mathbb{Q}$ é o menor corpo que contém $\mathbb{Z}$ como subanel, logo, se L é um corpo que contém $\mathbb{Z}$ como subanel, então $\mathbb{Q}$ está contido em L, em símbolos, $\mathbb{Q} \subset L$. O conjunto $\mathbb{Q}$ é conhecido como *corpo das frações* de $\mathbb{Z}$.

A mesma construção serve para o anel $F[x]$, em que F é um corpo qualquer.

Em $F[x]$, se $f(x) \cdot g(x) = 0$, consequentemente $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$. Vale destacar que os elementos do anel $F[x]$ que possuem inverso são os elementos invertíveis de F. De forma similar ao caso do anel dos inteiros, a *lei do cancelamento* é valida em $F[x]$:

Se $f(x), g(x), h(x) \in F[x], f(x) \neq 0$ e $f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot h(x)$, então $g(x) = h(x)$.

De fato, se $f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot h(x)$ e $f(x) \neq 0$, teremos que $0 = f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) - h(x))$, por conseguinte $g(x) - h(x) = 0$ e $g(x) = h(x)$.

O conjunto das *funções racionais* pode ser definido por:

$$F(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)}; f(x), g(x) \in F[x] \text{ e } g(x) \neq 0 \right\},$$

em que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ se, e somente se, $f(x) \cdot g_1(x) = g(x) \cdot f_1(x)$.

Definimos as operações de adição e multiplicação em $F(x)$ como:

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{s(x)}{t(x)} = \frac{f(x) \cdot t(x) + g(x) \cdot s(x)}{g(x) \cdot t(x)},$$

e

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{s(x)}{t(x)} = \frac{f(x) \cdot s(x)}{g(x) \cdot t(x)}$$

de forma que as operações de adição e multiplicação do numerador e denominador são operações de $F[x]$. Se

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \text{ e } \frac{s(x)}{t(x)} = \frac{s_1(x)}{t_1(x)},$$

então

$$\frac{f(x) \cdot t(x) + g(x) \cdot s(x)}{g(x) \cdot t(x)} = \frac{f_1(x) \cdot t_1(x) + g_1(x) \cdot s_1(x)}{g_1(x) \cdot t_1(x)}$$

e

$$\frac{f(x) \cdot s(x)}{g(x) \cdot t(x)} = \frac{f_1(x) \cdot s_1(x)}{g_1(x) \cdot t_1(x)},$$

visto que a soma e o produto independem da representação da fração e os produtos cruzados são coincidentes.

Considerando-se essas operações, temos que $F(x)$ é um corpo que compreende $F[x]$ como subanel. Dessa forma, $F[x]$ pode ser encarado como as frações de $F(x)$ cujo denominador é 1. Ainda, $F(x)$ é o menor corpo que contém $F[x]$ como subanel, ou seja, se L é um corpo que contém $F[x]$ como subanel, consequentemente $F(x) \subset L$.

Depois de bem definidas algumas propriedades acerca de Polinômios com Coeficientes em Anéis, podemos, no Capítulo 3, explorar teoremas, definições e propriedades que englobam o estudo de polinômios e equações polinomiais de um ponto vista geral, a fim de direcionar tais conceitos ao estudo de polinômios do terceiro grau e equações cúbicas.

3. Estudo de Polinômios do Terceiro Grau e Equações Cúbicas

Este capítulo aborda características, propriedades e definições de polinômios e equações polinomiais em aspecto geral, contudo, fizemos o direcionamento desses resultados para polinômios e equações de grau três. Apresentaremos ainda a divisão entre polinômios e informações sobre os tipos de raízes de equações polinomiais. As referências que embasam a escrita deste capítulo são: Antar Neto (1982) [2], Campos Filho (2007) [5], Dante (2016) [8], Garbi (2010) [9], Giovanni e Bonjorno (2005) [10], Guimarães (2006) [13], Hefez e Villela (2018) [14], Iezzi (2014) [15], Iezzi (2013) [16], Leonardo (2016) [18], Lima (2006) [20], Lobo (2017) [22], Nascimento (2015) [24], Queiroz (2013) [26], Silva e Barreto (2005) [27] e Souza (2010) [29].

3.1. Classificações

Para garantir maior clareza e compreensão no estudo dos assuntos aqui abordados, neste momento é oportuno enfatizar a sutil diferença entre polinômio, função polinomial e equações polinomiais. Assim, quando falamos de expressão polinomial ou polinômio fazemos referência às expressões da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

onde os números complexos $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são ditos coeficientes do polinômio, o termo independente é a_0, o número n é natural e x é a variável tal que $x \in \mathbb{C}$.

Com relação as funções polinomiais, elas classificam-se como funções definidas por expressões polinomiais, assim, as representamos por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

Observação. Vale lembrar que as funções polinomiais podem ser chamadas apenas de polinômios, uma vez que a cada função polinomial associa-se a um único polinômio e vice-versa, sem que haja prejuízo de interpretação, trataremos as duas nomenclaturas como sinônimas neste trabalho.

Quando trabalhamos com equações algébricas estamos em busca de uma incógnita que torne a equação verdadeira e podemos classificá-las segundo a definição a seguir:

Definição 3.1.1. Uma equação é dita algébrica ou polinomial quando pode ser escrita na forma $f(x) = 0$, de modo que a função $f(x)$ corresponde a um polinômio de grau n que assume a seguinte forma genérica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0,$$

tal que $a_n \neq 0$, onde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são os coeficientes da equação, com $x \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.1.1. Seja $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$, temos um polinômio de coeficientes reais $2, -5, 3$ e -1.

Exemplo 3.1.2. Seja $f(z) = z^3 - 2iz - i$, temos um polinômio de coeficientes complexos $1, -2i$ e $-i$.

Pode-se dizer que um polinômio é formado por variáveis representadas por letras, chamadas de *parte literal*, e números que são chamados de *coeficientes*. Para a melhor compreensão dessa observação, analisemos o exemplo seguinte:

Exemplo 3.1.3. No polinômio de terceiro grau $f(x) = 2x^3$ temos que 2 é o coeficiente e x^3 é a parte literal.

Ainda, vale destacar que um polinômio é estruturado pela multiplicação dos elementos de seus termos e estes podem receber nomes especiais e serem classificados como *monômio*, *binômio* ou *trinômio*. A separação dos termos de um polinômio é comumente caracterizada pelo uso de operadores aritméticos de soma ou subtração.

Assim, um *monômio* é um único termo do polinômio, um *binômio* é um polinômio com apenas dois monômios separados por uma operação aritmética de soma ou subtração e um *trinômio* é um polinômio com três monômios separados por duas operações aritméticas de soma ou subtração. Para os casos em que o polinômio apresenta mais de três termos podemos nos referir a ele apenas como polinômio.

Exemplo 3.1.4. Consideremos os polinômios de grau três $f_1(x) = 4x^3$, $f_2(x) = 2x^3 + 3x^2$ e $f_3(x) = x^3 + 2x^2 - 2$, temos que $f_1(x)$ é um exemplo de monômio, pois apresenta um único termo, $f_2(x)$ é um binômio pois apresenta dois termos e $f_3(x)$ é um trinômio, tendo em vista que ele é composto por três termos.

Na Seção 2.2 foi visto que o grau de um polinômio é indicado por n se $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ...$ é tal que $a_n \neq 0$ e a $a_j = 0$ para todo $j > n$. Assim, podemos compreender que um polinômio de grau três é aquele que possui o número três como o maior expoente dos monômios que compõem o polinômio dado, ou seja, o três é o maior número ao qual a parte literal está elevada.

Exemplo 3.1.5. O polinômio $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ é um polinômio que possui o 3 como o expoente de maior valor da variável x, e isto caracteriza $f(x)$ como um polinômio do terceiro grau. E como foi visto, representamos o grau de f como $gr(f(x)) = 3$. Além disso, podemos dizer que $f(x)$ é um polinômio mônico ou unitário, pois o coeficiente do termo de maior grau, ou seja, o coeficiente líder, é igual a 1.

3.2. Tipos de Polinômios

Podemos classificar um polinômio quanto ao seu tipo em *completo* ou *incompleto*. Os termos dos polinômios do tipo completo são organizados seguindo uma ordem decrescente, ou seja, do maior para o menor, nos expoentes relacionados à variável e não há carência de nenhum termo nesta sequência decrescente de expoentes, em outras palavras, um polinômio completo deverá decrescer do maior expoente, de um em um, até o grau zero, que é o termo independente do polinômio. O exemplo a seguir ilustra estas observações:

Exemplo 3.2.1. O polinômio do terceiro grau $f(x) = 2 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 - 4 \cdot x^1 - 3 \cdot x^0$ é do tipo completo, pois apresenta todos termos e expoentes da variável x ordenados segundo a seguinte sequência decrescente de expoentes: 3, 2, 1 e 0.

Nos polinômios do tipo incompleto observamos a ausência de algum ou alguns termos na sequência decrescente de expoentes, veja o exemplo seguinte:

Exemplo 3.2.2. O polinômio do terceiro grau $g(x) = 2 \cdot x^3 - 4 \cdot x^1 - 3 \cdot x^0$ é do tipo incompleto, pois não apresenta todos os termos e expoentes da variável x. É possível observarmos a ausência do termo correspondente à variável de expoente 2.

Podemos escrever o polinômio $g(x)$ do Exemplo 3.2.2 na forma completa, mas, para que não haja alteração ou prejuízo em $g(x)$, os coeficientes da variável x deverão ser completados com o número zero, assim, a forma completa do polinômio $g(x)$ é dada por: $g(x) = 2 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 4 \cdot x^1 - 3 \cdot x^0$.

Observação. É importante ressaltar que nos casos em que um polinômio apresentar expoente 1 na variável poderemos omiti-lo. Além disso, podemos omitir também a variável quando a mesma apresentar expoente zero. Assim, no Exemplo 3.2.1 , poderíamos escrever o polinômio $f(x)$ apenas como $f(x) = 2x^3 + 12x^2 - 4x - 3$. Logo, visando padronizar a escrita do texto de acordo com as demais obras matemáticas, neste trabalho faremos a omissão do expoente 1 na variável dos polinômios estudados e omitiremos também variáveis de expoentes zero.

3.3. Valor Numérico e Raiz de Polinômios

Definição 3.3.1. Seja a função polinomial $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, diremos que o valor numérico de f para $x = \alpha$ é o número $f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$.

Em outras palavras, a obtenção do valor numérico é feita a partir da substituição da variável x pelo número $\alpha \in \mathbb{C}$ e das operações devidas em f.

Observação. Vejamos que:

(1) Se $\alpha = 1$ teremos que $f(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0$, ou seja, $f(1)$ é igual a soma dos coeficientes do polinômio f.

(2) Se $\alpha = 0$ teremos $f(0) = a_0$, ou seja, $f(0)$ é igual ao termo independente de f.

Exemplo 3.3.1. Dado o polinômio de terceiro grau $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 1$, o valor numérico de f quando $x = 2$ é dado da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} f(2) &= 3 \cdot (2)^3 + 2 \cdot (2)^2 - 3 \cdot (2) - 1 \\ &= 3 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 1 \\ &= 24 + 8 - 6 - 1 \\ &= 25. \end{aligned}$$

Logo, o valor de numérico $f(2)$ é igual a 25.

Definição 3.3.2. Consideremos um polinômio $f(x)$, um número complexo α será dito raiz de f, se e somente se, $f(\alpha) = 0$, isto é

$$f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Exemplo 3.3.2. O polinômio do terceiro grau $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 2x - 2$ admite o número 1 como raiz, pois

$$\begin{aligned} f(1) &= (-1)^3 + 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 \\ &= -1 + 5 - 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 3.3.3. Seja o polinômio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de grau três dado por $f(x) = x^3 + 2ix^2 + 3x$, calculemos $f(1)$ e $f(i)$.

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 + 2i \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 1 + 2i + 3 = 4 + 2i \\ f(i) &= i^3 + 2i \cdot i^2 + 3 \cdot i = (-i) + 2i \cdot (-1) + 3i = 0. \end{aligned}$$

Logo, i é raiz de $f(x)$.

3.4.Raiz de Equação Polinomial

Definição 3.4.1. Denominamos a raiz de uma equação algébrica como um número $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Observação. No estudo de polinômios nulos tal que $f(x) = 0$, trabalhamos com polinômios cujo valor numérico é igual a zero para todo $x \in \mathbb{C}$, e assim, foi possível inferir que todos os coeficientes deveriam ser iguais a zero. Porém, ao estudarmos uma equação algébrica $f(x) = 0$, buscamos, geralmente, encontrar valores complexos $x \in \mathbb{C}$ que são raízes do polinômio $f(x)$ e, consequentemente, tornam $f(x) = 0$ verdadeira.

Denominamos de *Conjunto Solução* ou *Conjunto Verdade* de uma equação algébrica $f(x) = 0$ o conjunto de todas as raízes dessa equação e podemos representar tal conjunto por S ou V, respectivamente. Em símbolos, escrevemos $S = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid f(\alpha) = 0\}$ ou $V = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid f(\alpha) = 0\}$. Ao resolvermos uma equação algébrica, visamos encontrar seu conjunto solução.

Exemplo 3.4.1. A equação polinomial $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ possui $x = 1$ como raiz, pois ao substituirmos x por 1 obtemos : $1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.

3.5.Divisão de Polinômios

A divisão de polinômios pode ser definida no conjunto de todos os polinômios com coeficientes no anel A, ou seja , em $A[x]$, isto porque as operações de adição e multiplicação já foram bem definidas neste conjunto, como vimos na Seção 2.2 .

Consideremos $f(x)$ e $g(x)$ polinômios em $A[x]$. Se $g(x) \neq 0$, podemos afirmar que $g(x)$ *divide* $f(x)$ ou $f(x)$ é *divisível* por $g(x)$, quando existe o polinômio $h(x) \in A[x]$ de tal modo que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, e neste caso dizemos que $f(x)$ é *múltiplo* de $g(x)$.

Exemplo 3.5.1. O polinômio $f(x) = x + 2$ divide $g(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ em $\mathbb{Z}[x]$.

Da propriedade multiplicativa do grau 2.2.1 decorre a seguinte proposição.

Proposição 3.5.1. Consideremos os polinômios $f(x), g(x) \in A[x]$, com $f(x), g(x) \neq 0$ e o anel A. Se $g(x)$ apresenta coeficiente líder invertível e divide $f(x)$, então $gr(g(x)) \leq gr(f(x))$. [1]

[1] A demonstração dessa proposição encontra-se disponível em [14], p. 87.

Cabe recordar que, conforme estudamos na Seção 2.2.2 , no anel dos inteiros $\mathbb{Z}$ os únicos elementos que possuem inversos são 1 e -1 e, por isso, o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ não é corpo. No entanto, os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são exemplos de corpos, tendo vista que todo elemento não nulo de tais conjuntos possuem inverso.

A divisão em $A[x]$ é denominada de *divisão euclidiana*.

Proposição 3.5.2. (Divisão Euclidiana). Seja A um anel, consideremos os polinômios $f(x), g(x) \in A[x]$, de forma que $g(x) \neq 0$ e possui coeficiente líder invertível no anel A. Fazer a divisão de $f(x)$ por $g(x)$ é encontrar os polinômios $q(x)$ e $r(x)$, unicamente determinados, isto é, $q(x)$ e $r(x)$ existem e são únicos, tais que

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \tag{3.1}$$

onde $r(x) = 0$ ou $gr(r(x)) < gr(g(x))$.[2]

Na Proposição 3.5.2 , chamamos $f(x)$ de *dividendo*, $g(x)$ de *divisor*, $q(x)$ *quociente* e $r(x)$ de *resto*. Ainda, se $r(x) = 0$, ou seja, o resto da divisão for o polinômio nulo, podemos dizer que a divisão é exata e que $f(x)$ é divisível por $g(x)$.

Exemplo 3.5.2. O polinômio $f(x) = x^n - \alpha^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ é divisível por $x - \alpha$.

É suficiente mostrar que

$$x^n - \alpha^n = (x - \alpha) \cdot (x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \alpha^2 x^{n-3} + \cdots + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-1}).$$

Ao aplicar a distributiva do x e do $-\alpha$, efetuamos o cancelamento dos termos opostos e obtemos

$$x^n + \cancel{\alpha x^{n-1}} + \cancel{\alpha^2 x^{n-2}} + \cdots + \cancel{\alpha^{n-1}x} - \cancel{\alpha x^{n-1}} - \cancel{\alpha^2 x^{n-2}} - \cdots - \cancel{\alpha^{n-1}x} - \alpha^n = x^n - \alpha^n.$$

Este exemplo trata-se de um caso particular do *Teorema de D'Alembert* apresentado a seguir.

Teorema 3.5.1. Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Se o número complexo α é raiz de $f(x)$, então $(x - \alpha)$ divide $f(x)$.[3]

Exemplo 3.5.3. Seja o polinômio $f(x) = x^3 + x^2 - 11x + 10$. Temos que

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 11 \cdot 2 + 10 = 8 + 4 - 22 + 10 = 0,$$

logo, 2 é uma raiz de $f(x)$. Assim, pelo Teorema 3.5.1 , o binômio $x - 2$ divide $f(x)$.

[2] A demostração dessa proposição encontra-se disponível em [14], p. 87-88.
[3] A demonstração desse teorema encontra-se disponível em [20], p. 201.

3.5.1.Método de Descartes

Também conhecido como *método dos coeficientes a determinar*, este método respaldado pela igualdade de polinômios e pela existência da unicidade na divisão de polinômios, visa obter os coeficientes dos polinômios quociente e resto a partir da relação $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ apresentada na Proposição 3.5.2 .

Para encontrar os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ recordemos que:

(1) $gr(q(x)) = gr(f(x)) - gr(g(x))$.

(2) $r(x) = 0$ ou $gr(r(x)) < gr(g(x))$.

Vejamos os passos a serem seguidos para determinar $q(x)$ e $r(x)$ aplicando o método de Descartes:
(1° passo) a partir das relações (1) e (2) anteriormente apresentadas, fazemos a determinação do grau de $q(x)$ e verificamos qual o grau máximo que $r(x)$ pode apresentar;
(2° passo) apresentamos a forma dos polinômios $q(x)$ e $r(x)$, nas quais os coeficientes são incógnitas que devem ser determinadas;
(3° passo) a partir da identidade $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, determinamos os coeficientes que são incógnitas de $q(x)$ e $r(x)$.

Exemplo 3.5.4. Verifiquemos se o polinômio $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 23x - 10$ é divisível por $g(x) = x^2 - 4x + 5$.

Determinando o grau de $q(x)$, temos que

$$gr(q(x)) = gr(f(x)) - gr(g(x)) = 3 - 2 = 1.$$

Logo, $q(x)$ apresenta grau 1 e é da forma $ax + b$. Ainda,

$$gr(r(x)) < gr(g(x)) = 2.$$

Assim, o maior valor que o grau de $r(x)$ pode assumir é 1 (ou $r(x) = 0$) e portanto, $r(x)$ é da forma $cx + d$.

A partir da identidade $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, temos

$$3x^3 - 14x^2 + 23x - 10 = (x^2 - 4x + 5)(ax + b) + (cx + d),$$

onde a igualdade deve ser satisfeita para todo valor complexo de x. Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação e organizando os termos semelhantes, obtemos

$$3x^3 - 14x^2 + 23x - 10 = ax^3 + (-4a + b)x^2 + (5a - 4b + c)x + 5b + d.$$

Observemos que o sinal de igual demanda que os coeficientes sejam iguais de ambos os lados da igualdade. Dessa forma, segue que

$$\begin{cases} a = 3 \\ -4a + b = -14 \\ 5a - 4b + c = 23 \\ 5b + d = -10 \end{cases}$$

A resolução do sistema nos fornece $a = 3$, $b = -2$, $c = 0$ e $d = 0$. Daí,

$$q(x) = 3x - 2 \text{ e } r(x) = 0.$$

Como o resto é o polinômio nulo a divisão é exata, ou seja, $f(x)$ é divisível por $g(x)$.

Seguindo as mesmas orientações explicitadas acima, resolveremos o exemplo a seguir de forma análoga.

Exemplo 3.5.5. Verifiquemos se o polinômio $f(x) = 6x^3 + x^2 - x + 7$ é divisível por $g(x) = 2x + 1$.

Determinando o grau de $q(x)$, temos que

$$gr(q(x)) = gr(f(x)) - gr(g(x)) = 3 - 1 = 2.$$

Logo, $q(x)$ é um polinômio do segundo grau da seguinte forma: ax^2+bx+c. Temos que

$$gr(r(x)) < gr(g(x)) = 1.$$

Assim, como o grau do resto não pode exceder o grau do divisor, temos que o maior grau que $r(x)$ pode assumir é o grau 0 e portanto, o polinômio r é da forma $r(x) = d$.

Da identidade $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, temos

$$6x^3 + x^2 - x + 7 = (2x + 1)(ax^2 + bx + c) + d,$$

onde a igualdade deve ser satisfeita para todo valor complexo de x. Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação e organizando os termos semelhantes, obtemos

$$6x^3 + x^2 - x + 7 = 2ax^3 + (a + 2b)x^2 + (b + 2c)x + c + d.$$

Como o sinal de igual exige que os coeficientes sejam iguais de ambos os lados da igualdade, segue que

$$\begin{cases} 2a = 6 \\ a + 2b = 1 \\ b + 2c = -1 \\ c + d = 7 \end{cases}$$

Fazendo a resolução do sistema, temos que $a = 3$, $b = -1, c = 0$ e $d = 7$. Daí,

$$q(x) = 3x^2 - x \text{ e } r(x) = 7.$$

Como o resto é um polinômio constante, ou seja, a divisão é não exata, temos que $f(x)$ não é divisível por $g(x)$.

Na próxima subseção veremos que é possível solucionar os Exemplos 3.5.4 e 3.5.5 através do *algoritmo da divisão de polinômios*.

3.5.2.Método da Chave

O *método da chave* é um processo que, assim como o método de Descartes, propõe-se a determinar o quociente e o resto já identificados na relação (3.1) da Proposição 3.5.2 . No entanto, o caminho para essa obtenção é diferente. No método da chave, ao invés de encontrarmos q e r utilizando a relação anteriormente citada, fazemos a divisão euclidiana do polinômio $f(x)$ pelo polinômio $g(x)$ com coeficiente líder invertível, seguindo o modelo de divisão proposto por Euclides para números inteiros. E ao final da divisão podemos verificar se ela está ou não correta substituindo os polinômios obtidos em $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$.

Em ênfase, o método da chave é o procedimento mais usual na divisão de polinômios e ele se baseia na divisão de números inteiros. A seguir, apresentamos a descrição dos passos usados na obtenção de $q(x)$ e $r(x)$ na divisão de $f(x)$ por $g(x)$:

(1° passo) fazemos a divisão do termo de maior grau de $f(x)$ pelo termo de maior grau de $g(x)$ e assim obtemos o primeiro termo do quociente $q_1(x)$;

(2° passo) fazemos a multiplicação de $q_1(x)$ por $g(x)$ e subtraímos o resultado de $f(x)$. Em outras palavras, somamos à $f(x)$ o oposto do resultado obtido na multiplicação de $q_1(x)$ por $g(x)$, feito isto, encontramos o resto parcial $r_1(x)$;

(3° passo) caso $gr(r_1(x)) < gr(g(x))$, concluímos que $r_1(x) = r(x)$ e consequentemente, $q_1(x)$ será igual ao quociente procurado;

(4° passo) caso $gr(r_1(x)) \geq gr(g(x))$, fazemos a divisão do termo de maior grau de $r_1(x)$ pelo termo de maior grau de $g(x)$, de forma a obter um segundo quociente $q_2(x)$;

(5° passo) fazemos a repetição dos passos acima, até o momento que $gr(r_k(x)) < gr(g(x))$, quando isso acontecer, teremos que $r_k(x) = r(x)$ e $q_k(x) = q(x)$.

Para entendermos a técnica empregada no processo anteriormente citado, faremos a divisão dos polinômios $f(x)$ e $g(x)$ abordados nos Exemplos 3.5.4 e 3.5.5 por meio do método da chave.

Exemplo 3.5.6. Vejamos a utilização do método da chave na divisão do polinômio $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 23x - 10$ pelo polinômio $g(x) = x^2 - 4x + 5$.
Seguindo a orientação dos passos indicados anteriormente, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 14x^2 + 23x - 10 & x^2 - 4x + 5 \\ \cline{2-2} \underline{- 3x^3 + 12x^2 - 15x} & 3x - 2 \\ - 2x^2 + 8x - 10 & \\ \underline{2x^2 - 8x + 10} & \\ 0 & \end{array}$$

ou seja, o uso do método da chave na divisão de $f(x)$ por $g(x)$ fornece $q(x) = 3x - 2$ e $r(x) = 0$, o mesmo resultado obtido na utilização do método de Descartes no Exemplo 3.5.4 , onde concluímos que $f(x)$ é divisível por $g(x)$, pois a divisão é exata.

Exemplo 3.5.7. Vejamos a utilização do método da chave na divisão do polinômio $f(x) = 6x^3 + x^2 - x + 7$ pelo polinômio $g(x) = 2x + 1$.
Seguindo a orientação apresentada para a técnica empregada no método da chave, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + x^2 - x + 7 & 2x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{- 6x^3 - 3x^2} & 3x^2 - x \\ - 2x^2 - x & \\ \underline{2x^2 + x} & \\ 7 & \end{array}$$

isto é, $q(x) = 3x^2 - x$ e $r(x) = 7$, o que caracteriza a divisão de $f(x)$ por $g(x)$ em não exata.

Mais uma vez foi possível constatar que o método da chave fornece o mesmo resultado que o método de Descartes na procura pelo quociente e o resto em uma divisão. Ao estudarmos ambos os métodos, podemos observar que compreendidos os passos a serem seguidos no método da chave, este se torna mais simples de ser utilizado e esta pode ser a justificativa para os livros didáticos do ensino médio darem uma notoriedade maior para o segundo método, dentre tais livros podemos citar: Iezzi et al. (2014) [15], Dante (2016) [8] e Leonardo (2016) [18].

3.6.Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema 3.6.1. Toda equação algébrica de grau maior ou igual a 1 apresenta pelo menos uma raiz complexa.[4]

O Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.) nos garante que dada uma equação polinomial de grau $n \geq 1$ haverá no mínimo uma raiz desta equação que será complexa, porém, ele não nos diz quantas são ou quais são as raízes da equação considerada.

Como consequência do T.F.A. temos o Teorema da Decomposição enunciado a seguir.

Teorema 3.6.2. Todo polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ com n maior ou igual a 1 e $a_n \neq 0$ pode ser decomposto e escrito na forma fatorada como $f(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n)$, em que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ são raízes complexas do polinômio. Com exceção da ordem dos fatores, esta fatoração é única.[5]

Assim, temos que

$$f(x) = 0 \Rightarrow a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n) = 0.$$

Isto nos mostra que toda equação polinomial de grau n, com $n \geq 1$, apresenta exatamente n raízes complexas, e estas podem ser reais ou não. E como nosso foco de estudo são as equações polinomiais de grau três, é acertado dizer que estas equações possuirão exatamente três raízes complexas não necessariamente distintas. Observemos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.6.1. O polinômio $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 8$ possui grau $n = 3$ e por isso apresenta três raízes, neste exemplo, as raízes do polinômio são reais e distintas: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 4$. Escrevendo $f(x)$ na forma fatorada, temos: $f(x) = 2(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$.

Neste estudo assumiremos a veracidade dos Teoremas 3.6.1 e 3.6.2 sem demonstração.

3.7.Multiplicidade de uma raiz

Um polinômio $f(x)$ de grau $n > 0$ pode apresentar fatores iguais na sua decomposição, assim, uma equação polinomial de grau n apresenta n raízes e estas podem ser distintas ou iguais. Dessa forma, dizemos que a *multiplicidade* de uma raiz é a quantidade

[4] A demonstração desse teorema encontra-se disponível em [24], p. 41-44.
[5] A demonstração desse teorema encontra-se disponível em [20], p. 219-220.

de vezes que uma mesma raiz aparece. No caso de polinômios do terceiro grau, estudamos que eles apresentam três raízes, vejamos as possibilidades quanto a multiplicidade dessas raízes:

- Se uma equação polinomial do terceiro grau apresentar três raízes distintas, cada uma delas será chamada de raiz simples ou raiz de multiplicidade 1;
- Quando uma equação polinomial do terceiro grau apresentar duas raízes iguais e uma distinta, poderemos dizer que as raízes iguais têm multiplicidade 2 (raiz dupla) e que a raiz distinta é uma raiz simples ou raiz de multiplicidade 1;
- Casos em que uma equação polinomial do terceiro grau apresentar três raízes iguais, diremos que a raiz tem multiplicidade 3 (raiz tripla).

Exemplo 3.7.1. O polinômio $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x+1)(x-1)(x-3)$ possui três raízes distintas. Logo, dizemos que -1, 1 e 3 são raízes simples ou de multiplicidade 1.

Exemplo 3.7.2. O polinômio $f(x) = x^3 - 7ix^2 - 15x + 9i = (x-3i)^2(x-i) = (x-3i)(x-3i)(x-i)$ possui duas raízes iguais e uma raiz distinta. Logo, dizemos que $-3i$ é raiz dupla ou de multiplicidade 2, e i é uma raiz simples ou de multiplicidade 1.

Exemplo 3.7.3. O polinômio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3 = (x-2)(x-2)(x-2)$ possui três raízes iguais. Logo, dizemos que 2 é raiz tripla ou de multiplicidade 3.

Teorema 3.7.1. Uma equação polinomial de grau n apresenta n raízes, reais ou complexas, que são contadas conforme sua multiplicidade.[6]

3.8.Raízes Nulas

As equações algébricas que não apresentam o termo independente a_0 terão o número zero como raiz, de forma que a multiplicidade da raiz será igual ao menor expoente da incógnita.

Em vista disso, para identificarmos a quantidade de raízes nulas de equações polinomiais do terceiro grau que não possuem o termo independente, verificamos qual o menor valor do expoente na incógnita da equação. Vejamos os exemplos:

Exemplo 3.8.1. A equação polinomial $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x = 0$ apresenta apenas coeficientes acompanhados da incógnita x, o que significa que ela não possui o termo independente, fatorando $f(x)$, obtemos $f(x) = x \cdot (x^2 - 4x + 5) = 0$, o que facilita nossa percepção em identificar que a equação possui uma raiz nula ou uma raiz nula de multiplicidade 1, pois o menor expoente de x é o número 1.

[6] A demonstração desse teorema encontra-se disponível em [5], p. 274.

Exemplo 3.8.2. A equação polinomial $f(x) = 2x^3 - 3x^2 = 0$ não possui o termo independente, fatorando $f(x)$, obtemos $f(x) = x^2 \cdot (2x - 3) = 0$, isto posto, observamos que a equação apresenta duas raízes nulas ou uma raiz nula de multiplicidade 2, pois o menor expoente de x é o número 2.

3.9.Raízes Complexas

Teorema 3.9.1. Dado o polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com coeficientes reais e $a_n \neq 0$, sendo o número complexo $z = a - bi$ $(b \neq 0)$ uma raiz da equação polinomial, então o conjugado de z dado por $\bar{z} = a - bi$ $(b \neq 0)$ também será raiz da equação dada.[7]

Do Teorema 3.9.1 decorrem as seguintes consequências:

- Se um número complexo $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ com multiplicidade m for raiz de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o conjugado $\bar{z}$ também será raiz de multiplicidade m dessa equação.
- Uma equação polinomial com coeficientes reais contém um número par de raízes complexas.
- Se o grau de uma equação polinomial com coeficientes reais for ímpar, esta apresentará pelo menos uma raiz real. Assim, equações polinomiais de grau três com coeficientes reais, admitem pelo menos uma raiz real.

Exemplo 3.9.1. O polinômio do terceiro grau $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 3x + 15$ possui as seguintes raízes: -1, $2 + i$ e $2 - i$, ou seja, $f(x)$ apresenta uma raiz real, uma vez que seu grau é ímpar, e um par de raízes complexas, tendo vista que os coeficientes de $f(x)$ são reais.

3.10.Raízes Irracionais

Teorema 3.10.1. Se o número real $a + b\sqrt{c}$, com $a, b \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{c} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, é raiz de uma equação algébrica $f(x) = 0$ de coeficientes racionais, então o número $a - b\sqrt{c}$ também será raiz da equação dada com a mesma multiplicidade de $a + b\sqrt{c}$.[8]

[7] A demonstração desse teorema encontra-se disponível em [22], p. 55-56.

[8] A demonstração desse teorema é um caso análogo da demonstração do teorema das raízes complexas.

Exemplo 3.10.1. Sabendo que a equação polinomial do terceiro grau $x^3 - 24x + 40 = 0$ admite como uma de suas raízes o número $-1 + \sqrt{21}$, do Teorema 3.10.1 , podemos inferir que $-1 - \sqrt{21}$ também é raiz da equação dada.

3.11.Raízes Reais

O teorema a seguir é muito útil para identificar a quantidade e algumas características de raízes de equações polinomiais em um intervalo real aberto.

Teorema 3.11.1. Seja o polinômio de coeficientes reais de grau n e um intervalo real $]a; b[$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{x-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $a < b$ e ambos não são raízes de $f(x)$. Vale que:

(1) se $f(a)$ e $f(b)$ possuem o mesmo sinal, ou seja, $f(a) \cdot f(b) > 0$, então $f(x) = 0$ apresenta um número par de raízes reais em $]a; b[$ ou não apresenta raízes em $]a; b[$.

(2) se $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais contrários, ou seja, $f(a) \cdot f(b) < 0$, então $f(x) = 0$ apresenta um número ímpar de raízes reais em $]a; b[$.[9]

O Teorema 3.11.1 é conhecido como Teorema de Bolzano[10] . Os exemplos abaixo trazem a aplicação deste teorema.

Exemplo 3.11.1. Analise a quantidade de raízes reais que a equação polinomial do terceiro grau $x^3 + 5x^2 - 3x + 4 = 0$ apresenta no intervalo de $]0; 1[$.

Seja o polinômio$f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 4$. Calculando o valor numérico de $f(0)$ e $f(1)$, temos que

$$f(0) = 0^3 + 5 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$$
$$f(1) = 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 4 = 7 > 0.$$

Pelo Teorema da Decomposição, sabemos que $f(x)$ apresenta no máximo 3 raízes. Como $f(0) \cdot f(1) > 0$, decorre do Teorema de Bolzano que $x^3 + 5x^2 - 3x + 4 = 0$ pode apresentar duas ou nenhuma raiz real no intervalo $]0; 1[$, considerando que zero é par. Especificadamente neste caso, a equação não admite raízes no intervalo dado.

Exemplo 3.11.2. Verifique a quantidade de raízes da equação $x^3 - 3x^2 + 7x + 1 = 0$ no intervalo $] - 1; 1[$.

---

[9] A demonstração desse teorema encontra-se disponível em [9], p. 125-126.

[10] Conforme [13], Bernhard Bolzano (1781-1848) foi um padre católico, matemático, teólogo e filósofo, nascido em Praga, Tchecoslováquia.

Seja o polinômio $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$. O valor numérico de $f(-1)$ e $f(1)$ é

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 1 = -10 < 0$$
$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 + 1 = 6 > 0.$$

Como $f(0) \cdot f(1) < 0$, do Teorema de Bolzano temos que a equação $x^3 - 3x^2 + 7x + 1 = 0$ pode apresentar uma ou três raízes reais no intervalo dado. Neste exemplo, a equação apresenta uma única raiz real no intervalo de $]-1; 1[$.

Definidas as operações com polinômios, feita a apreciação das particularidades importantes no estudo de polinômios do terceiro grau e das equações cúbicas, podemos iniciar o estudo de alguns métodos de resolução de equações do terceiro grau, no Capítulo 4, tendo vista que conhecemos também muitas informações sobre os tipos de raízes possíveis no estudo dessas equações.

4. Métodos Resolutivos de Equações Polinomiais do Terceiro Grau

Neste capítulo iremos estudar o Dispositivo de Briot-Ruffini, as Relações de Girard, o Teorema das Raízes Racionais e a Fórmula de Cardano-Tartaglia, métodos algébricos que solucionam equações de grau três.[1] Veremos também relações importantes acerca das raízes de equações cúbicas e a interpretação geométrica das equações do terceiro grau estudadas por Nicolá Fontana e Girolamo Cardano. As referências utilizadas para a construção deste capítulo foram: Andrade (1997) [1], Carneiro (2015) [6], Dante (2016) [8], Giovanni e Bonjorno (2005) [10], Guidorizzi (2001) [12], Hefez e Villela (2018) [14], Lima (1987) [19], Lima (2006) [20], Lobo (2017) [22], Nascimento (2015) [24], Silva e Barreto (2005) [27], Silva e Pereira (2019) [28] e Souza (2010) [29].

4.1. Dispositivo de Briot-Ruffini

Estudamos na Seção 3.5 o Teorema 3.5.1 , o qual nos garante que se um número α é raiz de um polinômio $f(x)$, teremos que $f(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$. Agora, veremos que a divisão de $f(x)$ por um polinômio do primeiro grau $(x-\alpha)$ com $\alpha \in \mathbb{C}$ nos permite determinar de maneira prática $q(x)$ e $r(x)$ que satisfazem a relação $f(x) = (x-\alpha)q(x) + r(x)$. Dessa forma, vamos apresentar um outro método, diferente do Método de Descartes e do Método da Chave, para determinar o quociente e o resto na divisão de polinômios por $(x-\alpha)$.

Este outro método é o chamado *Dispositivo de Briot-Ruffini*[2], que na divisão de $f(x)$ por $(x-\alpha)$ pode-se conseguir a obtenção de um polinômio $q(x)$, de modo que o grau de $q(x)$ é uma unidade inferior ao grau de $f(x)$. Deste modo, o dispositivo em questão torna-se de grande relevância na determinação das raízes de equações polinomiais, pois, conhecida uma das raízes de um polinômio $f(x)$, o dispositivo pode nos fornecer o polinômio quociente, onde as raízes de $q(x)$ são as demais raízes procuradas de $f(x)$.

Para a descrição do dispositivo de Briot-Ruffini utilizaremos o método de Descartes. Consideremos um polinômio de grau n

[1] As transformadas de Möbius também solucionam equações cúbicas. A quem interessar, consultar a monografia de Ana Nonato Trigueiro para maiores detalhes, disponível em <https://repositorio.ifpb.edu.br/xmlui/bitstream/handle/177683/1508/TCC%20ANA%20NONATO%20 TRIGUEIRO.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 10 Jul. 2021.

[2] De acordo com [29], este dispositivo leva esse nome em homenagem aos matemáticos Charles Auguste Briot (1817-1882) e Paulo Ruffini (1765-1822).

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Na divisão de $f(x)$ por $(x - \alpha)$, sejam $q(x)$ o quociente de grau $(n-1)$ e $r(x)$ o resto, tais que

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + b_{n-3} x^{n-3} + \cdots + b_1 x + b_0 \text{ e } r(x) = r_0.$$

Da definição de divisão, temos que

$$f(x) = (x - \alpha) q(x) + r_0.$$

Fazendo a substituição do valor de $q(x)$ na relação acima, obtemos

$$f(x) = (x - \alpha)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + b_{n-3} x^{n-3} + \cdots + b_1 x + b_0) + r_0.$$

Desenvolvendo a multiplicação do segundo membro, encontramos

$$f(x) = b_{n-1} x^n + b_{n-2} x^{n-1} + b_{n-3} x^{n-2} + \cdots + b_0 x - \alpha b_{n-1} x^{n-1} - \alpha b_{n-2} x^{n-2} - \alpha b_{n-3} x^{n-3} - \cdots - \alpha b_1 x - \alpha b_0 + r_0.$$

O agrupamento dos termos semelhantes, nos fornece

$$f(x) = b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1}) x^{n-1} + (b_{n-3} - \alpha b_{n-2}) x^{n-2} + \cdots + (b_0 - \alpha b_1) x + (r_0 - \alpha b_0).$$

Assim, substituindo o valor de $f(x)$ dispomos de

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$= b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1}) x^{n-1} + (b_{n-3} - \alpha b_{n-2}) x^{n-2} + \cdots + (b_0 - \alpha b_1) x + (r_0 - \alpha b_0).$$

Igualando os coeficientes aos respectivos termos de $f(x)$ obtemos

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha b_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-3} - \alpha b_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 = b_0 - \alpha b_1 \\ a_0 = r_0 - \alpha b_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\ b_{n-3} = a_{n-2} + \alpha b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 = a_1 + \alpha b_1 \\ r_0 = a_0 + \alpha b_0 \end{cases}$$

Podemos observar que a partir da sequência de igualdades do segundo sistema foi possível encontrar os termos do quociente, em ordem decrescente dos expoentes de x, e também o resto, determinados com base em um procedimento recursivo, em que dada a igualdade de $b_{n-1} = a_n$, os demais coeficientes de $q(x)$ puderam ser obtidos um após o outro, multiplicando-se o coeficiente anterior de $q(x)$ por α e em seguida, somando-se ao coeficiente correspondente de $f(x)$.

O resultado exposto nos sistemas pode ser organizado e determinado de forma sucinta e prática, no chamado dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccccc} \alpha & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & | \; r_0. \end{array} \tag{4.1}$$

Como verificado em (4.1) , na primeira linha aparece a raiz α seguida dos coeficientes de $f(x)$, os quais devem ser organizados seguindo a ordem das potências decrescentes de x, incluindo os termos que possuem coeficiente nulo. Logo após, na segunda linha, identificamos os coeficientes $b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, \cdots, b_0$ de $q(x)$ e o resto r_0 que também foram obtidos conforme os cálculos já descritos e apontados nas igualdades exibidas no sistema da direita, anteriormente mencionando.

Nos exemplos a seguir estudaremos a aplicação do método de Briot-Ruffini no cálculo de algumas divisões de polinômios por $(x-\alpha)$ e na resolução de algumas equações polinomiais do terceiro grau.

Exemplo 4.1.1. Dividir o polinômio de grau três $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ por $g(x) = x - 3$.

(1° Passo) Na primeira linha colocamos a raiz $\alpha = 3$ de $g(x)$ seguida dos coeficientes $2, -3, -8$ e -3 de $f(x)$, em ordem decrescente dos expoentes de x.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -3 & -8 & -3 \\ \hline & & & & \end{array}$$

(2° Passo) Na segunda linha, baixamos o número 2, o coeficiente líder de $f(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -3 & -8 & -3 \\ \hline & \downarrow & & & \\ & 2 & & & \end{array}$$

(3° Passo) Fazemos a multiplicação da raiz $\alpha = 3$ do divisor pelo coeficiente líder de $f(x)$ e adicionamos o produto com o segundo coeficiente de $f(x)$, em seguida, colocaremos o resultado da operação $3.2 + (-3) = 3$ abaixo deste segundo coeficiente.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -3 & -8 & -3 \\ \hline & 2 & 3 & & \end{array}$$

(4° Passo) Multiplicamos a raiz $\alpha = 3$ pelo número 3 que encontramos no passo anterior. Feito isto, adicionamos o resultado do produto com o terceiro coeficiente de $f(x)$, logo após, colocaremos o resultado da operação $3.3 + (-8) = 1$ abaixo deste terceiro coeficiente.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -3 & -8 & -3 \\ \hline & 2 & 3 & 1 & \end{array}$$

(5° Passo) Fazemos o procedimento destacado nos passos três e quatro sucessivas vezes até que cheguemos ao último número encontrado, e este será o resto da divisão, especificadamente neste caso $r(x) = 0$. Assim, os números localizados à esquerda do resto, na segunda linha, são os coeficientes do quociente $q(x)$, que da esquerda para a direita seguem a ordem decrescente das potências de x.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -3 & -8 & -3 \\ \hline & 2 & 3 & 1 & \mid 0. \end{array}$$

Portanto, através do dispositivo de Briot-Ruffini determinamos $q(x) = 2x^2+3x+1$ e $r(x) = 0$ como resultado da divisão de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ por $g(x) = x - 3$.

Exemplo 4.1.2. Dividir $f(x) = x^3 - 7ix^2 - 15x + 9i$ por $g(x) = x - i$.

$$\begin{array}{c|cccc} i & 1 & -7i & -15 & 9i \\ \hline & 1 & -6i & -9 & \mid 0. \end{array}$$

A utilização do dispositivo de Briot-Ruffini na solução deste exemplo nos fornece $q(x) = x^2 - 6ix - 9$ e $r(x) = 0$.

Exemplo 4.1.3. Resolver a equação polinomial do terceiro grau $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$.

Ao observarmos a equação podemos identificar ligeiramente que a soma dos coeficientes é igual a zero, isto significa que 1 é uma raiz da equação. Assim sendo, podemos aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini na divisão de $x^3 - x^2 - 2x + 2$ por $x - 1$, vejamos

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & \mid 0. \end{array}$$

Da divisão obtemos o polinômio $q(x) = x^2 + 0x - 2$. Logo, basta resolvermos a equação do segundo grau $x^2 - 2$ para encontrarmos as raízes $\alpha_1 = -\sqrt{2}$ e $\alpha_2 = \sqrt{2}$.

Portanto, as raízes da equação original são $S = \{-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$.

Observação. Em exemplos como o anterior, onde temos de conhecer uma raiz de uma equação qualquer para só então buscar determinar as demais raízes, é conveniente inicialmente verificar se alguns dos valores $0, 1$ e -1 são raízes da equação, tendo vista que estes valores aparecem com frequência neste tipo de problema.

Exemplo 4.1.4. Resolver a equação $x^3 - 8x^2 + 29x - 52 = 0$, tendo em vista que 4 é uma de suas raízes.

Seja $f(x)$ o polinômio dado, de modo que $4, \alpha_1$ e α_2 são as raízes de f. Pelo Teorema da Decomposição, temos que

$$f(x) = (x - 4)\underbrace{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}_{q(x)},$$

ou seja,

$$f(x) = (x-4)q(x).$$

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini na divisão de $x^3 - 8x^2 + 29x - 52$ por $x - 4$, temos

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -8 & 29 & -52 \\ \hline & 1 & -4 & 13 & \mid 0. \end{array}$$

Logo, com a obtenção de $q(x) = x^2 - 4x + 13$ podemos encontrar as raízes $\alpha_1 = 2 - 3i$ e $\alpha_2 = 2 + 3i$ da equação do segundo grau $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Portanto, as raízes da equação original são $S = \{2 - 3i, 2 + 3i, 4\}$.

A solução dos exemplos acima demonstra a agilidade que o uso do dispositivo de Briot-Ruffini pode nos proporcionar na resolução de equações do terceiro grau. Porém, o uso desta ferramenta exige o conhecimento de uma das raízes da equação, o que limita a aplicação deste método.

É do nosso conhecimento que este dispositivo pode ser também uma ferramenta auxiliar na resolução de equações que possuem grau diferente de três, com a ressalva de que o dividendo pode assumir qualquer grau e o divisor deve ser do tipo $(x - \alpha)$. Porém, uma curiosidade pouco divulgada sobre tal dispositivo é a possibilidade dele ser generalizado, ou seja, é possível obter um algoritmo semelhante que permite ao divisor $g(x)$ possuir qualquer grau, assim, essa nova versão do algoritmo é capaz de realizar, por exemplo, a divisão de $f(x) = 2x^7 + 5x^6 - 13x^5 + 10x^4 + 12x^3 + 2x^2 + 16x + 2$ por $g(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$.[3]

4.2.Relações entre Coeficientes e Raízes

Estudaremos agora outro método que caracteriza-se por simplificar o processo de resolução de equações polinomiais em geral, no entanto, como nosso foco são as equações cujo grau é três, nossa abordagem na descrição deste método será voltada para estas equações.

Assim como o dispositivo de Briot-Ruffini, o método em questão é bastante abordado nos livros didáticos do ensino médio, sendo conhecido como *Relações entre Coeficientes e Raízes* ou simplesmente *Relações de Girard*[4]. Sobre a relevância em utilizar este método na resolução de equações, Souza (2010) [29] nos conta:

[3]A generalização de Briot-Ruffini encontra-se disponível em [1], p. 1-3.

[4]Conforme [13] , Albert Girard (1590-1633) foi um professor matemático da França, detentor de muitas contribuições em análise, calor, luz e eletricidade.

> As relações de Girard são de grande utilidade na resolução de equações polinomiais, pois relacionam as raízes e os coeficientes de uma equação. Por meio dessas relações, podemos estabelecer um sistema de equações (cuja resolução, em geral, é mais simples que a da equação inicial) que permite resolver a equação inicial. (SOUZA, 2010, p.271).

Contudo, de antemão, é preciso se conhecer alguma característica das raízes da equação para que se use as relações de Girard. Vejamos agora a dedução das relações de Girard para equações polinomiais de grau n e posteriormente as relações de Girard para equações de grau três.

4.2.1. Relações de Girard para Equações Polinomiais de grau n

Consideremos o polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ (a_n \neq 0)$$

e sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ as n raízes complexas de $f(x)$, as quais podem ser distintas ou não. Vimos no Teorema da Decomposição que $f(x)$ pode ser decomposto e escrito na forma fatorada, deste modo

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

Da forma fatorada de $f(x)$, após o desenvolvimento da multiplicação, obteremos 2^n termos e ao ser feito o agrupamento dos termos semelhantes, somos capazes de determinar os coeficientes de $f(x)$ em termos de suas n raízes.

De início encontraremos o coeficiente do termo da maior potência de x e seguiremos determinando os coeficientes respeitando a ordem decrescente das potências de x. Vejamos que o primeiro termo é o que contém x^n, sendo gerado pela multiplicação das parcelas "x" de cada fator, assim, basta observarmos a forma fatorada de $f(x)$ para percebemos que o termo em questão possuirá o coeficiente igual a a_n.

O próximo a ser constituído é o termo que contém x^{n-1}, de forma que após a realização da multiplicação de x em todos os fatores, exceto em um deles, obteremos

$$a_n(-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n)x^{n-1} = -a_n\underbrace{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)}_{S_1}x^{n-1} = -a_nS_1x^{n-1}$$

de modo que S_1 representa a soma das raízes de f.

A configuração do termo que contém x^{n-2} é dada pelo mesmo procedimento descrito anteriormente, porém, na multiplicação as raízes agora são tomadas duas a duas, ou seja,

$$a_n((-\alpha_1)(-\alpha_2)+(-\alpha_2)(-\alpha_3)+\cdots+(-\alpha_{n-1})(-\alpha_n))x^{n-2}$$

$$= a_n\underbrace{(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n)}_{S_2}x^{n-2} = a_nS_2x^{n-2},$$

em que S_2 representa a soma dos produtos das raízes de $f(x)$, tomadas duas a duas.

Expandindo a lógica que vinha sendo desenvolvida, podemos dizer que o termo que contém x^{n-k} terá k produtos do tipo $(-\alpha_1)(-\alpha_2)\cdots(-\alpha_k)$ e a soma dos produtos das raízes tomadas k a k serão representadas por S_k, assim, temos que

$$a_n(-1)^kS_kx^{n-k}.$$

Com relação ao termo independente, este será obtido com o produto das n raízes, sendo a_0 dado por

$$a_n(-\alpha_1)(-\alpha_2)\cdots(-\alpha_n) = a_n(-1)^n\underbrace{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}_{S_n} = a_n(-1)^nS_n.$$

Em suma, o desenvolvimento da forma fatorada de $f(x)$ resulta em

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_{n-k}x^{n-k} + \cdots + a_0$$

$$= a_nx^n - a_nS_1x^{n-1} + a_nS_2x^{n-2} + \cdots + a_n(-1)^kS_kx^{n-k} + \cdots + a_n(-1)^nS_n.$$

Igualando os termos semelhantes, conseguimos relacionar os coeficientes do polinômio $f(x)$ com as somas dos produtos de suas raízes, vejamos:

$$\begin{cases} a_{n-1} = -a_nS_1 \\ a_{n-2} = a_nS_2 \\ \vdots \\ a_{n-k} = a_n(-1)^kS_k \\ \vdots \\ a_0 = a_n(-1)^nS_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2 = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ S_k = (-1)^k\dfrac{a_{n-k}}{a_n} \\ \vdots \\ S_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

No sistema da direita encontra-se as relações de Girard para equações de grau n, assim, adquiridas algumas informações sobre as raízes de uma equação dada, as relações anteriormente apresentadas poderão ser muito úteis na descoberta de um conjunto solução.

4.2.2. Relações de Girard para Equações Polinomiais de grau 3

Consideremos o polinômio do terceiro grau

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$$

e sejam α_1, α_2 e α_3 as raízes de $f(x)$. Assim, a equação polinomial $f(x) = 0$ pode ser decomposta e escrita na forma fatorada

$$f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = 0.$$

Logo, temos que

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = 0.$$

Dividindo ambos os membros por a $(a \neq 0)$, encontramos

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3).$$

Efetuando a multiplicação no segundo membro, obtemos

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x^2 - x\alpha_2 - x\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2)(x - \alpha_3)$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - x^2\alpha_3 - x^2\alpha_2 + \ x\alpha_2\alpha_3 - x^2\alpha_1 + x\alpha_1\alpha_3 + x\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Agrupando os termos semelhantes, dispomos de

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 + (-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Pela identidade de polinômios, segue que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a} \tag{4.2}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{c}{a} \tag{4.3}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a}. \tag{4.4}$$

Portanto, as relações (4.2) , (4.3) e (4.4) são as relações de Girard para equações polinomiais de terceiro grau.

Os próximos exemplos trazem o uso das relações de Girard como ferramenta auxiliar na resolução de equações do terceiro grau.

Exemplo 4.2.1. Resolver a equação $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$ sabendo que uma raiz é dupla.

Como existe uma raiz dupla, podemos nomear as raízes da equação por α_1, α_1 e α_2. Das relações de Girard, temos

$$\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 = 5 \Rightarrow 2\alpha_1 + \alpha_2 = 5 \tag{4.5}$$

$$\alpha_1\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 = 7 \Rightarrow \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 = 7 \tag{4.6}$$

$$\alpha_1\alpha_1\alpha_2 = 3 \Rightarrow \alpha_1^2\alpha_2 = 3. \tag{4.7}$$

De (4.5) , temos que $\alpha_2 = 5 - 2\alpha_1$, logo, substituindo na relação (4.6) , obteremos

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 = 7 \Rightarrow \alpha_1^2 + 2\alpha_1(5 - 2\alpha_1) &= 7 \\ \alpha_1^2 + 10\alpha_1 - 4\alpha_1^2 - 7 &= 0 \\ 3\alpha_1^2 - 10\alpha_1 + 7 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau encontramos $\alpha_1 = \dfrac{7}{3}$ e $\alpha_1 = 1$. Assim, para sabermos qual dos valores encontrados para α_1 é a raiz dupla procurada, basta que calculemos o valor numérico do polinômio $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ para $x = \dfrac{7}{3}$ e $x = 1$.

1. Valor numérico $f\left(\dfrac{7}{3}\right)$:

$$f\left(\frac{7}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 7 \cdot \left(\frac{7}{3}\right) - 3 = \left(-\frac{32}{27}\right).$$

Logo, $\dfrac{7}{3}$ não é raiz da equação.

2. Valor numérico $f\,(1)$:

$$f\,(1) = (1)^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 3 = 0.$$

Mediante a este resultado, temos que 1 é a raiz dupla da equação.

Como $\alpha_1 = 1$, podemos encontrar facilmente a raiz α_2 a partir da relação (4.5), vejamos

$$\alpha_2 = 5 - 2\alpha_1 = 5 - 2 \cdot 1 = 3.$$

Portanto, as raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$ são $S = \{1, 3\}$.

Exemplo 4.2.2. Resolver a equação $x^3 - ix^2 + 4x - 4i = 0$ sabendo que a soma de duas de suas raízes é $3i$.

Sejam α_1, α_2 e α_3 as raízes da equação, utilizando as relações de Girard, obtemos

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = i \tag{4.8}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 4 \tag{4.9}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 4i. \tag{4.10}$$

Sabemos que a soma de duas das raízes é igual a $3i$, daí

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 3i. \tag{4.11}$$

Substituindo (4.11) na relação (4.8) , encontramos

$$3i + \alpha_3 = i \Rightarrow \alpha_3 = -2i.$$

Como $\alpha_3 = -2i$ é uma raiz da equação, recorreremos ao dispositivo de Briot-Ruffini para diminuir o grau da equação original e simplificar nossa busca pelas demais raízes:

$$\begin{array}{r|cccl} -2i & 1 & -i & 4 & -4i \\ \hline & 1 & -3i & -2 & \mid 0. \end{array}$$

Obtemos assim, um polinômio $q(x) = x^2 - 3ix - 2$. Fazendo $q(x) = 0$ e resolvendo a equação de segundo grau, teremos que $\alpha_1 = i$ e $\alpha_2 = 2i$.

Logo, as raízes da equação $x^3 - ix^2 + 4x - 4i = 0$ são $S = \{-2i, 2i, i\}$.

Como foi visto, as relações entre coeficientes e raízes nos permitem solucionar algumas equações de grau três, contudo, necessitamos conhecer alguma informação sobre essas raízes para utilizarmos estas relações, por isso, não é possível a generalização desse método na solução de todas as equações de grau três.

4.3.Teorema das Raízes Racionais

Ao estudarmos o dispositivo de Briot-Ruffini como método de resolução de equações cúbicas, vimos que a utilização deste método é possível apenas quando dispomos de uma raiz da equação. Já no uso das Relações entre Coeficientes e Raízes na solução dessas equações, foi observado que este método necessita de um conhecimento prévio sobre as raízes da equação para ser útil.

Neste segmento, estudaremos nessa seção um outro método que auxilia na determinação das raízes de equações polinomiais, entretanto, embora este método sirva para equações de diferentes graus, enfatizaremos sua utilização apenas nas equações de grau três, que é o foco do nosso estudo.

O método em evidência é o*Teorema das Raízes Racionais*, que dada uma equação de coeficientes inteiros, este teorema nos permitirá traçar as possibilidades para raízes racionais da equação. A seguir, o enunciado do Teorema das Raízes Racionais.

Teorema 4.3.1. Seja a equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{x-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$ e coeficientes $a_i \in \mathbb{Z}$. Se o número racional $\dfrac{p}{q}$, com p e q primos entre si é raiz da equação dada, tal que $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração. Como $\dfrac{p}{q}$ é uma raiz da equação, vem

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

ou seja,

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Multiplicando ambos lados da equação por q^n, teremos

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} \cdot q^n + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} \cdot q^n + \cdots + a_1 \frac{p}{q} \cdot q^n + a_0 \cdot q^n = 0,$$

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \cdots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0. \tag{4.12}$$

Isolando o termo $a_n \cdot p^n$ em (4.12) e colocando q em evidência, temos

$$\begin{aligned} a_n \cdot p^n &= -a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q - \cdots - a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} - a_0 \cdot q^n \\ &= q \underbrace{\left(-a_{n-1} \cdot p^{n-1} - \cdots - a_1 \cdot p \cdot q^{n-2} - a_0 \cdot q^{n-1}\right)}_{s \in \mathbb{Z}} \\ &= q \cdot s. \end{aligned}$$

Isolando agora o termo $a_0 \cdot q^n$ em (4.12) e colocando p em evidência, obtemos

$$\begin{aligned} a_0 \cdot q^n &= -a_n \cdot p^n - a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q - \cdots - a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} \\ &= p \underbrace{\left(-a_n \cdot p^{n-1} - a_{n-1} \cdot p^{n-2} \cdot q - \cdots - a_1 \cdot q^{n-1}\right)}_{t \in \mathbb{Z}} \\ &= p \cdot t. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$a_n \cdot p^n = q \cdot s \Rightarrow q \mid a_n \cdot p^n$$

$$a_0 \cdot q^n = p \cdot t \Rightarrow p \mid a_0 \cdot q^n.$$

Sabemos que o $\text{mdc}(p, q) = 1$, então, o número inteiro q divide a_n e o número inteiro p divide a_0, em símbolos, $q \mid a_n$ e $p \mid a_0$. □

É oportuno esclarecermos que o teorema acima não se compromete em assegurar a existência de raízes em uma equação de coeficientes inteiros. Contudo, caso a equação possua raízes racionais, o teorema nos permite traçar todas as possibilidades para tais raízes.

Do Teorema 4.3.1 decorrem algumas consequências, vejamos:

- A partir do teorema poderemos construir um conjunto contendo as possíveis raízes racionais obtidas por meio dos divisores de a_n e a_0. Entretanto, se não houver nenhum elemento do conjunto que seja raiz da equação, concluímos que esta não possuirá raízes racionais.

- Caso $a_n = \pm 1$ e os demais coeficientes da equação sejam inteiros, a equação não possuirá raízes fracionárias, no entanto, poderá apresentar raízes inteiras que são divisores de a_n.

- Se a soma dos coeficientes da equação for igual a zero, teremos que o número 1 será uma raiz da equação dada.

Exemplo 4.3.1. Determine o conjunto solução da equação $2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$.

Neste exemplo não será possível de imediato a utilização do dispositivo de Briot-Ruffini, pois, o enunciando não nos fornece uma das raízes e não conseguimos visualizar rapidamente uma raiz da equação por meio de tentativas.

Observemos também, que o enunciado não apresentou nenhuma informação a respeito das raízes da equação, o que nos impede de resolvê-la através das Relações de Girard.

Todavia, ao observamos a equação, identificamos que a mesma é constituída de coeficientes inteiros, viabilizando a utilização do Teorema das Raízes Racionais como um método de resolução. Deste modo, pelo teorema, temos que se a equação possuir alguma raiz racional, esta será do tipo $\frac{p}{q}$, onde p é divisor de $a_0 = 1$ e q é divisor de $a_n = 2$, assim, temos que :

$$p \in \{\pm 1\} \ \ e \ q \in \{\pm 1, \pm 2\} \Rightarrow \frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\right\}.$$

Seja o polinômio do terceiro grau $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$, calculemos os valores numéricos de f:

$$\begin{aligned}
&f(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 - 3 + 1 = 1\\
&f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = -2 + 1 + 3 + 1 = 3\\
&f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{2}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{1} = 0\\
&f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{2}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{1} = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Como o valor numérico de $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, temos que $\frac{1}{2}$ é raiz da equação. Identificada uma raiz da equação, podemos utilizar o dispositivo de Briot-Rufini na divisão de $2x^3 + x^2 - 3x + 1$ por $x - \frac{1}{2}$ para determinar as demais raízes. Vejamos,

$$\begin{array}{c|cccc}
1/2 & 2 & 1 & -3 & 1 \\
\hline
 & 2 & 2 & -2 & \mid 0.
\end{array}$$

Encontramos $q(x) = 2x^2 + 2x - 2$. Fazendo $q(x) = 0$ e resolvendo a equação do segundo grau, teremos $\alpha_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\alpha_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

Portanto, o conjunto solução da equação original é $S = \left\{ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1}{2} \right\}$.

Exemplo 4.3.2. Determine o conjunto solução da equação $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$.

Novamente não nos foi fornecida nenhuma raiz e não conhecemos informações sobre as raízes, então, como esta equação também é constituída de coeficientes inteiros é conveniente usarmos o Teorema das Raízes Racionais para resolvê-la.

Temos que p é divisor $a_0 = -2$ e q é divisor de $a_n = 3$, assim,

$$p \in \{\pm 1, \pm 2\} \ \ e \ q \in \{\pm 1, \pm 3\} \Rightarrow \frac{p}{q} \in \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3} \right\}.$$

Seja $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 2$, calculando o valor numérico de f obtemos,

$$f(1) = 2 \quad f(-1) = -20 \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{50}{9}$$

$$f(2) = 10 \quad f(-2) = -70 \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{9} \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{34}{3}.$$

Sendo $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$, temos que $\dfrac{1}{3}$ é raiz da equação. Fazendo a divisão de $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2$ por $x - \dfrac{1}{3}$ poderemos encontrar as demais raízes da equação. Assim,

$$\begin{array}{c|cccc} 1/3 & 3 & -7 & 8 & -2 \\ \hline & 3 & -6 & 6 & |\ 0. \end{array}$$

Com a obtenção do polinômio $q(x) = 3x^2 - 6x + 6$ e resolvendo a equação do segundo grau $3x^2 - 6x + 6 = 0$, encontramos as raízes $\alpha_1 = 1 - i$ e $\alpha_2 = 1 + i$. Logo, o conjunto solução da equação de grau três $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$ é dado por $S = \left\{ \dfrac{1}{3}, 1 - i, 1 + i \right\}$.

Diante do exposto, percebe-se que quando não for viável o uso dos outros dois métodos já trabalhados, é de grande importância conhecer o Teorema das Raízes Racionais para buscar solucionar algumas equações de terceiro grau. No entanto, não podemos generalizar a utilização do método em foco para todas equações cúbicas, pois, o mesmo aplica-se apenas as equações cujos coeficientes são inteiros e que possuem raízes racionais.

4.4.Fórmula de Cardano-Tartaglia

Estudamos na Seção 1.1 que Nicolá Fontana contribuiu fundamentalmente para os avanços no estudo das equações cúbicas, impulsionando portanto, a obtenção dos resultados que conhecemos atualmente neste campo da matemática.

Reconhecida a importância da resolução dada por Tartaglia para as equações $x^3 + px + q = 0$ e $x^3 + px^2 + q = 0$, nesta seção, apresentaremos a fórmula descoberta por ele para solucionar tais equações. Mas, antes disso, convém informar que a linguagem a ser utilizada abaixo é diferente da complexa escrita da época, a qual Tartaglia fez uso.

Vimos anteriormente que Tartaglia solucionou a equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ que é diferente da fórmula geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ para as equações de terceiro grau. No entanto, a partir do formato usual $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, podemos obter o tipo especial $x^3 + px + q = 0$ e assim chegar na famosa fórmula de Cardano-Tartaglia. Para tanto, consideremos a equação do 3° grau na sua forma geral

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

tal que $a \neq 0$ e a, b, c e d são constantes reais.

Para tornarmos o coeficiente líder da equação igual a 1, basta dividirmos todos os termos por a

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Fazendo, $a_1 = \frac{b}{a}$, $b_1 = \frac{c}{a}$ e $c_1 = \frac{d}{a}$, ficamos com

$$x^3 + a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0. \tag{4.13}$$

A fim de eliminarmos o termo de x^2, supomos $x = y - \frac{a_1}{3}$ que será substituído na equação (4.13). Daí,

$$\left(y - \frac{a_1}{3}\right)^3 + a_1\left(y - \frac{a_1}{3}\right)^2 + b_1\left(y - \frac{a_1}{3}\right) + c_1 = 0$$

$$\left(y^3 - 3y^2\frac{a_1}{3} + 3y\left(\frac{a_1}{3}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{3}\right)^3\right) + a_1\left(y^2 - 2y\frac{a_1}{3} + \left(\frac{a_1}{3}\right)^2\right) + b_1\left(y - \frac{a_1}{3}\right) + c_1 = 0$$

$$y^3 - 3y^2\frac{a_1}{3} + 3y\frac{{a_1}^2}{9} - \frac{{a_1}^3}{27} + a_1y^2 - 2\frac{{a_1}^2}{3}y + \frac{{a_1}^3}{9} + b_1y - \frac{a_1}{3}b_1 + c_1 = 0$$

$$y^3 - \cancel{a_1y^2} + \cancel{a_1y^2} + \frac{{a_1}^2}{3}y - 2\frac{{a_1}^2}{3}y + b_1y - \frac{{a_1}^3}{27} + \frac{{a_1}^3}{9} - \frac{a_1}{3}b_1 + c_1 = 0$$

$$y^3 + \left(\frac{{a_1}^2}{3} - 2\frac{{a_1}^2}{3} + b_1\right)y + \left(-\frac{{a_1}^3}{27} + \frac{{a_1}^3}{9} - \frac{a_1}{3}b_1 + c_1\right) = 0$$

$$y^3+\left(\frac{a_1^2-2{a_1}^2+3b_1}{3}\right)y+\left(\frac{-a_1^3+3{a_1}^3-9a_1b_1+27c_1}{27}\right)=0$$

$$y^3+\underbrace{\left(-\frac{{a_1}^2+3b_1}{3}\right)}_{p\in\mathbb{R}}y+\underbrace{\left(\frac{2{a_1}^3-9a_1b_1+27c_1}{27}\right)}_{q\in\mathbb{R}}=0. \tag{4.14}$$

Logo,

$$y^3+py+q=0. \tag{4.15}$$

Até o então momento, tornamos a fórmula geral, que representa todas as equações de grau três, no tipo especial de equação cúbica solucionada por Tartaglia. Em continuidade, na resolução proposta por ele, foi pressuposto que a solução a ser encontrada era composta por duas parcelas. Assim, tomando $y=t+u$ e substituindo em (4.15), teremos

$$(t+u)^3+p\,(t+u)+q=0$$

$$t^3+3t^2u+3tu^2+u^3+p\,(t+u)+q=0$$

$$t^3+u^3+3tu\,(t+u)+p\,(t+u)+q=0$$

$$\left(t^3+u^3+q\right)+(3tu+p)\,(t+u)=0. \tag{4.16}$$

Para assumirmos a igualdade (4.16) como verdade, podemos usar

$$t^3+u^3+q=0 \text{ ou } 3tu+p=0.$$

Por conseguinte,

$$t^3+u^3=-q \text{ e } tu=-\frac{p}{3},$$

ou seja,

$$t^3+u^3=-q \text{ e } t^3u^3=-\left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Notemos que é simples determinarmos t^3 e u^3, pois, conhecemos sua soma e seu produto, que podem corresponder as raízes da seguinte equação do segundo grau

$$w^2-(t^3+u^3)\,w+(t^3u^3)=0$$

$$w^2+qw-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0. \tag{4.17}$$

Através da fórmula resolutiva da equação do 2° grau, obtemos

$$w=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-4\cdot1\cdot\left(-\frac{p}{3}\right)^3}}{2\cdot1}$$

$$w = -\frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{q^2 + 4 \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2}$$

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 + 4 \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^3}{2^2}}$$

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{4 \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^3}{4}}$$

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Logo,

$$w_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \text{ e } w_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Sendo t^3 e u^3 as raízes da equação (4.17) , ao fazermos $w_1 = t^3$ e $w_2 = u^3$, encontramos

$$w_1 = t^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \Rightarrow t = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

$$w_2 = u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \Rightarrow u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Sabendo que $y = t + u$ é uma raiz da equação $y^3 + py + q = 0$, escrevemos

$$y = t + u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \tag{4.18}$$

onde a expressão

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

é chamada de *Discriminante*.

Assim, 4.18 é a fórmula de Cardano-Tartaglia para solucionar equações do tipo $y^3 + py + q = 0$.[5]

E a solução para as equações da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ pode também ser alcançada ao fazermos uma adaptação na Fórmula 4.18 , tendo em vista que

$$x = y - \frac{a_1}{3} \text{ e } y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

[5] Em [9] p. 38-40, encontra-se uma forma diferente de obter a fórmula de Cardano-Tartaglia para equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ a partir da fórmula geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

temos que

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{a_1}{3}. \tag{4.19}$$

A expressão 4.19 é a fórmula para obter uma das raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, de modo que

$$p = \frac{-a_1{}^2 + 3b_1}{3},\ q = \frac{2a_1{}^3 - 9a_1b_1 + 27c_1}{27},\ a_1 = \frac{b}{a},\ b_1 = \frac{c}{a} \text{ e } c_1 = \frac{d}{a}.$$

Portanto, a fórmula de Cardano-Tartaglia é uma opção de método resolutivo para equações de terceiro grau do tipo $y^3 + py + q = 0$ e também para equações cúbicas em sua fórmula geral, mesmo que ela nos permita encontrar apenas uma das três raízes. A justificativa para o estudo de tal fórmula deve-se ao seu valor histórico, pois, a partir dela passamos a entender alguns problemas que parecem misteriosos e, por isso, é importante que seu estudo seja parte do conhecimento dos professores de matemática.

Uma alternativa para solucionar equações cúbicas usando a fórmula de Cardano-Tartaglia é combiná-la com outros métodos de solução e assim, poderemos obter todas as raízes. Vejamos os exemplos a seguir:

Exemplo 4.4.1. Encontre as raízes da equação de grau três $x^3 - 7x + 6 = 0$ usando o método de Cardano-Tartaglia.

A equação já se encontra no formato $x^3 + px + q = 0$, onde $p = -7$ e $q = 6$. Aplicando a fórmula de Cardano-Tartaglia, obtemos

$$x = \sqrt[3]{-\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-7}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{6}{2} - \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-7}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{243 - 343}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{243 - 343}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{-100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{-100}{27}}} \tag{4.20}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-9\sqrt{3} + 10i}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\frac{-9\sqrt{3} - 10i}{3\sqrt{3}}}. \tag{4.21}$$

Contando com o auxílio de uma calculadora para solucionar 4.21 , encontramos uma raiz igual 2.

Encontrada uma raiz da equação, podemos utilizar o método de Briot-Ruffini para fazer a divisão de $x^3 - 7x + 6$ por $x - 2$ e determinar as demais raízes.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \mid 0. \end{array}$$

O quociente da divisão é o polinômio $q(x) = x^2 + 2x - 3$. Fazendo $q(x) = 0$ e solucionando a equação do 2° grau, obtemos $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = -3$. Portanto, as raízes da equação $x^3 - 7x + 6 = 0$ são $S = \{-3, 1, 2\}$.

A equação (4.20) do exemplo anterior nos mostra que para solucionarmos o problema precisamos trabalhar com a raiz quadrada de números negativos, e como estudado no Capítulo 1, no passado, este tipo de situação causou muitos questionamentos, dúvidas sobre a eficácia da fórmula em questão e também, a não solução de muitas equações cúbicas, isto porque, os matemáticos da época ainda não haviam descoberto a existência dos números complexos.

Exemplo 4.4.2. Encontre as raízes da equação do terceiro grau $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$.

A equação é do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a = 1$, $b = -2$, $c = -11$ e $d = 12$, assim, podemos utilizar a adaptação 4.19 para equações do terceiro grau que se encontram no formato geral. Sendo

$$a_1 = -2,\ b_1 = -11,\ c_1 = 12,\ p = -\frac{37}{3} \text{ e } q = \frac{110}{27},$$

temos que

$$x = \sqrt[3]{-\frac{110}{54} + \sqrt{\frac{12100}{2916} - \frac{50653}{729}}} + \sqrt[3]{-\frac{110}{54} - \sqrt{\frac{12100}{2916} - \frac{50653}{729}}} + \frac{2}{3} = 4.$$

Sendo $\alpha_1 = 4$ uma raiz da equação dada, aplicando Briot-Ruffini encontramos as outras duas raízes $\alpha_2 = -3$ e $\alpha_3 = 1$.

A seguir mostraremos que após a utilização do método de Cardano-Tartaglia é possível determinar as demais raízes por meio do Teorema 4.4.1, que relaciona as raízes de um polinômio, escrevendo duas raízes em função de uma terceira.

Teorema 4.4.1. Seja o polinômio de terceiro grau $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tal que seus coeficientes são reais e $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma raiz de $f(x)$, teremos que as demais raízes de f são dadas por

$$r_{1,2} = -\frac{(a\alpha + b) \pm \sqrt{\Omega - af'(\alpha)}}{2a} \tag{4.22}$$

onde $\Omega = b^2 - 3ac$.

Demonstração. Consideremos o polinômio de terceiro grau $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com coeficientes reais e seja $\alpha \in \mathbb{R}$ uma raiz de $f(x)$.

Calculando o valor numérico $f(\alpha)$ e a derivada $f'(\alpha)$, temos

$$f(\alpha) = a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d \text{ e } f'(\alpha) = 3a\alpha^2 + 2\alpha b + c.$$

Fazendo,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x) - f(\alpha) \\
&= ax^3 + bx^2 + cx + d - \left(a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d\right) \\
&= ax^3 + bx^2 + cx + d - a\alpha^3 - b\alpha^2 - c\alpha - d \\
&= ax^3 - a\alpha^3 + bx^2 - b\alpha^2 + cx - c\alpha + d - d \\
&= a\left(x^3 - \alpha^3\right) + b\left(x^2 - \alpha^2\right) + c(x - \alpha) \\
&= (x - \alpha)[a\left(x^2 + x\alpha + \alpha^2\right) + b\left(x + \alpha\right) + c] \\
&= (x - \alpha)[ax^2 + ax\alpha + a\alpha^2 + bx + b\alpha + c] \\
&= (x - \alpha)\underbrace{ax^2 + \left(a\alpha + b\right)x + \left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right)}_{g(x)}.
\end{aligned}$$

Simplificando,

$$f(x) = (x - \alpha)g(x).$$

O polinômio do segundo grau $g(x)$ pode ter suas raízes determinadas por

$$r_{1,2} = -\frac{(a\alpha + b) \pm \sqrt{\Delta_g}}{2a}, \tag{4.23}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Delta_g &= (a\alpha + b)^2 - 4a\left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) \\
&= \left(a^2\alpha^2 + 2a\alpha b + b^2\right) - 4a^2\alpha^2 - 4a\alpha b - 4ac \\
&= -3a^2\alpha^2 - 2a\alpha b + b^2 - 4ac \\
&= -3a^2\alpha^2 - 2a\alpha - ac - 3ac + b^2 \\
&= -a\underbrace{\left(3a\alpha^2 + 2\alpha b + c\right)}_{f'(\alpha)} + \underbrace{\left(b^2 - 3ac\right)}_{\Omega},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\Delta_g = \Omega - af'(\alpha). \tag{4.24}$$

Substituindo 4.24 em 4.23, temos que

$$r_{1,2} = -\frac{(a\alpha + b) \pm \sqrt{\Omega - af'(\alpha)}}{2a}$$

determina as demais raízes de $f(x)$. □

O exemplo a seguir traz a resolução de uma equação do terceiro grau solucionada com a utilização da fórmula de Cardano-Tartaglia e do Teorema 4.4.1.

Exemplo 4.4.3. Determine as raízes da equação polinomial do terceiro grau $x^3-3x-2=0$.

Como a equação já se encontra na forma x^3+px+q, onde $p=-3$ e $q=-2$, podemos utilizar a fórmula de Cardano-Tartaglia, obtendo

$$x=\sqrt[3]{-\frac{(-2)}{2}+\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2+\left(\frac{-3}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{(-2)}{2}-\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2+\left(\frac{-3}{3}\right)^3}}$$

$$x=\sqrt[3]{1+\sqrt{1-1}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{1-1}}$$

$$x=\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}=1+1=2.$$

Seja o polinômio $f(x)=x^3-3x-2$ de coeficientes reais, onde $a=1$, $b=0$, $c=-3$, $d=-2$ e $\alpha=2$ é uma raiz real de $f(x)$, temos que 4.22 nos fornece as outras duas raízes de $f(x)$, vejamos

$$r_{1,2}=-\frac{(a\alpha+b)\pm\sqrt{\Omega-af'(\alpha)}}{2a}$$

$$r_{1,2}=-\frac{(1\cdot 2+0)\pm\sqrt{(0^2-3\cdot 1\cdot(-3))-(1\cdot(3\cdot 2^2-3+0))}}{2\cdot 1}$$

$$r_{1,2}=-\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}=-1.$$

Assim, a equação $x^3-3x-2=0$ possui uma raiz dupla $\alpha_1=-1$ e uma raiz simples $\alpha_2=2$ e seu conjunto solução é dado por $S=\{-1,2\}$.

Portanto, observa-se que não existe apenas um único método ou fórmula que solucione toda e qualquer equação polinomial do terceiro grau, para cada equação cúbica é necessário examinar previamente qual método resolutivo melhor se adequará a determinação das raízes. De forma que, muitas vezes, será necessário a combinação de vários métodos para encontrar a solução de uma única equação do terceiro grau.

4.4.1.Relações entre as raízes de uma equação do terceiro grau a partir da Fórmula de Cardano-Tartaglia

Sabendo que uma equação do terceiro grau apresenta três raízes, estudaremos, a partir da Fórmula de Cadarno-Tartaglia, casos que relacionam tais raízes a fim de encontrarmos alguns resultados importantes. Inicialmente, iremos supor que as três raízes da equação do terceiro grau $x^3 + px + q$ são reais e no segundo momento, consideraremos que a equação em questão apresenta raízes complexas.

- **1° Caso:** três raízes reais distintas

Consideremos o produto

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3), \tag{4.25}$$

tal que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ e $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \neq 0$.

O desenvolvimento do produto nos conduzirá a um polinômio do terceiro grau. Igualando 4.25 a zero, a equação do terceiro grau terá como raízes α_1, α_2 e α_3, uma vez que o produto será nulo para qualquer um desses valores.

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = 0$$

$$x^3 - \alpha_3 x^2 - \alpha_2 x^2 + \alpha_2\alpha_3 x - \alpha_1 x^2 + \alpha_1\alpha_3 x + \alpha_1\alpha_2 x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$$

$$x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0. \tag{4.26}$$

Para anular o termo do 2º grau, façamos $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, assim, $\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2$. Substituindo o valor de α_3 em 4.26 , obtemos

$$x^3 - [\cancel{\alpha_1} + \cancel{\alpha_2} + (\cancel{-\alpha_1}\cancel{-\alpha_2})]\,x^2 + [\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1(-\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_2(-\alpha_1 - \alpha_2)]\,x - \alpha_1\alpha_2(-\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

$$x^3 + (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2)\,x + \alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

$$x^3 + \left[\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^2\right] x + \alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) = 0.$$

Assim, a equação

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x + (\alpha_1 + \alpha_2)) = 0$$

admite α_1, α_2 e $-(\alpha_1 + \alpha_2)$ como raízes e é equivalente a

$$x^3 + \underbrace{\left[\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^2\right]}_{p \in \mathbb{R}} x + \underbrace{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)}_{q \in \mathbb{R}} = 0$$

$$x^3 + px + q = 0.$$

Aplicando a Fórmula de Cardano-Tartaglia, teremos

$$x = \sqrt[3]{-\left[\frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}\right] + \sqrt{\left[\frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}\right]^2 + \left[\frac{\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^2}{3}\right]^3}}$$

$$+\sqrt[3]{-\left[\frac{\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}{2}\right]-\sqrt{\left[\frac{\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}{2}\right]^2+\left[\frac{\alpha_1\alpha_2-\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^2}{3}\right]^3}}.$$

Façamos o estudo do discriminante que se encontra sob o radical quadrático:

$$\Delta=\left[\frac{\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}{2}\right]^2+\left[\frac{\alpha_1\alpha_2-\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^2}{3}\right]^3. \tag{4.27}$$

O desenvolvimento de 4.27 nos leva a

$$\Delta=\frac{-4\alpha_1^6-12\alpha_1^5\alpha_2+3\alpha_1^4\alpha_2^2+26\alpha_1^3\alpha_2^3+3\alpha_1^2\alpha_2^4-12\alpha_1\alpha_2^5-4\alpha_2^6}{108}.$$

Sendo o numerador igual ao produto $-\left(\alpha_1-\alpha_2\right)^2\left(2\alpha_1+\alpha_2\right)^2\left(\alpha_1+2\alpha_2\right)^2$, temos que

$$\Delta=-\frac{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)^2\left(2\alpha_1+\alpha_2\right)^2\left(\alpha_1+2\alpha_2\right)^2}{108}. \tag{4.28}$$

Logo, se as raízes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, o discriminante será negativo ou nulo. Diante disso, podemos concluir que se uma equação polinomial do terceiro grau não possuir raízes complexas, o valor do seu discriminante será negativo ou nulo, em símbolos, $\Delta \leq 0$.

Se porventura $\Delta = 0$, faz-se necessário analisar as seguintes possibilidades, recordando que $\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2$:

(1) se $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, temos que $\alpha_1 = \alpha_2$;

(2) se $2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, temos que $\alpha_2 = -2\alpha_1$ e $\alpha_3 = -\alpha_1 - (-2\alpha_1) = \alpha_1$;

(3) se $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$, temos que $\alpha_1 = -2\alpha_2$ e $\alpha_3 = -(-2\alpha_2) - \alpha_2 = \alpha_2$.

Portanto, se o discriminante for nulo, teremos três raízes reais, de forma que pelo menos duas serão iguais.

De acordo com Garbi (2010) [9], o resultado 4.28 é surpreendente, pois, para que encontremos α_1 e α_2 reais distintos pela Fórmula de Cardano, teremos inevitavelmente que trabalhar com raízes quadradas de números negativos, algo que, por muito tempo, era considerado impossível. Ele complementa ainda que

> A surpresa é ainda maior quando se recorda que, nas equações do segundo grau, as 2 raízes somente são reais quando $\Delta \geq 0$. Para as equações de 3°grau as 3 somente são reais quando $\Delta \leq 0$. (GARBI, 2010, p. 50).

- **2° Caso:** Duas raízes complexas e uma raiz real

Se considerarmos que $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação polinomial do terceiro grau, de acordo com o Teorema 3.9.1 , teremos que $\bar{z} = a - bi$, com $b \neq 0$, também será raiz da equação e como equações cúbicas possuem grau ímpar, a terceira raiz da equação dada, denominada α, será obrigatoriamente real. Logo, consideremos o seguinte produto

$$(x - z)(x - \bar{z})(x - \alpha). \tag{4.29}$$

Igualando 4.29 a zero e aplicando a distributividade, teremos

$$x^3 - \alpha x^2 - \bar{z}x^2 + \alpha\bar{z}x - zx^2 + \alpha zx + z\bar{z}x - z\bar{z}\alpha = 0$$

$$x^3 - (\alpha + \bar{z} + z)x^2 + (\alpha\bar{z} + \alpha z + z\bar{z})x - z\bar{z}\alpha = 0. \tag{4.30}$$

Para que inexista o termo do 2° grau, façamos $\alpha + \bar{z} + z = 0$, de forma a obter $\alpha = -2a$. Substituindo o valor de α em (4.30) , assim como os respectivos valores de z e $\bar{z}$, encontramos

$$x^3 - \left(\cancel{-2a} + \cancel{a} - \cancel{bi} + \cancel{a} + \cancel{bi}\right)x^2 + \left[-2a(a - bi) + (-2a)(a + bi) + (a + bi)(a - bi)\right]x -$$

$$(a + bi)(a - bi)(-2a) = 0.$$

$$x^3 + \left(-2a^2 + \cancel{2abi} - 2a^2 \cancel{-2abi} + a^2 \cancel{-abi} + \cancel{abi} + b^2\right)x - \left[\left(a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} + b^2\right)(-2a)\right] = 0.$$

$$x^3 + \underbrace{\left(-3a^2 + b^2\right)}_{p \in \mathbb{R}} x + \underbrace{\left[2a\left(a^2 + b^2\right)\right]}_{q \in \mathbb{R}} = 0$$

$$x^3 + px + q = 0.$$

Aplicando a Fórmula de Cardano-Tartaglia, obtemos

$$x^3 = \sqrt[3]{-\left[\frac{2a(a^2 + b^2)}{2}\right]^2 + \sqrt{\left[\frac{2a(a^2 + b^2)}{2}\right]^2 + \left[\frac{-3a^2 + b^2}{3}\right]^3}}$$

$$+\sqrt[3]{-\left[\frac{2a(a^2 + b^2)}{2}\right]^2 - \sqrt{\left[\frac{2a(a^2 + b^2)}{2}\right]^2 + \left[\frac{-3a^2 + b^2}{3}\right]^3}}.$$

Analisemos o discriminante localizado no radical quadrático:

$$\Delta = \left[\frac{2a(a^2 + b^2)}{2}\right]^2 + \left[\frac{-3a^2 + b^2}{3}\right]^3. \tag{4.31}$$

Desenvolvendo 4.31, temos que

$$\Delta = a^2\left(a^4 + 2a^2b^2 + b^4\right) + \left[\frac{-27a^6 + 3\left(-3a^2\right)^2 b^2 + 3\left(-3a^2\right)b^4 + b^6}{27}\right]$$

$$\Delta = a^6 + 2a^4b^2 + a^2b^4 + \left[\frac{-27a^6 + 27a^4b^2 - 9a^2b^4 + b^6}{27}\right]$$

$$\Delta = \frac{\cancel{27a^6} + 54a^4b^2 + 27a^2b^4 \cancel{- 27a^6} + 27a^4b^2 - 9a^2b^4 + b^6}{27}$$

$$\Delta = \frac{81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6}{27}. \tag{4.32}$$

Observemos que se a equação do terceiro grau apresentar raiz complexa, o valor do discriminante será positivo ou nulo ($\Delta \geq 0$).

Neste segundo caso, se $\Delta = 0$, observando 4.32 constatamos que os valores de a e b também deverão ser iguais a zero, o que é um absurdo, pois se assim fosse, nossa hipótese seria contrariada, uma vez que as três raízes seriam nulas e não haveria raízes complexas do tipo $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$, com $b \neq 0$.

Resumidamente, em concordância com Garbi (2010) [9] podemos relacionar as três raízes de uma equação polinomial do terceiro grau da seguinte forma:

- se $\Delta < 0$ a equação possui três raízes reais e distintas;
- se $\Delta = 0$ as três raízes são reais, de maneira que ao menos duas delas são iguais;
- se $\Delta > 0$ a equação possui duas raízes complexas e uma raiz real.

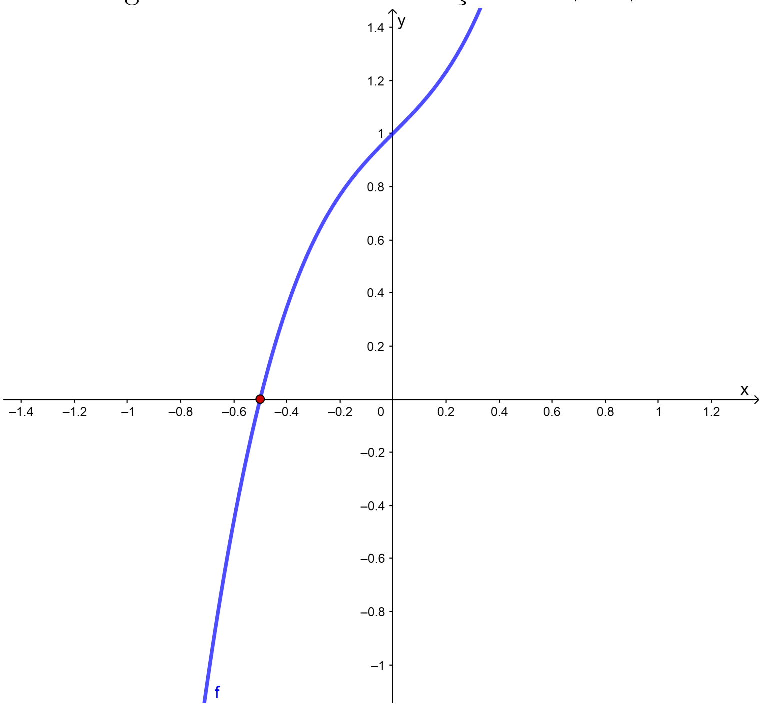
Exemplo 4.4.4. Dada a equação $4x^3 + x + 1 = 0$, façamos a análise de suas raízes.

Sabendo que $p = 1$ e $q = 1$, podemos calcular o valor do discriminante da equação, daí

$$\Delta = \frac{1^2}{4} + \frac{1^3}{27} = \frac{31}{108} > 0.$$

Assim, a equação possui uma raiz real $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ e duas raízes complexas da forma $\alpha_2 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{4}$ e $\alpha_3 = \frac{1 - i\sqrt{7}}{4}$, como mostra o gráfico 4.1 .

Figura 4.1: Gráfico da função $4x^3 + x + 1$



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

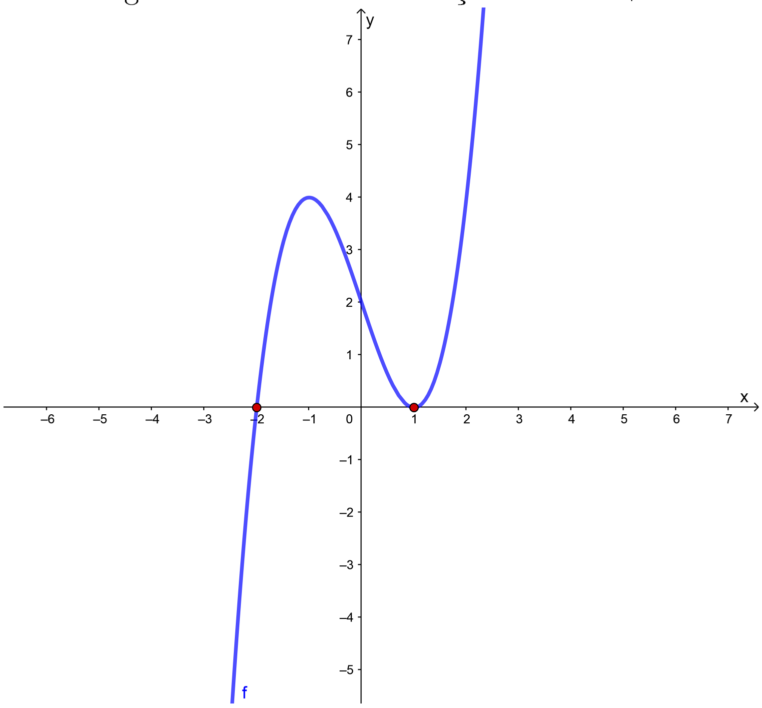
Exemplo 4.4.5. Dada a equação $x^3 - 3x + 2 = 0$, façamos a análise de suas raízes.

Temos que $p = -3$ e $q = 2$. Calculando o discriminante da equação, vem

$$\Delta = \frac{2^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} = 0.$$

Logo, a equação possui uma raiz real simples $\alpha_1 = -2$ e uma raiz real dupla $\alpha_2 = 1$, conforme nos mostra o gráfico 4.2 .

Figura 4.2: Gráfico da função $x^3 - 3x + 2$



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

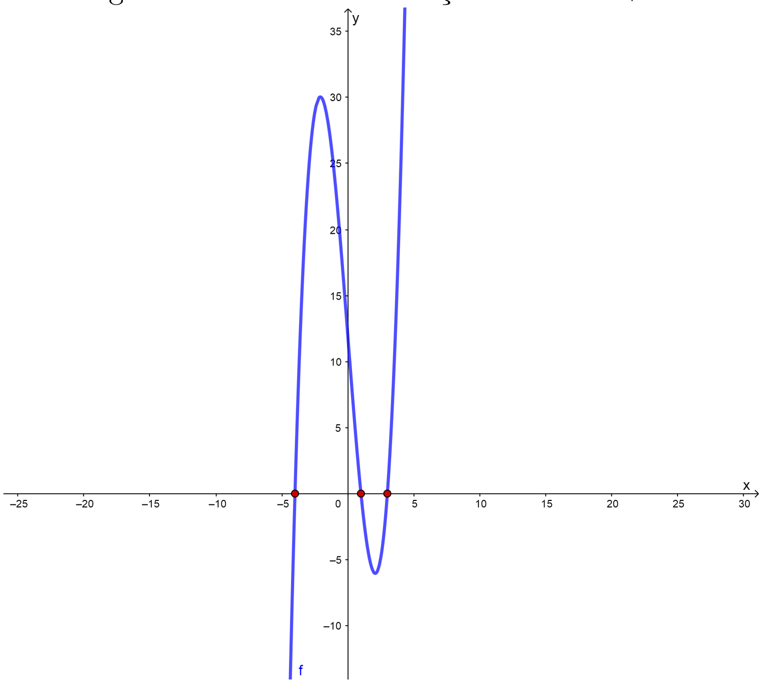
Exemplo 4.4.6. Dada a equação $x^3 - 13x + 12 = 0$, façamos a análise de suas raízes:

Sendo $p = -13$ e $q = 12$, calculemos o valor do discriminante

$$\Delta = \frac{12^2}{4} + \frac{(-13)^3}{27} = -\frac{1225}{27} < 0.$$

Logo, como mostra o gráfico 4.3 , a equação possui três raízes reais distintas, que são elas: $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = 3$.

Figura 4.3: Gráfico da função $x^3 - 13x + 12$



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

4.5. Gráficos de Funções do Terceiro Grau

Estudados alguns métodos de resoluções de equações polinomiais do terceiro grau, faremos a partir de então o estudo do comportamento gráfico de funções de grau três para a visualização geométrica de algumas definições e conclusões já obtidas anteriormente. À vista disso, será utilizado noções e resultados de Cálculo Diferencial, para uma apreciação mais completa deste conteúdo, indicamos [12].

A princípio, relembremos que toda função polinomial é contínua.[6] Nosso primeiro passo será explorar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $f(x) = x^3 + px + q$, tal que p e q são números reais e constantes, a fim de mostrar que o gráfico intercepta o eixo das abcissas pelo menos uma vez, o que configura a existência de pelo menos uma raiz real em toda equação $f(x) = x^3 + px + q = 0$.

Vejamos,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + px + q \\ &= x^3\left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Em (4.33) , $\dfrac{p}{x^2}$ e $\dfrac{q}{x^3}$ serão irrelevantes para quantidades de x que apresentam alto valor absoluto, pois irão se aproximar de zero, ou melhor, tendem a zero. Dessa forma,

[6]Esta afirmação, bem como sua demonstração, encontra-se disponível em [12], p. 79.

para tais quantidades irá prevalecer, dentro do parênteses, o sinal positivo do número 1. Por conseguinte, se bem observarmos, na ocasião que o valor absoluto de x é alto, o sinal de $f(x)$ será o mesmo de x^3, ou melhor, de x, já que o sinal de 1 é positivo e $\frac{p}{x^2}$ e $\frac{q}{x^3}$ não irá nos interessar.

Ainda, se em 4.33 os valores altos de x forem positivos, teremos que $f(x)$ será positiva e se os valores grandes de x forem negativos, $f(x)$ será negativa. Assim, pelo fato de $f(x)$ transcorrer continuamente de positivo a negativo, em um dado momento ela irá se anular, ou seja, interceptar o eixo x, logo, a função $x^3 + px + q$ possuirá pelo menos uma raiz real.

Sabendo que $f(x) = x^3+px+q$ apresenta pelo menos uma raiz real, iremos verificar as possibilidades para a forma dessa raiz graficamente e estudar também as outras duas raízes da função.

Seja a derivada primeira de $f(x)$ dada por

$$f'(x) = 3x^2 + p. \tag{4.34}$$

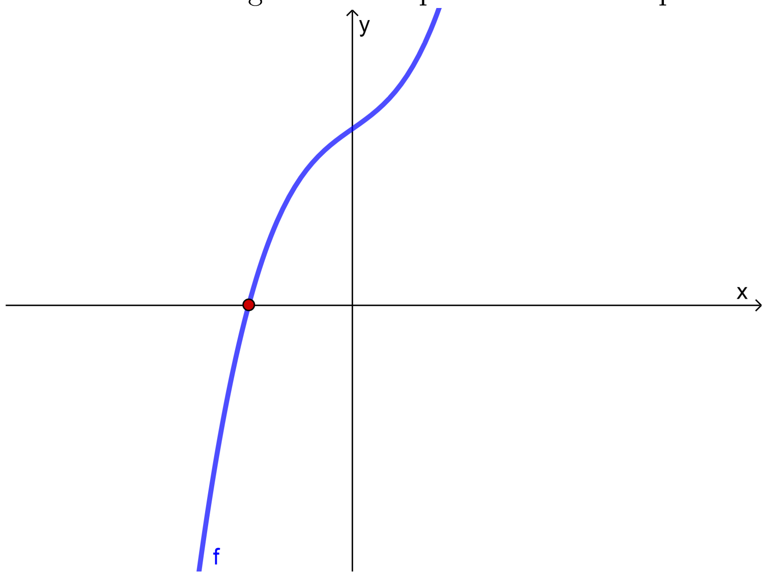
Para o caso de $p > 0$, temos que $f'(x) > 0$, assim sendo, como consequência do Teorema do Valor Médio [7] , encontrado nos livros de Cálculo diferencial, f será estritamente crescente, dessa forma, podemos garantir que $f(x)$ interceptará o eixo x uma única vez. Portanto, $f(x) = 0$ terá uma raiz real, podendo ser negativa, positiva ou nula, e um par de raízes complexas conjugadas.

Observemos as possibilidades gráficas para as raízes de $f(x)$ quando $p > 0$ nas Figuras 4.4 , 4.5 e 4.6 .

[7] A consequência do Teorema do Valor Médio e o próprio teorema, encontram-se disponíveis em [12], p. 224-225.

- **1° Caso:** $p > 0$ e $q > 0$

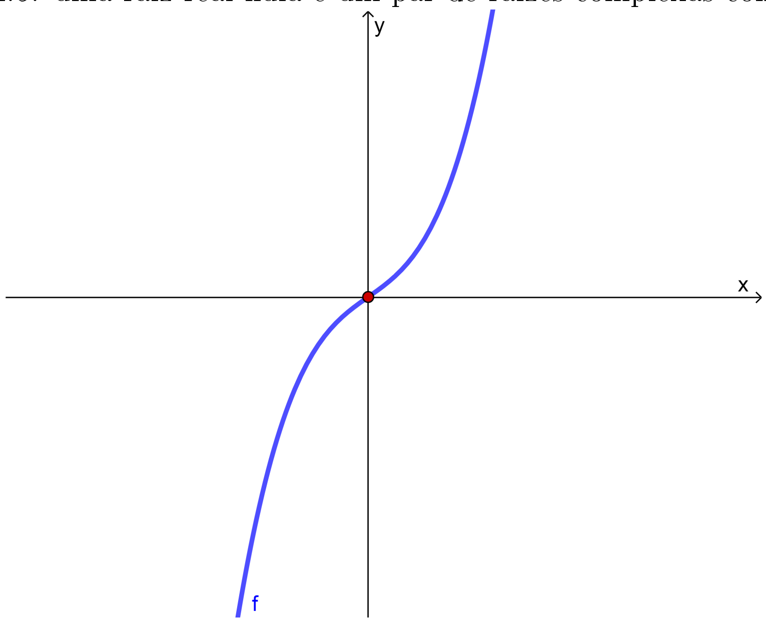
Figura 4.4: uma raiz real negativa e um par de raízes complexas conjugadas



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

- **2° Caso:** $p > 0$ e $q = 0$

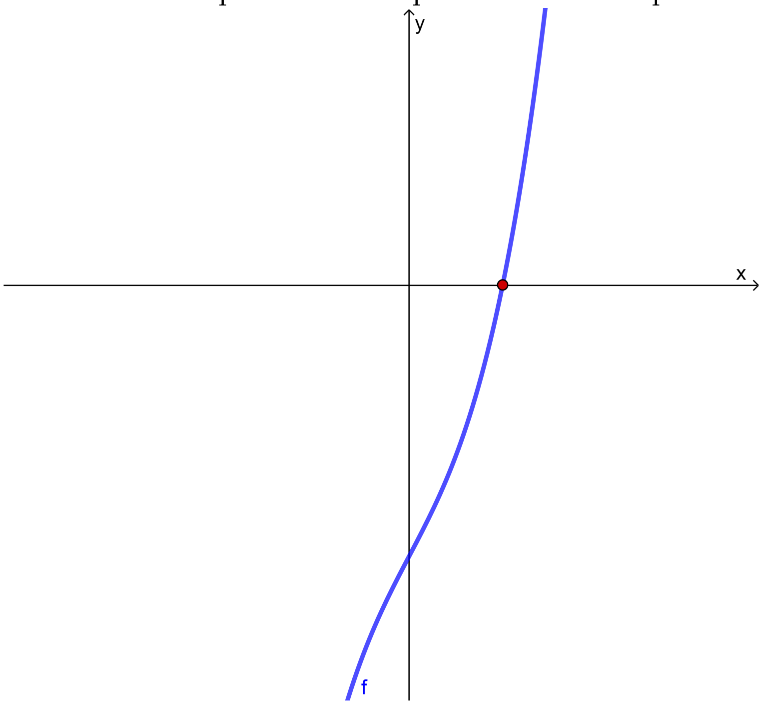
Figura 4.5: uma raiz real nula e um par de raízes complexas conjugadas



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

- **3° Caso:** $p > 0$ e $q < 0$

Figura 4.6: uma raiz real positiva e um par de raízes complexas conjugadas



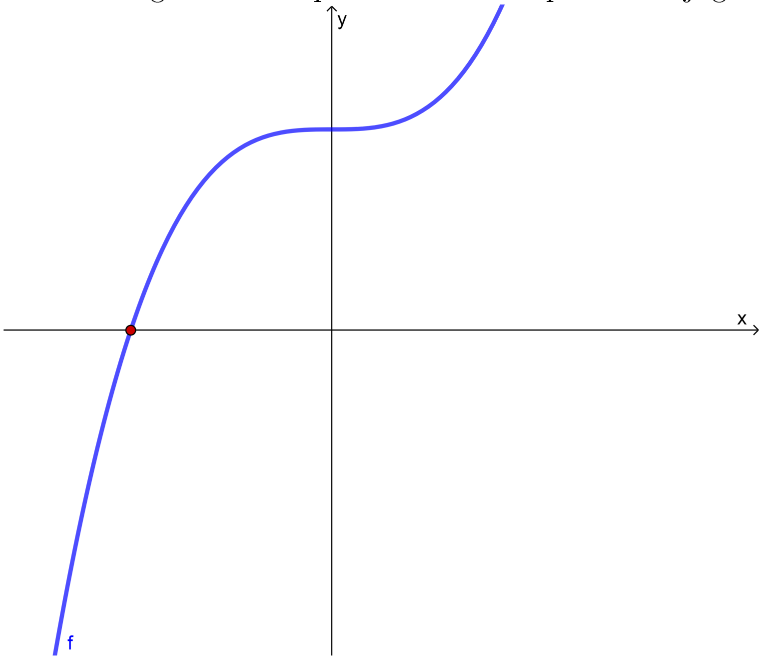
Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Para o caso de $p = 0$, teremos que a equação do terceiro grau $x^3 + px + q$ será da forma $x^3 + q$, ou seja, $x^3 = -q$. Logo, se $q \neq 0$, a equação possuirá uma raiz real e um par de raízes complexas, mas, se $q = 0$, a equação apresentará uma raiz real tripla (igual a zero).

Em 4.7 , 4.8 e 4.9 descrevemos, graficamente, as possibilidades para as raízes de $f(x)$ quando $p = 0$.

- **1° Caso:** $p = 0$ e $q \neq 0$

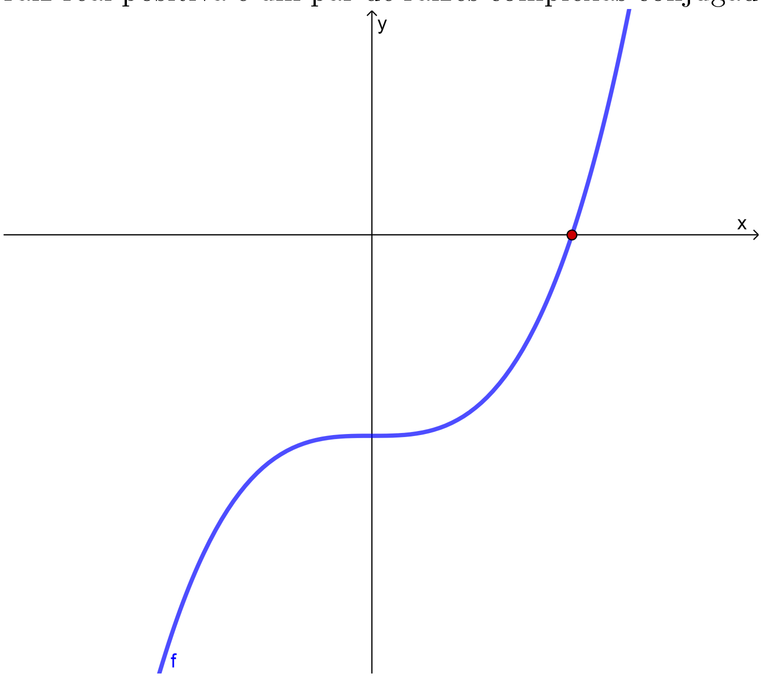
Figura 4.7: uma raiz real negativa e um par de raízes complexas conjugadas, quando $q > 0$



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

- **2° Caso:** $p = 0$ e $q \neq 0$

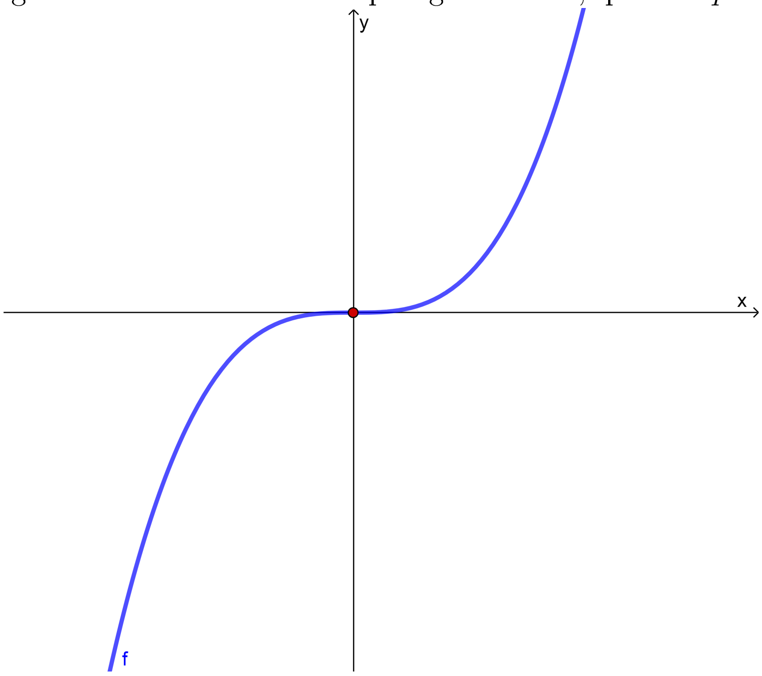
Figura 4.8: uma raiz real positiva e um par de raízes complexas conjugadas, quando $q < 0$



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

- **3° Caso:** $p = 0$ e $q = 0$

Figura 4.9: uma raiz real tripla igual a zero, quando $q = 0$



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

Por fim, quando $p < 0$, e tomando $p = -3a^2$ com $a > 0$, temos que $f(x)$ será dada por

$$f(x) = x^3 - 3a^2x + q.$$

Calculando a primeira e a segunda derivada de f, obtemos

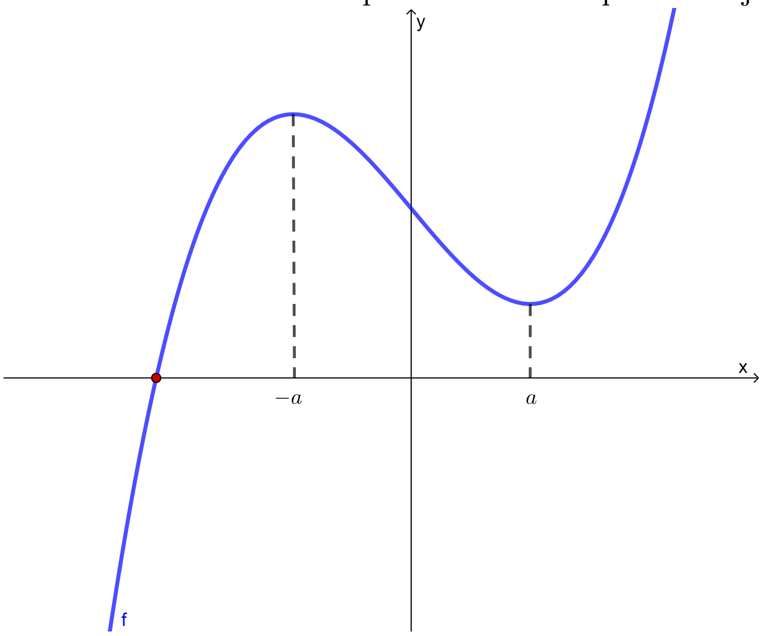
$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 \text{ e } f''(x) = 6x.$$

Visualmente, é possível verificar que teremos $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$. Ainda, vejamos que $f''(a) = 6a > 0$ e $f''(-a) = -6a < 0$. Como $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$, temos aqui uma condição suficiente para constarmos que a é um ponto de mínimo local.[8] De modo análogo, como $f'(-a) = 0$ e $f''(-a) < 0$, temos que $-a$ é um ponto de máximo local. Logo, a medida que $f(x) = 0$ possua uma raiz real e um par de raízes complexas, uma raiz real simples e uma dupla ou três raízes reais distintas, o gráfico de f poderá apresentar o formato indicado nas Figuras 4.10, 4.11 e 4.12, respectivamente:

[8]Em [12], p. 281, encontra-se disponível o teorema que estabelece uma condição suficiente para identificarmos um ponto de máximo ou mínimo local.

- **1° Caso:** $p < 0$ e $\Delta > 0$

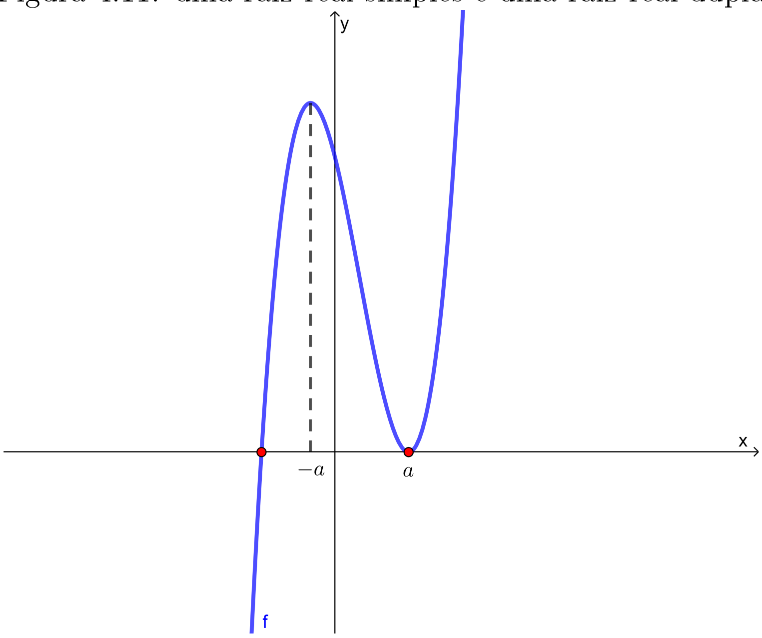
Figura 4.10: uma raiz real e um par de raízes complexas conjugadas



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

- **2° Caso:** $p < 0$ e $\Delta = 0$

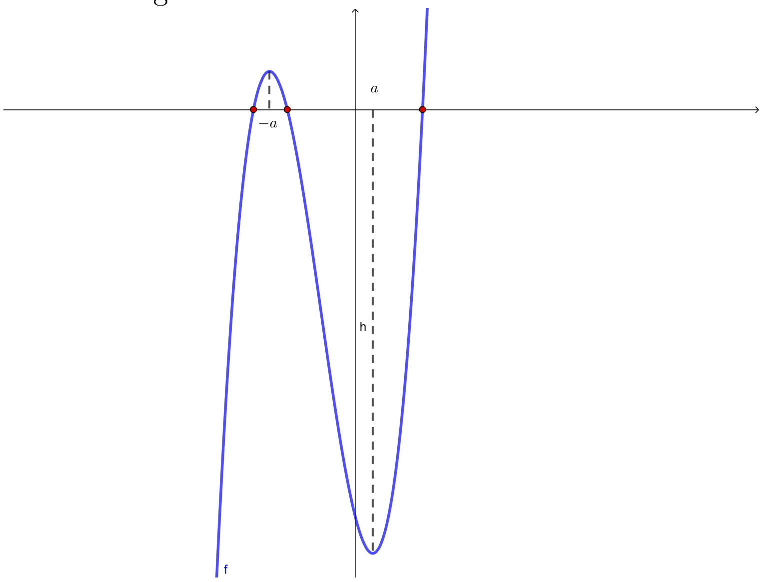
Figura 4.11: uma raiz real simples e uma raiz real dupla



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

- **3° Caso:** $p < 0$ e $\Delta < 0$

Figura 4.12: três raízes reais distintas



Fonte: elaborado pelo autor (2021).

As três possibilidades gráficas em 4.10 , 4.11 e 4.12 correspondem, respectivamente, a $f(a) \cdot f(-a) > 0$, $f(a) \cdot f(-a) = 0$ e $f(a) \cdot f(-a) < 0$. Vejamos

$$\begin{aligned} f(a) \cdot f(-a) &= \left(a^3 - 3a^3 + q\right)\left(-a^3 + 3a^3 + q\right) \\ &= \left(-2a^3 + q\right)\left(2a^3 + q\right) \\ &= \left(q - 2a^3\right)\left(q + 2a^3\right) = q^2 - 4a^6. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} p &= -3a^2 \\ \left(a^2\right)^3 &= \left(-\frac{p}{3}\right)^3 \\ a^6 &= -\frac{p^3}{27}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Substituindo o valor de 4.36 em 4.35 , obtemos

$$f(a) \cdot f(-a) = q^2 - 4 \cdot \left(-\frac{p^3}{27}\right) = 4\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = 4\Delta.$$

Portanto, o sinal de $f(a) \cdot f(-a)$ será o mesmo do discriminante Δ. Deste modo, $x^3 + px + q = 0$, com p<0, poderá ter:

- três raízes reais e distintas, se $\Delta < 0$;

- três raízes reais, de maneira que ao menos duas delas são iguais, se $\Delta = 0$;
- duas raízes complexas e uma raiz real, se $\Delta > 0$.

O próximo capítulo trata-se das considerações a respeito deste trabalho, apresenta também recomendações de aprofundamento teórico nesta linha de estudo, como por exemplo, sugestões para trabalhos futuros que discorram sobre a resolução de equações cúbicas por meio de métodos numéricos.

Considerações Finais

Nesta monografia foi evidenciada a ausência de um estudo específico, sequencial e detalhado de polinômios do terceiro grau e equações cúbicas nas referências pesquisadas, e por isso seria pertinente a criação de uma material que complementasse essa carência e oportunizasse a ampliação da aprendizagem acerca das especificidades encontradas no estudo de tais conteúdos.

Em meio a isto, o presente trabalho teve como principal objetivo promover um estudo que viabilizasse o acesso à informações que não são comumente exploradas no estudo de polinômios de grau três e equações polinomiais do terceiro grau pelas literaturas. E após a realização deste estudo, constatou-se que tal objetivo foi atendido, pois, foi possível a elaboração de um material bem estruturado, com uma sequência didática que favorece a construção do entendimento em cada etapa do trabalho, contendo ainda, antes de cada capítulo, as referências que deram o suporte teórico para a elaboração do mesmo.

Entende-se que os objetivos específicos também foram alcançados, pois, este trabalho contém a exposição histórica dos principais fatos que levaram à descoberta das equações cúbicas e dos números complexos, apresenta a definição de polinômios com coeficientes em anéis em uma perspectiva geral e traz a revisão preliminar de estruturas algébricas necessárias para a compreensão desta parte do trabalho. Contempla ainda, características, definições, propriedades e teoremas direcionados a polinômios do terceiro grau e equações cúbicas. Além disso, enfatiza métodos algébricos de equações cúbicas e traz a análise gráfica dos resultados encontrados.

Dessa forma, em resposta a questão norteadora levantada no início deste trabalho, conferimos ser possível a realização de um estudo a respeito de polinômios do terceiro grau e equações cúbicas que atendam os objetivos anteriormente destacados com a utilização da metologia empregada nesta monografia. Contudo, existem ainda muitos outros elementos interessantes sobre tais conteúdos que não foram explorados neste trabalho devido a grande extensão do mesmo.

Cabe destacar que alguns empecilhos surgiram durante o processo de construção deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Uma grande dificuldade foi a seleção do aparato teórico a fim de montar uma sequência didática lógica e satisfatória sobre polinômios do terceiro grau e equações cúbicas, pois, cada uma das literaturas apresentava uma ordem de conteúdos diferente das demais, abordando também estes conteúdos sob perspectivas diferentes. Assim, cada divisão do trabalho exigiu uma busca incensante e cautelosa por informações que poderiam se complementar.

Ademais, durante a pesquisa não foi encontrado materiais que fizessem a interpretação e o direcionamento de propriedades, definições e teoremas particularmente para polinômios de grau três e equações cúbicas. Com isso, foi necessário apresentar informações de um ponto de vista geral e em seguida aplicá-las ao caso específico desses conteúdos.

Foi encontrada também, limitação no momento de exemplificar as ideias que iam sendo construídas, visto que, como foi mencionado, cada literatura possui sua particularidade na abordagem dos temas estudados neste trabalho, então, à medida que os conceitos eram complementados ou adaptados, fazia-se necessário um exemplo que evidenciasse essa nova realidade do conteúdo, o que não existia e, por isso, foi indispensável a criação de novos exemplos e a adaptação daqueles que já existiam.

Em contrapartida, na escrita deste trabalho o uso do programa editor de textos matemáticos LateX, foi fundamental e bastante útil, pois, contém muitas ferramentas automáticas, otimizando tempo e evitando, por exemplo, confusão na numeração dos itens que requerem ordenamento.

De modo geral, este trabalho possibilitou a elaboração de uma nova opção de estudo mais aprofundada e direcionada a polinômios do terceiro grau e equações polinomiais de grau três. Contudo, existem ainda muitos caminhos a serem investigados e aprofundados nessa linha de estudo, dentre eles, sugerimos a resolução de equações de terceiro grau usando transformadas de Möbius, que são uma classe especial de funções complexas de variável complexa. Recomendamos também, a resolução de equações cúbicas por meio de métodos numéricos, pois, esses métodos fornecem, com a precisão desejada, uma sequência de valores aproximados da raiz real que precisamos obter.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, Lenimar Nunes de. Uma generalização de Briot-Ruffini. **Revista do Professor de Matemática**. SBM, n° 34, p.14-20, 1997. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/34/3.htm>. Acesso em: 18 Set. 2020.

[2] Antar NETO, A. et al. **Números complexos, polinômios, equações algébricas**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 1982. v.7.

[3] ARAÚJO, Kalasas Vasconcelos de. **Estruturas Algébricas II**. São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2009. (Apostila). Disponível em: <https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalago/15043216022012Estruturas_Algebricas_II_aula_1.pdf>. Acesso em: 13 Out. 2020.

[4] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Tradução de CASTRO, H. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. Título original: A history of mathematics.

[5] CAMPOS FILHO, Frederico Ferreira. **Algoritmos Numéricos**. 2. ed. Belo Horizonte: LDT, 2007.

[6] CARNEIRO, Raylson dos Santos. **Métodos de Resolução de Equações do Terceiro Grau**. 2015. 69 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2015. Disponível em: <https://pt.scribd.com/document/409771186/000089305-Raylson-Dos-Santos-Carneiro>. Acesso em: 18 Ago. 2020.

[7] CAVALCANTE, Felipe Barbosa. **Grupos Aditivos e Multiplicativos de Anéis e Corpos**. 87 f. Monografia (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2015. Disponível em: <http://mat.ufcg.edu.br/pgmat/wp-content/uploads/sites/2/2017/02/TCC-Felipe.pdf>. Acesso em: 28 Ago. 2020.

[8] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 3.

[9] GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. 4. ed. rev. e ampl. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[10] GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática completa**. 2. ed. renov. São Paulo: FDT, 2005. v.3.

[11] GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[12] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v.1.

[13] GUIMARÃES, Paulo Sérgio. **Equações Algébricas**. Santa Maria: UFSM, 2006.

[14] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Polinômios e Equações Algébricas**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2018.

[15] IEZZI, G. et al. **Conecte:** matemática ciência e aplicações. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2014. v. 3.

[16] ______. **Fundamentos de matemática elementar:** complexos, polinômios, equações. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

[17] JANESCH, O. R.; TANEJA, I. J. **Álgebra I**. 2. ed. rev. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2011.

[18] LEONARDO, Fabio Martins de (ed.). **Conexões com a matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. v. 3.

[19] LIMA, Elon Lajes. A equação do Terceiro Grau. **Matemática Universitária**, SBM, n. 5, p. 9-23, Jun. 1987. Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n05_Artigo01.pdf>. Acesso em: 20 Ago. 2020.

[20] ______. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do professor de matemática, 2006. v.3.

[21] ______. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do professor de matemática, 2012.

[22] LOBO, Ferdinando Caíque Genghini Dantas. **Números Complexos, Polinômios e Equações Algébricas**. 2017. 74 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/322313/1/Lobo_Ferdinando CaiqueGenghiniDantas_MP.pdf>. Acesso em: 31 Ago. 2020.

[23] MARQUES, Cristina Maria. **Introdução à Teoria dos Anéis**. Belo Horizonte: Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, 1999. (Apostila). Disponível em: <https://bit.ly/3BrAJWp>. Acesso em: 29 Set. 20.

[24] NASCIMENTO, Carlos Kleber Alves do. **Polinômios, equações algébricas e o estudo de suas raízes reais**. 2015. 82 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/13137/3/dis_2015_ckanascimento.pdf>. Acesso em: 20 Ago. 2020.

[25] PAPA NETO, Ângelo. **Estruturas Algébricas**. Fortaleza: Universidade Aberta do Brasil/Instituto de Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará, 2011. (Apostila). Disponível em:<https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/429304/2/EstAlgebrica-livro.pdf>. Acesso em: 13 Out. 2020

[26] QUEIROZ, Cleber da Costa. **Funções e Equações Polinomiais Comportamento da Função de 3° grau**. 2013. 55 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística,

Universidade Federal de Goiás, Goiás, 2013. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/3112/5/Queiroz%2c%20Cleber %20da%20Costa.pdf>. Acesso em: 18 Ago. 2020.

[27] SILVA, C. X.; BARRETO FILHO, B. **Matemática aula por aula**. 2. ed. renov. São Paulo: FDT, 2005. v.3.

[28] SILVA FILHO, J. F.; PEREIRA, O. E.S. Revisitando as equações do terceiro grau. **Revista do Professor de Matemática**. SBM, v.7. n.2. p. 205-214, 2019. Disponível em: <http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm_uploads/2019/10/art16_vol7_2019_PMO_SBM.pdf>. Acesso em: 15 Set. 2020.

[29] SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**. 1. ed. São Paulo: FDT, 2010.

[30] VILLELA, Maria Lúcia Torres. **Polinômios sobre domínios e corpos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, Universidade Federal Fluminense, 2009. (Apostila). Disponível em: <https://www.professores.uff.br/jcolombo/wp-content/uploads/sites/124/2017/09/1-2015-polinomios-mod2.pdf>. Acesso em: 13 Out. 2020.