INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

José Wanderson Leandro de Sousa

O uso de Séries de Potências na Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª ordem.

Cajazeiras-PB
Agosto de 2021

O uso de Séries de Potências na Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª ordem.

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda

Cajazeiras-PB
Agosto de 2021

Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

S725u

Sousa, José Wanderson Leandro de

O uso de séries de potências na resolução de equações diferenciais ordinárias de 2º ordem / José Wanderson Leandro de Sousa; orientador Geraldo Herbetet de Lacerda.- 2021.
49 f.: il.

Orientador: Geraldo Herbetet de Lacerda.
TCC (Especialização em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2021.

1. Séries de Potências – Equações diferenciais 2. Polinômio de Taylor 3. Sequências I. Título.

517.9(0.067)

José Wanderson Leandro de Sousa

O uso de Séries de Potências na Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de 2ª ordem.

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Aprovado em: 31/08/2021.

BANCA EXAMINADORA

Geraldo H. [illegible]

Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

Kissia Carvalho

Profª. Ma. Kissia Carvalho
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

Patrício Luiz de Andrade

Prof. Me. Patrício Luiz de Andrade
Instituto Federal da Paraíba -(IFPB)

Cajazeiras-PB
Agosto de 2021

Dedico a Deus, causa primordial de todas as coisas e sem Ele nada seria possível; ao meu pai Luiz e minha mãe Irani (in memoriam), cuja a força foi a mola propulsora que permitiu o meu avanço, mesmo nos momentos mais difíceis. Agradeço do fundo do meu coração.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou minha mente e meu caminho durante a caminhada nesses 18 meses de estudos .

Muitas foram às pessoas que colaboraram para a minha formação acadêmica aos quais as agradeço. Aqui irei representá-las citando alguns nomes, pois seria impossível mencionar todos os participantes e colaboradores da minha formação, de forma direta ou indireta. Muitos deles são anônimos e outros já não presentes em nosso plano. Mesmo assim, sou eternamente grato.

À minha família, que sempre esteve presente nos momentos mais difíceis, participando de minhas agonias e compartilhando de minhas alegrias. Em especial a minha mãe e meu pai, Irani (in memoriam) e Luiz, exemplos de vida, por depositarem em mim sua confiança.

À minha esposa Janete e meu filho Pedro Natã por toda paciência em diversas oportunidades, que em diversasa oportunidades, devido a minha dedicação ao estudo, foram privados do meu convívio.

À minha cunhada Janice por toda ajuda e encorajamento para participar dessa pós graduação.

Ao professor Geraldo por ter aceito participar deste trabalho como meu orientador quando convidado. Este docente esteve sempre presente e disponível nas orientações, muitas vezes a distância. Estendo os agradecimentos também a todos os professores que compõem o Curso de Especialização em matemática e aos membros da banca examinadora, em especial aos professores: Pátrício Luiz, Leonardo Ferreira, Cleberson Huan, Vinícius, Petruci, Aureliano, Marcelo Braga, Reginaldo Amaral, Ana Paula e Kissia Carvalho, pelo amparo prestado em muitos momentos do Curso. Também estendo os meus agradecimentos a todos os colegas de Curso pelo companheirismo, ajuda e amizade. Não posso deixar de mencionar e agradecer a Fatinha, essa grande amiga e ajudadora que nos momentos onde as dificuldades acadêmicas tomavam o meu ser, ela de forma animosa me socorria.

Assim, “Algumas pessoas marcam a nossa vida para sempre, umas porque nos vão ajudando na construção, outras porque nos apresentam projetos de sonho e outras ainda porque nos desafiam a construí-los.” (Autor desconhecido).

A Todos, meus sinceros agradecimentos.

Resumo

Este trabalho trata do uso de Séries de Potências na Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem. A motivação do objeto de estudo surgiu da necessidade de auxiliar alunos que cursam a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias nos cursos de engenharia e licenciatura em matemática a ampliarem seus conhecimentos no que se refere à resolução de Equações Diferenciais. Pretende-se mostrar um método para resolver Equações Diferenciais por meio de Séries de Potências como objetivo principal. A pesquisa é baseada em sequência de caráter bibliográfico. Foram utilizados como fonte de pesquisa livros de Ensino Superior sobre Equações Diferenciáveis com Aplicação em Modelagem, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno e Cálculo e Trabalhos de Conclusão de Curso para a complementação bibliográfica. Relembramos alguns conceitos considerados pré-requisitos ao tema do trabalho, definimos e demonstramos teoremas sobre Sequências e Séries, Série de Potências, além de muitos outros teoremas fundamentais sobre Funções de Taylor e Maclaurin, Equação de Frobenius e Bessel e também, Equações Diferencias. Nesta perspectiva, o presente trabalho tem dentre suas contribuições, a apresentação de material didático complementar ao estudo de Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem. Conclui-se então que o método proposto é eficaz na resolução de equações convencionais, tendo em vista que outros métodos não logram êxito, ou não são confiáveis para serem utilizados em Cálculo Diferencial e Integral.

Palavras-Chave: Séries de Potências. Polinômio de Taylor. Sequências.

Abstract

This work deals with the use of power series in solving differential equations Second Order Ordinaries. The motivation of the object of study arose from the need for auxiliary students who attend the discipline of Ordinary Differential Equations in engineering courses and a degree in mathematics to expand their knowledge regarding the resolution of Differential Equations. It is intended to show a method to solve Differential Equations through Power Series as the main objective. The research is based on a bibliographic character sequence. Higher education books on Differential Equations with Application in Modeling, Elementary Differential Equations and Contour and Calculation Problems and Course Conclusion Works were used as a research source for bibliographical complementation. We recall some concepts considered prerequisites to the theme of the work, define and demonstrate theorems on Sequences and Series, Power Series, in addition to many other fundamental theorems on Taylor and Maclaurin functions, Frobenius and Bessel Equations and also Differential Equations. In this perspective, the present work has its contributions, a presentation of didactic material complementary to the study of Ordinary Differential Equations of Second Order. It is concluded then that the proposed method is effective in solving conventional equations, considering that other methods are not successful, or are not qualified to be used in Differential and Integral Calculus.

KayWord: Power Series, Taylor Polynomial, Sequences.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Siglas

EDO	Equação Diferencial Ordinária

Introdução

O uso de séries infinitas para solucionar Equações Diferenciais é um método clássico para resolver explicitamente equações diferenciais ordinárias, e ainda é ensinado em muitos cursos de Ciência exatas e Engenharia. A razão para isso é que as Equações Diferenciais Ordinárias desempenham um papel importante nesses campos. Funções de grande importância no campo da física e matemática são as soluções de equações diferenciais de segunda ordem.

A escolha do objeto de estudo se deu observando a necessidade de auxiliar o aluno que cursa a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias nos cursos de engenharias e licenciaturas em matemática a ampliar seus conhecimentos no que se refere a resolução de Equações Diferenciais.

Considerando a grande importância que o estudo tem nas disciplinas de Cálculo auxiliando ou até mesmo sendo a opção mais viável para chergar a uma solução mais precisa é que debruçamos a estudar um método alternativo para resolver Equações Diferenciais através de Séries de Potências. E para alcançar esse objetivo geral foram realizados alguns objetivos específicos.

No primeiro capítulo, a discussão se dá em torno do estudo das sequências, suas definições e as propriedades dos limites. Portanto, com a finalidade de entrar no tema principal estes foram os tópicos abordados na primeira seção, assim como alguns teoremas que são fundamentais para o desenvolvimento das séries de potências.

No segundo capítulo, iniciamos os conceitos de séries. O problema principal da teoria das séries é determinar a condição necessária para a convergência ou não. Nesta seção, estabeleceremos alguns critérios de convergência de uma série que, em geral, são consequências dos resultados referentes à convergência das sequências.

No terceiro capítulo, foram representadas funções elementares do cálculo como séries de potências que são as séries cujo termos compreendem potências de uma variável x, como também as séries de Taylor e Maclaurim.

No último capítulo, apresentaremos métodos que nos permite aproximar funções pelo polinômios de Taylor e Maclaurin. Em seguida veremos resolução de EDO por série de potência e por final as aplicações por meio das equações de Frobenius e Bessel.

1. Sequências

Neste capítulo iremos tratar do estudo de Sequências, veremos suas definições, teoremas e as Propriedades dos Limites. Para isso utilizaremos os escritos e exemplos dos livros de James Stewart (2013), Munem e Foulis (1982).

1.1.Definições sobre sequências

A palavra sequência é usada em linguagem corrente para significar uma sucessão de coisas dispostas numa ordem definida. Aqui, nós estamos interessados em sequencia de números como:

1, 3, 5, 7, 9 ou

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...

Cada número que aparece na sequência é chamado de *termo* da sequência. Uma sequência tendo apenas um número finito de termos (assim como a sequência 1, 3, 5, 7, 9) é chamado de $sequncia\ finita$. Observe que a sequência 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... (cujos termos são os "quadrados perfeitos" dispostos em ordem crescente) envolve um infinito número de termos é portanto *sequência infinita*. É claro, não podemos listar *todos* os termos de uma sequências infinita; por isso, nós lançamos mão da conversão de escrever uns poucos primeiros termos e então colocamos os três pontos para significar "e assim por diante".

Uma **sequência** de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real a_n, chamado de **n-ésimo** termo da sequência.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n...$$

O número a_1 é chamado *primeiro termo*, a_2 é o *segundo termo* e, em geral, a_n é o n-ésimo *termo*. Podemos lidar exclusivamente com sequencias infinitas e, assim, cada termo a_n terá um sucessor a_{n+1}. A fim de especificar a sequência é suficiente fornecer uma regra ou fórmula para o n-ésimo termo a_n. Por exemplo, a sequência, cujo n-ésimo termo é dado pela fórmula $a_n = 3n - 1$, tem primeiro termo $a_1 = 3(1) - 1 = 2$; segundo termo $a_2 = 3(2) - 1 = 5$; e assim sucessivamente. A sequência resultante é

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ..., 3n - 1, ...$$

É importante perceber que uma sequência é mais que uma mera coleção de número; de fato, os números numa sequência aparecem dentro de uma ordem definida e também repetições desses números são permitidas. Por exemplo, as seguintes sequências são perfeitamente legítimas:

$$1, -1, -1, 1, -1, ..., (-1)^{n+1}$$
e
$$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ..., 0, ...$$

As vezes uma listagem de uns poucos termos de uma sequência indica sem deixar qualquer dúvida a regra ou fórmula que determina o termo geral. **São exemplos:**

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., (a_n) = n, ...$$

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., (a_n = 2n),\ ...$$

$$-\tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{9}, -\tfrac{4}{27}, \tfrac{5}{81}, ..., \tfrac{-(1)^n \cdot (n+1)}{3^n},\ ...$$

$$0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{n-3},\ ...$$

Entretanto, muitas vezes pode tornar-se muito difícil, se não impossível, determinar a regra geral desejada por meio de um exame do exemplo numérico formado por alguns termos. Quando existe uma leve dúvida, a solução é especificar explicitamente o termo geral.

Dentro de um tratamento matemático rigoroso, uma sequência é definida como uma função f cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Então $f(1)$ é chamado de *primeiro termo*, $f(2)$ o *segundo termo*, em geral $f(n)$ é chamado de n-ésimo *termo* da sequência f. Desse ponto de vista, a sequência

$$3, \tfrac{21}{4}, \tfrac{17}{3}, \tfrac{93}{16}, ..., 6 - \tfrac{3}{2^n}, ...$$

seria indentificada por meio da função f cujo domínio são os inteiros positivos e definida por $f(n) = 6 - (\frac{3}{n^2})$.

A definição de uma sequência como função não tem apenas a vantagem da precisão técnica, mas também permite a aplicação de muitas das ideias previamente desenvolvidas para funções diretamente nas sequências.

Nós usamos a notação $\{a_n\}$ como simbologia para sequência cujo n-ésimo termo é a_n.

1.2.Limite de uma Sequência

A ideia de limite é fácil de ser captada intuitivamente. Por exemplo, imagine uma placa metálica quadrada que se expande uniformemente porque está sendo aquecida. Se x é o comprimento do lado em centímetros, a área da placa é dada por A$=x^2$. Evidentemente, quanto mais x se avizinha de 3, a área A tende a 9 centímetros quadrados. Expressamos isso dizendo que quando x se aproxima de 3, x^2 se aproxima de 9 centímetros quadrados como um *limite*. Simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

onde a notação "$x \to 3$" indica que x tende a 3 e lim significa "O limite de".

Sabemos que, no conjunto dos números reais, podemos sempre escolher um conjunto de números segundo qualquer regra preestabelecida.

Analisemos os seguintes exemplos de sucessões numéricas.

(1) $1, 2, 3, 4, 5, ...$

(2) $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, ...$

(3) $1, 0, -1, -2, -3, ...$

(4) $1, 3/2, 3, 5/4, 5, 7/6, 7, ...$

Na sucessão (1), os termos tornam-se cada vez maiores sem atingir um LIMITE. Dado um número real qualquer, por maior que seja, podemos sempre encontrar, na sucessão, um termo maior. Dizemos então que os termos dessa sucessão tendem para o infinito ou limite da sucessão é infinito.

Denota-se

$n \to +\infty$

Na sucessão (2) os termos crescem, mas não ilimitadamente. Os números aproximam-se cada vez mais do valor 1, sem nunca atingirem esse valor. Dizemos que

$n \to 1$

De maneira análoga, dizemos que na sucessão (3)

$n \to -\infty$

Em (4) os termos da sucessão oscilam sem tender para um limite.

O cálculo de limites de sequências é realizado de maneira muito semelhante à do cálculo de limite de funções. De fato, os dois processos estão muito relacionados. A definição seguinte expressa a ideia de convergência de uma sequência de forma formal.

Convergência e divergência de uma sequência

Escrevemos $\lim_{x \to \infty} a_n = L$ e dizemos que a sequência $\{a_n\}$ converge para o limite L desde que para cada número positivo ε, existe um inteiro positivo N (possivelmente dependente de ε) tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ sempre que } \geq N$$

Uma sequência que converge para limite é chamada sequência *convergente*, enquanto uma sequência que não converge é dita *divergente*.

Exemplo 1.1. Analisando o comportamento da sequência $\{10^{1-n}\}$ quanto a convergência ou divergência. Se converge, calculamos seu limite.

Substituindo n pelos os valores $1, 2, 3, 4, 5$ encontramos os seguintes valores:
Para $n = 1 \to \{10^{1-1}\} \to \{10^0\} \to \mathbf{1}$
Para $n = 2 \to \{10^{1-2}\} \to \{10^{-1}\} \to \mathbf{\dfrac{1}{10}}$
Para $n = 3 \to \{10^{1-3}\} \to \{10^{-2}\} \to \mathbf{\dfrac{1}{100}}$
Para $n = 4 \to \{10^{1-4}\} \to \{10^{-3}\} \to \mathbf{\dfrac{1}{1000}}$
Para $n = 5 \to \{10^{1-4}\} \to \{10^{-4}\} \to \mathbf{\dfrac{1}{10.000}}$
Logo, a sequência é

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10.000}, \ldots, \frac{1}{10^{n-1}}, \ldots$$

e está claro que os termos estão se tornando cada vez menores. Por escolha de n suficientemente grande, nós podemos fazer $[1/10^{n-1} - 0] = 1/10^{n-1}$; daí, a sequência converge para o limite 0.

Teorema 1.2 (Convergência de sequências e funções)**.** Seja a função f definida no intervalo $[1, \infty)$ e define-se a sequência $\{a_n\}$ por $a_n = f(n)$ para cada inteiro positivo n. Então, se $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$. Segue-se que $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = L$.

Exemplo 1.3. Mostremos que a sequência $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$ é convergente e enconte seu limite.

Solução:

$$a_n = \frac{\dfrac{3+5n^2}{n^2}}{\dfrac{n+n^2}{n^2}} = \lim_{n+\to\infty} \frac{\left(\dfrac{3+5n^2}{n^2}\right)}{\left(\dfrac{n+n^2}{n^2}\right)} = \lim_{n+\to\infty} \frac{\dfrac{3+5n^2}{n^2}}{\dfrac{n+n^2}{n^2}} = \lim_{n+\to\infty} \frac{5+0}{1+0} = 5$$

A sequência converge para o infinito e tem limite 5. □

Propriedades básicas dos limites de sequências

Teorema 1.4. Suponha que as sequências a_n e b_n convergem para os limites A e B, respectivamente, e que c é uma constante. Então

1. $\lim\limits_{n \to x} c = c$

2. *Regra da multiplicação por constante*:
$\lim\limits_{n \to +\infty} ca_n = c \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = cA$

3.*Regra da soma*:
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)+\left(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\right)=A+B$

4.*Regra da diferença*:
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)-(\lim\limits_{n\to\infty}b_n)=A-B$

5.*Regra do produto* :
$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_n)=\left(\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty}b_n\right)=AB$

6.*Regra do quociente*:
$\lim\limits_{n+\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n+\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n+\to}b_n}=\dfrac{A}{B}$

7.*Regra da potenciação*:
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c}{n^k}=0$, se k é uma constante positiva.

8.*Regra do quociente*:
Se $|a|<1$, então $\lim\limits_{n+\to\infty}=0$. Se $|a|>1$, então a^n *diverge*.

Convergência de sequências monótonas e limitadas.

Teorema 1.5. Toda sequência crescente limitada superiornmente é convergente. Analogamente, toda sequência decrescente limitada inferiormente é convergente.

Exemplo 1.6. Usando o teorema 2 para mostrar que a sequência $\left\{\dfrac{n}{e^n}\right\}$ é convergente vemos,

Considere a função $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ e observe que $f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}<0$ para $x>1$; daí f é decrescente em $[1,\infty)$. Segue-se que $f(n)>f(n+1)$ para todo inteiro positivo n; isto é, a sequência $\{n/e^n\}$ é decrescente, Já que todos os tempos termos da sequência são positivos, segue-se que ela é limitada inferiormente pelo o número 0. Daí, pelo o teorema 2, a sequência converge.

Teorema 1.7. O limite de uma sequência crescente (respectivamente, decrescente) convergente é uma cota superior (respectivamente, uma cota inferior) para a sequência.

Provemos somente a parte do teorema relativo a sequência crescente, já que a prova para sequência decrescente é completamente análoga. Assim, suponhamos que $\{a_n\}$ é monótona crescente e que $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=L$. Devemos provar que todos os termos da sequência são menores ou iguais a L. Se não fosse assim, haveria pelo menos um termo, digamos

a_q, com $L < a_q$. Assim, seja $\varepsilon = a_q - L$, tal que $\varepsilon > 0$. Pela definição, existe um inteiro positivo N tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ se verifica sempre que $n \geqslant N$.

Agora, escolhamos o inteiro n maior que q e N. Já que $q < n$, segue-se que $a_q \leqslant a_n$, assim como $L < a_q \leqslant a_n$ e $a_n - L > 0$. Consequentimente,

$$a_n - L = |a_n - L| < \varepsilon = a_q - L,$$

do que segue-se que $a_n < a_q$, contrariando o fato que $a_q \leqslant a_n$. Portanto, a suposição de que existe um termo a_q com $L < a_q$ leva a uma contradição. Segue-se que nenhum termo como a_q pode existir, logo L é uma cota superior para a sequencia e o teorema está provado.

2. Séries

O problema principal da teoria das séries é determinar se uma série é convergente ou não. Nesta seção, estabeleceremos alguns critérios de convergência de uma série que, em geral, são consequências dos resultados referentes à convergência das sequências, para isso utilizaremos os escritos e exemplos dos livros de James Stewart, Eliezer Batista, Elisa Zunko Toma, Márcio Rodolfo e Fernandes, Silvia Martini de Holanda Janescha.

2.1.Sequências de Somas Parciais

Em geral, se tentarmos somar os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obtemos uma expressão da forma

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

que é denominada uma **série infinita** (ou apenas **série**) e é denotada, por simplicidade, pelo símbolo

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \text{ ou } \sum a_n$$

Faz sentido falar sobre a soma de uma quantidade infinita de termos? Seria impossível encontrar uma soma finita para a série

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n...$$

porque, se começarmos adicionando os termos, obteremos as somas cumulativas 1,3,6,10,15,21,... e depois do n-ésimo termo, obtemos $n\,(n+1)\,/2$, que se torna muito grande à medida que n aumenta.

Contudo, se começarmos a somar os termos da série

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + ... + \tfrac{1}{2^n} + ... = 1$$

Usamos uma ideia parecida para determinar se uma série geral tem uma soma ou não. Considerando as **somas parciais**

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$

e em geral,

$$s_n \quad = \quad a_1 + a_2 + a_4 \cdots a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Essas somas parciais formam uma nova sequências $\{s_n\}$, que pode ou não ter um limite. Se $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir (como um número finito), então, como no exemplo anterior, o chamamos soma da série infinita $\sum a_n$.

2.2.Séries convergentes e divergentes

Definição 2.1. Dada uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...$, denotada por S_n sua n-éssima soma parcial:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Se a sequência $\{S_n\}$ for convergente e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$ existir como um número real, então a série $\sum a_n$ é chamada **convergente**, escrevemos

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = S \text{ ou } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

O número S é chamado a **soma** da série. Se a sequência (S_n) é divergente, então a série é chamada **divergente**.

Assim, a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais. Desse modo quando escrevemos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, queremos dizer que, somando um número suficiente de termos da série, podemos chegar tão perto quanto quisermos do número S. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

(a) *Série Geométrica*

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ em que o termo geral é $a_n = r^{n-1}$ denomina-se *série geométrica de razão r*. Neste caso as somas parciais são dadas por:

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1},$$

onde a e r são números reais fixos, diferentes de zero.
Cada termo é obtido a partir do anterior, multiplicado-se pela **razão comum** r.

Vamos deduzir aqui a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica que é a e-nésima soma parcial da série:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}.$$

Multiplicando-se os dois membros da igualdade por r obtemos:

$$rS_n = ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ar^n.$$

Subtraindo-se rS_n de S_n obtemos:

$$S_n - rS_n = (ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ar^n) = a - ar^n,$$

ou

$$(1 - r)\,S_n = a\,(1 - r_n).$$

$$\text{Para } r \neq 1 \text{ temos: } S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Resumindo os resultados da **série geométrica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar_{n-1} = a + ar + ar^2 + ...$$

é convergente se $|r| < 1$ e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar_{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1$$

Se $|r| \geq 1$, a série geométrica é divergente.

Exemplo 2.2. Para encontrar a soma da série geométrica abaixo fazemos,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3}{2^n} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + ... + \frac{3}{1024} + ...$$

O primeiro termo é $a = \dfrac{3}{2}$ e a razão é $r{=}\dfrac{1}{2}$. Como $r = 1 \in\,]-1, 1[\, =$ então a série é convegente. O valor da soma da série é:

$$S = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

(b) *Série harmônica*

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ recebe o nome de série harmônica devido a semelhança de seus termos aos *nós* em uma corda vibrando (nota musical). Por exemplo, $1/2$ produz um harmônico igual ao dobro da frequência fundamental, $1/3$ produz um harmônico igual ao triplo da frequência fundamental e assim por diante.

A série harmônica, embora possua a condição necessária para convergência, é uma série divergente. A divergência da série hamônica não é trivial. Sua lenta divergência se tornará evidente quando examinamos suas somas parciais com maior detalhe. na verdade, vamos mostrar que a sequência de somas parciais S_n da série harmônica não converge, pois admite subsequências divergentes. Para isso, vamos considerar as somas $S_2, S_4, S_8, S_{16}, S_{32}, ...$ cujos índices são sempre potências de 2, formando a subsequência S_{2^n} de S_n. Temos que

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2}$

$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) =$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$

$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) +$
$\left(\frac{1}{8} + ... + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + ... + \frac{1}{16}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}$

Similarmente, $S_{32} > \frac{5}{2}$, $S_{64} > 1 + \frac{6}{2}$, e, em geral,

$$S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

Isso mostra que $S_{2^n} \to \infty$ quando $n \to \infty$ e assim $\{S_n\}$ é divergente. Portanto a série harmônica diverge

(c) *Série Telescópica*

Uma série do tipo $(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + ... + (b_n - b_{n+1}) + ...$ em que os termos se encaixam é representada simbolicamente por $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ e é denominada *série telescópica*. A n-ésima soma parcial dessa série é:

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + ... + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1},$$

de onde deduzimos que:

- Se $b_n \to b$, então $S_n \to b_1 - b$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ é convergente e tem soma $b_1 - b$;
- Se a sequência $\{b_n\}$ diverge, então a sequência $\{S_n\}$ e, consequentemente, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ também diverge.

Como, ilustração, vamos investigar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} log\left(\frac{n}{n+1}\right)$. Em primeiro lugar observamos que a série se escreve sob a forma $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$, como b_n =log$n$, e, portanto, trata-se de uma série telescópica. Como a sequência b_n =log$n$ é divergente (tem limite ∞), então s série de encaixe também diverge. Outra série que se enquadra neste modelo é a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. Essa é uma série geométrica e, assim, voltamos à definição de uma série convergente e calculamos as somas parciais.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

Podemos simplificar essa expressão se usarmos a decomposição por frações parciais

$\frac{1}{(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ então, temos

$\mathrm{s}_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$

$s_n == \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$s_n == 1 - \dfrac{1}{n+1}$

e, dessa forma, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$
Portanto, a série dada é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1$$

(d) *Teste da Integral*

Suponha que f seja uma função conínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f\,(n)$. então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} f\,(x)\,dx$ for convergente. em outras palavras:

(i) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f\,(x)\,dx$ for convergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\displaystyle\int_1^{\infty} f\,(x)\,dx$ for divergente, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo 2.3. A função $f(x) = x^{-3}$ é continua, positiva, e decrescente em $[1, \infty)$, então o teste integral se aplica.

$$\int_1^{\infty} x^{-3}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} x^{-3}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{-3}}{-2}\right]_1^t = \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Esta integral imprópria é convergente, logo, é convergente pelo teste da integra.

(e)*p-séries*

Uma classe importante de séries numéricas é aquela constituída das séries do tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, que levam o nome de p-séries e que são bastante utiizadas como séries de prova nos critérios de comparação. O termo geral $a_n = 1/n^p$ tem limite 1, quando $p = 0$, limite ∞, quando $p < 0$. Em ambos os casos o critério do $n-$ésimo termo estabelece da divergência da série. No caso $p > 0$ a convergência das $p-$séries será determinada pelo critério da integral e iniciamos a investigação recordando algumas integrais impróprias elementares. Se $p > 0$,a função $f\,(x) = 1/x^p$, definida para $x \geq$, atende às condições do critério da integral e temos:

(a) se $p = 1$, então

$$\int_1^\infty (1/x)\,dx = \lim_{B\to\infty} \log B = \infty$$

(b) $p \neq 1$, então

$$\int_1^\infty (1/x^p)\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_1^B x^{-p}dx = \lim_{B\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^B = \frac{1}{-p+1} \lim_{B\to\infty} \left(B^{1-p} - 1\right) =$$

$$\infty, se\ 0 < p < 1$$
$$1/(1-p)\ se\ p > 1$$

Assim, a integral imprópria $\int_1^\infty (1^p)\,dx$ converge apenas quando $p > 1$ de onde deduzimos, pelo critério da integral, que a p-série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge quando p $>$ 1 e diverge quando p $\leq$ 1.

(f) *Teste da Divergência*

Teorema 2.4. Se $\lim a_n$ não existir ou se o $\lim a_n \neq 0$ então a série $\sum a_n$ será divergente.

Exemplo 2.5. Observemos a divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{6n^4+3}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{6n^4+3} = \lim_{n\to\infty} = n^4 \left(\frac{n^4}{6n^4+3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6+3/n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6+0} = \frac{1}{6} \neq 0$$

Desse mode, a série diverge pelo Teste para Divergência.

(g) *Teste da Razão*

O Teste da Razão é muito utilizado para determinar se uma série dada é absolutamente convergente.

(i) Se o $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente.

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $n \to \infty \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, o Teste da razão é inconclusivo, ou seja, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\sum a_n$.

Não se prenderemos a demostração do Teste da Razão. Para aqueles que querem se aprofundar a demostração se encontra no livro de James Stewart, volume II.

Exemplo 2.6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^3}{4^{n+1}}}{\frac{n^3}{4^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^3}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n^3}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^3}{4^n \cdot 4} \cdot \frac{4^n}{n^3}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^3}{4n^3}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^3}{4n^3}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{4n^3}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{4}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1+0}{4} =\right| = \frac{1}{4} < 1 \text{ (Logo, converge)}$$

(h) *Teste da Comparação*

Suponhamos que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos. Se,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

Em que c é um número positivo e finito, por conseguinte ambas as séries ou divergem ou convergem.

A série de comparação no limite é $\sum a_n$ e $\sum b_n$, $a_n > 0, b_n > 0$.

Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0, c \in \mathbb{R}$, então ambas as séries convergem ou ambas divergem.

Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge.

Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge.

Exemplo: Testando se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ é divergente ou convergente.

$a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$ e $b_n = \dfrac{1}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n - 1} \cdot \frac{2^n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 = 1 > 0$$

O limite de uma constante é igual a própria constante. Como $1 > 0$, ambas as séries convergem ou ambas divergem. Analisando a convergência da série $b_n = \dfrac{1}{2^n}$

$$b_n = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

Vemos que é uma Série Geométrica de razão $r = \dfrac{1}{2}$. Uma Série Geométrica é convergente se $|r| < 1$. Logo, a série estudada é convergente.

(i) *O Teste da Raiz*

(i) Se o $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o Teste da raiz não é conclusivo.

Se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, então a parte (iii) do teste da Raiz diz que o teste não dá informação. A série $\sum a_n$ pode convergir ou divergir. (Se L=1 no Teste da Razão, não tente o Teste da Raiz, porque L será novamente 1. E se $L = 1$ no Teste da Raiz, não tente o Teste da razão, pois ele também falhará.)

Exemplo 2.7. Analisando o teste da convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^2+3}{5n^2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n^2+3}{5n^2}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3}{5n^2}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{10n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} < 1 \text{ (logo, converge)}$$

Como o limite é igual a $\dfrac{1}{5} < 1$, logo a série converge.

(j) *Série Alternada*

Uma série alternada é aquela cujos termos alternam entre positivos e negativos. De modo geral, podemos escrever uma série alternada como:

$$\sum (-1)^n b_n \text{ ou } \sum (-1)^{n+1} b_n,$$

em que b_n são todos não negativos.

Teorema 2.8. Se uma serie alternada satisfazer

(i) $b_{n+1} \leq b_n$, para todo n,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,

então a série é convergente.

Abaixo estão dois exemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos n\pi}{n}$$

3. Séries de Potências

Neste capítulo representaremos as funções elementares do cálculo como séries de potências, que são as séries cujo termos compreendem potências de uma variável x. Ao mesmo tempo apresentaremos uma técnica que nos permite aproximar funções por polinômios. Utilizaremos os escritos de James Stewart, Boyce e Diprima e Dennis G. Zill.

3.1.Definição de séries de potências

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma variável e c_n são constantes chamadas coeficientes da série. Para cada x fixado, a série é uma série de constantes que podemos testar quanto a convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros valores de x. A soma da série é uma função

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

cujo domínio é conjunto de todos os x para os quais a série converge. Observe que f se assemelha a um polinômio, a única diferença é que f tem infinitos termos.

Por exemplo, se tomarmos $c_n = 1$ para todo n, a série de potências se torna a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que converge quando $-1 < x < 1$ e diverge quando $|x| \geq 1$

Em geral, a série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots$$

é chamada uma série de potências em $(x-a)$ ou uma série de potências centrada em a ou uma série de potências em torno de a. Observe que, ao escrevermos o termo correspondente a $n = 0$, adotamos a convenção de que $(x-a)^0 = 1$, mesmo quando $x = a$. Observe também que, quando $x = a$, todos os termos são 0 para $n \geq 1$ e assima série de potências sempre converge quando $x = a$.

Exemplo 3.1. Verificando os valores de x para os quais a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nx^n}{5^n}$ é convergente, temos,

Usando o teste da razão, vejamos o seguinte:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{a+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(n+1)x^{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{2nx^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(n+1)x^n \cdot x}{5^n \cdot 5} \cdot \frac{5^n}{2nx^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{5}$$

Pelo teste da razão, a série anterior é convergente se $L < 1$. Logo, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{5} < 1 \to |x| < 5$$

Complementarmente, utilizamos o teste da razão provando que a série é divergente para $L > 1$, isto é, para $|x| > 5$. Entretando, para $L = 1$ (que equivale a $|x| = 5$) o teste da razão não apresenta prova conclusiva. Em outras palavras, para $L = 1$, o teste da razão não pode ser usado para provar a convergência de uma série. Assim, precisamos provar a convergência ou divergência da série para $|x = 5|$ usando outras estratégias.

Para $L = 1 \Rightarrow \frac{|x|}{5} = 1 \Rightarrow x = \pm 5$

Para $x = 5 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nx^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n5^n}{5^n} = n$

Nesse caso a série diverge e pode ser verificado usando a propriedade:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Para $x = -5 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nx^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n\,(-5)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, n$

A série também diverge e é possível verificar usando a propriedade:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left((-1)^n\, n \right) = \pm\infty$$

Logo, a série em estudo converge para o intervalo aberto $(-5, 5)$.

3.2. Teoremas sobre séries de potências

Teorema 3.2. Para dada série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n$, existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$.

(ii) A série converge para todo x.

(iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$

O número R no caso (iii) é chamado de raio de convergência da série de potências. Por convenção, o raio de convergência é $R = 0$ no caso (i) e $R = \infty$ no caso (ii). O intervalo de convergência de uma série de potências é aquele que consiste em todo os valores de x para os quais a série converge. No caso (i) o intervalo consiste em apenas um único ponto a. No caso (ii) o intervalo é $(-\infty, \infty)$. No caso (iii) observe que a desigualdade $|x - a| < R$ pode ser reescrita como $a - R < x < a + R$. Quando x é uma extremidade do intervalo, isto é, $x = a \pm R$, qualquer coisa pode acontecerer. A série pode convergir em uma ou ambas as extremidades ou divergir em ambas as extremidades. Então, no caso (iii) existem quatro possibilidades para o intervalo mde convergência:

$$(a - R, a + R) \qquad (a - R, a + R] \qquad [a - R, a + R) \qquad [a - R, a + R]$$

Exemplo 3.3. Analisando o raio e o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n x^n}{n+3}$

$$a_n = \frac{(-5)^n x^n}{n+3} = \left| \frac{(-5)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{n+4}} \cdot \frac{\sqrt{n+3}}{(-5)^n x^n} \right| = \left| -5x\sqrt{\frac{n+1}{n+4}} \right| =$$

$$5\sqrt{\frac{1 + (1/n)}{(1 + 4/n)}}\,|x| \to 5|x| \text{ quando } n \to \infty$$

Pelo teste da razão, a série converge se $5\,|x| < 1$ e diverge se $5|x| > 1$. Logo, ela converge se $|x| < \dfrac{1}{5}$ e diverge se $|x| > \frac{1}{5}$. Isso significa que o raio de convergência é $R = \frac{1}{5}$.

É sabido que a série é convergente no intervalo $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$, mas devemos testar a convergência nas extremidades do intervalo. Se $x = -\frac{1}{5}$ a série converge pelo teste da integral (também podemos observar que converge por se tratar de uma série p). Vejamos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)(-\frac{1}{5})^n}{\sqrt{n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

Se $x = \dfrac{1}{5}$ a série é:

$$\sum_{n}^{\infty} = \frac{(-5)^n(\frac{1}{5})^n}{\sqrt{n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$$

e converge pelo teste da série alternada. Logo, a série converge quando $-\frac{1}{5} < x \leq \frac{1}{5}$; assim, o intervalo de convergência é $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$.

Exemplo 3.4. Analisando o raio e o intervalos de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x - 1)^n$ temos, Seja $a_n = n!(2x-1)^n$. Então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!(2x-1)^{n+1}}{n!(2x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|2x-1| = 0 < 1$$

se, e somente se, $|2x-1| = 0$, ou seja, $x = \frac{1}{2}$. Então, o raio de convergência é $R = 0$. E o intervalo de convergência é $\frac{1}{2}$.

3.3.Representações de Funções como Série de Potências

Nesta seção aprenderemos como representar certos tipos de funções como somas de séries de potências pela manipulação de séries geométricas ou pela derivação ou pela integração de tais séries. Você pode estar se perguntando por que queremos expressar uma função conhecida como uma soma infinita de termos. Veremos mais tarde que essa estratégia é útil para integrar funções que têm antiderivadas elementares, para resolver as equações diferencias e para aproximar funções por polinômio.

Começaremos observando a equação abaixo:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Exemplo 3.5. Analisando a representação e o intervalo de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n x^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Aplicando o Teste da Razão

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-2)^{n+1}x^n}{\sqrt{n+2}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{(-2)^n x^n}\right| = -2x\left|\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right| = 2\sqrt{\frac{1+1/n}{1+2/n}}\cdot|x| \Rightarrow 2\,|x|$$

(i) Converge se $|x| \ < 1/2$

(ii) Diverge se $|x| > 1/2$

Portanto $R = \dfrac{1}{2}$ e o intervalo de convergência contém $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Vamos testar os extremos para onservar a convergência dos pontos.

Aplicando o teste da p-serie, com $p = \dfrac{1}{2} < 1$, temos

Para $x = -\dfrac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1}}{3} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

Logo, no ponto $-\dfrac{1}{2}$ a função diverge.

Aplicando o teste para Série Alternada, temos

Para $x = \dfrac{1}{2}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n(1/2)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ Logo, no ponto $\dfrac{1}{2}$ a função converge.

Portanto, o intervalo de convergência é $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

3.4.Derivação e Integração de Série de Potências

A soma de uma série de potências é uma função $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n$ cujo dominio é o intervalo de convergência da série. Gostaríamos de poder derivar e integrar tais funções, e o teorema a seguir diz que podemos fazer isso por derivação ou integração de cada termo individual na série, como faríamos para um polinômio. Isso é chamado derivação e integração termo a termo.

Teorema 3.6. Se a série de potências $\sum c_n\,(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por (STEWART, James. Vol 2. Pag 675).

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

(i) $f'(x)c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$

(ii)$\int f(x)\; dx = C + c_0(x-a) + c_1\dfrac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots = C + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

O raio de convergência das séries de potências nas Equações (i) e (ii) são ambos R.

3.5.Série de Taylon e Maclaurin

Lembramos que dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, define-se sua série de Taylor ao redor do ponto $x = a$ como

$$T_a f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Como o lado direito da série de taylor e uma série de potências, podemos calcular o raio de convergência usando algum dos métodos estudados anteriormente. Lembrando que $f^{(n)}(a)$ denota a n-éssima derivada de f calculada no ponto a.

A série de MacLaurim, nada mais é do que a série de taylor ao redor de $x = 0$; isto é,

$$T_a f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{}$$

Iniciamos supondo que f seja qualquer função que possa ser representada por uma série de potências:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots |x-a| < R \tag{3.1}$$

Vamos tentar determinar quais coeficiente c_n deve aparecer em termos de f. Para começar, observe que, se colocarmos $x = a$ na Equação 1, então todos os termos após o primeiro são 0 e obtermos

$$f(a) = c_0$$

Podemos derivar a série na Equação 3.1 termo a termo:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots |x-a| < R \tag{3.2}$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 3.2 fornece

$$f'(a) = c_1$$

Agora derivamos ambos os lados da Equação 3.2 e obtemos

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots |x-a| < R \tag{3.3}$$

Novamente colocamos $x = a$ na Equação 3.3. O resultado é

$$f(a) = 2c_2$$

Vamos aplicar o procedimento mais uma vez. A derivação da série na Equação 3.3 fornece

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \quad |x-a| < R \tag{3.4}$$

e a substituição de $x = a$ na Equação 3.4 fornece

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Agora você pode ver o padrão. Se continuarmos a derivar e substituir $x = a$, obteremos

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \quad \cdots \quad \cdot nc_n = n!c_n$$

Isolando o $n-$ésimo coeficiente c_n nessa equação, obteremos

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Essa fórmula permanecerá válida mesmo para $n = 0$ se adotarmos as convenções de que $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$. Assim, demonstramos o teorema a seguir.

Teorema 3.7. Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad |x-a| < R \tag{3.5}$$

então seus coeficiente são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f(n)(a)}{n!}$$

Substituindo essa formula para c_n de volta na série, vemos que, se f tiver uma expansão em série de potência em a, então ela deve ser da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + f(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + f(a) + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \tag{3.6}$$

A série na equação 6 é chamada série de Taylor da função f em a (ou em torno de a ou centrada em a). Para o caso especial $a = 0$, a série de Taylor torna-se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{(0)}{2!} x^2 + \cdots \tag{3.7}$$

Desigualdade de Taylor: Se $\left| f^{(n+1)(x)} \right| \leq M$ para $|x - a|$, então o resto $R_n(x)$ satisfaz a desigualdade

$$R_n(x) \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ para } |x - a| \leq d.$$

Pelo teste da razão a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ é convergente para todo x e portanto

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(dn+1)!} = 0.$$

como $0 \leq |R_n(x)| \leq M \dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$, segue pelo teorema do confronto que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} |R_n(x) = 0$,

e consequentemente $\displaystyle\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$.

Polinômio de Taylor Os polinômios são as funções de uma forma de uso fácil, já que os seus valores podem ser obtidos através de simples adições e multiplicações. Diversas vezes, recorre aproximar funções mais complexas por funções polinomiais. Portanto, o Polinômio de Taylor é uma expressão que permite o cálculo do valor de uma função por aproximação no local através de uma função polinomial. Considerando f infinitamente derivável num intervalo contendo um ponto x_0, temos:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2}{2} +) + \frac{f'''(x_0) \cdot (x - x_0)^3}{3!} + \cdots$$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(x)}(x_0) \cdot (x - x_0)}{n!} \right)$$

4. Aproximando Funções por série de Taylor

Um exemplo clássico, mas que nos permite estudar com afinidade o comportamento da aproximação por série de taylor, é o da função exponencial $f(x) = xe^x$. É sabido pela fórmula de Taylor que $f(x)T_n(x) + R_n(x)$, ou ainda que $f(x) \approx T_n(x)$, onde $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$. Avaliando as derivadas da função f ao redor do ponto $x_0 = 0$, temos que:

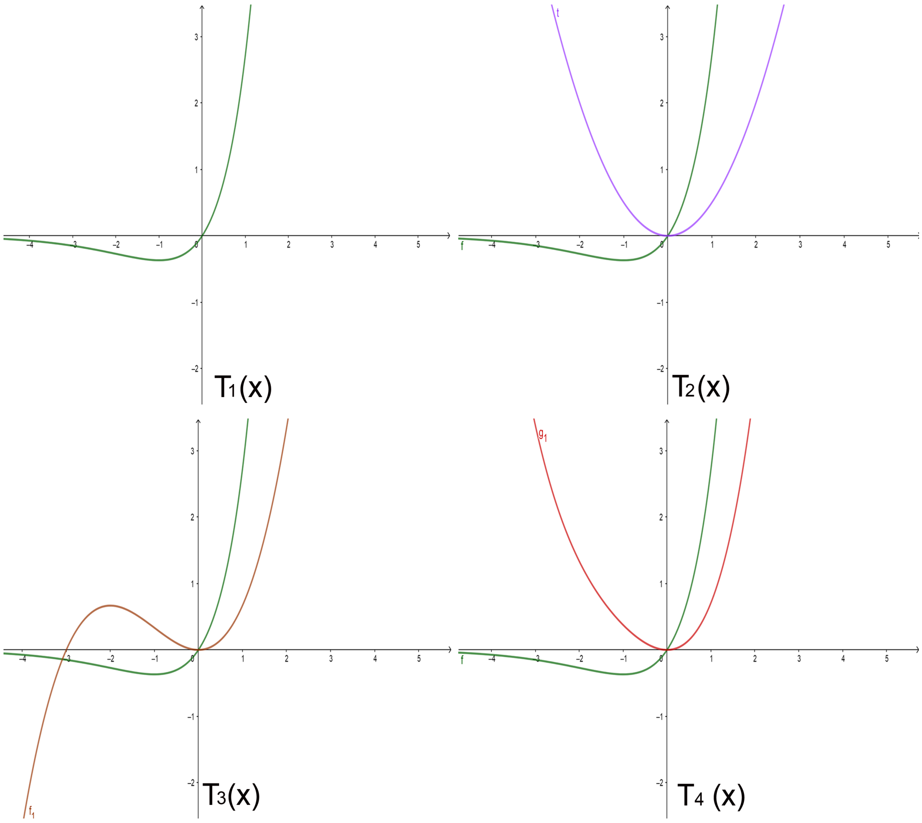
$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(x) &= xe^x \Rightarrow f'(0) = 0 \\
f''(x) &= e^x + e^x x \Rightarrow f''(0) = 1 \\
f'''(x) &= e^x x + 2e^x \Rightarrow f'''(0) = 2 \\
f''''(x) &= 3e^x \Rightarrow f''''(0) = 3
\end{aligned}$$

E assim encontramos os polinômios de Taylor:

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= \frac{x^2}{2!} \\
T_3(x) &= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \\
T_4(x) &= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \\
&. \\
&. \\
&. \\
T_n(x) &= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

Os gráficos abaixo mostram que ao aumentar o valor de n, $T_n(x)$ parece se aproximar da função xe^x. Isto sugere que para n suficientemente grande xe^x seja igual à soma de sua série de Taylor.

De fato, quando n for suficientemente grande a função f será igual a soma de sua série de Taylor próximo ao ponto $x_0 = 0$. Na verdade a aproximação é mais precisa



Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 4.1: Função Exponencial e seus polinômios de Taylor

quando analisamos um intervalo próximo ao ponto em que a série está centrada.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ln(1+x) \Rightarrow f(0) = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1 \\
f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2 \\
f''''(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} \Rightarrow f''''(0) = -6
\end{aligned}
$$

deste modo, encontramos os polinômios de Taylor:

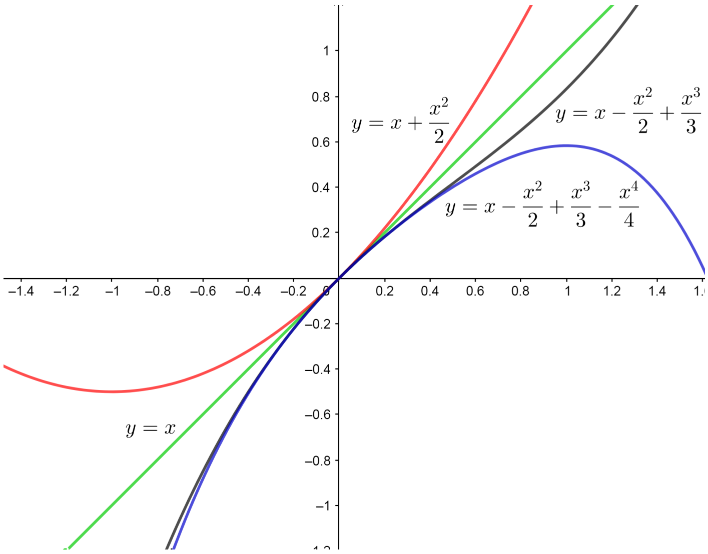
$$
\begin{aligned}
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= x + \frac{x^2}{2} \\
T_3(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \\
T_4(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{T}_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(1)^k x^{k+1}}{k+1}$$

Outro exemplo que também possibilita analisar a aproximação por série de Taylor, é a função logarítmica $f(x) = ln(1+x)$. A reta em verde representa a equação $y = x$. A parábola na cor vermelha representa a equação $y = x + \frac{x^2}{2}$. A equação na cor preta representa a equação $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$. A equação na cor azul representa a equação $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$.

Avaliando as derivadas da função f ao redor do ponto x_0, o gráfico a seguir, evidencia que ao aumentar o valor de n, $T_n(x)$ parece se aproximar da função $ln(1+x)$. Isto significa que para n suficientemente grande $ln(1+x)$ seja igual à soma de sua série de Taylor.



Fonte: O autor

Figura 4.2: Função Logarítmica e seus polinômios de Taylor

4.1.Resolução de EDO por série de potência

Para dar uma idéia do método das séries de potências para resolver equações diferencias ordinária, vamos começar com um exemplo.

Consideremos a equação diferencial

$$y'' + xy' + y = 0$$

procurando uma solução expressa em forma de soma de uma série de potências,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

primeiramente calculamos as derivadas da solução assumida:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \to y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\; a_n x^{n-2}$$

Substituindo y'', y' e y na EDO, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

chamando $k = n - 2$ no primeiro somatório, temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+1} x^k$$

chamando $k = n - 1$ e $k = n$ no segundo e terceiro somatório, encontramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)x^k \text{ e}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$$

como os índices agora estão no mesmo ponto de partida e as potências de x concordam, combinamos os somatórios:

$$y'' + xy' + y = \sum_{n=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k + x\sum_{n=0}^{\infty} a_{k=1}(k+1)x^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$$

em lugar do k, podemos usar novamente o n.

$$y'' + xy' + y = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'' + xy' + y = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'' + xy' + y = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n(n+1) + a_n]x^n$$

desta igualdade que todos os coeficientes se anulam temos,

$$(n+1)[(n+2)a_{n+2}a_n] = 0$$

assim temos (n+2)a$_{n+2} + a_n = 0, ou$

$$\text{a}_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}, \text{ para } n = 1, 2, 3, ...$$

e chamamos essa última igualdade de fórmula de recorrência.

Ao deixar n assumir valores inteiros sucessivos começando com $n = 0$, encontramos

$n = 1 : a_3 = -\dfrac{a_1}{3} = -\dfrac{a_1}{2!}$

$n = 2 : a_4 = -\dfrac{a_2}{4} = -\dfrac{a_2}{4 \cdot 3 \cdot 2!}$

$n = 3 : a = -\dfrac{a_3}{5} = -\dfrac{a_3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}$

e assim por diante, onde a_0 é arbitrário.

Neste segundo exemplo vamos encontrar soluções para $4y'' + y' = 0$ na forma de série de potência em x.

$$\text{Se } y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ então}$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\text{e } y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

Subsituindo as expressões para y'' e y' na equação diferencial, obtemos

$$4y'' + y = \sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Fazendo $k = n - 1$ na primeira série e $k = n$ na segunda, temos (fazendo $n = k + 2$ e $n = k$).

$$4y'' + y = \sum_{n=0}^{\infty} 4(k+2)(k+1) + \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [4(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k] = 0$$

Desta última igualdade, concluímos que

$$4(k+2)(k+1)a_{k+2} + c_k = 0 \text{ ou}$$

$$a_{k+2} = \frac{-a_k}{4(k+2)(k+1)}, \ k = 0, 1, 2, ...$$

Assim

$$\text{Para } k = 0: \qquad 2 = \frac{-a_0}{4.2.1} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 2!}$$

$$\text{Para } k = 1: \qquad 2 = \frac{a_0}{4.3.2} = -\frac{a_1}{2^2 \cdot 3!}$$

$$\text{Para } k = 2: \qquad 4 = \frac{a_0}{2^2.4!}$$

$$\text{Para } k = 3: \qquad a_5 = \frac{a_1}{2^4.5!}$$

$$\text{Para } k = 4: \qquad a_6 = \frac{a_0}{2^6.!}$$

$$\text{Para } k = 5: \qquad a_7 = \frac{a_1}{2^6.7!}$$

e assim por diante. Portanto

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

4.2.Soluções em torno de pontos singulares

Definição 4.1. diferencial linear $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ pode ainda ser classificado como regular ou irregular. A classificação depende novamente das funções P e Q na forma padrão $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

Definição 4.2. Um ponto singular x_0 será chamado ponto singular regular da equação diferencial $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ se as funções $p(x) = (x - x_0)P(x)$ e $q(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$ forem ambas analíticas em x_0. Um ponto singular que não seja regular é chamado ponto singular irregular da equação.

Definição 4.3. Se $x - x_0$ aparece no máximo na primeira potência no denominador de $P(x)$ no máximo na segunda potência no denominador de $Q(x)$, então $x = x_0$ é um ponto singular.

Além disso, observe que, se $x = x_0$ for um ponto singular e se multiplicarmos $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ por $(x - x_0)^2$, a ED original poderá ser posta na forma

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são analíticas em $x = x_0$.

Exemplo 4.4. Vamos classificar e determinar os pontos singulares da equação diferencial

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{(x-1)^2} = 0$$

Os pontos singulares $x = 0$ e $x = 1$ são os pontos singulares da ED.

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)},\ Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

Vamos testar $P(x)$ e $Q(x)$ em cada ponto singular.

Para $x = 0 \rightarrow (x - x_0)P(x) = (x - 0) \cdot \dfrac{1}{x} = \mathbf{-1}$ (analítico em $x_0 = 0$)

$(x - x_0)Q(x) = (x - 0)^2 = (x - 0)^2 \cdot \dfrac{1}{(x-1)^3} = \dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{(x-1)^3}}$ (analítico em $x_0 = 0$)

$x_0 = 0$ (singular regular)

Para $x_0 = 1 \rightarrow (x - x_0)P(x) = (x - 1) \cdot \dfrac{-1}{x} = \dfrac{\mathbf{-x+1}}{\mathbf{x}}$ (analítico em $x_0 = 1$)

$(x - x_0)^2 Q(x) = (x - 1)^2 \cdot \dfrac{1}{(x-1)^3} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x-1}}$ (analítico em $x_0 = 1$)

$x_0 = 1$ (singular irregular)

Para resolver uma equação $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ em torno de um ponto singular regular, empregamos o seguinte teorema.

Se $x = x_0$ for um ponto singular regular da equação diferencial $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, então existirá pelo menos uma solução da forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_0(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n)(x - x_0)^{n+r},$$

onde o número r é uma contante a ser determinada. A série convergirá pelo menos em agum intervalo $0 < x - x_0 < R$

A seguir analisaremos o método de Frobenius, utilizado para ser solução em série de EDO linear em torno de ponto singular regular. Antes de explicar esse método, convém apresentar dois fatos que motivam esse método:

- $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^2 lnx$ são souções de $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ para $x \in (0, \infty)$. Essa EDO tem um ponto singular regular em $x = 0$, em torno do qual, se intentássemos uma série de potências $a_n x^n$ como solução, só obteríamos $y_1 = x^2$, pois o fator lnx na solução y_2 não tem série de Taylor em torno de $x = 0$.

- A EDO $6x^2y'' + 5xy' + (x^2 - 1)y = 0$ tem um ponto singular regular em $x = 0$, mas não possui solução alguma em série de potências em torno desse ponto. Pelo método de Frobenius, podemos obter duas soluções em série com as formas

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} \text{ e } y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1/3}.$$

O método de Frobenius Para resolver uma equação diferencial em torno de um ponto singular regular, empregamos o seguinte teorema devido ao eminente matemático alemão Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917).

Teorema de Frobenius Se $x = x_0$ for um ponto singular regular da equação diferencial, então existirá pelo menos uma solução da forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$$

onde o número r é uma constante a ser determinada. A série convergirá pelo menos em algum intervalo $0 < x - x_0 < R$.

Considerando o problema de resolver a EDO

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

em torno de um ponto regular $x = x_0$. Aqui, pela mesma razão dada, supomos, por simplicidade, mas sem perda de generalidade, que $x_0 = 0$. Pelo chamado método de Frobenius, é sempre possível encontrar uma solução na forma da série (relativa a $x_0 = 0$)

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} \cdots, \text{ com } a_0 \neq 0. \qquad (*)$$

- Os valores de r para os quais a EDO tem solução na forma da série em $(*)$. Esses valores surgem da resolução de uma equação algébrica do 2º grau, denominada equação indicial, cujas soluções r_1 e r_2 são as chamadas raízes indiciais.

- O intervalo de convergência da solução em série obtida.

- A relação de recorrencia para os coeficientes a_n.

Os detalhes do método de resolução será apresentado por meio de exemplo, nos quais $x = 0$ é o ponto singular regular em torno do qual se deseja a solução. Conforme as raízes indiciais, três casos importantes devem ser considerados: caso de raízes indiciais que não diferem por um inteiro, caso de raízes indiciais iguais ou caso de raízes indiciais que diferem por um inteiro positivo. Para compreensão, vamos usar o caso de *raízes indiciais que não diferem por um inteiro*: $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

Neste caso, o método de Frobenius sempre fornece duas soluções linearmente independentes, mas há situações em que ocorrem duas raizes indiciais iguais ou em caso de raízes indiciais que diferem por um inteiro positivo:

Exemplo 4.5. $4xy'' + y' - y = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2}$$

$$4x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r-1)(n+r) a_n x^{n+r-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

$$(4r-2) r a_0 x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \{[\underbrace{4(n+r-1)(n+r) + (n+r)}_{(4n+4r-2)(n+r)}] a_n - a_{n-1}\} x^{n+r-1} = 0$$

$$\underbrace{r(4r-2) a_0 x^{r-1}}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[4n+4r-2)(n+r) a_n - a_{n-1}}_{0}]^{n+r-1} = 0$$

Portanto,

$r(4r-2) = 0$ (equação indicial)$\rightarrow$ $r = 0$ ou $2/4$ (raízes indiciais)
$(4n+4r-2)(n+r)a_n - a_{n-1} = 0$ (relação de recorrência dependente da raiz indicial)

As relações de recorerncias específicas para cada raiz indicial são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{lll} r = 0 & \rightarrow & a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n(4n-2)} \\ ou & & \\ r = \dfrac{2}{4} & \rightarrow & a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n(4n+2)} \end{array} \right._{n \geq 1}$$

As duas relações de recorrências correspondem duas séries distintas, nas quais a_0 permanece arbitrárias:

A série correspondente a $r = 0$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{a_{1-1}}{1(4\cdot 1-2)} = \frac{a_0}{(1)(2)} = \frac{a_0}{2}\\
a_2 &= \frac{a_{2-1}}{2(4\cdot 2-2)} = \frac{a_1}{(2)(6)} = \frac{a_0/2}{12} = \frac{a_0}{24}\\
a_3 &= \frac{a_{3-1}}{3(4\cdot 4-2)} = \frac{a_2}{(3)(10)} = \frac{a_0/24}{30} = \frac{a_0}{720}\\
a_4 &= \frac{a_{4-1}}{4(4\cdot 4-2)} = \frac{a_3}{(4)(14)} = \frac{a_0/720}{56} = \frac{a_0}{40320}
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

Portanto,

$$y_1(x) = x^0(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots) = a_0 1 + x + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{720} + \frac{x^{\ 4}}{40320}\cdots$$

A série correspondente a $r = 2/4$:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{a_0}{1(4\cdot 1+2)} = \frac{a_0}{(1)(6)} = \frac{a_0}{6}\\
a_2 &= \frac{a_1}{2(4\cdot 2+2)} = \frac{a_1}{(2)(10)} = \frac{a_0/6}{20} = \frac{a_0}{120}\\
a_3 &= \frac{a_2}{3(4\cdot 3+2)} = \frac{a_2}{(3)(14)} = \frac{a_0/6}{28} = \frac{a_0}{15040}\\
a_4 &= \frac{a_3}{4(4\cdot 4+2)} = \frac{a_1}{(4)(18)} = \frac{a_0/6}{42} = \frac{a_0}{211680}
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= x^{1/2}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots)\\
y_2(x) &= a_0x^{1/2}(1 + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{120} + \frac{x^3}{5040} + \frac{x^4}{211680})
\end{aligned}
$$

Logo, obtemos duas soluções, cuja combinação linear é a solução geral: $y_1(x) + y_2(x)$

Equação de Bessel Umas das mais importantes EDOs em estudo avançado de matemática aplicada à física e a engenharia é a equação de Bessel. Vamos nesse momento, concentrar nossos estudos para a solução da equação diferencial:

$$x^2y'' + xy' = (x^2 - v)y = 0; (v \geq 0),$$

A equação de bessel não possui uma solução de forma fechada, entretanto, $x = 0$ é um ponto singular regular da equação, é sabido que há pelo menos uma solução da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$. onde $y : x \mapsto y(x)$. Esta equação admite solução da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

com r, $c_0 \neq$, $n = 1, 2, ...$ devem ser determinados. Derivando $y(x)$, termo a termo

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1) x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

substituindo na equação $x^2y'' + xy' + (x^2 - v)y = 0$, teremos

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - v^2 \sum_{n+0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$= c_0(r^2 - r + r - v^2)x^r + r^2 \sum_{n=1}^{n=1} c_n[(n+r)(n+r-1) + (n+r) - v^2]x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}$$

$$= c_0(r^2 - v^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n[(n+r)^2 - v^2]x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} \tag{4.1}$$

do primeiro termo, obtemos a chamada equação indicial

$$r^2 - v^2 = 0$$

as raízes indiciais são

$$r_1 = v_1 \qquad r_2 = -v$$

substituindo $r_1 = v$ e $r_2 = -v$, em 4.1, obtemos

$$x^v \sum_{n=1}^{\infty} c_n[(n+v)^2 - v^2]x^n + x^v \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0$$

$$= x^v \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+2v) x^n + x^v \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}$$

$$= \left[x^v c_1(1+2v)x + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{c_n(n+2v)x^v}_{m=n-2} + x^n \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{c_n x^{m+2}}_{m=n} \right] +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[c_{m+2}(m+2)(m+2+2v) + c_m \right] x^{m+2}$$

portanto, pelo argumento usual, podemos escrever

$$c_1(1+2v) = 0$$

e para $m = 0, 1, 2, \cdots,$

$$(m+2)(m+2+2v)c_{m+2} + c_m = 0$$

ou, equivalente,

$$c_{m+2} = \frac{-m}{(m+2)(m+2+2v)}$$

escolhendo $c_1 = 0$, temos

$$c_3 = c_5 = c_7 = \cdots = 0.$$

agora, para $m+2 = 2n, n = 1, 2, 3, ...$, temos

$$c_2 n = -\frac{c_2 n - 2}{2^2 n(n+v)}$$

dado isso, segue

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (1+v)}$$

$$c_4 = -\frac{c_0}{2^4 \cdot 2! \cdot (2+v)}$$

$$c_4 = -\frac{c_0}{2^4 \cdot 2! \cdot (2+v)(2+v)}$$

$$c_6 = -\frac{c_0}{2^4 \cdot 3 \cdot (3+v)}$$

$$c_6 = -\frac{c_0}{2^6 \cdot 3! \cdot (1+v)(2+v)(3+v)}$$

$$\vdots$$

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^2 n!(1+v(2+v)\cdot \cdot\cdot)(n+v)}$$

da propriedade da função gama

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Assim, temos que

$$\Gamma(1+v+1) = (1+v)\Gamma(1+v)$$

$$\Gamma(1+v+1) = (2+v)(2+v)\Gamma(1+v) = (2+v)(2+v)\Gamma(1+v)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(1+v+n) = (1+v)(2+v)(2+v)(n+v\Gamma(1+v)$$

É uma prática habitual escolher para c_0 um valor específico, isto é

$$c_0 = \frac{1}{2^v\Gamma(1+v)}$$

desta forma é possível concluir que

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+v}n!\Gamma(1+v+n)}$$

e

$$c_{2n-1} = 0$$

tomando valores para $n = 1, 2, 3....$
Dessa maneira, obtemos a seguinte solução para a equação de Bessel

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}$$

4.3.Considerações Finais

Consideramos que os objetivos deste trabalho foram alcançados tendo em vista que o nosso propósito foi promover o estudo a cerca de Equações Diferencial Ordinária de modo a conter também revisão de tais conteúdos e da mesma forma os objetivos específicos foram atingidos, onde contempla o estudo do limite de uma Sequência Numérica, a Convergência e Divergência de funções, representações de funções como Séries de Potências, aproximações de funções por Série de Taylor e aplicação do método de Frobenius e Bessel para resolver equação diferencial em torno de um ponto singular.

Durante esse trabalho encontramos algumas dificuldades para selecionar os materiais utilizados na pesquisa tendo em vista a carência dos mesmos.

A elaboração deste trabalho me proporcionou uma compreensão mais aprofundada do tema apresentado. Nesta perspectiva uma das grandes contribuições desde trabalho é fornece métodos para a resolução de diversos problemas no campo da matemática, na área de engenharia ou em outras áreas que demanda o conhecimento das ciências exatas utilizandos as Séries de Potências.

Referências Bibliográficas

[1] BATISTA, Eliezer; TOMA Elisa Zunko, FERNANDES, Márcio Rodolfo; JANESCH, Silvia Martini de Holanda, *Cálculo II* . Rio de Janeiro-RJ. 2ª ed. Florianópolis, UFSC, 2012.

[2] BASSANEZI, Rodney Carlos.; JUNIOR, Wilson Castro Ferreira, *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo-SP. Harbas, 1988.

[3] FIGUEIREDO, Djalma Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria, *Equações Diferenciais Aplicadas*. Rio de Janeiro-RJ. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1997.

[4] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno*. Rio de Janeiro-RJ. LTC.

[5] CARDOSO, Fernando Cásar *A utilização de séries de potências no cálculo de um valor aproximado para o número pi*. Belo Horizonte-MG. 2011, Tese.

[6] FOULIS, David J.; MUNEM, Mustafa A, *Cálculo*. Vol. 2. LTC. 1ª ed. 1982.

[7] NAGLE, R. Kent; SAFF, Edward B; SNIDER, Arthur David, *Equações Diferenciais* . São Paulo-SP. Pearson Education do Brasil, 2012.

[8] ROSA, Carlos Fabiano, *Série de Taylor e Aplicações*. Florianópolis-SC. Universidade Federal de Santa Catarina, 2013, Tese.

[9] STEWART, James, *Cálculo*. São Paulo-SP: Cengage Learning, 7. ed. 2013.

[10] ZILL, Dennis G., *Equações diferênciais com aplicações em modelagem*. São Paulo-SP. 3ª ed. Cengage Learning, 2016.