



**INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

FELIPE BEZERRA DA SILVA

AGNESI E SUA BRUXA: HISTÓRIA E APLICAÇÃO

CAJAZEIRAS

2021

FELIPE BEZERRA DA SILVA

AGNESI E SUA BRUXA: HISTÓRIA E APLICAÇÃO

Monografia apresentada junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito parcial à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Orientadora:

Profa. Ma. Kissia Carvalho.

Coorientador:

Prof. Dr. Vinicius Martins Teodosio Rocha.

Cajazeiras

2021

FELIPE BEZERRA DA SILVA

AGNESI E SUA BRUXA: HISTÓRIA E APLICAÇÃO

Monografia apresentada ao programa de **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 27/10/2021

Banca Examinadora:

Kissia Carvalho

Profa. Ma. Kissia Carvalho
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Vinicius R/

Prof. Dr. Vinicius Martins Teodosio Rocha
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

João Paulo de Araújo Souza.

Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Taciana Araújo de Souza

Profa. Dra. Taciana Araújo de Souza
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFPB /Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

S586a

Silva, Felipe Bezerra da

Agnesi e sua bruxa: história e aplicação / Felipe Bezerra da Silva; orientadora Kissia Carvalho; coorientador Vinicius Martins Teodosio Rocha.- 2021.
87 f. : il.

Orientadora: Kissia Carvalho.

TCC (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2021.

1. Curva Plana 2. Mulheres na matemática 3. Bruxa de Agnesi I. Título

CDU 51(0.067)

Dedico este trabalho a minha família e a meus professores da graduação, em especial, meus orientadores.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus, pois é Ele um dos principais responsáveis pela concessão de graças, força e sabedoria para trilhar todos os desafios que superei durante a produção deste trabalho e ao longo do curso de Licenciatura em Matemática, campus Cajazeiras.

Agradeço também aos meus pais, José Welliton Galdino da Silva e Felismina Bezerra da Silva, e a minha irmã, Sabrina Bezerra da Silva, por todo apoio, carinho e atenção ao longo de toda a minha vida, inclusive na graduação.

Agradeço aos meus colegas de curso, Aldair, Fabrícia, Felipe, José, José Henrique, Maria Beatriz, Maria Izabel, Natanaele, Nilmara, Sabrina, Taynná e Wesley, por todos os momentos, conselhos e desafios que enfrentamos juntos.

Em especial, agradeço à professora Kissia Carvalho e ao professor Vinicius Martins Teodosio Rocha, orientadores deste trabalho e profissionais excepcionais e inspiradores que, na função que assumiram, expressei minha profunda gratidão por todos os esforços prestados, pelas brilhantes ideias e pelos grandes conselhos.

Finalmente, presto aqui também meus agradecimentos a toda a comunidade IFPB, campus Cajazeiras, professores e demais funcionários que, por meio do seu empenho, tornaram possíveis a conquista de sonhos.

“A verdadeira felicidade pode ser encontrada somente em Deus, todos os outros prazeres nada mais são do que uma máscara vazia e são capazes de produzir apenas uma satisfação momentânea”

Leonhard Euler

RESUMO

A Bruxa de Agnesi, como ficou conhecida a curva plana estudada pela matemática italiana Maria Gaetana Agnesi, é uma das razões que tem lhe rendido ainda um pequeno espaço em alguns livros de Matemática da atualidade. Mas, apesar de suas notáveis publicações, é contraditório que a mesma, assim como o objeto estudado por ela, tenha um mínimo reconhecimento. Desse modo, e instigado também pelo movimento Mulheres na Matemática, temos o propósito de dar voz a essa brilhante mulher e, para isso, centramos esta pesquisa no seguinte questionamento: É possível encontrar alguma aplicação para a Bruxa de Agnesi? Uma vez que temos como objetivo geral compreender o desenvolvimento e o comportamento da Bruxa de Agnesi e uma de suas aplicações. Desse modo, ansiando em atender a esse objetivo, apostamos em uma pesquisa bibliográfica de abordagem qualitativa, caráter exploratório e natureza básica pura, onde foi possível concluir que sim, existem algumas dessas aplicações para a Bruxa de Agnesi, dentre elas, uma direcionada para a temática de interpolação. Entretanto, alicerçado em outros fundamentos, como promover uma discussão de gênero, objetivando desconstruir a errônea ideia de que Matemática é um ambiente masculino, abordamos um enorme contraexemplo para esse absurdo, a figura de Agnesi, onde investigamos a curva da Bruxa, explorando sua construção, equações e propriedades. Logo, por meio desta produção, concluímos que ela contribui em alguns aspectos. Ampliando o reconhecimento de Maria Gaetana e da Bruxa de Agnesi, ele possibilita também um contato inicial com o conceito de interpolações, além de instigar outros trabalhos reconhecendo outras mulheres que foram negligenciadas na Matemática.

Palavras-chave: Bruxa de Agnesi; Interpolação; Maria Gaetana Agnesi; Mulheres na Matemática.

ABSTRACT

The Witch of Agnesi, as it is known the plane curve studied by the Italian mathematician Maria Gaetana Agnesi, is one of the reasons that has given her a minor space in some Mathematics books nowadays. Nevertheless, despite her notable publications, it is paradoxical that her, as well as the object studied by her, have little acknowledgement. Therefore, also motivated by the Woman in Mathematics' movement, we aim to give voice to this brilliant woman, by concentrating this research on the following question: Is it possible to find an application to Witch of Agnesi? Since we have as main objective to understand the development and behavior of the Witch, we proceed through a bibliographic research with a qualitative and exploratory approach, concluding that there are, indeed, such applications. We focus on one of these applications, related to theme of interpolation. However, based on other principles, like promoting a gender discussion, with the objective of deconstruct the misconception of Mathematics as a male environment, we approach the Agnesi figure as a counterexample of this absurd idea, exploring the curve of the Witch, its equations and properties. Therefore, through this text, we conclude that it contributes in some aspects. By amplifying the acknowledgement of Maria Gaetana and his Witch, this text provides an initial contact with the concept of interpolation, asides from instigating further work recognizing other women neglected in Mathematics.

Keywords: Witch of Agnesi; Interpolation; Maria Gaetana Agnesi; Woman in Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Maria Gaetana Agnesi (Coleção David Smith)	19
Figura 2.1 – Primeiro passo para a construção da Bruxa de Agnesi.	24
Figura 2.2 – Segundo passo para a construção da Bruxa de Agnesi.	25
Figura 2.3 – Terceiro passo para a construção da Bruxa de Agnesi.	25
Figura 2.4 – Quarto passo para a construção da Bruxa de Agnesi.	25
Figura 2.5 – Quinto passo para a construção da Bruxa de Agnesi.	26
Figura 2.6 – Bruxa de Agnesi.	26
Figura 2.7 – Construção geométrica para a dedução da equação cartesiana da Bruxa de Agnesi.	27
Figura 2.8 – Construção geométrica para a dedução da equação paramétrica da Bruxa de Agnesi.	29
Figura 2.9 – Construção geométrica para a dedução das propriedades.	30
Figura 2.10 – Sólido de revolução em torno do eixo x	32
Figura 2.11 – Interpolação linear.	36
Figura 2.12 – Interpolação quadrática.	37
Figura 2.13 – Polinômio interpolador de Lagrange de grau 4	42
Figura 2.14 – Erro de interpolação	43
Figura 2.15 – Interpolação por um polinômio de grau 10	45
Figura 2.16 – Função spline linear interpoladora $S_1(x)$	47
Figura 2.17 – Tabela para determinar a função interpolação racional	51
Figura 2.18 – Tabela da interpolação racional para os quatro pontos definidos	53
Figura 3.1 – Curva (16) assumindo diferentes parâmetros. (a) $\alpha = \beta = 1$. (b) $\alpha =$ $1, \beta = 1.25$. (c) $\alpha = 1.25, \beta = 1$	58
Figura 3.2 – A curva com $a > 0$	59
Figura 3.3 – A curva com $a < 0$	59
Figura 3.4 – A curva com $b \leq 0$	60
Figura 3.5 – Aplicação do 3º caso do Teorema 3.2	76
Figura 3.6 – Aplicação do 1º caso do Teorema 3.2	77
Figura 3.7 – Intervalo $[x_1, x_2]$	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Tabela resultante do Método de Neville	49
Tabela 2.2 – Tabela de interpolação racional com a coluna $j=0$ preenchida	54
Tabela 2.3 – Tabela de interpolação racional com a coluna $j=0$ e $j=1$ preenchida	54
Tabela 2.4 – Tabela de interpolação racional do Exemplo 2.4 completa	54
Tabela 2.5 – Tabela de interpolação racional do Exemplo 2.5 completa	55

SUMÁRIO

Introdução	12
1	MARIA GAETANA AGNESI: UMA QUESTÃO DE GÊNERO 15
1.1	Mulheres na Matemática 15
1.2	Maria Gaetana Agnesi 19
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS 23
2.1	A Bruxa de Agnesi 23
2.1.1	Definição e construção da Bruxa de Agnesi 24
2.1.2	Equação cartesiana da Bruxa de Agnesi 26
2.1.3	Equação paramétrica da Bruxa de Agnesi 29
2.1.4	Propriedades da Bruxa de Agnesi 30
2.1.5	Considerações sobre a Bruxa de Agnesi 33
2.2	Interpolação: uma breve introdução 33
2.2.1	Interpolação polinomial 35
2.2.2	Estudo do erro para interpolação polinomial 42
2.2.3	Interpolação por spline 45
2.2.4	Interpolação racional 47
3	UMA APLICAÇÃO DA BRUXA DE AGNESI 56
3.1	Definindo uma gama mais ampla de curvas similares a Bruxa de Agnesi 56
3.2	Curva generalizada passando por dois pontos dados 60
3.2.1	Estimativa do erro da interpolação no intervalo $[x_1, x_2]$ 77
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS 82
REFERÊNCIAS	84

INTRODUÇÃO

A crescente onda do movimento feminista no Brasil e no mundo está cada vez mais perceptível. A luta pela igualdade de gênero e pela ocupação e representação feminina nos mais variados espaços, sejam políticos, econômicos ou educacionais, tem promovido uma série de necessárias discussões que se estenderam desde os seus primeiros movimentos, até a atualidade.

Uma dessas discussões remetentes à educação, é o tema mulheres na Matemática, justificado por uma diversidade de fatos como, por exemplo, a exclusão histórica desse gênero nas ciências, como aponta Schienbinger (2001, p. 37) ao se referir a Ciência Moderna como “um produto de centenas de anos de exclusão das mulheres”, ou ainda, quando refletimos sobre os números da ocupação feminina na Matemática em uma perspectiva de igualdade.

Sendo assim, reconhecendo essa problemática, e empenhado em estabelecer algumas relações entre essa temática e disciplinas como a Geometria, Cálculo Diferencial e Integral e Análise, as quais tenho apreço, decidimos difundir a história de vida e uma das descobertas das poucas mulheres que contrariaram a história e se destacaram na Matemática em períodos em que a questão de gênero eram exponencialmente mais opressoras do que as atuais, Maria Gaetana Agnesi e o principal objeto matemático estudado por ela, a curva conhecida como a Bruxa de Agnesi.

Entretanto, além dessas motivações, um outro argumento que nos levou a estudar a história de Agnesi e seus trabalhos, foi o descaso com relação à narrativa da sua trajetória que, conforme (MAZZOTTI, 2007), resume-se em notas pitorescas e marginais altamente coloridas em relação à história série da Matemática. Dessa forma, na tentativa de ampliar o reconhecimento dessa brilhante mulher e da curva que carrega o seu nome, decidimos realizar a seguinte investigação: **É POSSÍVEL ENCONTRAR ALGUMA APLICAÇÃO PARA A BRUXA DE AGNESI?**

Assim, para responder esse questionamento, fizemos buscas por artigos que pudessem confirmar a nossa hipótese da existência de pelo menos uma dessas aplicações, onde encontramos algumas delas, uma na Física, e duas referentes à Matemática, todas escritas em inglês. Porém, apenas uma delas apresentavam relações com as disciplinas as quais gostaríamos de trabalhar, *Piecewise rational interpolation by witch of Agnesi* (Interpolação racional por partes através da bruxa de Agnesi) da Yankova (2017), que está diretamente relacionada com o Cálculo Numérico, particularmente, interpolações,

apresentando-se como um desafio a mais.

Dito isso, o objetivo geral deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) é compreender o desenvolvimento e o comportamento da Bruxa de Agnesi e uma das suas aplicações e, para isso, temos os seguintes objetivos específicos, promover uma discussão de gênero e discutir sobre a trajetória de vida de Maria Gaetana Agnesi, uma vez que desejamos levantar essa emergente pauta, evidenciando algumas das enormes contribuições dessa simbólica mulher para a Matemática e para o movimento Mulheres na Matemática.

Além disso, objetivamos também estudar o desenvolvimento e as propriedades da curva da Bruxa, em razão de que a sua construção e propriedades são do interesse, respectivamente, da Geometria e do Cálculo Diferencial e Integral. E, finalmente, buscar aplicação para essa famosa curva, e afim de cumprir com essa finalidade, fez-se necessário expor brevemente o conceito de interpolação e alguns de seus métodos, arcabouço necessário para entendê-la.

Dessa forma, para atender aos nossos objetivos, iremos recorrer a uma pesquisa qualitativa, em virtude de que preza pela descrição detalhada dos fenômenos e dos elementos que a envolvem (AUGUSTO *et al.*, 2013). A mesma se caracteriza também como uma pesquisa exploratória, já que tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, apresentado, para tal fim, um planejamento bastante flexível, de modo a possibilitar a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato ou fenômeno estudado (GIL *et al.*, 2017). Quanto à natureza, ela se classifica como básica pura, uma vez que está voltada unicamente à ampliação do conhecimento (GIL *et al.*, 2017).

Dos procedimentos técnicos, esse trabalho consiste em uma pesquisa bibliográfica, dado que é fundamentada em materiais já publicados, como: livros, revistas, teses e anais de eventos científicos. Isso mediante a possibilidade de promover um estudo mais amplo e significativo dos fenômenos (GIL *et al.*, 2017).

Quanto ao desenrolar da metodologia, ela se deu da seguinte forma. Pautada na busca por aplicações para a Bruxa de Agnesi, escolhemos o trabalho de Yankova (2017) e, a partir dele, surgiu a necessidade de buscar outros conceitos e métodos, singularmente, interpolação racional, discutido em um artigo datado de 1967, produzido por Larkin (1967) e, conseqüentemente, interpolação, em virtude do nosso objetivo de construir o conhecimento linearmente.

Assim, esperamos que essa pesquisa contribua para a desmistificação de gênero na Matemática, conscientizando que, assim como os homens, as mulheres também podem produzir textos de alta qualidade científica. Desejamos também ampliar a visibilidade de

Maria Gaetana Agnesi, uma mulher pouco difundida com relação à história da Matemática, principalmente em português. E, finalmente, pretendemos dar significado ao estudo da Bruxa de Agnesi por meio de uma aplicação, uma vez que ela diretamente também contribui na formação dos licenciandos em Matemática, dado que, relacionada como o Cálculo Numérico, ela amplia o conhecimento do leitor, principalmente do graduado que, na sua formação inicial, nem sempre se depara com essa disciplina, seus conceitos e métodos.

Desse modo, iniciamos o TCC com uma discussão de gênero na Matemática e em seguida apresentamos a figura de Agnesi. Em um próximo capítulo, apresentamos uma breve história da Bruxa de Agnesi, sua detalhada construção, equações (cartesiana e paramétrica) e propriedades. Ainda, neste mesmo capítulo, apresentamos alguns conceitos fundamentais para a compreensão da aplicação, todos eles relacionados à interpolação: definições, métodos, teoremas e estimativa do erro. Finalizamos com o capítulo em que apresentamos detalhes ocultos do artigo de Yankova (2017), uma das aplicações que encontramos dessa famosa curva estudada por Agnesi e onde centramos os nossos estudos.

1 MARIA GAETANA AGNESI: UMA QUESTÃO DE GÊNERO

Neste capítulo, serão abordados aspectos de gênero na Matemática com ênfase na participação feminina nessa ciência. Além disso, serão retratados, sucintamente, alguns aspectos e superstições do ponto de vista científico, histórico, e sociocultural que contribuíram para o estigma de que “homem é melhor na Matemática”. Nele também serão retratado dados estatísticos que revelam a discrepância de gênero na Matemática no cenário internacional e nacional e, por fim, será apresentado a trajetória de vida de uma dessas simbólicas mulheres na luta contra o machismo estrutural conservado até os dias de hoje nas Ciências Exatas, a italiana Maria Gaetana Agnesi.

1.1 MULHERES NA MATEMÁTICA

Desenvolvida quase que totalmente por personagens masculinos, a Matemática foi marcada por uma série de resistências à presença feminina. Primeiramente, fatores histórico-culturais que privilegiaram o sexo masculino e restringiram, por muito tempo, o papel da mulher às atividades domésticas, o que resultou em uma tardia, e por vezes tímida, ocupação do gênero feminino nos espaços de prestígio: educação, política, economia, entre outros.

Posteriormente, o fortalecimento de um infeliz estigma, a mulher como um “segundo sexo” inferior ao “primeiro”, o masculino, como denuncia Simone de Beauvoir (1980 apud SOUZA; CONCEIÇÃO, 2010), uma das propulsoras da primeira onda do movimento feminista e que, parcialmente justifica os escassos trabalhos e reconhecimento de incontáveis mulheres na Matemática, desde a antiguidades até a atualidade, como por exemplo, Hipátia, Elena Lucrezia Piscopia, Ada Lovelace, Sophie Germain, Sofia Kovalevskaja, dentre outras.

Entretanto, esses não são os únicos fatores que justificam a discrepância de gênero na Matemática. A forte presença masculina nos cursos de graduação, e ainda mais concentradas nos cursos de pós-graduação e pesquisa, estudos que apontam maior desempenho masculino nessa ciência¹ (muitos deles questionáveis do ponto de vista científico), estereótipos culturais (ARAUJO, 2018) e a escassa falta de representatividade e modelos (BRECH, 2017), são outros fatos que contribuem para essa distorcida visão da

¹ Estudos sobre o gênero e a *performance* matemática mostram que o estereótipo tradicional favoreceu os homens em relação às mulheres na proficiência matemática. Além disso, essa “habilidade natural” masculina pela Matemática vem diminuindo acentuadamente ao longo dos últimos 40 anos e as diferenças de gênero no desempenho matemático já não é mais uma questão relevante. Mais a esse respeito, vide: Alves *et al.* (2016).

Matemática como um “ambiente masculino” e conseqüentemente hostil e menos atrativo para as mulheres, uma vez que isso ocasiona um possível sentimento de “invasão” e “deslocamento”.

Ademais:

Ao contrário dos seus colegas homens, elas têm um caminho não linear e são mais passíveis de abandonar o caminho acadêmico devido a fatores pessoais, como licença-maternidade. Essas disparidades de gênero podem afetar, além do número de publicações, os padrões de colaboração entre pesquisadores (BRASIL, 2021).

Do ponto de vista estatístico, a situação torna-se ainda menos animadora quando são analisadas informações que competem a participação feminina nas Ciências Exatas em uma perspectiva de igualdade, ou seja, 50%. Dados do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) divulgados no Dia Internacional de Mulheres e Meninas na Ciência, expressa numericamente várias das conseqüências de alguns desses fatos que colaboram para tamanha desigualdade de gênero em relação a Ciências Exatas, Engenharias e Computação. Dentre elas, podemos destacar a representatividade de apenas 33% de mulheres bolsistas de Produtividade em Pesquisa do CNPq, ou ainda levantamentos da agência da ONU para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO), quando aponta que apenas 30% dos cientistas do mundo são do gênero feminino (BRASIL, 2021).

Tratando-se de reconhecimento e valorização, o cenário continua precário. Essa mesma pesquisa do CNPq aborda algumas dessas questões. Direcionando para a representatividade feminina na publicação de artigos nas áreas de Computação e de Matemática, apenas 25% das mulheres têm seus trabalhos aceitos. Além disso, a situação ainda é desfavorecida quando comparado o reconhecimento delas em pesquisas especializadas, representando apenas 13% dos autores mais citados. Da valorização financeira, diversas pesquisas também apontam uma desproporção, sendo que as mulheres recebem menos por suas pesquisas e, por diversas razões, como a rotina doméstica mais pesada (cerca de 10 horas semanais em relação ao homem), maternidade, entre outros, acabam não progredindo na mesma velocidade que os homens (BRASIL, 2021).

Voltando a falar sobre a Matemática como um “ambiente masculino”, muitas superstições e imposições culturais sobre os papéis e atividades sociais que cada gênero deve desempenhar contribuem também para tamanha disparidade, além de revitalizar constantemente esse estereótipo masculino na Matemática.

Enquanto a mulher é caracterizada como “[...] gentil, educada, dócil, incapaz de se concentrar, bem-comportada, responsável por alimentar, cuidar e criar, responsável pelos

afazeres domésticos, mulher-mãe amorosa, capaz de esperar [...]” (SOUZA; CONCEIÇÃO, 2010, p. 64), o homem é qualificado como “[...] ousado, atirador, capaz de controlar e organizador, cuja a natureza não é cuidar [...]” (SOUZA; CONCEIÇÃO, 2010, p. 64), reconfirmam essa crença de que “homem é melhor em Matemática”, dado que essas características lhe impõe uma “superioridade” em questões de racionalidade e lógica, características inerentes de um bom matemático. Embora, como pontua Mayana Zatz, antiga pró-reitora e atual professora do Departamento de Genética e Biologia Evolutiva do Instituto de Biociências da Universidade de São Paulo (USP) “*O que é genética e o que é cultura, ainda não se tem certeza*” (SOUZA; CONCEIÇÃO, 2010, p. 63).

Contudo, isso não é um completo fracasso. Muito embora ainda estejamos um pouco longe de conquistarmos a igualdade de gênero na Matemática, já tivemos diversos avanços com relação às mulheres nas ciências. Séculos atrás:

Muitas produziam conhecimento em laboratórios dentro de seus lares e os resultados de seus estudos eram divulgados com nomes de seus irmãos, pais ou maridos ou algum outro representante masculino, pois aos homens era permitido produzir conhecimento científico. Algumas usaram pseudônimos masculinos para poder comunicar-se com outros cientistas, serem ouvidas e respeitadas (CARVALHO; CASAGRANDE, 2011, p. 23).

Atualmente elas têm ocupado cada vez mais os espaços de poder e de reconhecimento, apesar de representarem uma parcela preocupante. Remetendo-se à ocupação feminina nacional nas ciências, por exemplo, temos mulheres que passaram a compor o corpo docente de instituições renomeadas como o do próprio Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), apesar de que dos 46 pesquisadores deste ano (2021), apenas duas são mulheres, sendo uma titular (Carolina Araújo) e outra adjunta (Luna Lomonaco) onde, dada a escassez da representatividade feminina, Lomonaco, a mais recente pesquisadora, teve sua conquista reconhecida em uma matéria jornalística do Folha de São Paulo².

Para além, elas também estão presentes na divulgação e produção científica de destaque nacional, Araújo (2018), ao se referir ao Colóquio Brasileiro de Matemática, a mais importante reunião científica da comunidade matemática brasileira, enfatiza que na edição de 2017, 23,5% dos participantes eram do sexo feminino e, além disso, as mesmas ocupavam uma porcentagem de 16,8% das palestras proferidas.

² Elaborada pelo repórter Gabriel Alves, a matéria jornalística comemora a chegada de mais uma mulher, a italiana Luciana Luna Lomonaco, ao quadro de pesquisadores do IMPA. Nela é retratado os desafios enfrentados pelas mulheres para seguir carreira nas ciências exatas, iniciativas do IMPA para incentivar o aumento da diversidade de gênero e também aborda as inspiradoras trajetórias de Carolina Araújo e Luna Lomonaco como mulheres na Matemática. Mais sobre isso, acesse <<https://impa.br/noticias/folha-destaca-chegada-de-nova-pesquisadora-ao-impa/>>.

Desse modo, podemos observar uma enorme evolução da participação feminina na Matemática, entretanto a pouca representatividade ainda impacta negativamente, tanto no machismo estrutural que essa ciência carrega, assim como na qualidade das científicas, já que:

Estudos mostram que a diversidade de um grupo de pesquisa aumenta a sua eficiência, trazendo novas perspectivas e ideias, aumentando a criatividade e inteligência coletiva do grupo [...], e gênero é um componente fundamental da diversidade (ARAUJO, 2018, p. 01).

Sendo assim, diversas esferas nacionais e internacionais têm agido para reparar alguns desses erros ocasionados pelo silenciamento histórico das mulheres. O próprio CNPq, a Organização das Nações Unidas (ONU) com os planos para a Agenda 2030 que, em seu 5º objetivo, priorizam alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas (BRASIL, 2021), debates e mesas redondas sobre gênero (incluindo na Matemática) organizados de forma independente por universidades e instituições de ensino e pesquisa sobre esses temas tão emergentes (ARAUJO, 2018), a exemplificar, o próprio Instituto Federal da Paraíba, campus Cajazeiras e, evidentemente, pessoas do sexo masculino que aliaram-se ao movimento reconhecendo suas diversas complicações.

Desse modo, trazendo à tona uma prática empregada desde a segunda onda do feminismo na década de 1960, a de “tornar visível aquela que fora oculta” (SOUZA; CONCEIÇÃO, 2010, p. 20), algo ainda em ascensão na comunidade acadêmica, principalmente entre as mulheres como podemos constatar ao longo de nossas referências, desde aspectos história, por exemplo: Fernandez, Amaral e Viana (2019), três mulheres que se uniram para escrever sobre a “História de Hepátia e de outras matemáticas”, Gray e Malakyan 1999 que escreveram o artigo “*The Witch of Agnesi A Lasting Contribution from the First Surviving Mathematical Work Written by a Woman*” (A Bruxa de Agnesi Uma Contribuição Duradoura sobre o primeiro trabalho matemático sobrevivente escrito por uma mulher) e Moura (2017) na sua tese de doutorado intitulado “Um estudo sobre a *Instituzioni Analitiche de Maria Gaetana Agnesi: Álgebra e Análise na Itália setecentista*”.

Que se propaga também na busca por aplicações do objeto matemático que decidimos estudar, a Bruxa de Agnesi, como é o caso do artigo de Yankova (2017) que trataremos no último capítulo, decidimos retomar a essa prática e, portanto, empregá-la para contar um pouco da trajetória de uma dessas mulheres de destaque, Maria Gaetana Agnesi.

1.2 MARIA GAETANA AGNESI

Nascida em Milão, no dia 18 de maio de 1718, Maria Gaetana Agnesi representa um símbolo sólido e digno de admiração no que se remete ao movimento Mulheres na Matemática, sendo considerada “a primeira mulher matemática a ter produzido textos de alta qualidade científica” (FERNANDEZ *et al.*, 2019, p. 14), sua biografia é uma temática que merece ser discutida e reconhecida e, sendo assim, é o que faremos ao longo dessa seção, resultado de uma minuciosa investigação da obra de Mazzotti (2007), subseções de Eves (2011) e Fernandez *et al.* (2019), além da tese de Moura (2017).

Figura 1.1 – Maria Gaetana Agnesi (Coleção David Smith)



Fonte: Eves, 2011.

Filha de herdeiros de ricos comerciantes da sua cidade natal, Pietro Agnesi e Anna Fortunata Agnes, a matemática que era primogênita dos 21 filhos de seu pai, fruto dos seus três casamentos, foi privilegiada com uma cautelosa educação desde muito cedo, o que permitiu aflorar sua precoce atração pelos estudos.

Destacando-se nas áreas de línguas, ciências e matemáticas, grande parte dessas suas aptidões foram consequência direta do convívio social promovido por seu pai, que, desde sua infância, realizava encontros com diversos intelectuais, das quais a pequena Agnesi participava ativamente. Intitulados na Itália como *conversazione* (conversa), esses encontros caracterizaram uma duradoura fase da vida de Agnesi, sendo que, em dado momento, os encontros promovidos na residência dos Agnesi acabaram nela se concentrando.

Tornando-se um prodígio multilinguístico sob a tutela de Abbé Niccoló Gemelli, provavelmente o primeiro responsável pela sua educação e pioneiro em notar o seu talento natural para as línguas clássicas, essa supervisão que não estava nos planos de Pietro,

já que, a princípio, Gemelli havia sido contratado para instruir o primogênito dos seus filhos de sexo masculino, rendeu a Agnesi umas das suas principais características, a fluência multilinguística em diversos idiomas, tais como francês, latim, grego, hebraico, espanhol, alemão, dentre outros, que fez ressoar uma das suas primeiras preocupações com a educação para mulheres, aos nove anos, ao traduzir e declamar um discurso latino intitulado *Oratio Academica Qua ostenditur, Artium liberalium studia a Femineo sexu neutiquam abhorrere* (Em Defesa do direito da mulher a estudar as artes e as ciências, sem quaisquer limitações).

Embora indiscutível a preocupação de Pietro para com a educação de seus filhos, vale destacar que no período no qual vivia, a Europa presenciava uma série de transformações políticas e religiosas, e, apesar do Renascimento na Itália aflorar uma nova perspectiva para a educação para mulheres, contrapondo-se a misoginia que pairava pelo restante do continente, instaurava-se, em Milão, um processo de aristocratização das elites dominantes, movimento que resultou em uma série de mecanismos excludentes que privilegiava os primogênitos de sexo masculino das famílias patrícias e feudais, das quais os Agnesi, quanto ricos comerciantes, não faziam parte.

Sendo assim, e tentando driblar tantas adversidades, mesmo que incomum para os padrões milaneses remetentes ao grupo social a qual pertencia, Pietro decidiu investir significativamente na educação dos seus filhos, incluindo as meninas, algo que impressionava ainda mais. Contratando, desde a infância, os melhores professores particulares disponíveis, e, aproveitando-se dos eclesiásticos que frequentavam assiduamente as *conversazioni* (conversas) para acompanhar a suas progressões, tamanhos esforços renderam-lhe frutíferos resultados, já que, na adolescência, os meninos estavam preparados para entrar nos colégios religiosos, e as meninas continuavam os seus estudos em casa. No que diz respeito a Agnesi:

[...] tem-se notícia de que seu pai havia optado por organizar e financiar um programa privado de estudos, consistindo em uma variação do tradicional currículo jesuíta, divergindo, porém, em alguns pontos essenciais. Para tanto, contratou tutores que, em sua maioria, eram clérigos pertencentes a diferentes ordens, tais como Girolamo Tagliazucchi (1674-1751), Carlo Belloni, Francesco Manara (1714-1782), Serafino Brancone (1710-1774), e Michele Casati (1699-1782) (MOURA, 2017, p. 29-30).

Discorrido tudo isso, é viável e notório pontuar que Pietro tinha planos ambiciosos para Agnesi. Começando, antes dos cinco anos, a entreter os convidados do seu pai com seu francês fluente, os planos difusos de Pietro para as *conversazioni* que envolviam a intensa exploração pública da instruída e bem-educada filha para fazer parte da nobreza, fez como que Agnesi transcendesse de fenômeno multilinguístico para uma jovem eloquente e persuasiva, aos vinte anos, preparada para argumentar sobre os mais variados assuntos

da Filosofia, Ciências e Matemática, rendendo-lhe técnicas até então reservada aos homens, além de seu primeiro livro, *Propositiones philosophicae* (Proposições filosóficas), em latim, que tratava de Filosofia e Ciências Naturais, trazendo ainda as suas convicções de que as mulheres deveriam ser educadas nas mais diversas matérias.

Porém, motivada a ter uma vida reclusa, talvez por influência dos inúmeros eclesiásticos com quem convivia e das discussões acadêmicas em sua casa realizada, onde também se levantavam questões de ordem religiosa, aqui sendo necessário enfatizar que na época não havia uma oposição entre ciência e religião, muito pelo contrário, “o universo físico refletia mais do que nunca o poder e a perfeição de Deus após os descobrimentos de Newton” (ANDERSON, 1996, p. 174 apud MOURA, 2017, p. 34), fez com que, em 1739, a adulta Agnesi pedisse a seu pai para entrar em um convento de freiras, o que não foi atendido, mas, que resultou na concessão de três desejos: vestir-se de maneira simples; liberdade para ir à igreja quando desejasse; não obrigação a frequentar eventos sociais da nobreza.

Daí, dada a abertura para deixar de frequentar as *conversazioni*, Agnesi que mostrava uma ligeira preferência pela Matemática desde as discussões nos encontros intelectuais, algo observado, por exemplo, na manifestação do interesse pela leitura e comentários acerca do tratado de seções cônicas de Marquês de L'Hôpital em correspondência com um dos seus tutores, Belloni, datada em 03 de julho de 1735, fez com que Agnesi, mais tarde, centrasse no estudo dessa nobre área.

Entretanto, foi por intermédio de um dos seus outros tutores, Ramiro Rampielli, que Agnesi refinou seu talento para a Matemática. Interessado no estudo de Análise feito pelo matemático francês Charles-René Reynaud, ele, em 1740, ajudou-a a desenvolver a sutileza do cálculo que, posteriormente, depois de quase uma década de estudos, em 1748, eclodiu na sua renomada e principal publicação, *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (Fundamentos analíticos para o uso da juventude italiana).

Escrito em italiano, muito embora preliminarmente com a finalidade de servir na formação de um de seus irmãos mais novos que revelava interesse e aptidão para a Matemática, sua notável obra revolucionou o cenário acadêmico. Dividida em dois volumes, foi pioneira em unir as ideias de Isaac Newton e Gottfried Leibniz, além de agrupar com clareza todas as descobertas do século XVII.

Categorizada como um curso de matemática elementar e avançada estruturado especialmente para espíritos jovens, uma das principais obras da época e, ainda, como um dos primeiros livros didáticos a tratar sobre os assuntos de álgebra, trigonometria, geometria analítica, cálculo e equações diferenciais, esse trabalho dedicada à Imperatriz

Maria Teresa da Áustria e reconhecida pelo Papa Bento XIV, rendeu a Agnesi, nessa ordem, valiosos tesouros, da primeira recebeu uma caixa de cristal com diamantes e um anel de diamante, enquanto do chefe supremo da Igreja Católica recebera um uma coroa de ouro e uma questionável designação como professora honorária da Universidade de Bolonha em outubro de 1750, questionável pelo motivo de não existir um consenso, por exemplo, nos trabalhos de Eves (2011) e Fernandez *et al.* (2019) sobre essa nomeação.

Voltaremos a falar de *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* no próximo capítulo, já que, foi nele que Agnesi descreveu o objeto de investigação base dessa pesquisa, a Bruxa de Agnesi, mas, por enquanto, prosseguiremos com a sua história de vida.

Retomando a falar sucintamente da vida de Pietro que, muito embora tenha conquistado o título de Don sob pesada insistência no investimento de prestígio social, ao ponto de afundar-se em dívidas até a sua morte em 19 de março 1752, essa fatalidade que marcou uma brusca mudança de vida dos seus familiares, resultou em uma nova fase na trajetória de Agnesi, que, nesse momento, abandonava seus trabalhos em Matemática e entregava-se ao estudo da Teologia e a caridade.

Financiando seus projetos sociais com os presentes que recebeu em notoriedade dos seus trabalhos em Matemática, Agnesi foi capaz de administrar três refúgios responsáveis por resgatar pessoas pobres, moradores de ruas e doentes, o primeiro deles, uma casa em Milão que ela mesmo alugou em 1759, o segundo que, em particular, gerenciava simultaneamente com o primeiro, o palácio de Antonio Tolemco Trivulzio, cedido a ela em 1771 após o reconhecimento do cardeal Pozzobonelli, responsável pelo local e, finalmente, o instituto Pio Trivulzio, onde devotou o resto de seus dias, até que, em 9 de janeiro de 1799 faleceu, sendo enterrada em uma sepultura simples junto a outras pessoas necessitadas e homenageada por Milão com a nomeação de ruas e uma escola.

Então, até aqui discutimos alguns dos aspectos que contribuíram para a escassa participação feminina nas ciências exatas e, portanto, na Matemática que, como vimos, alimentou uma distorcida visão de que “homens são melhores em Matemática do que mulheres”. Além disso, vimos também a admirável história de uma dessas poucas mulheres que enfrentaram as diversas imposições históricas e socioculturais e, conseqüentemente, acabaram se destacando, Maria Gaetana Agnesi. No capítulo seguinte, iremos estudar o objeto matemático que ainda carrega a força de resistência dessa memorável mulher, a Bruxa de Agnesi, assim como outros conceitos elementares para a construção deste trabalho.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo, serão apresentados os aspectos históricos, uma detalhada construção, equações e propriedades da Bruxa de Agnesi. Além disso, serão explorados também alguns conceitos de interpolação, desde as conhecidas interpolações polinomiais e por splines, mas também trataremos de um método um tanto quanto clássico e pouco desenvolvido nos cursos de graduação, as interpolações racionais. Conceitos esses que servirão como base para um melhor entendimento do Capítulo 3.

2.1 A BRUXA DE AGNESI

O nome do objeto matemático que sustenta a presente pesquisa, a Bruxa de Agnesi, pode facilmente nos levar a um potencial equívoco, a de atribuir a Maria Gaetane Agnesi a sua descoberta. Por intermédio disso, e sendo um grande descaso discuti-la sem antes situá-la historicamente, pontuaremos aqui a sua trajetória até o momento em que se estabeleceu o vínculo com essa brilhante matemática.

Estudada inicialmente por um dos maiores matemáticos do século XVII, Pierre de Fermat em 1703, a curva da bruxa teve sua primeira construção detalhada e nomeação após despertar o interesse de um outro estudioso da área no ano de 1718, Guido Grandi, que a chamou de *versoria*, palavra de origem latina que se remete a uma corda de manobrar vela de barco.

Não se sabe por que Grandi optou por esse nome. Há uma palavra semelhante e obsoleta latina, *versorio*, que significa “livre para se mover em qualquer direção”, e a natureza duplamente assintótica da curva pode ter sugerido a Grandi associar essa palavra a curva (EVES, 2011, p. 482).

Contudo, foi a publicação de *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* o estopim para que a *versoria* passasse a ser designada como a atual nomeação. Dispondo de muitos exemplos de análises cautelosas das propriedades das curvas planas, entre essas, a curva estudada por Fermat e Grandi, essa obra de grande sucesso que revolucionou o cenário acadêmico europeu, acabou despertando o interesse dos ingleses em 1760, em especial, do professor de matemática John Colson, que aprendeu o italiano exclusivamente para traduzi-la (MOURA, 2017), sendo ele, segundo Gray e Malakyan (1999), um dos principais propulsores da fama da Bruxa de Agnesi, além de responsável por manter a sua permanente posição nos futuros livros de cálculo.

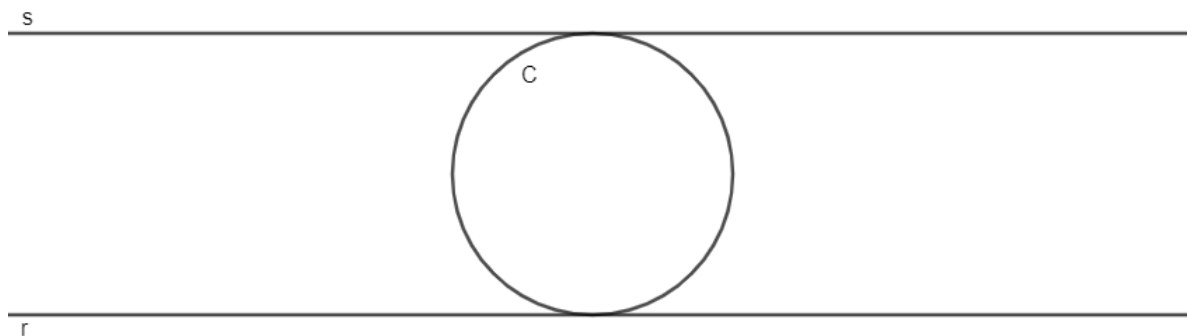
Dito isso, e sendo necessário esclarecer o importante papel de Colson para esse fato, devemos aqui apresentar duas controvérsias narrativas sobre a origem desse nome peculiar dado a curva, a primeira, segundo Eves (2011), pressupõem que Agnesi tenha confundido durante a escrita de sua obra a palavra *versoria* por *versiera*, que, em latim significa “avó do diabo” ou “duende fêmea” onde, mais tarde, ele traduziu a palavra pra *witch* (bruxa), já a segunda e mais difundida pela historiografia contemporânea, de acordo com Fernandez *et al.* (2019) e outros autores, é que John Calson tenha cometido um erro durante a fase de tradução de *versoria* para *witch*, sendo essas as possíveis explicações pela qual a curva em inglês ficou conhecida como *witch of Agnesi* (Bruxa de Agnesi).

Por fim, faz-se necessário esclarecer que a Bruxa de Agnesi não é a única designação dada a curva, podemos encontrá-la nos textos acadêmicos sendo referenciada como *feiticeira de Agnesi* ou *curva de Agnesi*, no livro de Eves (2011), por exemplo, e ainda como a *curva da bruxa*, como Santos *et al.* (2020) menciona. Mediante a isso, esclarecemos que usaremos como designação principal a terminologia Bruxa de Agnesi, isso pelo fato de ser o termo mais comum na literatura e, sendo assim, seguiremos essa tendência.

2.1.1 Definição e construção da Bruxa de Agnesi

Para definir a Bruxa de Agnesi, iremos nos espelhar no livro de Gómez *et al.* (2011) que também faz referência a essa histórica curva, entretanto, iremos explicar a construção um pouco mais detalhadamente, motivado pela publicação de Santos *et al.* (2020). Para isso, tomaremos uma circunferência C de raio $\frac{a}{2}$ tangente a duas retas paralelas, vamos chamá-las de r e s .

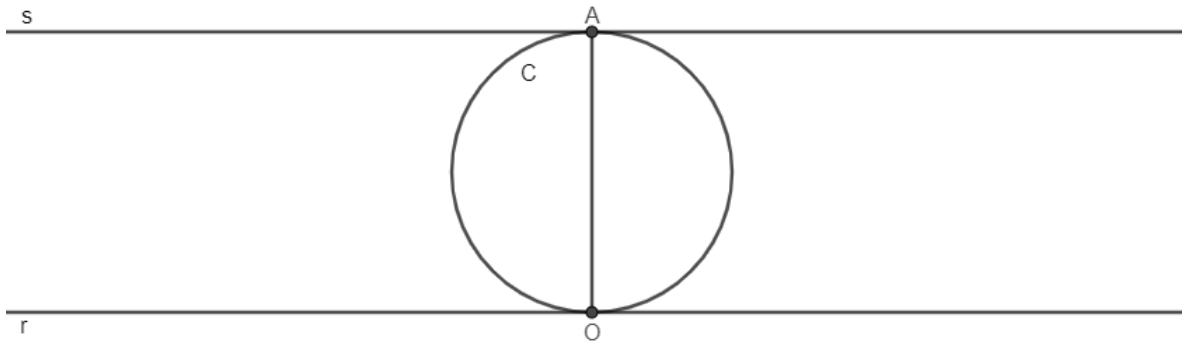
Figura 2.1 – Primeiro passo para a construção da Bruxa de Agnesi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Sejam O e A os pontos de tangência de r e s , respectivamente, com C . Tracemos o segmento de reta \overline{OA} que, inclusive, é um dos diâmetros da circunferência.

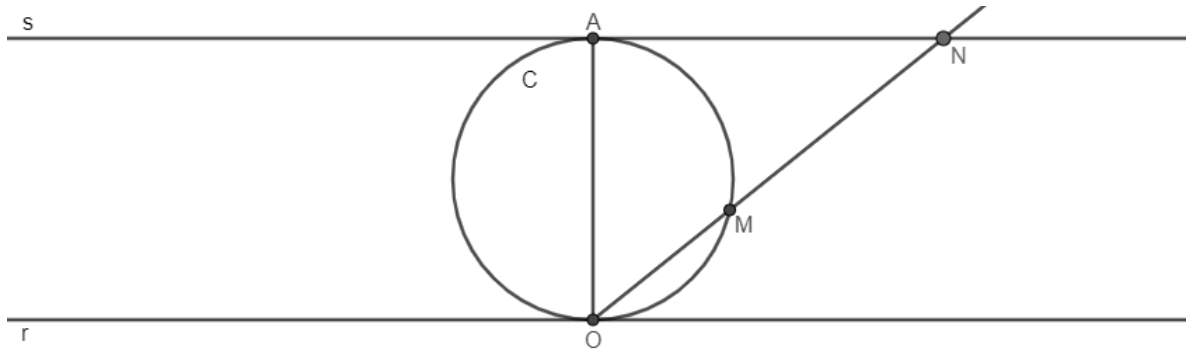
Figura 2.2 – Segundo passo para a construção da Bruxa de Agnesi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Do ponto O , determinemos uma semirreta em direção à s . Chamemos de M e N os pontos de interseção dessa semirreta com a circunferência C e a reta s , nessa ordem.

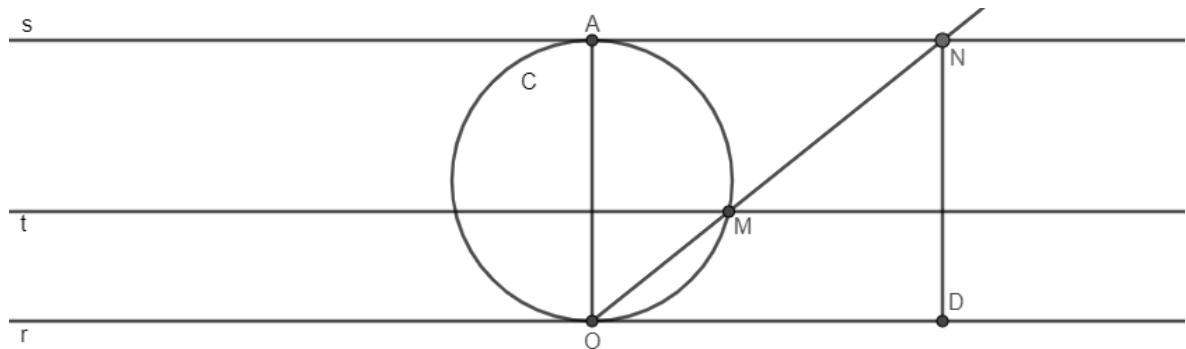
Figura 2.3 – Terceiro passo para a construção da Bruxa de Agnesi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, seja D a projeção ortogonal de N sobre r , determinaremos o segmento \overline{ND} perpendicular a r e, além disso, traçaremos a reta t paralela a r e s passando por M .

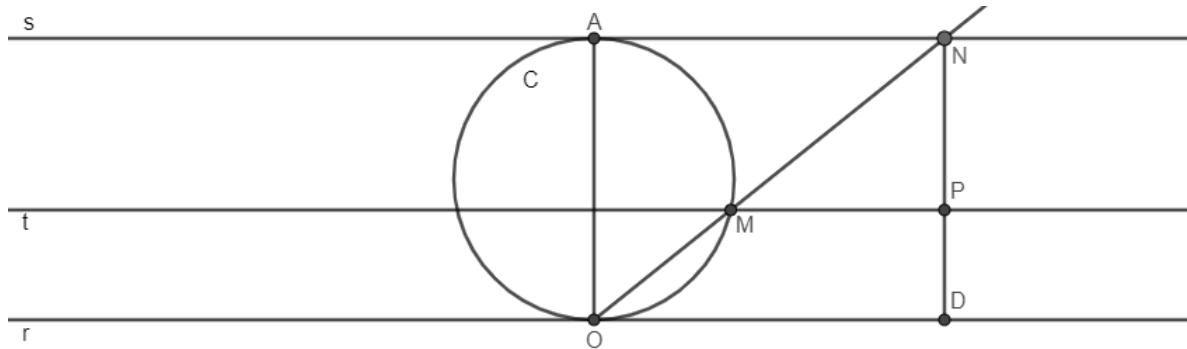
Figura 2.4 – Quarto passo para a construção da Bruxa de Agnesi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Seja o ponto P a interseção da reta t com o segmento \overline{ND} .

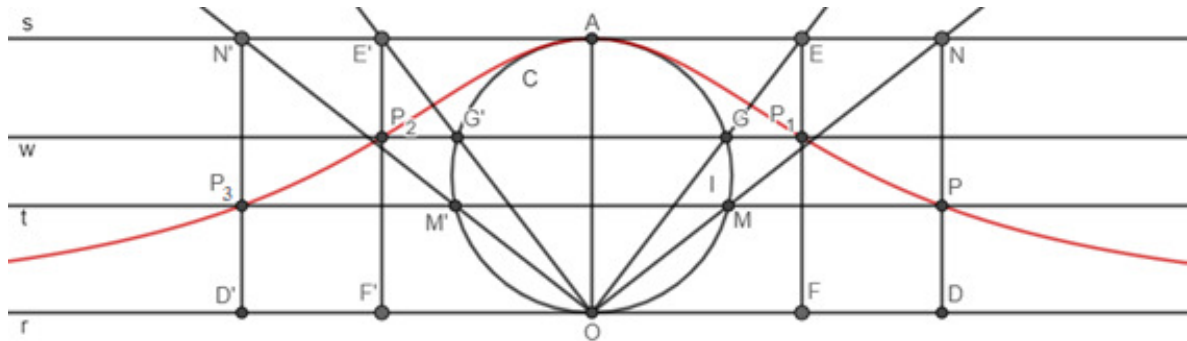
Figura 2.5 – Quinto passo para a construção da Bruxa de Agnesi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os pontos P assim obtidos, traçando todas as semirretas que partem de O e intersectam C e s seguindo esse passo a passo, descrevem a curva denominada Bruxa de Agnesi, representada na Figura 2.6. Outro modo de nos referir a ela seria como a curva gerada pelos pontos P quando M se move ao redor da circunferência C .

Figura 2.6 – Bruxa de Agnesi.

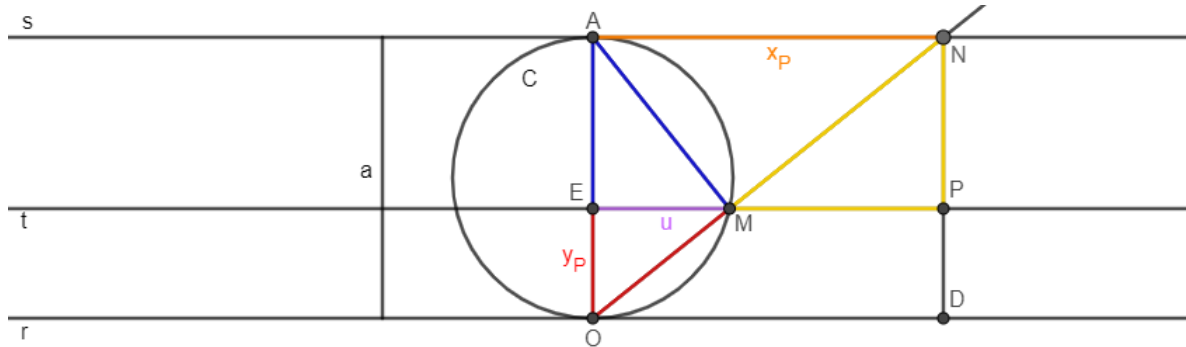


Fonte: Elaborado pelo autor.

2.1.2 Equação cartesiana da Bruxa de Agnesi

Com a intenção de deduzir a equação cartesiana da Bruxa de Agnesi, ou seja, a expressão algébrica que nos permite calcular as coordenadas dos pontos $P(x_P, y_P)$, levaremos em consideração a construção geométrica representada pela Figura 2.7, entretanto, antes de mais nada, faremos aqui algumas considerações trigonométricas. A primeira delas é em relação aos triângulos $\triangle ANO$ e $\triangle MNP$, que são retângulos e, mais do que isso, semelhantes, já que, muito além de compartilharem as medidas dos ângulos $N\hat{A}O = M\hat{P}N = 90^\circ$, têm em comum as medidas dos ângulos $A\hat{O}N = M\hat{N}P$, alternos internos, que não sabemos com precisão.

Figura 2.7 – Construção geométrica para a dedução da equação cartesiana da Bruxa de Agnesi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, a partir da análise da construção geométrica acima e das relações de semelhança, é possível obter a seguinte relação:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{NP}}, \quad \text{ou} \quad \frac{x_P}{x_P - u} = \frac{a}{a - y_P},$$

onde u é a abscissa do ponto M e \overline{AO} é o diâmetro da circunferência C como já havíamos pré-definido, cuja medida é a .

Fazendo algumas simples operações, temos que:

$$\begin{aligned} x_P(a - y_P) &= a(x_P - u) \\ x_P - u &= \frac{x_P(a - y_P)}{a} \\ u &= x_P - \frac{x_P(a - y_P)}{a} \\ u &= \frac{x_P a - x_P a + x_P y_P}{a} \\ u &= \frac{x_P y_P}{a} \end{aligned} \quad (1)$$

A equação (1) será usada posteriormente, mas, por enquanto, retomaremos as demais considerações necessárias para a obtenção da equação cartesiana da Bruxa de Agnesi, essas consistindo em três aplicações do Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos $\triangle AEM$, $\triangle EMO$ e $\triangle AMO$ representados na Figura 2.7, nesse último valendo lembrar de uma das propriedades da Geometria Plana, já que o ângulo reto $\hat{A}MO$ decorre do fato do triângulo em questão se encontrar inscrito na semicircunferência delimitada pelo diâmetro \overline{AO} , um dos seus lados. Segue-se que:

(i) No triângulo $\triangle AEM$: $\overline{AM}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EM}^2 = (a - y_P)^2 + u^2$.

(ii) No triângulo $\triangle EMO$: $\overline{MO}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{EO}^2 = u^2 + y_P^2$.

(iii) No triângulo $\triangle AMO$: $\overline{AO}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MO}^2$.

Substituindo (i) e (ii) em (iii), obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 &= [(a - y_P)^2 + u^2] + [u^2 + y_P^2] \\ a^2 &= a^2 - 2ay_P + y_P^2 + u^2 + u^2 + y_P^2 \\ 0 &= u^2 + y_P^2 - ay_P. \end{aligned}$$

Como, pela Equação (1), $u = \frac{x_P y_P}{a}$, temos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_P y_P}{a}\right)^2 + y_P^2 - ay_P &= 0 \\ \frac{x_P^2 y_P^2}{a^2} + y_P^2 - ay_P &= 0 \\ x_P^2 y_P^2 + a^2 y_P^2 - a^3 y_P &= 0 \\ y_P [(x_P^2 + a^2) y_P - a^3] &= 0, \end{aligned}$$

daí, como temos um produto de dois fatores cujo resultado é igual a 0, então

$$y_P = 0 \quad \text{ou} \quad (x_P^2 + a^2) y_P - a^3 = 0.$$

Como desejamos obter a equação cartesiana da Bruxa de Agnesi, $y_P = 0$, ou seja, o eixo das abscissas, não nos convém, pois não descreve a curva, assim, mediante a isso, a equação cartesiana dessa famosa curva resulta de:

$$(x_P^2 + a^2) y_P - a^3 = 0,$$

sendo descrita por:

$$y_P = \frac{a^3}{x_P^2 + a^2} \tag{2}$$

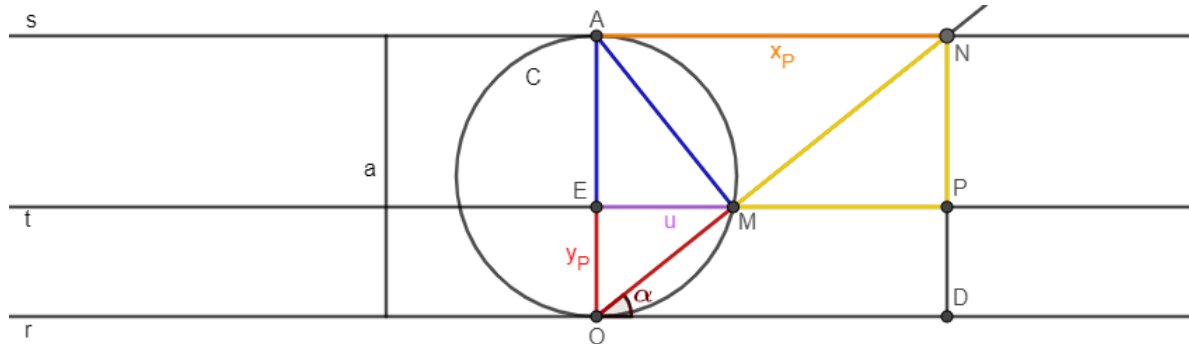
■

2.1.3 Equação paramétrica da Bruxa de Agnesi

Retomando para o processo de obtenção das equações da Bruxa de Agnesi, iremos deduzir aqui a equação paramétrica, contudo, uma informação relevante como explana Gray e Malakyan (1999), é que essa equação não foi definida pela própria Agnesi em *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, o motivo histórico para isso era a pouca trigonometria explorada nos livros de Cálculo do século XVIII. Entretanto, exploraremos essa equação aqui.

Para isso, vamos considerar basicamente a mesma ilustração utilizada para deduzir a equação cartesiana, na Subseção 2.1.2, a Figura 2.7, entretanto, com uma sutil diferença: a presença do ângulo $N\hat{O}D = \alpha$ como podemos ver na Figura 2.8.

Figura 2.8 – Construção geométrica para a dedução da equação paramétrica da Bruxa de Agnesi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Relativamente mais simples de se obter, principalmente quando já definida a equação cartesiana da Bruxa de Agnesi (2), para iniciarmos o curto processo para desvendá-la precisamos, antes de mais nada, nos atentar para uma das importantes relações trigonometria no $\triangle DNO$, a cotangente do ângulo α :

$$\cotg(\alpha) = \frac{x_p}{a}.$$

Dessa relação, é fácil verificar que $x_p = a \cdot \cotg(\alpha)$. Logo definido o parâmetro x_p . Para definir o segundo parâmetro y_p , como já se deve imaginar, é suficiente substituir o valor de x_p encontrado na equação cartesiana da Bruxa de Agnesi (2), assim temos:

$$y_p = \frac{a^3}{a^2 \cdot \cotg^2(\alpha) + a^2} = \frac{a^3}{a^2(\cotg^2(\alpha) + 1)} = \frac{a}{\operatorname{cosec}^2(\alpha)} = a \cdot \operatorname{sen}^2(\alpha).$$

Portanto, a equação paramétrica da curva da Bruxa de Agnesi é:

$$\begin{cases} x_P = a \cdot \cotg(\alpha) \\ y_P = a \cdot \text{sen}^2(\alpha) \end{cases}, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad \blacksquare$$

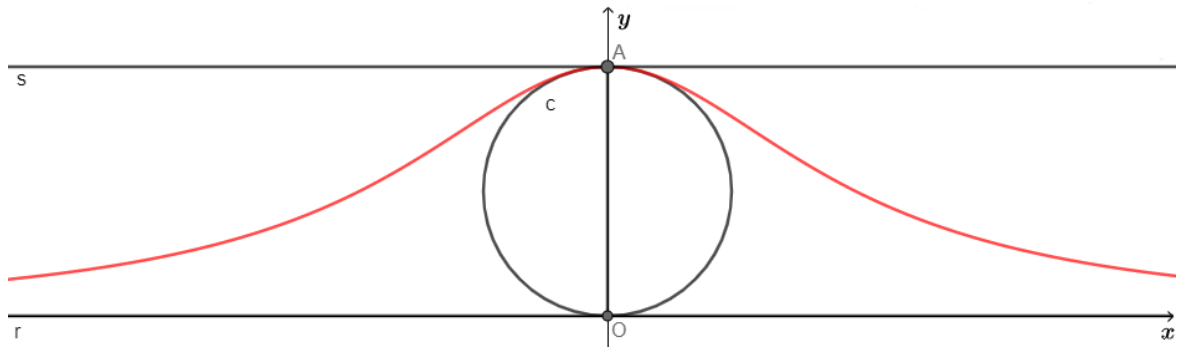
2.1.4 Propriedades da Bruxa de Agnesi

Assim como outras curvas, é de se esperar que a Bruxa de Agnesi possua também algumas propriedades. No entanto, para que seja iniciado essa discussão vamos impor algumas condições para alguns dos elementos pertinentes a construção da curva que estabelecemos anteriormente na Subseção 2.1.1:

- (i) que o diâmetro \overline{AO} de medida a da circunferência C esteja situado sobre o eixo y ;
- (ii) e que o ponto O seja a origem do sistema de coordenadas.

Imposta essas condições, temos a seguinte construção ilustrada pela Figura 2.9.

Figura 2.9 – Construção geométrica para a dedução das propriedades.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Iniciando a exploração das propriedades, iremos introduzir inicialmente uma das mais simples e fáceis de serem notadas, principalmente a partir da equação cartesiana, a simetria da curva em relação ao eixo y , fato que pode ser justificado pela seguinte igualdade:

$$f(x) = \frac{a^3}{x^2 + a^2} = \frac{a^3}{(-x)^2 + a^2} = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo a Bruxa de Agnesi é uma função par.

Uma segunda propriedade também relativamente fácil de ser observada, principalmente para aqueles que já tiveram contato com o Cálculo Diferencial e Integral, é que

$y = 0$, o eixo x , é assíntota horizontal dessa curva, já que $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, uma vez que a , o diâmetro da circunferência C associada, é diferente de 0 e:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2} = 0.$$

Ainda considerando as ferramentas impulsionadas pelo Cálculo Diferencial e Integral, uma outra propriedade que pode ser explorada a partir da Bruxa de Agnesi é a área S entre a curva e a assíntota $y = 0$. Dada pela seguinte integral imprópria:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx.$$

Calculando $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx$, temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \lim_{j \rightarrow -\infty} \int_j^0 \frac{a}{x^2 + a^2} dx + \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k \frac{a}{x^2 + a^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \lim_{j \rightarrow -\infty} \left(\arctan\left(\frac{0}{a}\right) - \arctan\left(\frac{j}{a}\right) \right) + \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\arctan\left(\frac{k}{a}\right) - \arctan\left(\frac{0}{a}\right) \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) + \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) = \pi.$$

Assim, a área entre a curva e a assíntota $y = 0$ é:

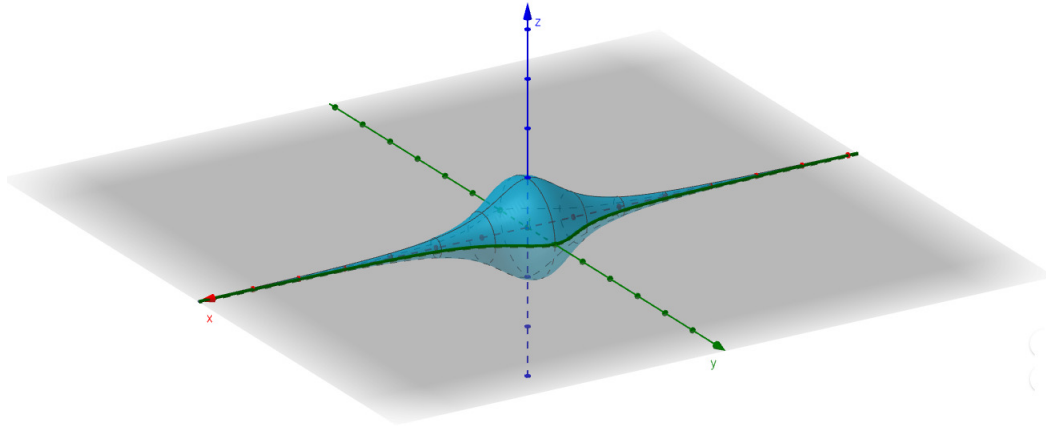
$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx = \pi a^2.$$

Que é exatamente igual ao quádruplo da área da circunferência C de raio $\frac{a}{2}$ associada. E a última propriedade a ser explorada aqui neste trabalho, é o volume V do sólido de revolução gerado pela curva em torno do eixo x representado pela Figura 2.10.

Obtido por meio de:

$$V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a^3}{x^2 + a^2} \right]^2 dx = \pi \left(\lim_{j \rightarrow -\infty} \int_j^0 \left[\frac{a^3}{x^2 + a^2} \right]^2 dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \left[\frac{a^3}{x^2 + a^2} \right]^2 dx \right).$$

Figura 2.10 – Sólido de revolução em torno do eixo x .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Iremos antecipar que a integral:

$$\int \left[\frac{a^3}{x^2 + a^2} \right]^2 dx = \frac{a^3}{4} \left(2 \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + \operatorname{sen} \left(2 \arctan \left(\frac{x}{a} \right) \right) \right) + C.$$

Daí, como $\lim_{j \rightarrow -\infty} \int_j^0 \left[\frac{a^3}{x^2 + a^2} \right]^2 dx$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{j \rightarrow -\infty} \frac{a^3}{4} \left[2 \arctan \left(\frac{0}{a} \right) + \operatorname{sen} \left(2 \arctan \left(\frac{0}{a} \right) \right) - 2 \arctan \left(\frac{j}{a} \right) - \operatorname{sen} \left(2 \arctan \left(\frac{j}{a} \right) \right) \right] \\ &= \frac{a^3}{4} [0 + 0 + \pi - 0] = \frac{\pi a^3}{4}. \end{aligned}$$

Além disso, como $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k \left[\frac{a^3}{x^2 + a^2} \right]^2 dx$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a^3}{4} \left[2 \arctan \left(\frac{k}{a} \right) + \operatorname{sen} \left(2 \arctan \left(\frac{k}{a} \right) \right) - 2 \arctan \left(\frac{0}{a} \right) - \operatorname{sen} \left(2 \arctan \left(\frac{0}{a} \right) \right) \right] \\ &= \frac{a^3}{4} [\pi + 0 - 0 - 0] = \frac{\pi a^3}{4}. \end{aligned}$$

Temos então que:

$$V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a^3}{x^2 + a^2} \right]^2 dx = \pi \left(\frac{\pi a^3}{4} + \frac{\pi a^3}{4} \right) = \frac{\pi^2 a^3}{2}.$$

2.1.5 Considerações sobre a Bruxa de Agnesi

Como podemos observar até aqui, a Bruxa de Agnesi trata-se de uma curva relativamente fácil de ser compreendida. Necessitando de apenas alguns conhecimentos básicos da Geometria Plana e Trigonometria para que seja possível acompanhar o processo de construção e determinação de suas equações, apesar das suas propriedades requisitarem de uma base do Cálculo Diferencial e Integral.

No entanto, associada a grandes nomes da Matemática como, por exemplo, Fermat, Grandi e a própria Agnesi, essa curva que carrega um enorme legado precisa ser melhor reconhecida e estudada, assim como a história por trás dessa esplêndida mulher. Permitindo relembrar técnicas e propriedades da Trigonometria, Geometria Plana e do Cálculo Diferencial e Integral, sua exploração permite também aguçar as nossas habilidades em relação ao entendimento sobre as curvas planas.

Contudo, neste trabalho será apresentada uma aplicação da curva. Nela, a Bruxa de Agnesi será utilizada para conceber uma interpolação racional e, portanto, se faz necessário a apresentação de alguns dos conceitos remetentes a essa temática que apresentaremos na seção seguinte.

2.2 INTERPOLAÇÃO: UMA BREVE INTRODUÇÃO

Embora instigado a estudar formalmente interpolação exclusivamente para a confecção do próximo capítulo, já que raras são as vezes que nos deparamos com esse método de aproximar valores, assunto de interesse da disciplina de Cálculo Numérico, atualmente ofertado como disciplina optativa no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba (IFPB), campus Cajazeiras, a qual não tive a oportunidade de cursar, como discute Petri *et al.* (2005), a pesquisa é uma aventura onde os exploradores vão atrás do desconhecido/novo, e assim o fizemos.

Utilizado, muitas das vezes, segundo Monteiro (2012, p. 87), em duas particulares situações:

[...] quando a expressão de $f(x)$ não é conhecida (apenas se conhecem os valores numéricos de $f(x)$ para um conjunto discreto de pontos), ou quando se conhece a expressão da função $f(x)$ mas ela é muito complicada, pelo que é útil aproximá-la por um modelo matemático mais simples do tipo polinomial.

A interpolação, apesar dessa descrição no sentido restritivo, apresenta diversas aplicações, como é o caso das investigações de certos experimentos em que o conjunto de dados obtidos são plausíveis para a determinação de uma função a qual vale a pena estimar valores não conhecidos, por exemplo, situações exploradas nos trabalhos de Marcuzzo *et al.* (2011), intitulado “Métodos de interpolação matemática no mapeamento de chuvas do Estado do Mato Grosso”, ou ainda, no de Jakob e Young (2016) chamado de “O uso de métodos de interpolação espacial de dados nas análises sociodemográficas”. Feito essa breve contextualização, vamos à definição a seguir, formulada a partir da obra de Ruggiero e Lopes (2000).

Definição 2.1. Interpolação é um método que dado um conjunto de $n + 1$ pontos distintos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, chamados nós da interpolação, e suas respectivas imagens $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ em relação a uma função $f(x)$, com $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$, consiste em determinar uma nova função $g(x)$, sob as seguintes condições, $g(x_i) = f(x_i)$. Essa nova função obtida recebe o nome de função interpolação e, quando bem determinada, apresenta um comportamento similar a função $f(x)$ de interesse, sendo possível aproximar valores de $f(x)$ para algum $x \neq x_i$ com $x \in [x_0, x_n]$.

Sendo do interesse da extrapolação investigar as aproximações dos valores de $f(x)$ para os quais $x \notin [x_0, x_n]$, um outro assunto do Cálculo Numérico que não é do nosso interesse investigar, uma nova discussão que necessita da nossa atenção remete-se aos tipos da função interpolação. Como já antecipado pelo comentário de Monteiro (2012), ela pode ser do tipo polinomial, que define as interpolações polinomiais, sendo essas, em específico, os casos mais comuns e fáceis de serem trabalhados, já que a função interpolação, podendo ser chamada nessa situação de polinômio interpolador, pode ser, na maioria das vezes, facilmente obtida através de soluções de sistemas lineares, isso caso o conjunto de pontos a ser interpolados sejam de no máximo até quatro pares ordenados, gerando assim polinômios interpoladores de grau três ou inferior. Caso contrário, existem métodos numéricos menos dispendiosos do ponto de vista computacional que podem ser usados, para conhecê-los sugerimos consultar Filho (2007).

Ademais, um outro ponto que justifica a recorrente escolha de funções polinomiais para aproximar valores por meio desse meio matemático de modelagem, é a simplicidade de calculá-los, além de serem funções de classe C^∞ cujas derivadas são polinômios de graus menores.

Entretanto, a interpolação não se restringe a interpolação polinomial, como enfatiza Ruggiero e Lopes (2000), podendo ser também trigonométricas, racionais, exponenciais, entre outras. Inclusive, para o desenvolvimento da proposta do capítulo seguinte, utiliza-

remos a interpolação racional, mas, antes de introduzi-la, iremos prosseguir com nossa aventura conhecendo alguns desses métodos.

2.2.1 Interpolação polinomial

Voltemos a Definição 2.1 de interpolação, vamos considerar a função $f(x)$ e o conjunto de $n + 1$ pontos fornecidos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, com as mesmas restrições. A interpolação polinomial consiste em determinar um polinômio $P_n(x)$ de grau menor ou igual a n que satisfaça a seguinte condição:

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Seja $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, esse polinômio. Daí, podemos estabelecer o seguinte sistema linear a partir do conjunto de pontos dados para encontrar as incógnitas $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ do nosso polinômio interpolador.

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \quad (3)$$

Da relação entre sistemas lineares e matrizes, podemos reescrever (3) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Observando a matriz dos coeficientes, é notável pelo seu comportamento peculiar que trata-se de uma matriz especial, a chamada Matriz de Vandermonde, que designaremos por M . Como $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ são distintos, como definido, segue que $\det(M) \neq 0$ e, portanto, pela discussão dos sistemas lineares, (1) é possível e determinado. Daí, provado o seguinte teorema:

Teorema 2.1. Existe um único polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ tal que $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, desde que $x_i \neq x_j$, $i \neq j$.

Vejamos agora algumas formas de interpolação polinomial.

Interpolação linear

Uma das formas mais simples de interpolação polinomial, a interpolação linear traduz-se em determinar um polinômio interpolador por meio de um par de pontos distintos dados. Sejam eles, (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , com $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1$ e $x_0 \neq x_1$. Como devemos imaginar, o polinômio $P(x)$ buscado é da forma

$$P_1(x) = a_0 + a_1x,$$

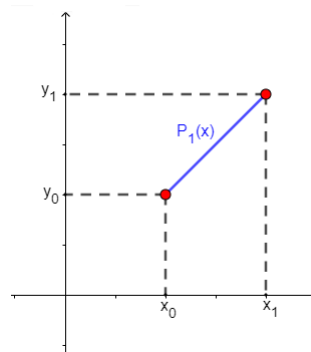
um polinômio de grau 1.

Sobre esse tipo de interpolação, perceba que os coeficientes do polinômio interpolador $P_1(x)$ podem ser facilmente obtidos através do sistema linear a seguir

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 = y_1. \end{cases}$$

Obtendo uma função polinomial $P_1(x)$, cujo comportamento encontra-se ilustrado na Figura 2.11.

Figura 2.11 – Interpolação linear.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Interpolação quadrática

Diferente da interpolação linear em alguns aspectos, como da necessidade de três pontos distintos da função $f(x)$ e pelo gráfico do polinômio interpolador, que agora trata-se de uma parábola, a interpolação quadrática também é bem simples de se obter.

Sendo da forma

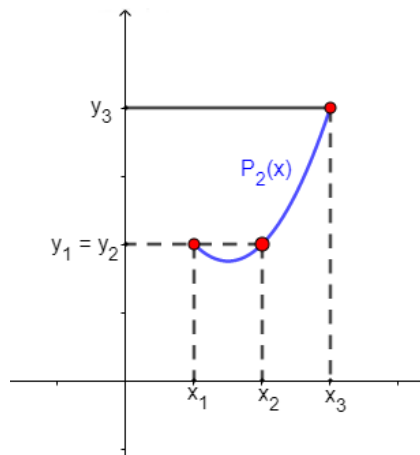
$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

analogamente a interpolação linear, os seus coeficientes a_0, a_1 e a_2 , podem ser obtidos através do sistema linear a seguir

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2 \end{cases},$$

onde seu gráfico terá um comportamento similar ao gráfico apresentado na Figura 2.12, muito embora possa variar em abertura, localização no plano e pelo sentido da concavidade.

Figura 2.12 – Interpolação quadrática.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Forma de Lagrange

Muito além dos sistemas lineares, existem outras maneiras de se obter o polinômio interpolador de uma função $f(x)$ através de um conjunto de $n + 1$ pontos dados. Sejam esses pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, podemos representar o polinômio interpolador $P_n(x)$ de grau $\leq n$ da seguinte maneira, $P_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n(x)$, onde os polinômios $L_k(x)$ são todos de grau n . Sendo assim, queremos que para cada i , com $0 \leq i \leq n$, $P_n(x_i) = y_i$, ou seja:

$$P_n(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + \dots + y_nL_n(x_i) = y_i.$$

Seja $0 \leq k \leq n$, a maneira mais fácil de se garantir isso, é impor que:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i \\ 1 & \text{se } k = i \end{cases}. \quad (4)$$

Para isso, vamos estrategicamente definir $L_k(x)$ como:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}. \quad (5)$$

A partir daí, é simples verificar que $L_k(x_k) = 1$ e que $L_k(x_i) = 0$ se $k \neq i$, logo a condição (4) é satisfeita. Entretanto, quanto a equação (5), uma outra informação que merece a nossa atenção é o fato de que o numerador de $L_k(x)$ é o produto de n fatores da forma $(x-x_i)$ onde $i \neq k$, logo, como o denominador é um número real, $L_k(x)$ é um polinômio de grau n , como já tínhamos antecipado e, conseqüentemente, $P_n(x)$ é um polinômio de grau $\leq n$.

Portanto, está garantido que $P_n(x_i) = y_i$ para qualquer i , com $0 \leq i \leq n$ já que:

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i.$$

Assim está apresentado a forma de Lagrange para o se obter o polinômio interpolador

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x_i),$$

onde $L_k(x)$ está definido em (5) e $P_n(x)$ é o n -ésimo polinômio interpolador de Lagrange.

Formalizado a forma de Lagrange, iremos a partir de agora exemplificar numericamente como obtê-lo.

Exemplo 2.1. Seja $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$, iremos determinar o polinômio interpolador de Lagrange de grau 1, 2, 3 e 4 no intervalo de $[0; 0,4]$. Inicialmente, vamos determinar o polinômio de grau 1 na qual, obrigatoriamente, os nós de interpolação devem ser os extremos do intervalo, ou seja, $x_0 = 0$ e $x_1 = 0,4$ onde:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} = \frac{x-0,4}{0-0,4} = \frac{x-0,4}{-0,4};$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 0}{0,4 - 0} = \frac{x}{0,4}.$$

Assim, como $f(0) = 1$ e $f(0,4) = 1,5312$, temos então que o polinômio interpolador de Lagrange de grau 1 é:

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^1 y_k L_k(x_i) = 1 \left(\frac{x - 0,4}{-0,4} \right) + 1,5312 \left(\frac{x}{0,4} \right).$$

Prosseguindo, iremos determinar o polinômio interpolador de Lagrange de grau 2 no intervalo de $[0; 0,4]$, para tanto, precisaremos de um ponto adicional além de $(0, 1)$ e $(0,4; 1,5312)$ de $f(x)$, com $x \in (0; 0,4)$. Seja esse valor igual a $0,2$, temos então que $f(0,2) = 1,1232$ e, além disso, temos também que $x_0 = 0$, $x_1 = 0,2$ e $x_2 = 0,4$. Calculando $L_k(x)$ para $0 \leq k \leq 2$, temos:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0,2)(x - 0,4)}{(0 - 0,2)(0 - 0,4)} = \frac{x^2 - 0,6x + 0,08}{0,08};$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 0,4)}{(0,2 - 0)(0,2 - 0,4)} = \frac{x^2 - 0,4x}{-0,04};$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - 0,2)}{(0,4 - 0)(0,4 - 0,2)} = \frac{x^2 - 0,2x}{0,08}.$$

Dessa forma, o polinômio interpolador de Lagrange para esse conjunto de pontos é dado por:

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^2 y_k L_k(x_i) = 1 \left(\frac{x^2 - 0,6x + 0,08}{0,08} \right) + 1,1232 \left(\frac{x^2 - 0,4x}{-0,04} \right) + 1,5312 \left(\frac{x^2 - 0,2x}{0,08} \right).$$

Analogamente, podemos determinar o polinômio interpolador de Lagrange de grau 3 definido no conjunto de pontos $P_0 = (0, 1)$, $P_1 = (0,1; 1,0302)$, $P_2 = (0,2; 1,1232)$ e $P_3 = (0,4; 1,5312)$, como $x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,2$ e $x_3 = 0,4$. Daí:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 0,1)(x - 0,2)(x - 0,4)}{(0 - 0,1)(0 - 0,2)(0 - 0,4)}$$

$$L_0(x) = \frac{x^3 - 0,7x^2 + 0,14x - 0,008}{-0,008};$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 0,2)(x - 0,4)}{(0,1 - 0)(0,1 - 0,2)(0,1 - 0,4)}$$

$$L_1(x) = \frac{x^3 - 0,6x^2 + 0,08x}{0,003};$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 0,1)(x - 0,4)}{(0,2 - 0)(0,2 - 0,1)(0,2 - 0,4)}$$

$$L_2(x) = \frac{x^3 - 0,5x^2 + 0,04x}{-0,004};$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 0,1)(x - 0,2)}{(0,4 - 0)(0,4 - 0,1)(0,4 - 0,2)}$$

$$L_3(x) = \frac{x^3 - 0,3x^2 + 0,02x}{0,024}.$$

Assim:

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 y_k L_k(x_i) = 126,4x^3 - 84,78x^2 + 17,516x - \frac{x^3 - 0,7x^2 + 0,14x - 0,008}{0,008}$$

Finalmente, vamos calcular o polinômio interpolador de Lagrange de grau 4. Como precisamos de cinco pontos no intervalo de $[0; 0,4]$ incluindo os extremos, iremos considerar os pontos $P_0 = (0, 1)$, $P_1 = (0,1; 1,0302)$, $P_2 = (0,2; 1,1232)$, $P_3 = (0,3; 1,2862)$ e $P_4 = (0,4; 1,5312)$. Logo:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} = \frac{(x - 0,1)(x - 0,2)(x - 0,3)(x - 0,4)}{(0 - 0,1)(0 - 0,2)(0 - 0,3)(0 - 0,4)}$$

$$L_0(x) = \frac{x^4 - x^3 + 0,35x^2 - 0,05x + 0,0024}{0,0024};$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} = \frac{(x - 0)(x - 0,2)(x - 0,3)(x - 0,4)}{(0,1 - 0)(0,1 - 0,2)(0,1 - 0,3)(0,1 - 0,4)}$$

$$L_1(x) = \frac{x^4 - 0,9x^3 + 0,26x^2 - 0,024x}{-0,0006};$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} = \frac{(x - 0)(x - 0,1)(x - 0,3)(x - 0,4)}{(0,2 - 0)(0,2 - 0,1)(0,2 - 0,3)(0,2 - 0,4)}$$

$$L_2(x) = \frac{x^4 - 0,8x^3 + 0,19x^2 - 0,012x}{0,0004};$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} = \frac{(x - 0)(x - 0,1)(x - 0,2)(x - 0,4)}{(0,3 - 0)(0,3 - 0,1)(0,3 - 0,2)(0,3 - 0,4)}$$

$$L_3(x) = \frac{x^4 - 0,7x^3 + 0,14x^2 - 0,008x}{-0,0006};$$

$$L_4(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 0,1)(x - 0,2)(x - 0,3)}{(0,4 - 0)(0,4 - 0,1)(0,4 - 0,2)(0,4 - 0,3)}$$

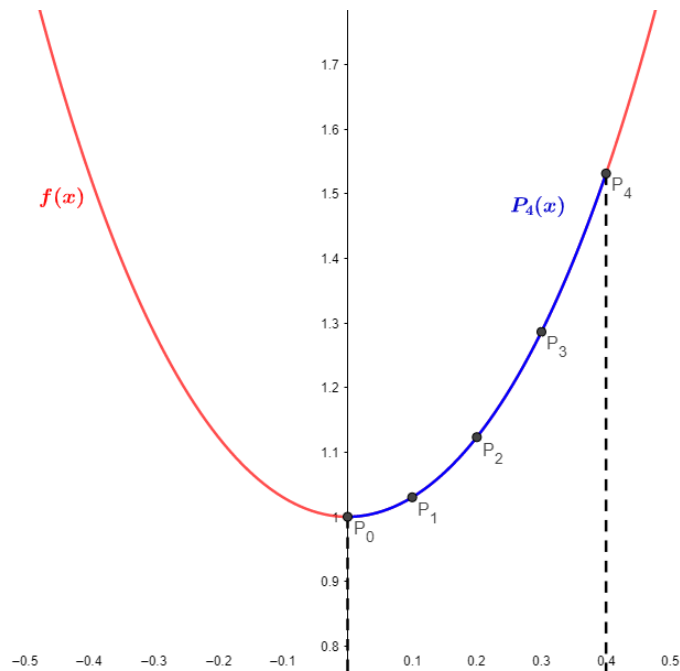
$$L_4(x) = \frac{x^4 - 0,6x^3 + 0,11x^2 - 0,006x}{0,0024};$$

Potanto,

$$P_4(x) \cong 1,9967x^4 + 0,0033x^3 + 3,0033x^2 - 0,0033x + 1,$$

que inclusive, é a própria função $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$ no intervalo $[0; 0,4]$, como podemos verificar na Figura 2.13, embora tenhamos feito algumas aproximações.

Figura 2.13 – Polinômio interpolador de Lagrange de grau 4



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, existem outras formas de se obter esses polinômios interpoladores, como a interpolação de Newton, por exemplo, que, teoricamente, como aponta Ruggiero e Lopes (2000), conduzem a um mesmo polinômio interpolador obtido por meio de sistemas lineares ou a Forma de Lagrange que acabamos de discutir, independente do grau.

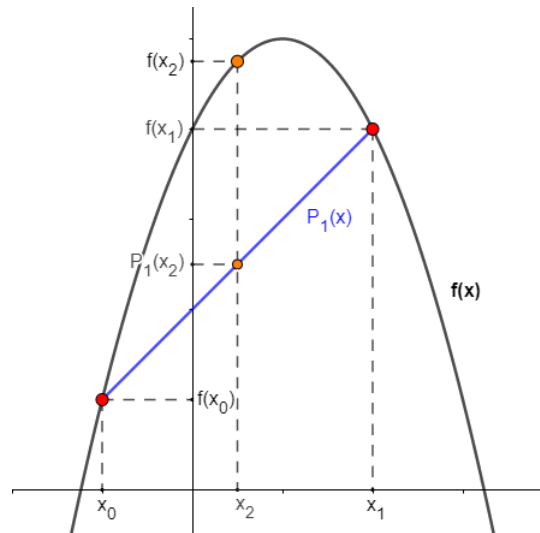
2.2.2 Estudo do erro para interpolação polinomial

Pela Definição 2.1 de interpolação, é notável que as aproximações dos valores de $f(x)$ por $g(x)$ para algum x diferentes dos nós da interpolação envolvem erros. Isso pode ser facilmente constatado ao analisarmos a Figura 2.14, onde encontram-se representados o gráfico de uma determinada função quadrática $f(x)$, assim como o do polinômio interpolador de 1º grau $P_1(x)$, cujo os nós são x_0 e x_1 . Fazendo o papel da função interpolação $g(x)$, a função $P_1(x)$ apresenta uma perceptível imprecisão sinalizada, por exemplo, quando tenta-se obter uma aproximação do valor de x_2 na função dada, através dela.

Sendo do interesse da interpolação calcular o quão preciso é a aproximação de uma função qualquer $f(x)$ por meio de um polinômio interpolador $P_n(x)$ de grau $n \geq 0$ que interpola a função nos pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$, e sendo o estudo do erro $E_n(x)$ um desses meios para a investigação desses critérios de credibilidade (ou descredibilidade), temos o seguinte definição:

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x), \quad x \in [x_0, x_n],$$

Figura 2.14 – Erro de interpolação



Fonte: Elaborado pelo autor.

que pode ser reforçado pelo teorema a seguir, definido com base na obra de Ruggiero e Lopes (2000).

Teorema 2.2. Sejam $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $(n+1)$ pontos. Seja $f(x)$ uma função que admite derivadas até ordem $(n+1)$ para todo x pertencente ao intervalo $[x_0, x_n]$. Se $P_n(x)$ é o polinômio interpolador de $f(x)$ nos nós x_0, x_1, \dots, x_n , então, para todo x pertencente ao intervalo $[x_0, x_n]$, o erro é dado por

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad (6)$$

onde $\xi_x \in [x_0, x_n]$ é, na prática, a abscissa do ponto em que $f^{n+1}(x)$ apresenta o maior valor em módulo. Assim, (6) nos fornece a cota máxima do erro cometido.

A demonstração desse Teorema pode ser encontrado no livro “Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais” de Ruggiero e Lopes (2000), especificamente, da página 229 à 231.

Para encerrar a discussão do erro de aproximação do valor de uma função pela função interpolação, vamos explicar dois exemplos.

Exemplo 2.2. (Adaptado de Filho (2007)) Vamos determinar o erro da aproximação da função $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$ pelo polinômio interpolador de Lagrange de grau 2

$$P_2(x) = 1 \left(\frac{x^2 - 0,6x + 0,08}{0,08} \right) + 1,1232 \left(\frac{x^2 - 0,4x}{-0,04} \right) + 1,5312 \left(\frac{x^2 - 0,2x}{0,08} \right),$$

que interpola $f(x)$ em $(0, 1)$, $(0,2; 1,1232)$ e $(0,4; 1,5312)$, onde iremos analisar o erro da interpolação para $x = 0,1$.

Dessa forma, para calcular o erro $E_2(0.1)$, iremos precisar da derivada de ordem 3 da função $f(x)$, que, novamente, pelos conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral, pode ser facilmente calculada sendo, portanto, igual a $f'''(x) = 48x$. Daí, um segundo requisito para calcular o erro por meio de (6) é determinar $\xi_x \in [0; 0,4]$ que é a abscissa do ponto que $f'''(x) = 48x$, em módulo, apresenta o maior valor, logo, é fácil deduzir que $\xi_x = 0,4$. Assim:

$$E_2(0,1) = (0,1 - 0)(0,1 - 0,2)(0,1 - 0,4) \frac{48 \times 0,4}{3!} = 0,0096.$$

Comparando com o erro real, dado por:

$$|f(0,1) - P_2(0,1)| = |1,0302 - 1,026| = |0,0042| = 0,0042 < |E_2(x)| = 0,0096.$$

Assim, $E_2(x)$ oferece a cota máxima do erro cometido.

Exemplo 2.3. (Adaptado de Filho (2007)) Analogamente, vamos determinar o erro de aproximação da função $f(x) = e^x - x^2 - x$ pelo polinômio interpolador de Lagrange de grau 2, $P_2(x)$, onde $P_2(x)$ interpola f nos pontos $(1,9; 1,1759)$, $(2,1; 1,6562)$ e $(2,5; 3,4325)$ e $x_0 = 1,9$, $x_1 = 2,1$ e $x_2 = 2,5$ para $x = 2,2$.

Antecipando que:

$$P_2(x) = 1,1759 \left(\frac{x^2 - 4,6x + 5,25}{0,12} \right) + 1,6562 \left(\frac{x^2 - 4,4x + 4,75}{-0,08} \right) + 3,4325 \left(\frac{x^2 - 4x + 3,99}{0,24} \right).$$

Como $f'''(x) = e^x$ e $\xi_x \in [1,9; 2,5]$ é igual a 2,5, temos, portanto, que:

$$E_2(2,2) = (2,2 - 1,9)(2,2 - 2,1)(2,2 - 2,5) \frac{e^{2,5}}{3!} = -0,0183.$$

Agora, calculando o erro real, temos que:

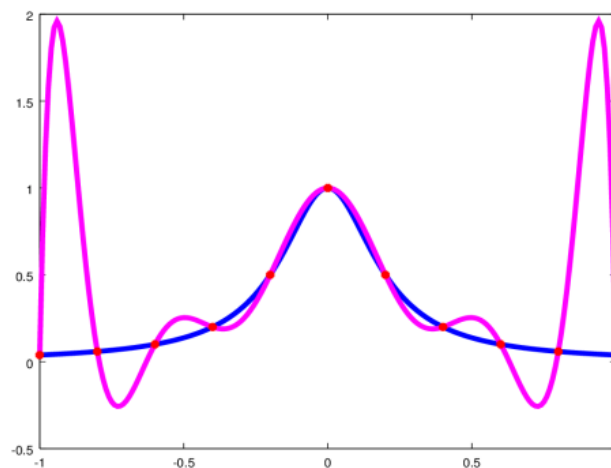
$$|f(2,2) - P_2(2,2)| = |1,9850 - 1,9983| = |-0,0133| = 0,0133 < |E_2(2,2)| = 0,0183.$$

Finalmente, uma última discussão que vale a pena ser levantada, é em relação ao sinal do erro $E_n(x)$. Se o sinal for positivo, então o erro da aproximação foi por falta, isto é, $P_n(x) < f(x)$, como podemos observar no Exemplo 2.2. E, caso $E_n(x)$ tenha sinal negativo, logo o erro da aproximação foi por excesso, $P_n(x) > f(x)$, como acontece no Exemplo 2.3.

2.2.3 Interpolação por spline

Nas investigações para aproximações mais assertivas de uma certa função $f(x)$, ou ainda, para estimar um certo valor não reconhecido a partir de um conjunto de $n + 1$ tabelados de um experimento associável a funções, ou seja, os pontos determinados pelos nós da interpolação, observou-se que ao utilizar um polinômio interpolador $P_n(x)$ de grau n , em diversos casos, podemos obter resultados frustrados, decorrência dos polinômios tenderem a apresentar oscilações muito extremas, principalmente nos limites do intervalo de interpolação, como pode ser notado na Figura 2.15, onde se interpola a função em azul por onze pontos a partir de polinômio de grau 10 em rosa.

Figura 2.15 – Interpolação por um polinômio de grau 10



Fonte: Rossetto (2016).

Para contornar essas situações desastrosas, uma alternativa admissível é justamente interpolar a função $f(x)$ ou o conjunto de dados experimentais recolhidos em grupos menores de pontos, obtendo polinômios interpoladores de grau menores que n , sob certas exigências: que a função interpolação seja contínua e que admita derivadas até uma certa ordem. É nessas condições que entram as funções splines que introduziremos a seguir.

Definição 2.2. Sejam $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ as abscissas dos pontos de $f(x)$ que se deseja interpolar. A função denotada por $S_p(x)$ recebe o nome de splines interpolador de grau p cujos os nós da interpolação são $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$, se satisfaz as seguintes condições:

- (i) em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$, $S_p(x)$ é uma polinômio de grau p : $s_p(x)$;
- (ii) $S_p(x)$ é contínua e tem derivada contínua até ordem $(p - 1)$ no intervalo;
- (iii) $S_p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Favorecendo uma aproximação superior se comparada as interpolações polinômiais, já que definidas em partes e em intervalos menores são sugestivamente mais capazes de manter um comportamento relativamente similar, mesmo sob mudanças locais abruptas, falaremos brevemente aqui sobre um tipo dessas interpolações, as splines lineares.

Splines lineares

As funções splines lineares interpolantes de $f(x)$, denotadas por $S_1(x)$ e cujos nós são $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ dois a dois distintos, são funções que podem ser definidas em cada um subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ como

$$s_i(x) = f(x_{i-1}) \frac{x_1 - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \forall x \in [x_{i-1}, x_i],$$

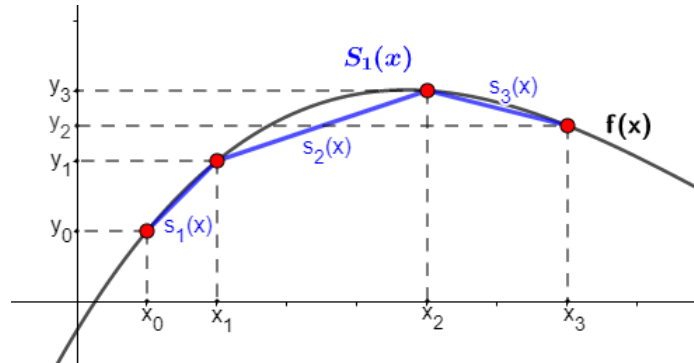
satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $S_1(x)$ é um polinômio de grau 1 em cada um dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$;
- (ii) $S_1(x)$ é contínua em (x_{i-1}, x_i) e nos nós x_i , onde $S_1(x)$ encontra-se bem definida pois $s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) = f(x_i)$;
- (iii) $S_1(x_i) = s_1(x_i) = f(x_i)$.

A seguir, na Figura 2.16 veja o comportamento da função spline linear interpoladora $S_1(x)$ de $f(x)$ nos nós x_0, x_1, x_2 e x_3 definida por

$$S_1(x) = \begin{cases} s_1(x), & x_0 \leq x \leq x_1 \\ s_2(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ s_3(x), & x_2 \leq x \leq x_3. \end{cases}$$

Figura 2.16 – Função spline linear interpoladora $S_1(x)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Entretanto, uma informação adicional sobre a interpolação por spline se faz necessária. Como acabamos de ver essa forma de interpolação tem relativas vantagens se comparado as aproximações por polinômios, mas, dentre as splines, uma ainda se destaca mais do que as outras, e é ela a splines cúbicas. Possuindo derivadas de primeira e segunda ordem contínua, a curvatura das splines cúbicas garantem que não se tenha picos e nem troque de curvatura abruptamente nos nós, sendo essas algumas das razões para os quais Ruggiero e Lopes (2000) e Lopes e Costa (2018) descrevem-na como a mais utilizada. Assim, apesar de não apresentarmos formalmente esse técnica de interpolação, sugerimos consultar o livro “Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais” de Ruggiero e Lopes (2000) para mais detalhes.

2.2.4 Interpolação racional

Para Larkin (1967), o problema para encontrar uma função interpolação racional, $R(x)$, que interpola um conjunto de pontos em posições prescritas de uma dada função, $f(x)$, pode ser abordado por vários pontos de vista. Um deles, por exemplo, é assumir que a função $R(x)$ tenha o formato a seguir

$$R(x) = \frac{\sum_{r=0}^p a_r x^r}{\sum_{r=0}^q b_r x^r} \quad (7)$$

e tentar determinar os coeficientes a_r ($a_r, 0 \leq r \leq p$) e b_r ($b_r, 0 \leq r \leq q$) por meio de um sistema com $p + q + 1$ equações lineares, onde cada uma dessas equações satisfazem a seguinte propriedade

$$R(x_i) = f(x_i); \quad 1 \leq i \leq p + q + 1,$$

para o conjunto de pares ordenados $(x_i, f(x_i))$ fornecidos, com $x_1, x_2, \dots, x_{p+q+1}$ distintos, os nós da interpolação.

Apresentada brevemente essa abordagem, Larkin (1967) chama nossa atenção sobre o fato de que precisarmos de $p+q+1$ equações lineares para determinar os $p+q+2$ coeficientes de (7). E a justificativa, segundo ele, é que um destes coeficientes sempre pode ser reduzido por cancelamento.

Mas, apesar da unicidade da função $R(x)$ assim obtida, o trabalho numérico envolvido para determinar os coeficientes, conseqüentemente, torna esse tipo de abordagem menos atraente. Assim, levando-nos a definir uma outra forma, como o de Thiele (1909), que serve para determinar alguns casos especiais de funções interpolações racionais.

Denotada por $T(x)$, a função interpolação racional de Thiele é útil em duas particulares situações, quando $p = q$ ou $p = q + 1$. Expressa por uma fração contínua terminada

$$T(x) = a_0 + \frac{x - x_1}{a_1 + \frac{x - x_2}{a_2 + \frac{x - x_3}{a_3 + \dots + \frac{x - x_{p+q}}{a_{p+q}}}}$$

ela consiste em determinar os coeficientes a_r a partir de construção de uma tabelas de diferenças invertidas ou diferenças recíprocas por meio dos pontos de interpolação, para conhecê-los sugerimos consultar Thiele (1909).

Finalmente, como queremos apresentar algo mais abrangente e menos trabalhoso, não iremos nos limitar e, muito menos, nos aprofundar em nenhuma dessas abordagens. No entanto, antes de prosseguirmos com as nossas discussões para obtermos um método para a construção das interpolações racionais, faz-se necessário a apresentação de um método auxiliar, o Método de Neville, que abordado, facilitará a compreensão do método desejado.

Método de Neville

Para que possamos entender o Método de Neville¹, precisamos, antes de mais

¹ Eric Harold Neville(1889-1961), foi um matemático inglês que se destacou desde muito cedo. Con-

nada, de dois pressupostos teóricos, o primeiro deles, é a seguinte definição abordada por Burden *et al.* (2015, p. 130).

Definição 2.3. Seja f uma função definida em $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, e suponha que m_1, m_2, \dots, m_k , sejam k números inteiros distintos, com $0 \leq m_i \leq n$ para cada i . O polinômio de Lagrange que coincide com $f(x)$ nos k pontos $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k}$, é denotado por $P_{m_1, m_2, \dots, m_k}(x)$.

O segundo é o Teorema a seguir, definido também por Burden *et al.* (2015, p. 130), cuja demonstração pode ser encontrada na sua própria obra, “Análise numérica”, na página 130.

Teorema 2.3. Seja f uma função definida em x_0, x_1, \dots, x_k , e sejam x_j, x_i dois números distintos nesse conjunto. Então,

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,k}(x)}{(x_i - x_j)} \quad (8)$$

descrevendo o k -ésimo polinômio de Lagrange que interpola f nos $k + 1$ pontos x_0, x_1, \dots, x_k .

O Método de Neville consiste em determinar a Tabela 2.1 a seguir a partir do conjunto de $n + 1$ pontos de $f(x)$ fornecidos, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, com x_0, x_1, \dots, x_n distintos

Tabela 2.1 – Tabela resultante do Método de Neville

x_0	P_0				
x_1	P_1	$P_{0,1}$			
x_2	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$		
x_3	P_3	$P_{2,3}$	$P_{1,2,3}$	$P_{0,1,2,3}$	
x_4	P_4	$P_{3,4}$	$P_{2,3,4}$	$P_{1,2,3,4}$	$P_{0,1,2,3,4}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Fonte: Elaborado pelo autor.

usando, para isso, o Teorema 2.3, onde os P_i , com $i = 0, 1, \dots, n$ são as funções constantes iguais as imagens dos nós da interpolação em $f(x)$, isto é, $P_i = f(x_i)$.

centrando seus esforços nos estudos geométricos, estudou também Lógica Matemática e Educação Matemática. Ele também foi um dos propulsores da famosa história da matemática moderna que envolve o indiano Srinivasa Ramanujan, Bertrand Russell e GH Hardy, mais sobre isso, acesse: <<https://www.icmihistory.unito.it/portrait/neville.php#art>>.

Assim, Neville usa o Teorema 2.3 para gerar recursivamente o polinômio interpolador, como exemplifica Burden *et al.* (2015), ao obter o polinômio interpolador $P_{0,1,2}$ a partir de $P_{0,1}$ e $P_{1,2}$.

$$P_{0,1,2} = \frac{(x - x_0)P_{1,2} + (x - x_2)P_{0,1}}{x_2 - x_0}.$$

Entretanto, a fim de evitar os incômodos subscritos da notação dos polinômios interpoladores resultado da Definição 2.3, e para facilitar a implementação desse método, é conveniente utilizar a notação matricial Q de Neville, onde

$$Q_{ij} = P_{i-j, i-j+1, \dots, i-1, i}.$$

Daí, segue que

$P_0 = Q_{00}$					
$P_1 = Q_{10}$	$P_{0,1} = Q_{11}$				
$P_2 = Q_{20}$	$P_{1,2} = Q_{21}$	$P_{0,1,2} = Q_{22}$			
$P_3 = Q_{30}$	$P_{2,3} = Q_{31}$	$P_{1,2,3} = Q_{32}$	$P_{0,1,2,3} = Q_{33}$		
$P_4 = Q_{40}$	$P_{3,4} = Q_{41}$	$P_{2,3,4} = Q_{42}$	$P_{1,2,3,4} = Q_{43}$	$P_{0,1,2,3,4} = Q_{44}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

que gera a seguinte matriz triangular inferior

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{00} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Q_{10} & Q_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ Q_{20} & Q_{21} & Q_{22} & 0 & \dots & 0 \\ Q_{30} & Q_{31} & Q_{32} & Q_{32} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n,0} & Q_{n,1} & Q_{n,2} & Q_{n,3} & \dots & Q_{n,n} \end{bmatrix},$$

da qual $Q_{i,0} = f(x_i)$ e os demais elementos determinados pela seguinte expressão:

$$Q_{ij} = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_1 - x_{i-j}}. \quad (9)$$

Por fim, antecipadamente vamos ressaltar que a nenhum dos resultados, seja a equação (8) utilizada para determinar a Tabela 2.1, ou ainda o resultado empregado para determinação da matriz Q , ou seja, a equação (9) segundo o Método de Neville

apresentado até aqui serão utilizados para definir o método de interpolação racional a seguir, pelo menos, não da forma com que definimos, divergindo em poucos aspectos. Essa consequência decorre do formato da tabela e da posição das funções adotados por Larkin (1967) para enunciar o método para obtermos as funções interpolações racionais.

Método da interpolação racional

Uma generalização do método de Neville, o método para calcular as interpolações racionais explanada por Larkin (1967) apresenta vários traços similares da sua ascendente. Consistindo também em determinar uma matriz de funções, embora, assim como o autor base também adotaremos a representação de uma tabela triangular como a ilustrada pela Figura 2.17, antes de apresentá-lo iremos discorrer sobre as considerações necessárias.

Figura 2.17 – Tabela para determinar a função interpolação racional

x_1	f_1							
		f_{11}						
x_2	f_2		f_{12}					
		f_{21}	f_{13}					
x_3	f_3		f_{22}	f_{14}				
		f_{31}	f_{23}	·				
x_4	f_4		f_{32}	·	·			
		f_{41}	·	·	·			
x_5	f_5	·	·	·	·			
		·	·	·	·			
		·	·	·	·			
		·	·	·	·			
		·	·	·	·			

Fonte: Larkin (1967).

Seguindo os mesmos passos dos demais casos de interpolação apresentados, iremos considerar um conjunto de pontos determinados. Sejam eles $\{(x_i, f(x_i)), i = 1, 2, \dots\}$, com x_1, x_2, x_3, \dots , distintos. Daí, como nosso objetivo é construir uma matriz/tabela de funções $\{f_{ij}(x); i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots\}$, algumas discussões sobre elas são indispensáveis. A primeira delas diz respeito a notação onde, a partir daqui assumiremos que

$$f(x_i) = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Além disso, uma condição fundamental destacada também pelo próprio Larkin (1967) com respeito às funções $f_{ij}(x)$ que futuramente gerarão a tabela da Figura 2.17, é que cada uma delas deve atender a seguinte condição,

$$f_{ij}(x_r) = f_r; \quad i \leq r \leq i+j, \quad (11)$$

ou seja, as funções $f_{ij}(x)$ designado na tabela por f_{ij} devem interpolar o conjunto de pontos $\{(x_r, f(x_r)), \quad i < r < i+j\}$, com exceção de algumas circunstâncias especiais.

Apresentadas as considerações, uma pequena observação será realizada devido ao abuso de notação dos subscritos das funções que ocupam a primeira coluna da tabelas ($j = 0$), as funções f_i que, a rigor, deveriam ser da forma f_{i0} . No entanto, seguiremos utilizando essa notação baseado no que foi definido em (10), o que, de antemão, já nos fornece todas essas funções, onde, analogamente ao método de Neville, são as funções constantes imagem de x_i por $f(x)$.

Contudo, isso não é uma mera coincidência. Como descrito ao longo dessa Subseção, o método de Neville é um dos métodos auxiliares para a obtenção das funções interpolações racionais. Chamado por Larkin (1967) como uma das duas *regra do triângulo*, esse método é apresentado da seguinte forma

$$f_{ij} = \frac{(x - x_i) f_{i+1, j-1} + (x_{i+j} - x) f_{i, j-1}}{x_{i+j} - x_i}, \quad (12)$$

diferente do que discutimos anteriormente por motivos dos quais já explanamos.

Quanto à outra *regra do triângulo*, essa não recebe nenhuma designação especial. Dada por

$$f_{ij} = \frac{x_{i+j} - x_i}{\frac{x - x_i}{f_{i+1, j-1}} + \frac{x_{i+j} - x}{f_{i, j-1}}}, \quad (13)$$

analogamente ao método de Neville, é utilizada também para gerar recursivamente as funções f_{ij} da tabela triangular ilustrada pela Figura 2.17.

Entretanto, a apresentação do método para a obtenção das funções interpolações racionais não se encerra com a apresentação dessas duas equações, muito pelo contrário, elas só nos são úteis para determinarmos a segunda coluna da tabela, ou seja, as funções f_{i1} . Podendo ser usada, *exclusivamente*, qualquer uma das duas equações sem qualquer comprometimento para fins de se obter todas as funções f_{i1} garantindo a condição (11), com algumas exceções. Sendo assim, Larkin (1967) define uma terceira e última equação para que sejam geradas as demais funções, f_{ij} , com $j \geq 2$, a denominada *regra do losango*:

Figura 2.18 – Tabela da interpolação racional para os quatro pontos definidos

x_1	f_1			
		f_{11}		
x_2	f_2		f_{12}	
		f_{21}		f_{13}
x_3	f_3		f_{22}	
		f_{31}		
x_4	f_4			

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$f_{ij} = f_{i+1,j-2} + \frac{x_{i+j} - x_i}{\frac{x-x_i}{f_{i+1,j-1}-f_{i+1,j-2}} + \frac{x_{i+j}-x}{f_{i,j-1}-f_{i+1,j-2}}}. \quad (14)$$

Também garantindo a condição (11), com exceção de algumas particulares excepcionalidades, similar as outras duas primeiras expressões apresentadas, é usada para gerar por recorrência as funções f_{ij} , com $j \geq 2$.

Para terminar a apresentação do método, é importante pontuarmos uma última observação. Para isso, considere quatro pontos (x_1, f_1) , (x_2, f_2) , (x_3, f_3) e (x_4, f_4) , com x_1, x_2, x_3 e x_4 distintos. Seja a Tabela dada pela Figura 2.18, a tabela triangular de interpolação racional para esse conjunto de pontos.

A função f_{13} é a função que quase sempre interpola todos os pontos anteriormente citados, já que como anteriormente destacado, pode haver algumas excepcionalidades em que a condição (11) não seja cumprida. Validada a condição (11), podemos chamá-la de $R(x)$, a função interpolação racional nos pontos (x_1, f_1) , (x_2, f_2) , (x_3, f_3) e (x_4, f_4) .

Para finalizar, iremos realizar dois exemplos numéricos de interpolação racional.

Exemplo 2.4. Seja $P_1(1, -4)$, $P_2(2, -1)$, $P_3(3, 3)$ e $P_4(4, 7)$ pontos da função $f(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - \frac{x}{3} - 5$, utilizando o método de interpolação racional apresentado, iremos determinar a função interpolação racional $R(x)$. Dando início a construção da tabela, temos de imediato a primeira coluna ($j = 0$), ou seja, as funções $f_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, 3$ e 4 , como podemos verificar na Tabela 2.2:

Tabela 2.2 – Tabela de interpolação racional com a coluna $j=0$ preenchida

i	x_i	f_i	$j=1$	$j=2$	$j=3$
1	1	-4			
2	2	-1	f_{11}		
3	3	3	f_{21}	f_{12}	f_{13}
4	4	7	f_{31}	f_{22}	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Feito isso, iremos utilizar o método de Neville (12), para determinar as funções f_{i1} , obtendo a segunda coluna da tabela ($j=1$), como podemos observar por meio da Tabela 2.3:

Tabela 2.3 – Tabela de interpolação racional com a coluna $j=0$ e $j=1$ preenchida

i	x_i	f_i	$j=1$	$j=2$	$j=3$
1	1	-4			
2	2	-1	$f_{11} = 3x - 7$		
3	3	3	$f_{21} = 4x - 9$	f_{12}	f_{13}
4	4	7	$f_{31} = 4x - 9$	f_{22}	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Finalmente, para se obter as funções restantes e, conseqüentemente, a nossa $R(x)$ (ou candidata), iremos utilizar a *regra do losango* (14), assim completando a tabela triangular de interpolação racional (Ver Tabela 2.4):

Tabela 2.4 – Tabela de interpolação racional do Exemplo 2.4 completa

i	x_i	f_i	$j=1$	$j=2$	$j=3$
1	1	-4			
2	2	-1	$f_{11} = 3x - 7$		
3	3	3	$f_{21} = 4x - 9$	$f_{12} = \frac{25x-57}{-x+9}$	$f_{13} = \frac{23x^2-51x+16}{8x-14}$
4	4	7	$f_{31} = 4x - 9$	$f_{22} = 4x - 9$	

Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, a função interpolação racional buscada é $f_{13} = R(x) = \frac{23x^2 - 51x + 16}{8x - 14}$, já que a condição $f_{13}(x_r) = f_r$; $1 \leq r \leq 4$ está garantida, ou seja, $R(x)$ contém todos os nós da interpolação.

Exemplo 2.5. Analogamente ao Exemplo 2.4, vamos determinar a tabela de interpolação racional para o conjunto de pontos $P_1(-1, 1)$, $P_2(1, 2)$, $P_3(2, 4)$ e $P_4(7, 5)$ pertencentes a função $f(x) = -\frac{x^3}{10} + \frac{7x^2}{10} + \frac{3x}{5} + \frac{4}{5}$. Seguindo o mesmo passo a passo, obtemos a Tabela 2.5.

Tabela 2.5 – Tabela de interpolação racional do Exemplo 2.5 completa

i	x_i	f_i	j=1	j=2	j=3
1	-1	1			
2	1	2	$f_{11} = \frac{x+3}{2}$	$f_{12} = \frac{4}{-x+3}$	
3	2	4	$f_{21} = 2x$	$f_{22} = \frac{16x-12}{3x-1}$	$f_{13} = \frac{x+3}{2}$
4	7	5	$f_{31} = \frac{x+18}{5}$		

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, a concorrente para possível função interpolação racional é a função $f_{13} = \frac{x+3}{2}$. Entretanto, lembrando que esse método está fadado a alguns equívocos, segundo o próprio Larkin (1967), esse exemplo é um deles, já que como pode-se perceber, f_{13} não interpola o ponto $P_3(2, 4)$, apenas os pontos $P_1(-1, 1)$, $P_2(1, 2)$ e $P_4(7, 5)$, que inclusive são colineares sendo f_{13} a equação da reta que os contém.

Para encerrar, neste capítulo apresentamos alguns aspectos históricos e matemáticos relacionados a Bruxa de Agnesi, assim como alguns conceitos elementares de interpolação que nos serão úteis no Capítulo 3, que propõe um método de interpolação racional a partir dessa curva, como veremos a seguir.

3 UMA APLICAÇÃO DA BRUXA DE AGNESI

Encontrar aplicações para a Bruxa de Agnesi não é uma tarefa fácil, os trabalhos acadêmicos que correlacionam essa curva em um contexto aplicável, seja na área da Matemática ou da Física, são relativamente escassos. Isso refletiu, por exemplo, na duradoura fase de buscas por materiais que tratavam desse assunto que, na possível inexistência de trabalhos nacionais, fomos forçados a ampliar o nosso campo de pesquisa e explorarmos fontes internacionais.

Dentre os poucos trabalhos que encontramos, estão os artigos de Stigler (1974) intitulado “*Studies in the History of Probability and Statistics. XXXIII Cauchy and the witch of Agnesi: An historical note on the Cauchy distribution*” (Estudos em História da Probabilidade e Estatística. XXXIII Cauchy e a bruxa de Agnesi: uma nota histórica sobre a distribuição de Cauchy), o de Ciaurri (2017) chamado de “*Maria Gaetana Agnesi Meets Johannes Kepler*” (Maria Gaetana Agnesi encontra Johannes Kepler) e, finalmente, o de Yankova (2017), “*Piecewise rational interpolation by witch of Agnesi*” (Interpolação racional por partes através da bruxa de Agnesi).

Seguindo a nossa linha de pesquisa, não é de surpreender que decidimos trabalhar com o artigo de Yankova (2017) que, além de abordar essa histórica curva através dos métodos de interpolação, trata-se também de um problema da atualidade como a mesma descreve, a de realizar interpolações com a preservação de algumas propriedades de forma, como a positividade, monotonicidade e convexidade, assim possibilitando ampliar os nossos conhecimentos sobre interpolação.

Realizado esse breve apanhado, vamos a exploração desse material.

3.1 DEFININDO UMA GAMA MAIS AMPLA DE CURVAS SIMILARES A BRUXA DE AGNESI

Iniciando nossa exploração pelo trabalho de Yankova (2017), que consiste em determinar uma função racional que pode ser usada para resolver problemas de interpolação com preservação de forma, antes de mais nada, seguindo a trajetória que a autora tomou, vamos definir uma gama mais ampla de curvas similares a curva de Agnesi que, como vimos no capítulo anterior é dada por:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}, \quad (15)$$

com a igual ao diâmetro da circunferência que define a curva.

Tratando-se da equação da curva, um fato que merece ser mencionado em relação ao trabalho de Yankova (2017), é que a função utilizada por ela para descrevê-la é sutilmente diferente dessa apresentada acima, sendo a singularidade de ambas justificada apenas pelo fato de assumirmos circunferências de diâmetros diferentes para construí-la. Enquanto na Subseção 2.1.1 tomamos uma circunferência de diâmetro a , ela adotou uma circunferência de raio igual a α e, conseqüentemente, diâmetro igual a 2α , sendo representada, portanto, como:

$$y = \frac{(2\alpha)^3}{x^2 + (2\alpha)^2} = \frac{8\alpha^3}{x^2 + 4\alpha^2}. \quad (16)$$

Justificado a diferença entre a curva definida por ela e a que apresentamos, passaremos a adotar a partir de agora a equação (16), padronizando a descrição da curva com seu trabalho. Agora, prosseguindo com o objetivo dessa seção, vamos assumir uma função similar a (16), mas com os parâmetros do numerador e denominador diferentes, seja essa função a seguinte:

$$y = \frac{8\alpha^3}{x^2 + 4\beta^2}. \quad (17)$$

Ao fazer isso, Yankova (2017) faz alguns comentários a respeito da escolha de diferentes parâmetros, já que essa escolha influencia diretamente no comportamento da função, precisamente, na altura e agudez da curva, como é possível verificar na Figura 3.1.

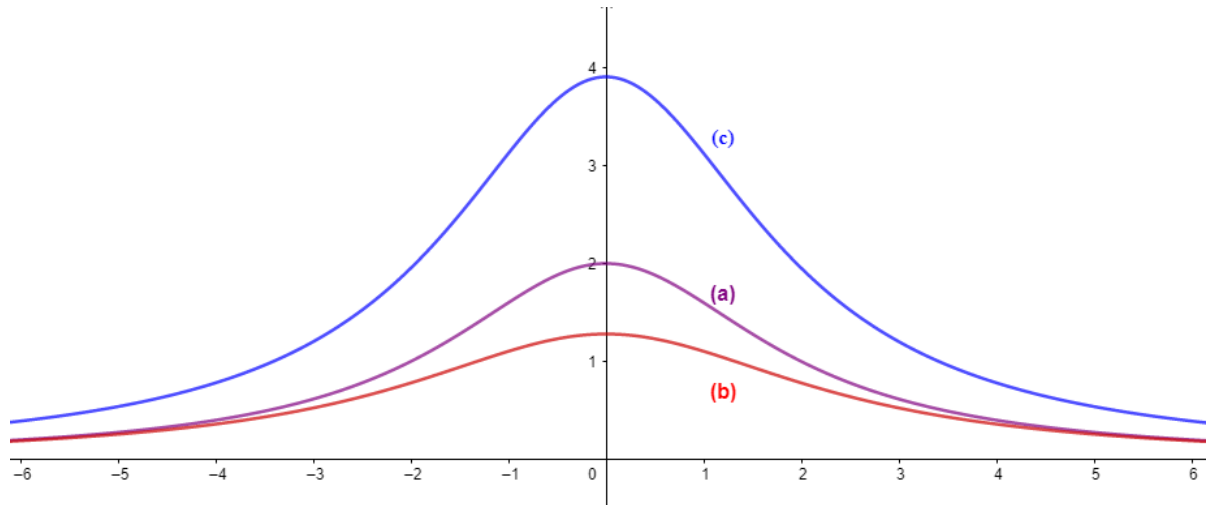
Realizada essa breve pontuação, um outro fato que Yankova (2017) nota é que a curva de Agnesi tem uma certa familiaridade com a distribuição de densidade de Cauchy, isso já foi evidenciado anteriormente como o trabalho de Stigler (1974) que as relaciona. Dada por

$$y = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{(x - \mu)^2 + \sigma^2}, \quad (18)$$

é fácil perceber a similaridade entre essa curva e (16) quando $\sigma = 2\alpha$ e $\mu = 0$, e isso pode ter influenciado no processo de definir uma gama mais ampla de curvas similares a Bruxa de Agnesi.

Dando continuidade para obtê-las, vamos definir que em (17), $8\alpha^3 = a$ ($a \neq 0$), $4\beta^2 = b$ ($b > 0$) e vamos adicionar os parâmetros μ e c , com $a, b, c, \mu \in \mathbb{R}$, obtendo a

Figura 3.1 – Curva (16) assumindo diferentes parâmetros. (a) $\alpha = \beta = 1$. (b) $\alpha = 1, \beta = 1.25$. (c) $\alpha = 1.25, \beta = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

seguinte função com maior grau de liberdade que (17), intitulada de $I(x)$ pela autora do artigo:

$$y = I(x) = \frac{a}{(x - \mu)^2 + b} + c. \quad (19)$$

Fazendo uma pequena análise da Equação (19), através dos conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral é possível constatar que $y = c$ é uma assíntota horizontal, pois $I(x) \neq c$, já que $\frac{a}{(x - \mu)^2 + b} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, dado às imposições de $a \neq 0$ e $b > 0$ e que:

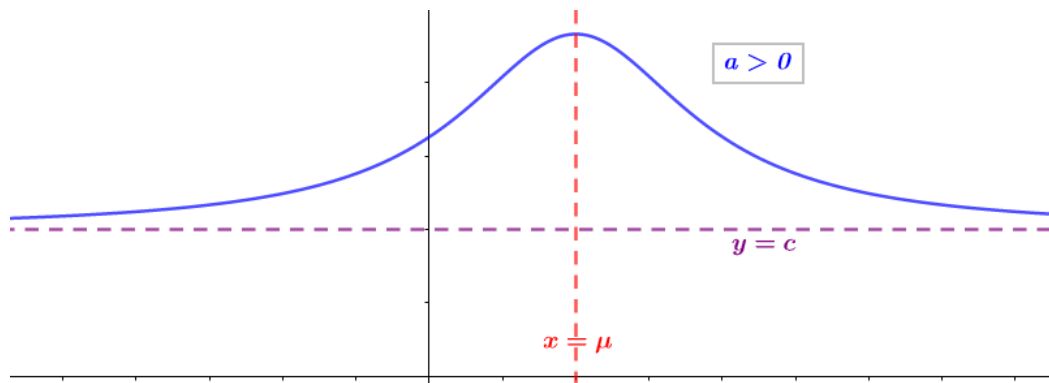
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{(x - \mu)^2 + b} + c = c \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{(x - \mu)^2 + b} + c = c.$$

Além disso, é possível perceber que a curva, através da imposição de $b > 0$, não apresenta nenhum problema em relação ao valores de x que a função pode assumir, assim não possuindo nenhuma assíntota vertical e, finalmente, é notável também que a curva (19) é simétrica em relação a reta vertical $x = \mu$, podendo estar completamente acima ($a > 0$) da assíntota horizontal $y = c$, como podemos ver na Figura 3.2, ou completamente abaixo da assíntota horizontal ($a < 0$), como ilustrado na Figura 3.3.

Tratando das imposições como Yankova (2017) justifica, a primeira delas, $a \neq 0$ se dá pelo fato de que caso $a = 0$, (19) torna-se uma função contante com $I(x) = c$, o que não é útil pensando na interpolação com preservação de forma.

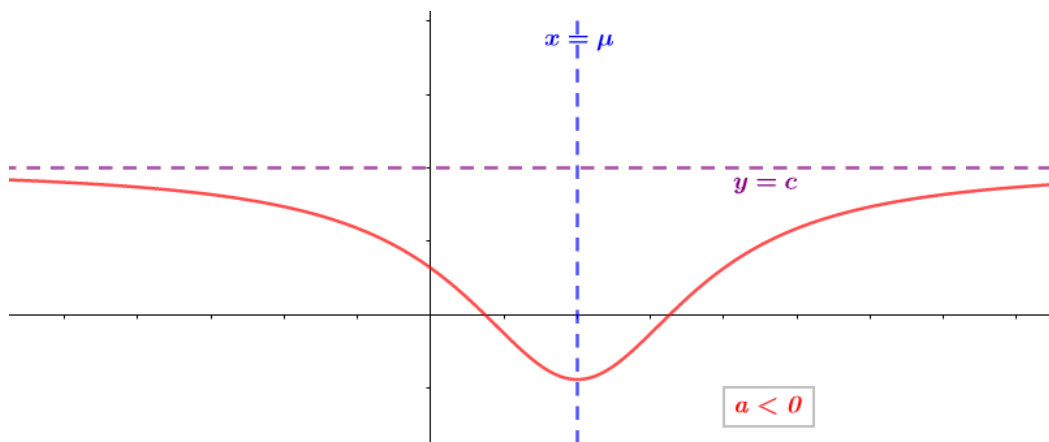
E a segunda, $b > 0$, decorre do fato de que caso $b \leq 0$, a curva $I(x)$ passa a

Figura 3.2 – A curva com $a > 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3.3 – A curva com $a < 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

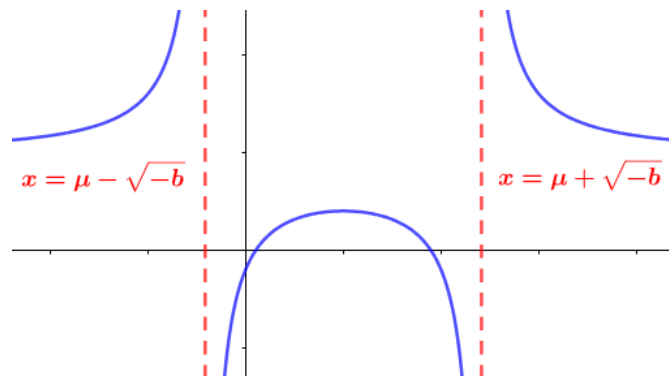
apresentar valores indesejáveis para x , especificamente quando $(x - \mu)^2 + b = 0$, ou seja, quando $x = \mu \pm \sqrt{-b}$, assíntotas verticais de (19) quando $b \leq 0$, como podemos observar na Figura 3.4.

Ainda sobre o caso de $b \leq 0$, a autora descreve que também poderia ser utilizada para interpolações, mas como as imposições de $a \neq 0$ e $b > 0$ apresentam vantagens em relação ao comportamento de $I(x)$, como é o caso de ser contínua, temos então que a função que definirá uma gama mais ampla de funções similares a Bruxa de Agnesi será a função que acabamos de explorar e com as seguintes imposições que, Yankova (2017) chama de curva generalizada de Agnesi:

$$y = I(x) = \frac{a}{(x - \mu)^2 + b} + c, \quad a \neq 0, \quad b > 0.$$

Definida a função, alguns aspectos sobre ela serão necessários nas próximas seções e alguns deles definiremos agora, são elas as derivadas de primeira e segunda ordem,

Figura 3.4 – A curva com $b \leq 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

respectivamente, $I'(x) = -\frac{2a(x-\mu)}{[(x-\mu)^2+b]^2}$ e $I''(x) = -2a\frac{b-3(x-\mu)^2}{[(x-\mu)^2+b]^3}$. E as coordenadas dos pontos de inflexão que podem ser determinados através dos métodos do Cálculo Diferencial e Integral, sendo eles $\left(\mu \pm \sqrt{\frac{b}{3}}, \frac{3a}{4b} + c\right)$.

3.2 CURVA GENERALIZADA PASSANDO POR DOIS PONTOS DADOS

Nesta seção, iremos estabelecer regras para as quais exista uma curva generalizada de Agnesi passando por dois pontos, além de prover meios para os quais os parâmetros a , b , c e μ da curva sejam determinados. Entretanto, antes de prosseguirmos, dois comentários de Yankova (2017) sobre a existência da curva se mostram relevantes e evidenciaremos aqui.

O primeiro deles, algo bem sugestivo de se fazer para determinar os quatro parâmetros da curva, é que nem todos quatros pontos arbitrários e distintos definem uma dessas curvas generalizadas. Ou seja, não é possível, por meio de um sistema de quatro equações com respeito a esses quatro pontos arbitrários determinar os parâmetros. São vários os contraexemplos que podem nos levar até essa afirmação e um deles, como a própria autora nos dá, são os pontos $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, -1)$ e $(2, 4)$, devido a inexistência de b .

Quanto ao segundo comentário que também remete-se a existência da curva, ela descreve que através de dois diferentes pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) nem sempre passa uma curva onde dois dos parâmetros $a \neq 0$, $b > 0$, c e μ são dados. Por exemplo, não se passa uma curva através dos pontos $(-1, 1)$ e $(1, -2)$ com $c = 0$ e $\mu = 0$.

Dito isso, condições precisam ser estabelecidas para que a existência dessas gama de curvas similares à Bruxa de Agnesi sejam garantidas e, como podemos perceber, elas

não podem ser completamente arbitrárias. Sendo assim, vamos assumir que a curva admita dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Além disso, vamos definir que $t = x_1 - \mu$ e $m = \frac{n}{h}$, onde $n = y_2 - y_1$ e $h = x_2 - x_1$, da qual, sem perda de generalização, vamos assumir que $x_1 < x_2$, ou seja, $h > 0$. Agora podemos estabelecer essas condições.

Teorema 3.1. Para quaisquer dois pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) passa pelo menos uma curva generalizada de Agnesi tal que $a \neq 0$ e $b > 0$.

Demonstração. Para provar a existência de pelo menos uma curva generalizada de Agnesi passando por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , é suficiente provar que existem números $a \neq 0$, $b > 0$, c e μ para os quais o sistema de equações a seguir seja satisfeito:

$$\begin{cases} y_i = \frac{a}{(x_i - \mu)^2 + b} + c, & i = 1, 2. \end{cases}$$

Para isso, vamos examinar dois casos.

1º caso. $y_1 \neq y_2$.

Resolvendo o sistema e isolando os parâmetros a e b , temos:

$$\begin{cases} a = \frac{(y_1 - c)(y_2 - c)[(x_2 - \mu)^2 - (x_1 - \mu)^2]}{y_1 - y_2} \\ b = \frac{(y_2 - c)(x_2 - \mu)^2 - (y_1 - c)(x_1 - \mu)^2}{y_1 - y_2} \end{cases}.$$

O teorema está provado se existir $a, b, c, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 0$ e $b > 0$. É notório que $a \neq 0$ implica em $y_1 \neq c$, $y_2 \neq c$ e $[(x_2 - \mu)^2 - (x_1 - \mu)^2] \neq 0$, ou seja, $\mu \neq \frac{x_1 + x_2}{2}$. Daí, a partir dessas condições, podemos escrever b da seguinte maneira:

$$b = (x_2 - \mu)^2 \frac{(y_1 - c)}{y_1 - y_2} \left[\frac{y_2 - c}{y_1 - c} - \left(\frac{x_1 - \mu}{x_2 - \mu} \right)^2 \right]. \quad (20)$$

Para garantir que $b > 0$, seguindo a demonstração de Yankova (2017), vamos definir $p(t) = y_1 + \frac{n(h+t)^2}{h(h+2t)}$ e determinar c da seguinte maneira:

- Se $t \in \left(-\infty; -\frac{h}{2}\right)$, então $\begin{cases} c < \min\{y_1; p(t)\} \text{ e } n > 0 \\ c > \max\{y_1; p(t)\} \text{ e } n < 0 \end{cases}$;
- Se $t \in \left(-\frac{h}{2}; +\infty\right)$, então $\begin{cases} c > \max\{y_2; p(t)\} \text{ e } n > 0 \\ c < \min\{y_2; p(t)\} \text{ e } n < 0 \end{cases}$.

Examinando o primeira situação em que $t \in \left(-\infty; -\frac{h}{2}\right)$, $c < \min\{y_1; p(t)\}$ e $n > 0$. Temos que, como $n > 0$, então $y_2 > y_1$ e $y_1 - y_2 < 0$. Além disso, por hipótese, temos que $c < y_1$ e, conseqüentemente, $c < y_2$, o que implica que $y_1 - c > 0$ e $y_2 - c > 0$.

Fazendo o estudo do sinal de b em (20), é possível verificar que $b > 0$ somente quando $\frac{y_2 - c}{y_1 - c} - \left(\frac{x_1 - \mu}{x_2 - \mu}\right)^2 < 0$, ou seja, $\frac{y_2 - c}{y_1 - c} < \left(\frac{x_1 - \mu}{x_2 - \mu}\right)^2$. O que é equivalente a provar que:

$$y_1 - c > \frac{(y_2 - c)(x_2 - \mu)^2}{(x_1 - \mu)^2} = \frac{(y_2 - c)(h + t)^2}{t^2}.$$

Partindo de que $c < p(t)$, ou seja, que $c < y_1 - \frac{n(h + t)^2}{h(h + 2t)}$, temos que:

$$y_1 - c > \frac{-n(h + t)^2}{h(h + 2t)}.$$

Daí, como $n = y_2 - y_1 < y_2 - c$, já que $c < y_1$, segue que $-n > -(y_2 - c)$. Assim:

$$y_1 - c > \frac{-n(h + t)^2}{h(h + 2t)} > \frac{-(y_2 - c)(h + t)^2}{h(h + 2t)} = \frac{(y_2 - c)(h + t)^2}{-h(h + 2t)}.$$

Finalmente, se provarmos que $\frac{(y_2 - c)(h + t)^2}{-h(h + 2t)} > \frac{(y_2 - c)(h + t)^2}{t^2}$, a primeira situação estará provado. Isso é de fato verdade, como $-h(h + 2t) < t^2$ para quaisquer $t, h \in \mathbb{R}$, já que isso é equivalente a $(h + t)^2 > 0$ e, por hipótese, $t < -\frac{h}{2}$, ou seja, $2t < -h$, o que implica que $h + 2t < 0$ e, conseqüentemente, $-h(h + 2t) > 0$, temos então pelas propriedades das desigualdades que:

$$\frac{1}{-h(h + 2t)} > \frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{(y_2 - c)(h + t)^2}{-h(h + 2t)} > \frac{(y_2 - c)(h + t)^2}{t^2}.$$

Os demais situações são análogas, logo está provado o primeiro caso.

2º caso. $y_1 = y_2$.

Nessa condições, como Yankova (2017) descreve temos duas situações. A primeira delas resulta previamente da igualdade das ordenadas dos pontos:

$$\frac{a}{(x_1 - \mu)^2 + b} + c = \frac{a}{(x_2 - \mu)^2 + b} + c.$$

Ou seja, $\mu = \frac{x_1 + x_2}{2}$ e $c = y_1 - \frac{a}{(x_1 - \mu)^2 + b}$, onde $a \neq 0$ e $b > 0$ são números arbitrários no conjunto dos reais. E as duas condições do Teorema 3.1 são satisfeitas.

Uma segunda situação é quando $x_1 = \mu$ ou $x_2 = \mu$, o que implica em $x_1 = \mu = x_2$ através do resultado $\mu = \frac{x_1 + x_2}{2}$ que obtivemos anteriormente, sendo essa situação excluída pelo fato dos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) serem coincidentes e o Teorema 3.1 necessitar de dois pontos distintos.

Portanto, para cada quaisquer dois pontos diferentes (x_1, y_1) e (x_2, y_2) existem números $a \neq 0$, $b > 0$, c , e μ para os quais exista pelo menos uma curva generalizada de Agnesi passando por eles. ■

Corolário 3.1. Se a curva generalizada de Agnesi, $I(x) = \frac{a}{(x - \mu)^2 + b} + c$ passa por dois pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e satisfaz as condições $a \neq 0$ e $b > 0$, então:

- (i) $a > 0$ é equivalente a $c < \min\{y_1; y_2\}$;
- (ii) $a < 0$ é equivalente a $c > \max\{y_1; y_2\}$.

Demonstração. No caso $y_1 \neq y_2$, a demonstração segue em partes da prova do Teorema 3.1 onde determinamos c para garantir $b > 0$. Na situação (i), como já discutimos, $c < y_1$ e $n > 0 \Rightarrow c < y_2$ e, portanto, $c < \min\{y_1; y_2\}$. Na situação (ii), temos $c > y_1$ e $n < 0 \Rightarrow y_2 < y_1$, logo $c > y_2$ e $c > \max\{y_1; y_2\}$. As demais situações são análogas. Quanto ao caso $y_1 = y_2$, é trivial.

Por fim, o fato de $a > 0 \Rightarrow c < \min\{y_1; y_2\}$ e $a < 0 \Rightarrow c > \max\{y_1; y_2\}$, justifica-se pela razão de $y = c$ ser assíntota horizontal da curva generalizada de Agnesi, podendo ela estar completamente acima ($a > 0$), ou completamente abaixo ($a < 0$), como já discutimos na Seção 3.1, o que reflete, respectivamente, no motivo das ordenadas dos pontos distintos que compõe a curva serem todos maiores ou menores do que o parâmetro c . ■

Corolário 3.2. Não existe uma curva generalizada de Agnesi passando pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) cujos os parâmetros a , b e c satisfazem as condições de $a \neq 0$, $b > 0$ e $y_1 < c < y_2$ ou $y_2 < c < y_1$.

Esse Corolário dispensa comentários, sendo que a primeira parte da demonstração do Corolário 3.1, isto é, $c < \min\{y_1; y_2\}$ ou $c > \max\{y_1; y_2\}$ contrapõe-se a absurda condição de $y_1 < c < y_2$ ou $y_2 < c < y_1$.

Teorema 3.2. Para quaisquer dois pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , com $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, e para quaisquer dois números s_{11} e s_{21} para os quais pelo menos um deles é diferente de zero e tal que

$$s_{11}s_{21} < \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2,$$

existe uma curva generalizada de Agnesi que passa por esses pontos e $I'(x_1) = -s_{11}$ e $I'(x_2) = -s_{21}$.

Demonstração. Do enunciado do Teorema, podemos estabelecer o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y_i = \frac{a}{(x_i - \mu)^2 + b} + c, & i = 1, 2 \\ s_{i1} = \frac{2a(x_i - \mu)}{[(x_i - \mu)^2 + b]^2} & i = 1, 2 \end{cases} . \quad (21)$$

Entretanto, para demonstrá-lo precisaremos analisar três casos.

1º caso. $s_{11} \neq 0$ e $s_{21} \neq 0$.

Para o estudo desse caso, inicialmente expandiremos esse sistema e o reescreveremos seguindo o que foi definido anteriormente nessa seção, assim temos que (21) é equivalente a:

$$\begin{cases} y_1 - c = \frac{a}{t^2 + b} \\ y_2 - c = \frac{a}{(h+t)^2 + b} \\ s_{11} = \frac{2at}{[t^2 + b]^2} \\ s_{21} = \frac{2a(h+t)}{[(h+t)^2 + b]^2} \end{cases} .$$

Agora, iniciando o processo de resolução, iremos multiplicar a terceira e quarta equação, obtendo:

$$s_{11}s_{21} = \frac{4a^2t(h+t)}{[t^2+b]^2[(h+t)^2+b]^2}. \quad (22)$$

Em seguida, vamos subtrair a segunda equação pela primeira, logo temos a seguinte igualdade:

$$(y_2 - c) - (y_1 - c) = \frac{a[t^2 - (h+t)^2]}{[t^2+b][(h+t)^2+b]}. \quad (23)$$

Feito isso, note que $(y_2 - c) - (y_1 - c) = n$ e, além disso, dando continuidade ao processo de resolução, vamos elevar a igualdade acima ao quadrado e isolar o denominador. Assim:

$$[t^2+b]^2[(h+t)^2+b]^2 = \frac{a^2[t^2 - (h+t)^2]^2}{n^2}. \quad (24)$$

Decorrido todos os processos até aqui, vamos substituir o denominador de (22) por (24), e depois vamos invertê-la obtendo:

$$\frac{1}{s_{11}s_{21}} = \frac{h^4 + 4h^3t + 4h^2t^2}{4(ht + t^2)n^2}. \quad (25)$$

Seguindo a demonstração de Yankova (2017), vamos reescrever (25) da seguinte maneira:

$$4\left(\frac{1}{s_{11}s_{21}} - \frac{h^2}{n^2}\right)t^2 + 4\left(\frac{1}{s_{11}s_{21}} - \frac{h^2}{n^2}\right)ht - \frac{h^4}{n^2} = 0.$$

Seja $A = 4\left(\frac{1}{s_{11}s_{21}} - \frac{h^2}{n^2}\right)$, temos a seguinte equação quadrática com relação ao parâmetro t

$$At^2 + Aht - \frac{h^4}{n^2} = 0. \quad (26)$$

Calculando o discriminante Δ da equação quadrática (26) temos que:

$$\Delta = h^2 \left(A^2 + 4A \frac{h^2}{n^2} \right).$$

Portanto, as duas prováveis soluções de equação são:

$$t_{1,2} = \frac{h}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4h^2}{An^2}} \right).$$

Entretanto, para garantir que t admite duas soluções, é necessário provar que $\sqrt{1 + \frac{4h^2}{An^2}} > 0$, ou seja, $1 + \frac{4h^2}{An^2} > 0$. Partindo do fato de:

$$A = 4 \left(\frac{1}{s_{11}s_{21}} - \frac{h^2}{n^2} \right).$$

Segue que:

$$A = \frac{4}{s_{11}s_{21}} - \frac{4h^2}{n^2}.$$

Logo,

$$A + \frac{4h^2}{n^2} = \frac{4}{s_{11}s_{21}}. \quad (27)$$

Como $A \neq 0$, mediante do do fato de $\frac{1}{s_{11}s_{21}} \neq \frac{h^2}{n^2}$, consequências da hipótese, ou seja,

$$s_{11}s_{21} < \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2 = \frac{n^2}{h^2}. \quad (28)$$

É válido dividir a igualdade (27) por A , assim:

$$1 + \frac{4h^2}{An^2} = \frac{4}{As_{11}s_{21}}.$$

Finalmente, se verificarmos que $\frac{4}{As_{11}s_{21}} > 0$, ou seja, que $As_{11}s_{21} > 0$, está provado o que queríamos. No entanto, como

$$As_{11}s_{21} = 4 \left(\frac{s_{11}s_{21}}{s_{11}s_{21}} - \frac{s_{11}s_{21}h^2}{n^2} \right) = 4 \left(1 - \frac{s_{11}s_{21}h^2}{n^2} \right).$$

E, pelas consequências ainda da hipótese (28), temos que:

$$s_{11}s_{21} < \frac{n^2}{h^2} \Rightarrow \frac{s_{11}s_{21}h^2}{n^2} < 1.$$

Logo, $\left(1 - \frac{s_{11}s_{21}h^2}{n^2} \right) > 0$ e portanto, $\frac{4}{As_{11}s_{21}} = 1 + \frac{4h^2}{An^2} > 0$. Desse modo, está garantido que t admite duas soluções.

Determinado t , diretamente encontramos também o parâmetro $\mu = x_1 - t$, e além disso, podemos definir b da seguinte forma, ao multiplicarmos a primeira equação do sistema expandido por $2t$ e dividir por $(t^2 + b)$, assim:

$$\frac{2t(y_1 - c)}{t^2 + b} = \frac{2at}{[t^2 + b]^2}.$$

Daí, observando a terceira equação do sistema é possível estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{2t(y_1 - c)}{t^2 + b} = s_{11} \Rightarrow \frac{2t(y_1 - c)}{s_{11}} = t^2 + b.$$

Portanto,

$$b = \frac{2t(y_1 - c)}{s_{11}} - t^2 = \left[\frac{2(y_1 - c)}{s_{11}} - t \right] t.$$

Determinado b em função dos parâmetros t e c , vamos determinar agora esse último parâmetro citado. Para isso, iremos considerar a segunda equação do sistema:

$$y_2 - c = \frac{a}{(h+t)^2 + b}.$$

Através de (23), temos que:

$$(h+t)^2 + b = \frac{a[-h(2t+h)]}{(t^2+b)n}.$$

Assim,

$$y_2 - c = \frac{a}{\frac{a[-h(2t+h)]}{(t^2+b)n}} \Rightarrow y_2 - c = \frac{(t^2+b)n}{-h(2t+h)}.$$

Substituindo $b = \frac{2t(y_1 - c)}{s_{11}} - t^2$ na igualdade acima, obtemos que:

$$y_2 - c = \frac{\left(t^2 + \frac{2t(y_1 - c)}{s_{11}} - t^2\right)n}{-h(2t+h)} \Rightarrow y_2 - c = \frac{\frac{2nt(y_1 - c)}{s_{11}}}{-h(2t+h)}.$$

Observando que $y_1 - c = (y_2 - c) - n$ e organizando a última igualdade, obtemos que:

$$y_2 - c = -\frac{2nt[(y_2 - c) - n]}{s_{11}h(2t+h)} \Rightarrow y_2 - c = -\frac{2nt(y_2 - c)}{s_{11}h(2t+h)} + \frac{2n^2t}{s_{11}h(2t+h)}.$$

Daí,

$$(y_2 - c) \left(1 + \frac{2nt}{s_{11}h(2t+h)}\right) = \frac{2n^2t}{s_{11}h(2t+h)}.$$

Logo,

$$y_2 - c = \frac{2n^2t}{s_{11}h(2t+h)} \frac{s_{11}h(2t+h)}{s_{11}h(2t+h) + 2nt} \Rightarrow y_2 - c = \frac{2n^2t}{s_{11}h(2t+h) + 2nt}.$$

Assim,

$$y_2 - c = \frac{2nt}{2nt} \frac{n}{\left(\frac{s_{11}h(2t+h)}{2nt} + 1\right)} \Rightarrow y_2 - c = \frac{n}{1 + \frac{s_{11}h(2t+h)}{2nt}}.$$

Por fim,

$$c = y_2 - \frac{n}{1 + \frac{s_{11}h(2t+h)}{2nt}}.$$

Finalmente, para determinar o último parâmetro, ou seja, a é suficiente substituir o parâmetro b que encontramos anteriormente na primeira equação, desse modo:

$$y_1 - c = \frac{a}{t^2 + b} \Rightarrow y_1 - c = \frac{a}{t^2 + \frac{2t(y_1 - c)}{s_{11}} - t^2} \Rightarrow a = \frac{2t(y_1 - c)^2}{s_{11}}.$$

Logo, estão determinados os parâmetros:

$$\mu = x_1 - t;$$

$$c = y_2 - \frac{n}{1 + \frac{s_{11}h(2t+h)}{2nt}};$$

$$b = \left[\frac{2(y_1 - c)}{s_{11}} - t \right] t$$

$$a = \frac{2t(y_1 - c)^2}{s_{11}}.$$

E, portanto, provado o primeiro caso.

2º caso. $s_{11} = 0$ e $s_{21} \neq 0$.

A partir dessas condições, temos que o sistema de equações (21) é da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 - c = \frac{a}{t^2 + b} \\ y_2 - c = \frac{a}{(h+t)^2 + b} \\ 0 = \frac{2at}{[t^2 + b]^2} \\ s_{21} = \frac{2a(h+t)}{[(h+t)^2 + b]^2} \end{array} \right. .$$

Da terceira equação, temos a seguinte relação, $2at = 0$, mas, como a é obrigatoriamente diferente de zero, segue que $t = 0$ e, portanto, o sistema acima é equivalente a:

$$\begin{cases} y_1 - c = \frac{a}{b} \\ y_2 - c = \frac{a}{h^2 + b} \\ s_{21} = \frac{2ah}{[h^2 + b]^2} \end{cases} \quad (29)$$

Daí, subtraindo a segunda e a primeira equação, nessa ordem, obtemos que:

$$(y_2 - c) - (y_1 - c) = \frac{a}{h^2 + b} - \frac{a}{b}$$

$$n = \frac{ab - ah^2 - ab}{(h^2 + b)b}$$

Fazendo algumas simples operações, temos que:

$$a = -\frac{n(h^2 + b)b}{h^2} \quad (30)$$

Agora, substituindo a na terceira equação de (29):

$$s_{21} = \frac{2\left(-\frac{n(h^2 + b)b}{h^2}\right)h}{[h^2 + b]^2} = -\frac{2n(h^2 + b)bh}{[h^2 + b]^2 h^2} = -\frac{2nb}{h^3 + bh}$$

Isolando b , segue que:

$$-2nb = s_{21}h^3 + s_{21}bh$$

$$-s_{21}h^3 = b(s_{21}h + 2n)$$

$$b = -\frac{s_{21}h^3}{s_{21}h + 2n}$$

Para determinar o parâmetro c , agora é suficiente substituir o valor de a determinado anteriormente em (30) na segunda equação de (29), desse modo:

$$c = y_2 - \frac{-\frac{n(h^2+b)b}{h^2}}{h^2+b} = y_2 + \frac{n(h^2+b)b}{(h^2+b)h^2} = y_2 + \frac{nb}{h^2}.$$

E, finalmente, o parâmetro μ de (21) nesse caso é determinado em consequência do que foi definido, $t = x_1 - \mu$. Assim, determinados os parâmetros a , b , c e μ :

$$\mu = x_1;$$

$$b = -\frac{s_{21}h^3}{s_{21}h + 2n};$$

$$a = -\frac{n(h^2+b)b}{h^2};$$

$$c = y_2 + \frac{nb}{h^2}.$$

Logo está provado.

3º caso. $s_{11} \neq 0$ e $s_{21} = 0$.

De modo análogo aos demais casos, começaremos reescrevendo o sistema dada as condições acima, assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 - c = \frac{a}{t^2+b} \\ y_2 - c = \frac{a}{(h+t)^2+b} \\ s_{11} = \frac{2at}{[t^2+b]^2} \\ 0 = \frac{2a(h+t)}{[(h+t)^2+b]^2} \end{array} \right. .$$

Por consequência de $s_{21} = 0$, segue que $2a(h+t) = 0$ e, pela mesma justificativa do caso anterior, $h+t = 0$, ou seja, $t = -h$. Como essas informações, é válido reescrever o sistema acima da seguinte maneira:

$$\begin{cases} y_1 - c = \frac{a}{h^2+b} \\ y_2 - c = \frac{a}{b} \\ s_{11} = -\frac{2ah}{[h^2+b]^2} \end{cases} . \quad (31)$$

Agora, seguindo os mesmos passos do caso anterior, iremos subtrair a segunda equação pela primeira, obtendo:

$$(y_2 - c) - (y_1 - c) = \frac{a}{b} - \frac{a}{h^2+b}.$$

Assim:

$$n = \frac{ah^2 + ab - ab}{(h^2+b)b} = \frac{ah^2}{(h^2+b)b}.$$

Isolando o parâmetro a na igualdade acima, segue que:

$$a = \frac{nb[h^2+b]}{h^2}. \quad (32)$$

Daí, iremos substituir o valor de a encontrado na terceira equação de (31), assim:

$$s_{11} = -\frac{2\frac{nb[h^2+b]}{h^2}.h}{[h^2+b]^2} = -\frac{2nb[h^2+b]h}{[h^2+b]^2h^2} = -\frac{2nb}{h^3+bh}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -2nb &= s_{11}h^3 + s_{11}bh \\ -s_{11}h^3 &= b(s_{11}h + 2n) \\ b &= -\frac{s_{11}h^3}{(s_{11}h + 2n)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Agora, para determinar o parâmetro c é suficiente substituir o valor do parâmetro a determinado em (32) na primeira equação de (31), logo:

$$c = y_1 - \frac{nb[h^2+b]}{h^2+b} = y_1 - \frac{nb[h^2+b]}{[h^2+b]h^2} = y_1 - \frac{nb}{h^2}$$

Por fim, quanto ao parâmetro μ , como vimos no início desse caso, $t = -h$, assim:

$$x_1 - \mu = -(x_2 - x_1) \Rightarrow \mu = x_2.$$

Logo está provado a existência dos parâmetros a , b , c e μ dados por:

$$\mu = x_2;$$

$$b = -\frac{s_{11}h^3}{(s_{11}h + 2n)};$$

$$a = \frac{nb[h^2+b]}{h^2};$$

$$c = y_1 - \frac{nb}{h^2}.$$

Portanto, o Teorema 3.2 está demonstrado. ■

Entretanto, a exploração desse Teorema que acabamos de provar não termina por aí. Além de demonstrá-lo, Yankova (2017) faz ainda uma série de comentários. No primeiro deles ela observa que se $s_{11} \neq 0$ e:

$$s_{21} = \frac{1}{s_{11}} \frac{k^2 - 1}{k^2} \frac{n^2}{h^2}, \quad k \in R \setminus \{0; \pm 1\},$$

a condição $s_{11}s_{21} < \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2$ é satisfeita e, mediante a isso, temos que no 1º caso do Teorema 3.2:

$$A = 4 \left(\frac{1}{s_{11}s_{21}} - \frac{h^2}{n^2} \right) = 4 \left(\frac{1}{s_{11} \left(\frac{1}{s_{11}} \frac{k^2 - 1}{k^2} \frac{n^2}{h^2} \right)} - \frac{h^2}{n^2} \right) = 4 \left(\frac{k^2}{k^2 - 1} \frac{h^2}{n^2} - \frac{h^2}{n^2} \right) = \frac{4h^2}{n^2} \left(\frac{1}{k^2 - 1} \right).$$

Portanto,

$$t_{1,2} = \frac{h}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4h^2}{An^2}} \right) = \frac{h}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4h^2}{\left(\frac{4h^2}{n^2} \left(\frac{1}{k^2 - 1} \right) \right) n^2}} \right) = \frac{h^2}{2} (-1 \pm k).$$

No que diz respeito ao 2º e 3º caso provados anteriormente, ela afirma que ambos podem ser usados para fornecer uma interpolação que preserva a forma de dados positivos ou monótonos.

Em um penúltimo comentário, extensões e restrições do Teorema 3.2 são analisadas por Yankova (2017) em duas singulares situações. A primeira delas é existência dos parâmetros da curva generalizada de Agnesi onde ela define que os dois diferentes pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) assumem as seguintes condições: $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$. E além disso, $s_{11} = -s_{21}$. Assim (21) que é igual a:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 - c = \frac{a}{t^2 + b} \\ y_2 - c = \frac{a}{(h+t)^2 + b} \\ s_{11} = \frac{2at}{[t^2 + b]^2} \\ s_{21} = \frac{2a(h+t)}{[(h+t)^2 + b]^2} \end{array} \right. .$$

Pela condição de $y_1 = y_2$, e pela série de consequências dela recorrentes, como por exemplo a igualdade de $y_1 - c = y_2 - c$, ou seja:

$$\frac{a}{t^2 + b} = \frac{a}{(h+t)^2 + b} \Rightarrow t^2 = (h+t)^2.$$

Daí, segue que $t = -\frac{h}{2}$ e, portanto, $h+t = \frac{h}{2}$. Além disso, temos no final que a terceira e quarta equação trazem as mesmas informações, já que:

$$s_{11} = -s_{21} = \frac{2at}{[t^2 + b]^2} = -\frac{2a\frac{h}{2}}{\left[\frac{h^2}{4} + b\right]^2} = -\frac{ah}{\left[\frac{h^2}{4} + b\right]^2}$$

e

$$s_{21} = \frac{2a(h+t)}{[(h+t)^2 + b]^2} = \frac{2a\frac{h}{2}}{\left[\frac{h^2}{4} + b\right]^2} = \frac{ah}{\left[\frac{h^2}{4} + b\right]^2}$$

Assim temos que o sistema inicial do estudo desse caso é equivalente a:

$$\begin{cases} y_1 - c = \frac{a}{\frac{h^2}{4} + b} \\ s_{21} = \frac{ah}{\left[\frac{h^2}{4} + b\right]^2} \end{cases}.$$

Logo, isolando a na segunda equação temos que:

$$a = \frac{s_{21}}{h} \left[\frac{h^2}{4} + b \right]^2.$$

Daí, podemos obter o parâmetro c através da primeira equação:

$$c = y_1 - \frac{a}{\frac{h^2}{4} + b} = y_1 - \frac{\frac{s_{21}}{h} \left[\frac{h^2}{4} + b \right]^2}{\frac{h^2}{4} + b} = y_1 - \frac{s_{21}}{h} \left(\frac{h^2}{4} + b \right).$$

Diante disso, o parâmetro b vai ser um número positivo e diferente de zero arbitrário. Finalmente, quanto a μ , como $t = -\frac{h}{2} = x_1 - \mu$, segue que:

$$-\frac{x_2 - x_1}{2} = x_1 - \mu \Rightarrow \mu = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

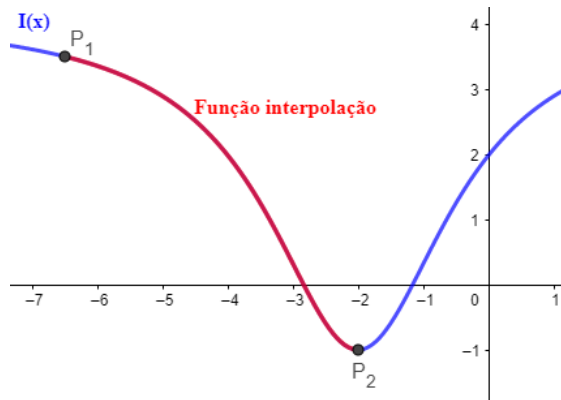
Logo definido todos os parâmetros a , b , c e μ e portanto, provado a existência da curva generalizada dadas essas condições, onde ela ainda acrescenta que se $b = \frac{h^2}{4}$, $a = \frac{s_{21}h^3}{4}$ e $c = y_1 - \frac{s_{21}h}{2}$.

Agora, voltando ao estudo do segundo caso relativo ainda a esse penúltimo comentário, ele observa que caso $s_{11} = s_{21} = 0$ a curva degenera em uma linha horizontal $y = \frac{a}{b} + c$, com $\frac{a}{b} + c = y_1 = y_2$.

Isso é particularmente fácil de provar. Para isso, vamos recordar as implicações de $s_{11} = 0$ no caso 2 e $s_{21} = 0$ no caso 3 da demonstração do Teorema 3.2 que, respectivamente, traduzem-se em $t = 0$ e $h + t = 0$, ou seja, $t = h = 0$. Daí, temos que (21) é:

$$\begin{cases} y_1 - c = \frac{a}{b} \\ y_2 - c = \frac{a}{b} \end{cases}.$$

Figura 3.5 – Aplicação do 3º caso do Teorema 3.2



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, é fácil verificar que $y_1 = y_2$, e além disso, que as duas equações são equivalentes. Logo,

$$y_1 = y_2 = \frac{a}{b} + c,$$

e está provado a degeneração da curva em uma função constante $y = \frac{a}{b} + c$.

Sobre o último comentário de Yankova (2017), ela ressalta que para valores apropriados de t , por meio da escolha de s_{21} , podemos fornecer condições para que b seja positivo ou que o denominador da curva generalizada de Agnesi não possa ser redefinido em $x \in [x_1, x_2]$ quando $b < 0$.

Finalmente, para encerrar essa seção, iremos expor dois exemplos que remetem-se a determinação da curva generalizada passando por dois pontos.

Exemplo 3.1. Sejam $P_1 = (-6, 5; 3, 5)$, $P_2 = (-2, -1)$, $s_{11} = 0,25$ e $s_{21} = 0$, iremos utilizar o 3º caso do Teorema 3.2 para determinar $I(x)$. Pelo que foi definido, temos que $h = 4,5$, $n = -4,5$ e, conseqüentemente, $\mu = -2$; $b = 2,89285$; $a = -14,87750$ e $c = 4,14285$. Assim,

$$I(x) = -\frac{14,87750}{(x+2)^2 + 2,89285} + 4,14285.$$

E, portanto, temos a seguinte função interpolação destacada em vermelho na Figura (3.5).

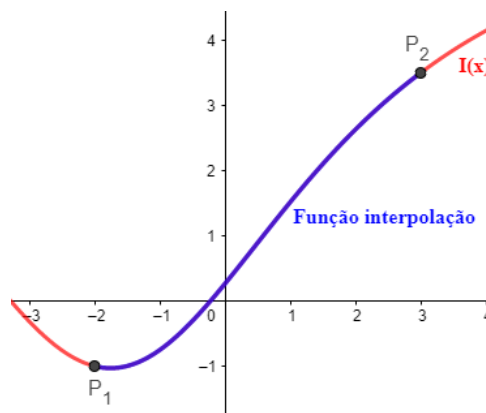
Exemplo 3.2. Agora, vamos considerar $P_1 = (-2, -1)$, $P_2 = (3; 3,5)$, $s_{11} = 0,25$ e $s_{21} = -0,75$ e determinar $I(x)$. Dos valores de s_{11} e s_{21} , é notório que vamos utilizar o

1º caso do Teorema 3.2, sendo assim, temos que $h = 5$, $n = 4,5$ e $A = -26,27160$. Daí, obtemos que $t_1 = -0,24718$ e $t_2 = -4,75281$. Calculando os parâmetros para o primeiro valor de t , segue que $c = 6,43792$; $a = -109,39722$; $b = 14,64694$ e $\mu = -1,75282$. Logo,

$$I(x) = -\frac{109,39722}{(x + 1,75282)^2 + 14,64694} + 6,43792,$$

e a função interpolação obtida, agora representada em azul, encontra-se ilustrada a seguir na Figura (3.6).

Figura 3.6 – Aplicação do 1º caso do Teorema 3.2



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o segundo valor de $t = -4,75281$, temos que $c = -0,47644$; $a = -10,42253$; $\mu = 2,75281$ e $b = -2,68215$, o que é indesejado já que a função interpolação $I(x)$ passa a apresentar duas assíntotas verticais ($x = \mu \pm \sqrt{-b}$), como já havíamos discutido.

Por fim, é necessário destacar que os pontos P_1 e P_2 escolhidos para determinar a função interpolação através da curva generalizada de Agnesi, em cada um dos exemplos, não pertencem rigorosamente a função, sendo os pontos destacados nas Figuras (3.5) e (3.6) aproximações destes, isso porque os valores de dos parâmetros a , b , c , μ , assim como o de A , t_1 e t_2 foram aproximados também resultando nessa esperada consequência.

3.2.1 Estimativa do erro da interpolação no intervalo $[x_1, x_2]$

Como já enfatizado anteriormente na Subseção 2.2.2, o estudo do erro da aproximação de uma função qualquer $f(x)$ pela sua respectiva função interpolação, $g(x)$, é de crucial importância para investigar se ela é ou não uma alternativa digna de credibilidade. Reconhecendo isso, Yankova (2017) também se preocupa em determinar uma estimativa do erro ao aproximar uma função qualquer $f(x) \in C^2$ definida no intervalo de $[x_1, x_2]$, pela

curva generalizada de Agnesi, $I(x)$, passando pelos pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , extremos do intervalo.

Para isso, ela utiliza um resultado que já apresentamos no decorrer do Capítulo 2, a fórmula para o cálculo da cota máxima do erro ao tentar aproximar uma função qualquer $f(x)$ por um polinômio interpolador de grau n , $P_n(x)$, a partir de $n + 1$ pontos distintos:

$$f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n + 1)!}. \quad (34)$$

Contudo, algumas diferenças, indiretamente, são notáveis: a presença do módulo, um rearranjo da ordem do polinômio interpolador, dos subscritos, da ordem da derivada e, por fim, do denominador. Todos justificados pelo fato de que Yankova (2017) não parte do ponto (x_0, y_0) , mas sim de (x_1, y_1) , o que reduz em uma unidade o número de pontos interpolados. Assim, a fórmula que iremos adotar passa a ser:

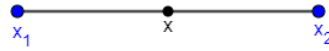
$$|f(x) - P_{n-1}(x)| = \left| (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) \frac{f^n(\xi_x)}{n!} \right|.$$

Modelando para o nosso problema e considerando $P_{n-1}(x) = L(x)$, a função de interpolação linear que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , $n = 2$, o número de pontos a ser interpolados, e $\xi_x \in [x_1, x_2]$, a abscissa do ponto em que $f''(x)$ apresenta o maior valor em módulo, temos que:

$$|f(x) - L(x)| = \left| (x - x_1)(x - x_2) \frac{f''(\xi_x)}{2!} \right| = |(x - x_1)(x - x_2)| \left| \frac{f''(\xi_x)}{2} \right|.$$

No entanto, como (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são pontos quaisquer de uma função arbitrária $f(x)$, vamos estimar o erro de aproximação da função $f(x)$ por $I(x)$ por meio de uma cadeia de desigualdade, como veremos mais à frente, mas, para isso, iremos realizar duas considerações. Iniciando por $|(x - x_1)(x - x_2)|$, iremos representar geometricamente o intervalo $[x_1, x_2]$ por meio da Figura 3.7, sendo x um elemento qualquer no seu interior ou um dos próprios extremos.

Da análise da Figura 3.7, é notável perceber que enquanto $(x - x_1) \geq 0$, $(x - x_2) \leq 0$, uma vez que x_1 e x_2 são os extremos do intervalo. Assim, sem perda de generalização, podemos reescrever $|(x - x_1)(x - x_2)|$ como $(x - x_1)(x_2 - x)$ dado que está garantido a positividade do produto. Com isso, o nosso objetivo é provar que:

Figura 3.7 – Intervalo $[x_1, x_2]$ **Fonte: Elaborado pelo autor.**

$$(x - x_1)(x_2 - x) \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{4} = \frac{h^2}{4}. \quad (35)$$

Vamos reescrever (35) como:

$$-x^2 + (x_1 + x_2)x - x_1x_2 \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}.$$

Portanto, seja $g(x) = -x^2 + (x_1 + x_2)x - x_1x_2$, uma função quadrática decrescente, se provarmos que o ponto de máximo de $g(x) \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}$, (35) está provado. Determinando o ponto de máximo de $g(x)$, ou seja, o vértice $V(x_V, y_V)$ da parábola, temos que:

$$x_V = -\frac{(x_1 + x_2)}{-2} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Logo,

$$y_V = g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{(x_2 - x_1)^2}{4} = \frac{h^2}{4}.$$

Desse modo, como o ponto máximo de $g(x)$ é igual a $\frac{h^2}{4}$, (35) está provado. Assim, vale a seguinte desigualdade:

$$|f(x) - L(x)| = |(x - x_1)(x - x_2)| \left| \frac{f''(\xi_x)}{2} \right| \leq \frac{h^2}{4} \left| \frac{f''(\xi_x)}{2} \right| = \frac{h^2}{8} |f''(\xi_x)|. \quad (36)$$

Quanto à segunda consideração que nos auxiliará na construção da cadeia de desigualdade, vamos tomar que em (36), $f(x)$ seja igual a $I(x)$. Para tanto, antes será necessário determinarmos ξ_x . Logo, recorrendo aos conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral, vamos determinar os pontos críticos de $I''(x)$, já que, como é provável prever, ξ_x é a abscissa de um desses pontos.

Assim, seguindo o roteiro para determiná-los, vamos inicialmente calcular a derivada segunda e terceira de $I(x)$, ou seja, $I''(x)$ e $I'''(x)$ que são, respectivamente:

$$I''(x) = \frac{-2a[(x-u)^2 + b]^2 + 8a(x-u)^2}{[(x-u)^2 + b]^3}$$

e

$$I'''(x) = \frac{24a(x-u)[(x-u)^2 + b] - 48a(x-u)^3}{[(x-u)^2 + b]^4}.$$

Prosseguindo com o processo para obter os pontos críticos de $I''(x)$, vamos tomar $I'''(x) = 0$, ou seja:

$$\frac{24a(x-u)[(x-u)^2 + b] - 48a(x-u)^3}{[(x-u)^2 + b]^4} = 0.$$

Que implica em:

$$24a(x-u)[(x-u)^2 + b] - 48a(x-u)^3 = 0.$$

Daí, a partir de uma rápida análise, é trivial observar que $x = u$ é raiz de $I'''(x)$, logo, uma das abscissas dos pontos críticos de $I''(x)$. Agora, para deduzir as demais raízes, vamos fatorar $24a(x-u)[(x-u)^2 + b] - 48a(x-u)^3$ por $(x-u)$, obtendo o seguinte quociente, $q(x) = 24a[(x-u)^2 + b] - 48a(x-u)^2$. Calculando suas raízes, comum também a $I'''(x)$, temos:

$$24a[(x-u)^2 + b] - 48a(x-u)^2 = 0$$

$$24a(x-u)^2 + 24ab - 48a(x-u)^2 = 0$$

$$x = u \pm \sqrt{b}.$$

Determinadas todas as abscissas dos pontos críticos de $I''(x)$, é fácil verificar que $I''(u) = \frac{-2a}{b^2}$ e que $I''(u \pm \sqrt{b}) = \frac{a}{2b^2}$. Como ξ_x é a abscissa do ponto em que $I''(x)$ apresenta o maior valor em módulo, logo $\xi_x = u$.

Voltando para (36) e já considerando $f(x) = I(x)$ e $\xi_x = u$, obtemos:

$$|I(x) - L(x)| \leq \frac{h^2}{8} |I''(u)| = \frac{h^2}{8} \left| \frac{-2a}{b^2} \right| = \frac{h^2}{4} \frac{|a|}{b^2}. \quad (37)$$

Terminadas as considerações, vamos a construção da cadeia de desigualdades para estimar o erro absoluto ao aproximar a imagem de $x \in [x_1, x_2]$ em $f(x)$ por meio de $I(x)$, ou seja, $|f(x) - I(x)|$. Assim,

$$|f(x) - I(x)| = |(f(x) - L(x)) - (I(x) - L(x))| \leq |f(x) - L(x)| + |I(x) - L(x)|^1. \quad (38)$$

Logo, está concluída a nossa investigação do artigo de Yankova (2017). Entretanto, para finalizar, um pequeno comentário acerca da interpolação por partes se faz necessário. Analogamente a splines lineares, a proposta desenvolvida por ela consiste em interpolar um conjunto de pontos dois a dois distintos por meio da curva generalizada de Agnesi, $I(x)$, usando o Teorema 3.2 apresentado para obtê-las.

Finalmente, podemos observar que a Bruxa de Agnesi não é uma simples curva plana, versátil em aplicações, ele nos fornece uma nova forma de interpolar um conjunto de dados por meio desse aplicação, ampliando as nossas possibilidades e contribuindo para o avanço do Cálculo Numérico, por exemplo.

¹ Esse resultado não é o final previsto pelo artigo de Yankova (2017), pelo contrário, teríamos que:

$$|f(x) - I(x)| \leq |f(x) - L(x)| + |I(x) - L(x)| \leq 2|I(x) - L(x)| \leq \frac{h^2}{2} \frac{|a|}{b^2} \quad x \in [x_1, x_2],$$

onde as desigualdade (37) foi estabelecida exclusivamente para justificá-la. Entretanto, como faltam hipóteses para comprová-la, já que a desigualdade $|f(x) - L(x)| + |I(x) - L(x)| \leq 2|I(x) - L(x)|$ só se aplica em certas condições que não foram apresentadas, como esclareceu Yankova quando contactada, decidimos parar em (38), uma vez que diversos contra-exemplos foram identificados quando realizamos essa estimativa sem atender a essas condições não especificadas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É notável que a discussão de gênero é um assunto necessário, principalmente na Matemática onde a ocupação feminina é alarmante. Para além, sendo uma preocupação dessa luta dar voz às mulheres que foram silenciadas, é possível perceber o quanto a figura de Maria Gaetana Agnesi é importante, uma vez que, apesar do seu pouco reconhecimento, ela rompe com diversos paradigmas, sobressaindo, por exemplo, na escrita acadêmica, dado que é uma das pioneiras a se destacar com excelência nesse quesito, conseqüentemente, um contraexemplo para a falsa “proposição” de que “a Matemática é um ambiente masculino”.

Quanto à nossa indagação inicial: *É POSSÍVEL ENCONTRAR ALGUMA APLICAÇÃO PARA A BRUXA DE AGNESI?* Concluimos que é sim, é possível encontrar aplicações para a Bruxa de Agnesi. Porém, é válido considerar que ainda são muito escassas, ao mesmo tempo que diversificadas, como podemos constatar ao longo da nossa pesquisa, podendo relacionar temáticas de interesse da Física, como é o caso da Leis de Kepler, até na Matemática, como é o caso da Probabilidade e do Cálculo Numérico, sendo esse último a aplicação a qual nos aprofundamos.

Sendo assim, concluimos que atingimos o que foi proposto. Discutimos sobre gênero na Matemática, abordamos a simbólica e inspiradora trajetória de vida de Maria Gaetana Agnesi. Definimos matematicamente a curva da Bruxa, obtemos suas equações e estudamos as suas propriedades, além de explorarmos a fundo uma das suas aplicações onde, para isso, exclusivamente, apresentamos brevemente o conceito de interpolação e seus métodos.

Ademais, acrescento que apesar de algumas dificuldades com relação à produção desse Trabalho de Conclusão de Curso, como a leitura de textos em inglês, dúvidas com relação ao detalhamento de algumas definições e demonstrações da aplicação apresentada, a necessidade de buscar por conceitos auxiliares, a difícil busca por materiais que retratassem da trajetória de vida de Agnesi, entre outros, que gradualmente foram superadas ao longo das diversas reuniões com os orientadores e por meio do nosso acúmulo de conhecimento, valeram a pena.

Logo, essa experiência foi muito engrandecedora. Contribuindo em diversos aspectos para com minha formação, ela possibilitou ampliar meus conhecimentos matemáticos, já que interpolações e seus conceitos eram, até o momento que antecede a elaboração desta pesquisa, uma temática desconhecida. Ela também colaborou na minha formação, uma vez que me permitiu desenvolver um pouco minha proficiência no inglês, e, obviamente,

me habilitando na discussão de gênero nessa ciência.

Ampliando o nosso campo de visão para a pesquisa científica de um modo geral, esse trabalho também tem contribuições. Acreditando ser uma das poucas investigações que buscam explorar aplicações da Bruxa de Agnesi em português, ele pode auxiliar nas formações de outros estudantes e pesquisadores, assim como na divulgação científica de Agnesi. Ademais, ela pode contribuir também no sentido de possibilitar esse contato inicial do graduando com o conceito de interpolações.

Assim, manifestamos aqui a nossa preocupação e motivação para que sejam, futuramente, desenvolvidos outros trabalhos com a finalidade de tornar visíveis as inúmeras mulheres e suas conquistas que a história insiste em apagar. Desse modo, voltando a retratar de Agnesi e da curva da Bruxa, sugerimos, por exemplo, trabalhos que consistam nas explorações de outras aplicações, como é o caso das publicações de Stigler (1974) e Ciaurri (2017). Além disso, deixamos aqui o estímulo para que sejam desenvolvidos também trabalhos evidenciando as conquistas de outras matemáticas: Ada Lovelace, Sophie Germain, Sofia Kovalevskaja, dentre outras.

REFERÊNCIAS

- ALVES, M.; COUTINHO, C.; ROCHA, A. M.; RODRIGUES, C. Fatores que influenciam a aprendizagem de conceitos matemáticos em cursos de engenharia: Um estudo exploratório com estudantes da universidade do minho. **Revista Portuguesa de Educação**, Universidade do Minho, v. 29, n. 1, p. 259–293, 2016.
- ARAUJO, C. A matemática brasileira sob a perspectiva de gênero. **Ciência e Cultura**, Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, v. 70, n. 1, p. 32–33, 2018.
- AUGUSTO, C. A.; SOUZA, J. P. d.; DELLAGNELO, E. H. L.; CARIO, S. A. F. Pesquisa qualitativa: rigor metodológico no tratamento da teoria dos custos de transação em artigos apresentados nos congressos da sober (2007-2011). **Revista de Economia e Sociologia Rural**, SciELO Brasil, v. 51, n. 4, p. 745–764, 2013.
- BRASIL. **Dia Internacional de Mulheres e Meninas na Ciência**. [S.l.], 2021. Disponível em: <<https://www.gov.br/cnpq/pt-br/assuntos/noticias/destaque-em-cti/dia-internacional-de-mulheres-e-meninas-na-ciencia>>.
- BRECH, C. O dilema de Agnesi das mulheres na matemática. **Revista Matemática Universitária**, 2017.
- BURDEN, R.; FAIRES, J.; BURDEN, A. **Análise numérica**. [S.l.]: Cengage Learning, 2015.
- CARVALHO, M. G. de; CASAGRANDE, L. S. Mulheres e ciência: desafios e conquistas. **INTERthesis: Revista Internacional Interdisciplinar**, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 8, n. 2, p. 20–35, 2011.
- CIAURRI, O. Maria gaetana agnesi meets johannes kepler. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 124, n. 7, p. 654–657, 2017.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.
- FERNANDEZ, C. d. S.; AMARAL, A. M. L. d.; VIANA, I. V. A história de hipátia e de muitas outras matemáticas. **Sociedade Brasileira de Matemática**, 2019.
- FILHO, F. F. C. **Algoritmos numéricos**. [S.l.]: LTC, 2007.
- GIL, A. C. *et al.* **Como elaborar projetos de pesquisa**. [S.l.]: Atlas São Paulo, 2017. v. 6.
- GÓMEZ, J. J. D.; FRENSEL, K. R.; SANTO, N. do E. **Geometria Analítica I**. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2011.
- GRAY, S.; MALAKYAN, T. The witch of agnesi a lasting contribution from the first surviving mathematical work written by a woman: A commemorative on the 200th anniversary of her death. **The College Mathematics Journal**, Taylor & Francis, v. 30, n. 4, p. 258–268, 1999.

JAKOB, A. A. E.; YOUNG, A. F. O uso de métodos de interpolação espacial de dados nas análises sociodemográficas. **Anais**, p. 1–22, 2016.

LARKIN, F. Some techniques for rational interpolation. **The Computer Journal**, The British Computer Society, v. 10, n. 2, p. 178–187, 1967.

LOPES, Á. P.; COSTA, M. d. J. dos S. Comparação entre métodos de aproximação numérica utilizando o programa matlab. **Margens**, v. 11, n. 17, p. 245–274, 2018.

MARCUZZO, F. F. N.; ANDRADE, L. R.; MELO, D. C. d. R. **Métodos de interpolação matemática no mapeamento de chuvas do estado do Mato Grosso**. 2011.

MAZZOTTI, M. **The World of Maria Gaetana Agnesi, Mathematician of God**. Johns Hopkins University Press, 2007. (Johns Hopkins Studies in the History of Mathematics). ISBN 9781421410425. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=qaWPcwwkdEAC>>.

MONTEIRO, M. T. T. **Métodos Numéricos: exercícios resolvidos aplicados à Engenharia e outras Ciências**. [S.l.]: Universidade do Minho. Departamento de Produção e Sistemas (DPS), 2012.

MOURA, R. A. d. **Um estudo sobre a Instituzioni Analitiche de Maria Gaetana Agnesi: Álgebra e Análise na Itália setecentista**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — PUC-SP, São Paulo, 2017.

PETRI, S. M. *et al.* **Modelo para apoiar a avaliação das abordagens de gestão de desempenho e sugerir aperfeiçoamentos: sob a ótica construtivista**. Florianópolis, SC, 2005.

ROSSETTO, D. R. **Cálculo Numérico - Splines**. Paraná, 2016. Disponível em: <<http://paginapessoal.utfpr.edu.br/dianerossetto/ma70c-calculo-numerico/ma70c-calculo-numerico/5-Splines.pdf>>.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. D. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. São Paulo: Pearson Universidades, 2000.

SANTOS, B. A. da S.; DIAS, L. D.; SILVA, L. F. R. C. da; FILHO, D. C. de M. A matemática das mulheres na matemática para ser compreendida no ensino básico Maria Gaetana Agnesi e a curva da bruxa. **Encontro Cajazeirenses de Matemática**, 2020.

SCHIENBINGER, L. O feminismo mudou a ciência? tradução de raul fiker. **Bauru, SP: EDUSC, 384p.(coleção mulher)**, 2001.

SOUZA, M. C. R. F. de; CONCEIÇÃO, F. Maria da. **Relações de gênero, Educação Matemática e discurso: enunciados sobre mulheres, homens e matemática**. [S.l.]: Autêntica, 2010.

STIGLER, S. M. Studies in the history of probability and statistics. xxxiii cauchy and the witch of agnesi: An historical note on the cauchy distribution. **Biometrika**, JSTOR, p. 375–380, 1974.

THIELE, T. N. **Interpolationsrechnung**. [S.l.]: Teubner, 1909.

YANKOVA, T. Piecewise rational interpolation by witch of agnesi. **Computational and Applied Mathematics**, Springer, v. 36, n. 3, p. 1205–1216, 2017.

Documento Digitalizado Restrito

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)

Assunto: Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)
Assinado por: Felipe Silva
Tipo do Documento: Anexo
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Restrito
Hipótese Legal: Informação Pessoal (Art. 31 da Lei no 12.527/2011)
Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Felipe Bezerra da Silva, ALUNO (201722020022) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 10/11/2021 16:38:50.

Este documento foi armazenado no SUAP em 10/11/2021. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 370695

Código de Autenticação: a4d6bce58f

