INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO ALISON BARBOSA LEITE

CONGRUÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL COM ÊNFASE NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES

CAJAZEIRAS
2021

CONGRUÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL COM ÊNFASE NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza

CAJAZEIRAS
2021

IFPB /Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Catalogação na fonte: Daniel Andrade CRB-15/593

L533c

Leite, Francisco Alison Barbosa

Congruência no ensino fundamental com ênfase na resolução de questões / Francisco Alison Barbosa Leite; orientador João Paulo de Araújo Souza.- 2021.
51 f. : il.

Orientador: João Paulo de Araújo Souza.
TCC (Especialização em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2021.

1. Aritmética 2. Ensino - Matemática 3. Congruências – Geometria 4. Aprendizagem - Matemática I. Título

CDU 511.1(0.067)

FRANCISCO ALISON BARBOSA LEITE

CONGRUÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL COM ÊNFASE NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba – Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Data de aprovação: 18/11/2021

Banca Examinadora:

João Paulo de Araújo Souza.

Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Stanley Borges de Oliveira

Prof. Me. Stanley Borges de Oliveira
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

Valdinês Leite de Sousa Júnior

Prof. Dr. Valdines Leite de Sousa Junior
Universidade Federal do Cariri - UFCA

Documento assinado digitalmente
gov.br
VALDINES LEITE DE SOUSA JUNIOR
Data: 01/12/2021 21:36:19-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

CAJAZEIRAS
2021

Dedico esta monografia primeiramente a Deus, pai do nosso Senhor e salvador Jesus Cristo por sua Graça e por suas benções derramadas em minha vida. Dedico também aos meus pais, Elenilza e Cícero, pelo amor, educação e valores ensinados desde o berço.

Agradecimentos

A Deus, por seu amor inexprimível, pela minha saúde, permitindo que eu trabalhasse, estudasse e escrevesse esta monografia.

Aos meus pais, Elenilza e Cícero, pela motivação e por terem sempre acreditado em mim, não medindo esforços para me ajudarem em todas as etapas da minha vida.

A minha esposa, Dallila Rayara, pelo amor, carinho, paciência, ajuda e incentivos. Não tenho palavras suficientes para expressar neste momento, apenas, Gratidão!

A todos os meus colegas, desde a graduação, em especial a Marcos e a Geovano, grandes amigos.

Ao meu orientador, professor Me. João Paulo de Araújo Souza, pelas correções, incentivo e dedicação a minha pesquisa.

Resumo

O presente trabalho tem como finalidade propor o ensino do conteúdo de Congruências em turmas de Ensino Fundamental – anos finais. A escolha do tema se deu na época dos estágios supervisionados proporcionados pela graduação e pela participação no programa Residência Pedagógica, onde por meio das experiências em sala de aula e dos estudos feitos sobre documentos e índices avaliadores, foi possível perceber uma deficiência educacional em relações a conhecimentos básicos da Matemática. O procedimento metodológico englobou referencial teórico fundamentado a partir de leituras de trabalhos sobre a temática e também pela atuação em sala de aula. Sendo assim, esta monografia se debruça em abordar o estudo de Congruências de forma sistemática, buscando expor noções do conteúdo de forma simples e compreensível no Ensino Fundamental – anos finais. O trabalho é dividido em três tópicos principais, onde discutimos sobre a importância do estudo da Aritmética e o baixo desempenho dos alunos brasileiros, mediante a índices avaliadores. Nos demais tópicos abordamos o conteúdo de Congruências e resolução de questões.

Palavras-Chave: Aritmética. Ensino. Congruências. Aprendizagem.

Abstract

The present coursework aims to propose the teaching of Congruence content in elementary school classes – final years. The theme was chosen through supervised internships provided by graduation and through participation in the Pedagogical Residency program, where through the experiences in the classroom and the studies carried out on documents and evaluative indexes, it was possible to perceive an educational deficiency in relation to basic knowledge of Mathematics. The methodological procedure encompassed a theoretical framework based on readings of works on the subject and also on the performance in the classroom. Therefore, this monograph focuses on approaching the study of Congruences in a systematic way, seeking to expose notions of content in a simple and understandable in elementary school - final years. The work is divided into three main topics where we will discuss the importance of studying Arithmetic and the low performance of Brazilian students through evaluative indexes, in the other topics, we will discuss the content of Congruences and problem solving.

KeyWords: Arithmetic. Teaching. Congruence. Learning.

Sumário

Lista de Figuras

INTRODUÇÃO

O tema desta pesquisa chamou nossa atenção durante a graduação, tanto pela beleza de seus resultados, pois embasam aplicações desde a criptografia até a geração de códigos de barras, quanto pela sua simplicidade, ao basear-se nos elementos básicos da Matemática, dando mais significado a todo o conhecimento que chamamos de Matemática Básica.

Alguns aspectos foram decisivos para a escolha do tema, tais como o desempenho dos alunos, observado durante os estágios supervisionados nas aulas ministradas na época do programa Residência Pedagógica, como também por meio das provas escolares dos sistemas de avaliação (como, por exemplo, a OBMEP), em que percebemos que os mesmos apresentavam notas incompatíveis com o esforço posto por eles nos estudos.

Avaliando essas problemáticas e pondo em paralelo com os temas que servem de base para a compreensão do conteúdo de Congruências, proveio a ideia desta pesquisa. Ao propor o ensino de Congruência, acreditamos que estamos contribuindo para uma abordagem mais efetiva e reforçando os conteúdos mais básicos como Divisão Euclidiana, potenciação e Multiplicação.

Diante disso, pensamos em estabelecer uma proposta de ensino, tendo como objetivo principal propor a exposição de noções básicas de Congruências, a partir do 6° ano do Ensino Fundamental e que, após serem estudadas, sejam de grande valia para a resolução de problemas.

No primeiro capítulo, será feita uma abordagem sobre a importância do estudo da Aritmética e como ela está presente no nosso cotidiano. Em seguida discutiremos sobre resultados obtidos por meio de índices de avaliação e documentos nacionais que evidenciam parte da problemática na educação brasileira, seguiremos com uma breve discussão sobre aprendizagem significativa e como ela pode validar a introdução de noções básicas do conteúdo. Ainda no primeiro capítulo, será feita uma breve abordagem sobre a vida de alguns grandes nomes da Matemática que, ainda enquanto jovens, conseguiram mostrar seu brilhantismo, assimilando e desenvolvendo raciocínios a frente do seu tempo.

No segundo capítulo, abordaremos conceitos e propriedades sobre Congruências. A apresentação será feita de forma sistemática, onde inicialmente apresentaremos uma breve recapitulação sobre os conteúdos vistos pelos alunos a partir do 6° ano do Ensino Fundamental. A partir desses conhecimentos, faremos a construção e o desenvolvimento da definição e das propriedades lógicas que envolvem o assunto. Ainda nesse capítulo trabalharemos alguns critérios de divisibilidade a partir das noções de Congruência.

O terceiro capítulo apresenta alguns problemas resolvidos, usando as noções de

Congruência. Sendo assim, constituiremos um trabalho propositivo, descritivo e com abordagem bibliográfica. Por fim, concluiremos a pesquisa com as considerações finais.

1. A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DA ARITMÉTICA

A necessidade do homem de relacionar os episódios naturais a fatos do seu cotidiano sempre trouxe uma certa carência de explicações em relação a tais eventos e instigou obstinação por entender estes acontecimentos. Isso serviu de alavanca para o surgimento das diversas áreas de conhecimento que temos hoje, com a Matemática não foi diferente. Conforme as civilizações foram evoluindo, a ação de mensurar grandezas mostrou-se cada vez mais imprescindível e os métodos de mensuração mais obsoletos. Não demorou muito para ser necessária a criação de alguns sistemas de numeração, que com o passar do tempo vieram a se transformar no nosso sistema de numeração decimal, provocando um considerável avanço na área.

Os números da forma como conhecemos hoje passaram por um longo processo até chegar a sua forma atual. Esse feito aconteceu por volta de 780 d.C e 840 d.C, com o matemático Abu Musa ALKhwarizmi, que criou o esboço das figuras de 0 a 9, hoje chamamos de números arábicos. Juntamente com o surgimento do nosso sistema de numeração surgiu a Aritmética. A palavra "Aritmética" vem do grego "arithmos", que significa "número", sendo a Aritmética o mais elementar e mais antigo ramo da Matemática.

Um dos primeiros registros de um documento com natureza aritmética é a tábua Plimpton 322 (Figura 1.1). Feita de argila, a tábua possui 13 cm de largura, 9 cm de altura, e 2 cm de espessura. O artefato contém escrita cuneiforme com registros da Matemática Babilônica, estimasse que foi escrita entre 1900 a 1600 a.C. Apesar de ter sido parcialmente danificada, nela podem ser encontrados resultados de natureza trigonométrica, além de números em notação sexagesimal, dispostos em quatro colunas de quinze linhas.

Figura 1.1: Tábua Plimpton 322.

Fonte: (26)

Hoje a Aritmética é também um termo utilizado para fazer referência a Teoria dos Números, que é o ramo da Matemática que estuda as propriedades dos números de uma forma geral, dando mais ênfase aos números inteiros. Tal conteúdo sem dúvida é um dos conhecimentos da área da Matemática que tem mais relevância tanto no ensino quanto na prática. Sobre o desdobramento do pensamento aritmético Portanova nos afirma que:

> O desenvolvimento do pensamento aritmético dá-se inicialmente a partir da construção do conceito de número e do sistema de numeração decimal. Posteriormente, amplia-se com a compreensão do significado das operações, permitindo seu uso adequado na resolução de problemas. Esse marco de aprendizagem, a aritmética, inicia-se com a alfabetização matemática na Educação infantil e tem continuidade ao longo de toda a escolaridade. (PORTANOVA, 2005, p. 20).

O estudo da Aritmética se mostra de suma importância desde as séries primárias com a compreensão do nosso sistema de numeração decimal. A partir dessa aprendizagem inicial, acredita-se que se tenha suporte para o andamento de todo conteúdo matemático subsequente. Podemos dizer que a Aritmética é a primeira área da matemática em que se tem contato dentro do âmbito escolar.

Os conhecimentos Aritméticos, além de embasarem a construção das noções matemáticas básicas servem, como já citado, para o estudo dos números de uma forma geral. Este estudo gera conceitos bastante completos que podem ser aplicados em diversas áreas. Um desses estudos é o da Aritmética Modular ou Teoria das Congruências como também pode ser chamada, que é o tema foco do nosso trabalho.

O estudo teórico desse conceito nos fornece inúmeras aplicações, desde as mais teóricas destinadas ao ramo puro da Matemática, que não deixam de ser aplicáveis - pois servem de base e ferramenta para solução de problemas de outras áreas do saber - até as aplicações imediatas que o estudo aprofundado pode nos proporcionar.

Um exemplo da aplicabilidade é a aplicação e verificação do cadastro de pessoa física (CPF). O número é composto por onze dígitos no qual os seus dois últimos são chamados de DV (dígitos verificadores) que podem ser obtidos através de cálculos envolvendo noções de Congruência. Existem também sistemas de detecção de erros que se baseiam nas noções de Congruência. Outro exemplo também muito presente são os códigos de barra que possui uma aplicação direta da Aritmética Modular.

Segundo o Blog, Clubes de Matemática da OBMEP[1], um grande percussor no estudo da Aritmética Modular foi Leonard Euler (1707-1783), matemático e físico suíço que viveu a maior parte da sua vida na Rússia e na Alemanha. Euler teve inúmeras

[1] Problema para ajudar na escola. Uma função de Euler. **Clubes de Matemática da OBMEP**, sd. Disponivel em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-para-ajudar-na-escola-uma-funcao-de-euler/> Acessado em: 29 de jun. de 2021.

contribuições em diversas áreas. Na Aritmética, entre as mais notórias estão o Teorema de Euler para Aritmética Modular e a função phi (φ) de Euler, função essa que estabelece a quantidade de inteiros positivos menores do que n que são coprimos com n.

Outro matemático que deixou contribuições relevantes na Aritmética foi Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Matemático, astrónomo e físico alemão que em sua obra Disquisitiones Arithmeticae de 1801 apresentou muitas contribuições para a Aritmética. Segundo o site do Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento (NOIC)[2], nesse trabalho, Friedrich Gauss inseriu a noção de Congruência entre números inteiros referentes a um módulo, onde ele denotou por $a \equiv b \pmod{m}$ quando $m \mid (a-b)$. Essa notação foi muito bem aceita e é utilizada até os dias atuais.

Podemos perceber que a Aritmética Modular está presente e é aplicada em muitas áreas do cotidiano, sendo um assunto que usa raciocínios básicos da Matemática vistos desde o letramento matemático.

1.1. BAIXO DESEMPENHO DOS ALUNOS BRASILEIROS EM MATEMÁTICA

Apesar da grande utilidade da matemática em nosso cotidiano, o desempenho dos nossos alunos no Ensino Básico não vem tendo um retorno significativo. O PISA, (tradução de Programme for International Student Assessment - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), programa aplicado a cada três anos em diversos países desde 2000, o qual o Brasil participa desde a primeira aplicação, mostra que os alunos brasileiros não têm um desempenho satisfatório em diversas áreas, incluindo a matemática. O último estudo trouxe à tona uma triste realidade:

> O maior estudo sobre educação do mundo, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), apontou que o Brasil tem baixa proficiência em leitura, matemática e ciências, se comparado com outros 78 países que participaram da avaliação. A edição 2018, divulgada mundialmente nesta terça-feira, 3 de dezembro, revela que 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de matemática, o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Em ciências, o número chega a 55% e, em leitura, 50%. Os índices estão estagnados desde 2009. (INEP, 2019)

Essas avaliações permitem que sejam feitas comparações em relação aos conhecimentos e às aptidões dos estudantes, comparando o desempenho e desenvolvimento em relação aos alunos de outros países. Os testes cognitivos utilizados no PISA 2018 avaliaram os domínios matemáticos, científicos e de leitura; especificamente na Matemática foi

[2]MELO, Lawrence. **NOIC**, sd. Disponível em:<https://noic.com.br/materiais-informatica/curso/math-01/> Acessado em: 19 de jun. de 2021.

avaliada a capacidade de Letramento Matemático. De acordo com o Relatório do Brasil no Pisa 2018, a definição de Letramento em Matemática é “a capacidade de formular, empregar e interpretar a matemática em uma série de contextos, o que inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos”.

Sobre o desdobramento dessas eventuais habilidades matemáticas, a BNCC argumenta que: “o desenvolvimento dessas habilidades está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, com base na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática” (BRASIL, 2018), ou seja, tais resultados refletem problemas na educação, o que é bastante complexo de ser analisado, pois problemas envolvendo ensino englobam diversas variáveis que devem ser consideradas de uma forma ampla, podendo ser problemas didáticos, socioeconômicos, de construção de conhecimento entre outros.

Na pesquisa, os dados revelam uma faixa etária de 15 anos de idade o que remete ao Ensino Fundamental que é uma fase de ensino onde necessita de uma atenção especial, visto que é base para o avanço e desenvolvimento dos conteúdos das séries futuras. Sobre esse assunto Portanova afirma que:

> A capacidade de raciocínio de um aluno desenvolve-se ao longo de um período de tempo e está intimamente ligada à vivência de uma gama de experiências variadas e potencialmente ricas, relacionadas aos diferentes tipos de pensamentos que estão inter-relacionados aos diferentes ramos da matemática: a lógica, a aritmética, a álgebra, a geometria, a probabilidade e a estatística, e que devem ser, especialmente no ensino fundamental, apresentados como um todo integrado, num currículo em espiral, organizado num grau crescente de complexidade. (PORTANOVA, 2005, p. 19)

Diante dessa importante análise, podemos perceber que a Educação Básica está estritamente interligada em todos os seus graus de ensino, portanto para que se tenham bons resultados no processo de ensino-aprendizagem, os profissionais em educação (professores, coordenadores, gestores e também a comunidade em geral), em especial os professores, devem contribuir para a educação matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, com intuito de que os alunos construam seu pensamento e raciocínio contextualizados com a sua realidade e possam, além de enxergar no cotidiano, conectar os conteúdos anteriormente vistos.

Como citado por Portanova (2005, p. 19) os conteúdos do Ensino Fundamental devem ser expostos de forma crescente em grau de complexidade, uma quebra desse conceito pode desencadear problemas na construção do conhecimento, a exposição dos conteúdos deve levar em consideração os conteúdos ministrados anteriormente para uma melhor assimilação.

A importância de relacionar os conteúdos ministrados com as informações relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aluno, caracteriza o conceito de "aprendizagem significativa" de David Ausubel - psicólogo da educação estadunidense.

O termo "aprendizagem significativa" nos diz que os conhecimentos expostos na sala de aula só alcançarão um significado expressivo se forem transpostos de uma forma onde se apoiem em um conhecimento pré-existente do educando, de maneira que essa nova informação não venha a surgir desligada das anteriores, mas sim interligada com conhecimentos prévios. A exposição deve ser feita como uma associação com referência, dando relevância aos conteúdos anteriormente trabalhados, possibilitando ao estudante encontrar na sua estrutura um ambiente propício onde possa amparar esse novo conhecimento. Para Ausubel:

> A essência do processo de aprendizagem significativa é que ideias simbolicamente expressas sejam relacionadas, de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária, ao que o aprendiz já sabe, ou seja, a algum aspecto de sua estrutura cognitiva especificamente relevante (isto é, um subsunçor) que pode ser, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição já significativos. (AUSUBEL, 1978 *apud* MOREIRA, 2006, p. 19)

Ao fazer referência a conceitos anteriormente trabalhados e construir novas ideias a partir dos mesmos, atribuindo sequência aos conteúdos, também se molda conceitos mais abrangentes, fazendo com que a aprendizagem e assimilação dos alunos seja mais incisivas, tornando-se cada vez mais estável.

No Ensino Básico, a partir do 6º ano, são lecionados conteúdos como potenciação, divisibilidade, frações entre outros. Esses conteúdos são o ponto de partida para se lecionar Aritmética Modular. Partindo da teoria de Ausubel (1978), ao usar os conceitos básicos assimilados antes pelos educandos, dando continuidade aos mesmos e englobando-os em ideias maiores e mais abrangentes, aumenta-se o leque do saber, fornecendo mais significado aos conteúdos anteriormente ministrados.

Quando se faz essa ancoragem entre conteúdos já existentes, é possível enxergar de maneira mais cristalina a aplicação da Matemática no cotidiano, visto que, lecionando conteúdos inéditos que se amparam nas noções anteriores, são incrementadas ferramentas para que o aluno solucione problemas variados, podendo resolver enunciados mais complexos.

Dessa forma, levando em consideração os conceitos da teoria da "aprendizagem significativa" podemos inserir noções de um novo conteúdo como a Aritmética Modular, que é baseado essencialmente em noções já conhecidas pelos educandos, tornando mais fácil e viável o processo de ensino e aprendizagem. Como disse o próprio Ausubel "Se tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um só princípio, diria o seguinte: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue e ensine-o de acordo."(AUSUBEL, 1978 *apud* MOREIRA, 2006, p. 13).

1.2. DOCUMENTOS OFICIAIS

A preocupação com o desempenho do Brasil no PISA não surgiu a partir do resultado obtido em 2018, tanto é que a busca da melhora nos números do PISA já estavam previstas no PNE (Lei N$^{\underline{o}}$ 13.005 de 25 de Junho de 2014). O documento estabelece como uma de suas estratégias:

> 7.11) melhorar o desempenho dos alunos da educação básica nas avaliações da aprendizagem no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA, tomado como instrumento externo de referência, internacionalmente reconhecido [...]. (BRASIL, 2014)

Na tabela de projeções, está estabelecido que a média dos resultados em Matemática, Leitura e Ciências devem ser respectivamente em 2015, 2018 e 2021 de 438, 455 e 473, sendo que, em 2015 o Brasil teve média em leitura de 407 em matemática de 377 e em ciências de 401, tendo uma média geral de 395, o que é bem abaixo da projeção estabelecida para 2015 que seria de 438.

Em relação a projeção para 2018, o resultado também não foi animador. Em Leitura, Matemática e Ciências respectivamente, o Brasil teve desempenho de 413, 384 e 404, tendo uma média geral de aproximadamente 400, ficando ainda abaixo da meta estabelecida para o ano.

O não alcance das metas revela uma estagnação da educação brasileira, e isso requer mudanças tanto nas práticas pedagógicas quanto nas políticas educacionais. Considerando a importância de se efetivar as práticas pedagógicas, é importante buscarmos e atribuirmos significados aos conteúdos ministrados. Sobre isso o PCN (1997) nos diz que:

> Cabe ao educador, por meio da intervenção pedagógica, promover a realização de aprendizagens com o maior grau de significado possível, uma vez que esta nunca é absoluta — sempre é possível estabelecer alguma relação entre o que se pretende conhecer e as possibilidades de observação, reflexão e informação que o sujeito já possui. (BRASIL, 1997, p. 35)

Apesar de não ser possível estabelecer uma relação em grau absoluto, como visto no texto anteriormente citado, é papel do educador estabelecer relações dos conteúdos ministrados aos já expostos em séries anteriores, proporcionando assim uma melhor assimilação. Dessa forma, ministrar noções de assuntos que conectam temáticas anteriormente vistas como, por exemplo, o conteúdo de Congruências, pode proporcionar o acréscimo da construção de um novo conhecimento e também uma melhor fixação dos conceitos que o conteúdo alavanca para ser ministrado. As ideias usadas para expor tal assunto se baseiam em ideias básicas e primordiais que servirão de base para a construção de conceitos matemáticos em séries posteriores. A importância de considerar os conhecimentos prévios dos alunos está evidenciada nos PCNs.

Nesta perspectiva:

> O que o aluno pode aprender em determinado momento da escolaridade depende das possibilidades delineadas pelas formas de pensamento de que dispõe naquela fase de desenvolvimento, dos conhecimentos que já construiu anteriormente e do ensino que recebe. Isto é, a intervenção pedagógica deve-se ajustar ao que os alunos conseguem realizar em cada momento de sua aprendizagem, para se constituir verdadeira ajuda educativa. O conhecimento é resultado de um complexo e intrincado processo de modificação, reorganização e construção, utilizado pelos alunos para assimilar e interpretar os conteúdos escolares. (BRASIL, 1997, p. 34)

É clara a relação entre os conhecimentos construídos pelo educando com o processo de ensino-aprendizagem de um novo conteúdo, sendo essa relação uma peça-chave para a construção do conhecimento, e podendo esses conhecimentos prévios serem vistos como marcadores de limitação do que o aluno pode assimilar em um determinado momento.

Em relação a adequação dos conteúdos, a BNCC sugere algumas ações complementares que têm o intuito de ajustar os conteúdos didáticos à realidade dos alunos. Visando garantir a aprendizagem dos mesmos por meio da adaptação as características, entre essas ações se encontram:

> Selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc. (BRASIL, 2018)

Como educadores, o próprio documento que norteia o ensino nas escolas brasileiras nos dá a liberdade para aplicar metodologias e conteúdos complementares, com a finalidade de facilitar o processo de ensino-aprendizagem do aluno, sendo assim, o acréscimo de conteúdos complementares que remetam aos conteúdos já vistos pelos educandos torna-se tanto valido quanto viável.

1.3. GENIALIDADE DESDE CEDO

Como foi exposto até aqui, a Matemática, em especial a Aritmética Modular, é importante e está presente em diversas formas no nosso cotidiano, tanto no âmbito social quanto no escolar. Seu desenvolvimento teve a colaboração de diversos matemáticos, alguns já citados por suas grandes contribuições para a Aritmética. Neste tópico, veremos alguns matemáticos que trouxeram grandes contribuições, não só para a matemática, mas para o mundo cientifico como um todo.

Apresentamos a seguir, alguns matemáticos que se mostraram diferenciados desde de sua infância ou adolescência, mostrando que seriam mentes brilhantes. Tais nomes são bons exemplos de que quando um aluno é exposto a algum conteúdo ou ideia nova esse conhecimento pode vir a despertar raciocínios e conceitos que antes não podiam ser alcançados.

Visando trazer um apanhado breve, porém rico em informações, sobre a vida dos matemáticos a seguir. Reunimos uma síntese de dados contidos em blogs e revistas como: Matematiquês[3], EBiografia[4], Galóa Journal[5], Revista Elementos[6] e blog do Marcelo Uva[7].

1.3.1. Évariste Galois (1811-1832)

Figura 1.2: Évariste Galois.

Fonte: (7)

Évariste Galois nasceu em 25 de outubro de 1811, na província comunal de Bourg-la-Reine, situada ao sul de Paris. Além de matemático, tinha paixão pela política, vinda da in- fluência de seu pai Nicolas Gabriel Galois, um fervoroso republicano.

Quanto aos estudos, Galois ingressou com doze anos, na escola Lycée Louis-le-Grand, onde já se pode perceber que ele era um potencial prodígio devido a seu temperamento rebelde e a sua grande paixão pela matemática. Às vezes, o jovem tinha atritos com seus professores, pois ele tinha um raciocínio muito rápido e uma preocupação com

[3]ver (8)
[4]ver (10)
[5]ver (13)
[6]ver (23)
[7]ver (27)

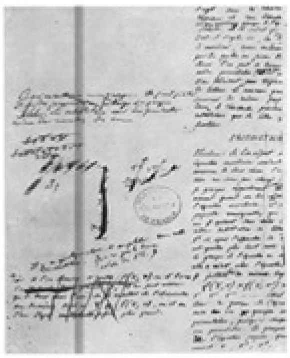
os altos campos da Matemática. Essa combinação o levou a ser expulso de diversas instituições.

Galois tinha o desejo de estudar na École Polytechnique, referenciada escola matemática de Paris, porém não teve êxito no ingresso nas suas primeiras tentativas, tendo inclusive, após perder a calma, jogado um apagador no seu avaliador na segunda tentativa de ingresso. Galois não conseguiu ingressar na École Polytechnique, mas conseguiu entrar na École Normale Supérieure, onde veio a desenvolver melhor suas habilidades.

Após analisar pesquisas relacionadas aos trabalhos de grandes matemáticos como Joseph Louis Lagrange e Niels Henrik Abel, Galois chegou a conclusões muito relevantes, como, por exemplo, de que equações algébricas irredutíveis podem ser solúveis usando radicais, mas somente se o grupo de permutações sobre suas raízes também é resolúvel. A maioria das suas contribuições estão escritas no ensaio matemático "A Todos os Republicanos" , onde além de trazer ideias anteriormente citadas, ele esmiúça o conceito da Teoria dos Grupos.

O seu ensaio matemático foi escrito na madrugada de 31 de maio de 1832, noite que antecedeu sua morte. Após o envolvimento em um romance com a jovem Stéphanie-Félice Poterin du Mote, noiva de um renomado atirador chamado de Pescheux d'Herbinville, que ao descobrir o romance desafiou Galois para um duelo como era de costume na época. Sabendo Galois da habilidade de seu desafiante, deu início à escrita do seu ensaio. O matemático veio a falecer aos vinte anos de idade, após ter sido baleado no estômago durante o duelo, tendo dedicado à Matemática apenas cinco anos de sua vida.

Figura 1.3: Ensaio de Évariste Galois.



Carta de Galois: pode ver-se à esquerda, na zona por baixo do carimbo, *"Je n'ai pás le temps"*

Carta de Galois: no meio do caos, pode ver-se à esquerda, em baixo, as palavras "une femme"

Fonte: (13)

"Alguns mistérios sempre escaparão da mente humana. Para nos convencer disso, só é preciso dar uma olhada nas tabelas de números primos e ver que não existe uma regra, nenhuma regra." - Évariste Galois

1.3.2. Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Carl Friedrich Gauss foi um matemático, astrónomo e físico alemão nascido no dia 30 de abril de 1777, em Braunschweig na Alemanha e veio a falecer em Göttingen (Alemanha) em 23 de fevereiro de 1855.

Gauss trouxe grandes contribuições em todas as áreas que atuou. Ele deixou sua colaboração nos ramos da Análise Matemática, Geometria Diferencial, Geodesia, Eletroestática, Óptica, Astronomia entre outras. Uma das contribuições mais emblemáticas de Gauss foi no ramo matemático da Teoria dos Números, na sua obra Disquisitiones Arithmeticae de 1801 onde ele inseriu a notação, mais usada até os dias atuais, de Congruência entre números inteiros referentes a um módulo.

Figura 1.4: Carl Friedrich Gauss.

Fonte: (3)

Gauss é conhecido por muitos como princeps mathematicorum (em latim) que significa "o príncipe da matemática". Gauss demonstrou a sua genialidade desde cedo; Um fato muito famoso sobre o jovem Gauss aconteceu quando seu professor Büttner e o seu assistente propuseram um exercício em que os alunos deveriam somar os números naturais de um a cem. Conta a história que para o espanto de todos quase instantaneamente Gauss entregou a solução do exercício ao professor. Ele conseguiu identificar que a soma proposta consistia em cinquenta pares de números, que, mo raciocínio de Gauss, eram dispostos da seguinte maneira: 100+1, 99+2, 98+3, ... , 50+51 cada um desses pares somados tem por resultado 101. Sendo assim, Gauss obteve um total de 50 pares de números, cuja soma dá 101. Resultando na sentença $50{\cdot}101{=}5050$.

Depois de tal episódio, o pai de Gauss foi alertado sobre a genialidade de seu filho, então, Bartels, o assistente de seu professor, começou a trabalhar junto com Gauss discutindo sobre variados assuntos, sendo problemas matemáticos um tema de destaque, logo foi percebido por Bartels que ele não tinha muito a acrescentar ao ensino de Gauss.

Em 1788, ingressou no Liceu Catharineum em Braunschweig, com o passar dos anos o talento de Gauss ficou cada vez mais evidente. A partir de 1795, o jovem prodígio começou seus estudos na Universidade de Göttingen onde, por um período de aproximadamente três anos, passou a desenvolver pesquisas cientificas. A primeira delas, foi a construção de um polígono regular com régua e compasso, alguns anos depois, mais precisamente em 1801, publicou um dos seus mais famosos trabalhos, Disquisitiones Arithmeticae, onde disserta sobre Congruências em geral, resto de potências, formas quadráticas.

Gauss casou-se duas vezes. A primeira esposa foi Johanna Elisabeth Rosina Osthoff com quem teve três filhos, a mesma veio a falecer no ano de 1809, um ano após a morte do pai de Gauss. Algum tempo depois da morte de Johanna, Gauss casou-se com Friederica Wilhelmine Waldeck tendo mais três filhos com ela.

Apesar de 1809 ser marcado por um episódio triste na vida de Gauss, isso não refletiu nos seus estudos, pois, no mesmo ano da morte da sua esposa ele publicou a "Teoria do Movimento dos Corpos Celestiais Girando a Volta do Sol" , cuja obra é uma exaustiva explanação da determinação das órbitas dos planetas e cometas.

Gauss sempre foi muito relevante dentro do estudo da Matemática. Ao longo dos anos de sua vida publicou várias obras de grande importância como: *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (1816), *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* (1823), *Principia Generalia Theoriare Figurae Fluidorum En Statu Aequilibrii* (1830), *Intensisitas Vis Magnecticae Terrestris Ad Mensuram Absolutam Revocata* (1832), entre outras.

No que se refere a premiações, Gauss se tornou membro do Royal Society no ano de 1804. Foi laureado com o Prêmio da Universidade de Copenhagen em 1822; Dez anos depois foi premiado pela Academia Dinamarquesa de Ciências por ter desenvolvido um estudo de mapas, no ano de 1938 recebeu a Medalha de Copley, prêmio esse que possui maior prestígio dentro da Royal Society.

"A matemática é a rainha das ciências e a aritmética é a rainha da matemática." - Carl Friedrich Gauss

1.3.3. Blaise Pascal (1623 - 1662)

Blaise Pascal foi um Matemático, Físico, Filósofo, Teólogo e inventor francês, nascido em Clemont-Ferrand, França, no dia 19 de junho de 1623. Pascal ficou órfão muito cedo, sua mãe morreu quando ele tinha apenas três anos de idade.

Pascal foi um homem muito religioso, sua família foi convertida em 1846 ao jansenismo, uma variante do Catolicismo. Após a morte de seu pai e a ida de sua irmã Jacqueline para um centro espiritual do jansenismo e depois de passar por um período de vida mundana, Pascal teve seu retorno à religião e decidiu consagrar-se a Deus.

Pascal deu início a sua vida cientifica por volta de 1935, com o estudo do famoso livro Elementos de Euclides, em 1639 quando tinha por volta de 16 anos, escreveu uma

Figura 1.5: Blaise Pascal.

Fonte: (9)

das suas obras de maior destaque *"Essay pour les coniques"*, ou "Ensaio Sobre as Cônicas". Nessa época, ele também encontrou a solução geométrica para o problema de Pappus. No final de 1642, visando facilitar alguns cálculos, ele desenvolveu a ideia de uma máquina de calcular onde encontrou muitas complicações, devidas às técnicas rudimentares da época, dois anos depois ficou pronto o modelo definitivo da máquina.

Pascal ainda deixou contribuições na Matemática, como a sua teoria da probabilidade e seu Tratado do Triangulo Aritmético. No ano de 1654, Pascal realizou experiências sobre a pressão atmosférica, elaborou um tratado sobre o vácuo, inventou a prensa hidráulica e a seringa. Faleceu em Paris, França, no dia 19 de agosto de 1662.

"O coração tem razões que a própria razão desconhece."
- Blaise pascal

2. ARITMÉTICA MODULAR

A Aritmética Modular juntamente com o conceito de Congruências são assuntos muito utilizados em várias aplicações essenciais, tais assuntos são conectado diretamente aos conteúdos do Ensino Fundamental que, por sua vez, engloba os assuntos mais elementares e que servirão de base para várias outras definições e conteúdos matemáticos. Sendo assim, uma boa fixação das noções desses conteúdos e suas aplicabilidades promoverá um ganho de ferramentas que ajudarão na assimilação e na construção de novos conhecimentos.

No presente capítulo, mostraremos como as noções de Congruência podem ser estabelecidas utilizando apenas conteúdos do Ensino Fundamental, adicionando mais um conhecimento que proporcionara um estimulo a novas ideias. Grande parte das definições e teoremas a seguir, assim como suas demonstrações, podem ser encontradas em (HEFEZ, 2016).

2.1. CONCEITOS MATEMÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

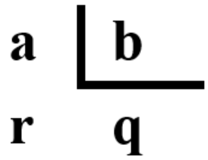
No Ensino Fundamental, os conteúdos abordados circulam em torno do conjunto dos números inteiros, representado pela letra $\mathbb{Z}$, que vem do alemão *Zahl*, que significa "número".

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

Os números inteiros nada mais são que o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$=$\{0$, 1, 2, 3, 4 $\ldots\}$, acrescidos dos seus simétricos.

O conjunto dos inteiros é munido de operações básicas: adição, multiplicação, subtração e divisão. A última é exposta no Ensino Fundamental na forma de divisão euclidiana, onde a operação conterá um dividendo e um divisor, gerando um quociente e um resto, sendo estabelecida da seguinte forma.

Figura 2.1: Representação do sistema de divisão Euclidiana.



Fonte: Acervo Pessoal

Sendo assim, podemos escrever uma divisão euclidiana da seguinte forma:

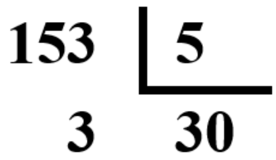
$$a = b \cdot q + r$$

A constante a é o dividendo, b é o divisor e q, r são respectivamente o quociente e o resto. Se a divisão for exata, ou seja, se o resto for nulo, ficara da seguinte maneira:

$$a = b \cdot q$$

Dessa forma, se formos efetuar a divisão de 153 para 3, teremos:

Figura 2.2: Exemplo de divisão Euclidiana



Fonte: Acervo Pessoal

Podendo ser escrito da seguinte maneira:

$$153 = 5 \cdot 30 + 3.$$

Teorema 2.1. (Divisão Euclidiana) Sejam a e b, dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que:

$$a = b \cdot q + r, \text{com } 0 \leq r < |b|.$$

Uma consequência desse teorema é a forma como podemos escrever os números no sistema de numeração. Comumente os números naturais são vistos com sua representação de base decimal, mas também podem ser escritos fazendo separação dos algarismos por suas potências decimais.

Exemplo 2.2. O número 649 está escrito na sua representação decimal, mas pode ser escrito da seguinte forma:

$$649 = 600 + 40 + 9 \quad \text{ou então, } 649 = 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0.$$

Essa maneira simples de reescrever tais números nos fornece a ideia do teorema a seguir.

Teorema 2.3. Sejam a e b números inteiros, com $a > 0$ e $b > 1$. Existem números inteiros

$n \geq 0$, e $0 < r_1, r_2, \ldots, r_n < b$ com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que.

$$a = r_0 + r_1 \cdot b + r_2 \cdot b^2 + \ldots + r_n \cdot b^n.$$

Sendo assim, um número na nossa base decimal pode ser escrito fazendo a separação por suas potências de 10, logo, todo número natural a pode ser escrito da seguinte forma.

$$a = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_n \cdot 10^n.$$

Definição 2.4. Dados dois números inteiros a e b, diremos que b divide a, e escrevemos $b \mid a$, quando existir um $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b \cdot q$. Diremos também que b é um divisor ou um fator de a.

A negação da sentença $b \mid a$, ou seja, dizer que b não divide a, iremos denotar da seguinte maneira $b \nmid a$ (b não divide a), dessa forma, $a \neq b \cdot q$, sendo assim, a não pode ser escrito em termos de b.

Por exemplo, dizemos que 4 divide 60 ($4 \mid 60$), pois $60 = 4 \cdot 15$ e que 6 divide 72 ($6 \mid 72$), pois $72 = 6 \cdot 12$. Além disso, pela comutatividade da multiplicação podemos dizer também que $15 \mid 60$ e $12 \mid 72$.

Como exemplos da não divisibilidade temos que $11 \nmid 64$, (11 não divide 64), pois $64 \neq 11 \cdot q$, com $q \in \mathbb{Z}$, ou seja: 64 não pode ser obtido pelo produto entre 11 e outro número natural. Tal sentença é equivalente a dizer que não existe $q \in \mathbb{Z}$ que satisfaça a afirmação da *Definição* 2.4.

Observe que todos os enunciados acima são conceitos básicos e podem ser apresentados a qualquer turma a partir do 6° ano do Ensino Fundamental.

Fazendo uma comparação entre o Teorema da Divisão Euclidiana (*Teorema 2.1*) e a definição de divisibilidade, podemos observar que o termo que representa o resto da divisão euclidiana não pode ter valor diferente de zero na sentença para que a divisibilidade seja constatada, dessa forma teremos uma divisão exata se o termo r for nulo.

O fato de a definição fazer sentido apenas quando $r = 0$, não retira a importância dos outros casos para a Matemática, sendo inclusive o estudo dos restos uma área de grande importância e até objeto de análises mais profundas.

2.2. UMA BREVE APRESENTAÇÃO SOBRE O QUE SÃO CONGRUÊNCIAS

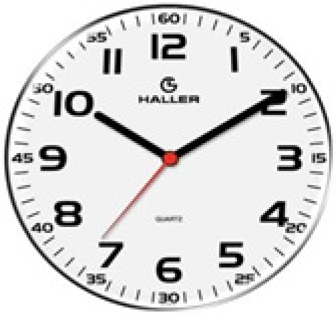
Os conceitos de Congruência estão aplicados em diversas áreas, inclusive a nossa volta o tempo todo. O resultado de uma Congruência modular pode ser interpretado como o resto da divisão de dois números por um terceiro, que é o conceito de resto r que vimos no *Teorema 2.1* e na *Figura 6*. Porém, essa relação ocorre de maneira especial entre os dois números, pois ambos devem deixar o mesmo resto quando divididos por esse terceiro número, que chamamos de módulo da Congruência. Uma maneira de exemplificarmos isso é com o relógio analógico.

Imagine que uma aluna, Dallila, tenha combinado com sua professora de chegar na sala de aula às 15 h (quinze horas) logo após o intervalo. Ao chegar na sala a professora tece o seguinte elogio a ela:

- Parabéns! Você chegou pontualmente às 3 h (três horas) da tarde.

A afirmação que a professora fez está errada? Ora, de modo algum. Vamos observar o relógio analógico.

Figura 2.3: Relógio Analógico.



Fonte: (25)

Podemos observar que se continuássemos a contagem a partir das 12 h teríamos 13 h horas correspondendo à 1 h da tarde, 14 h correspondendo às 2 h tarde e seguindo o mesmo padrão 15 h iriam corresponder às 3 h da tarde.

Isso é um caso claro de Congruência, que teria como seu módulo o número 12, e porque módulo 12? Como citado, o módulo de uma Congruência é o número que vai dividir os outros dois, o relógio é dividido em doze partes que são as horas mostradas no visor de 1 a 12. Assim basta observar que se dividirmos 15 por 12 deixara resto 3, da mesma maneira usando o algoritmo da divisão euclidiana se formos dividir 3 por 12 o resto da divisão também será 3.

Esse exemplo aplicado é bastante intuitivo na construção do conceito de Congruência. Para denotarmos que estamos estabelecendo uma Congruência comumente é utilizada a seguinte notação que foi introduzida por Carl Friedrich Gauss "$a \equiv b \pmod{m}$", nessa notação o exemplo acima ficaria $15 \equiv 3 \pmod{12}$. Pois quando dividimos 15 para 12 a divisão deixa resto 3, da mesma maneira se dividirmos 3 para 12 usando o Algoritmo da divisão Euclidiana o resto também será 3.

Visando expressar a relação de Congruência de maneira menos carregada e que se assemelhe às simbologias mais vistas dentro do Ensino Fundamental, usaremos a seguinte notação quando estabelecermos uma Congruência:

$$a =_m b.$$

Sendo assim, o exemplo anterior ficaria da seguinte maneira usando essa notação:

$$15 =_{12} 3.$$

Partindo do mesmo raciocínio temos as seguintes Congruências em relação ao relógio analógico: $13 =_{12} 1$, $14 =_{12} 2$, $15 =_{12} 3$, $16 =_{12} 4$ até $23 =_{12} 11$ e esse, por sua vez, nos diz que 23 h correspondem a 11 h da noite e, por fim, $24 =_{12} 0$

2.3. NOÇÕES SOBRE ARITMÉTICA MODULAR

Definida a ideia de Congruência modular vamos estabelecer uma definição formal para a mesma.

Definição 2.5. Dados $a, b, m\ q \in \mathbb{Z}$ com $m>1$. Dizemos que a é congruente a b módulo m, e escrevemos:

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ ou } a =_m b.$$

se, e somente se, $m \mid (a - b)$.

De acordo com a Definição acima temos:

(a) $10 =_7 3$, pois $7 \mid (10 - 3)$;

(b) $14 =_{10} 4$, pois $10 \mid (14 - 4)$;

(c) $300 =_{10} 0$, pois $10 \mid (300 - 0)$;

A partir dessa definição e das noções estabelecidas até aqui, surgem algumas propriedades que são de certa forma imediatas, porém, a partir daqui, é necessário que se faça uma observação quanto ao intuito do trabalho, pois ele visa apenas estabelecer noções sobre Congruências em turmas do Ensino Fundamental, dessa forma, as demonstrações desse conteúdo podem não ser de fácil apresentação em algumas turmas, embora faz-se necessário daqui em diante apresentar algumas demonstrações para o leitor, ficando a critério de cada docente levá-las às suas turmas.

Proposição 2.6. Dados $a, b, m,$ e $n \in \mathbb{Z}$ com $m>1$ temos as propriedades Reflexiva, Simétrica e Transitiva.

Propriedade 1 (Reflexiva). $a =_m a$.

Demonstração: Essa demonstração é bastante intuitiva, pois é fácil observar que $m \mid a - a = 0$, para todo número inteiro a, Assim, $a =_m a$. ■

Chamamos essa propriedade de propriedade Reflexiva, pois ela estabelece que todo número a é congruente a ele mesmo dado um módulo m. Por exemplo, $3 =_7 3$, pois $7 \mid (3-3)$.

Propriedade 2 (Simétrica). Se temos $a =_m b$, então $b =_m a$.

Demonstração: Note que se $a =_m b$, temos que $m \mid (a-b)$, pela *Definição 2.5*, sendo assim:

$$m \mid -(a-b) = (b-a).$$

usando a *Definição 2.5*, temos que $b =_m a$. ■

Exemplo 2.7. Temos que $4 =_3 1$, usando a *Propriedade 2* teremos que: $1 =_3 4$.

É importante relembrar que estamos trabalhando com o conjunto dos inteiros e vale ressaltar que, $3 \mid (4-1)$ e $3 \mid (1-4)$.

Propriedade 3 (Transitiva). Se $a =_m b$ e $b =_m n$, então $a =_m n$.

Demonstração:

Se $a =_m b$ e $b =_m n$, pela *Definição 2.5*, temos que $m \mid (a-b)$ e $m \mid (b-n)$. Assim:

$$m \mid (a-b) + (b-n) = (a-n).$$

Usando a *Definição 2.5* novamente, temos que $a =_m n$ ■

Tais propriedades, mesmo que imediatas quando se estabelece a definição de Congruência, servirão de base para verificarmos a veracidade de outras propriedades que são muito utilizadas em resolução de questões.

A seguir, veremos uma propriedade que se destaca dentro do processo de resolução de questões.

Propriedade 4. Dados $a, b, c,$ e $d \in \mathbb{Z}$, com $m \in \mathbb{N}$ e $a =_m b$ e $c =_m d$. Temos que:

i) $a \cdot c =_m b \cdot d$.

ii) $a + c =_m b + d$.

Demonstração: ***(i)***

Se $a =_m b$ e $b =_m d$, temos que $m \mid c(a-b) + b(c-d) = a \cdot c - b \cdot d$. Pela *Definição 2.5*, temos que $a \cdot c =_m b \cdot d$.

■

Demonstração: ***(ii)***

Sendo que $a =_m b$ e $c =_m d$. Temos $m \mid (a - b)$ e $m \mid (c - d)$, portanto:

$$m \mid (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$$

Pela *Definição 2.5*, temos que $a + c =_m b + d$. ■

Veremos alguns exemplos a partir dos resultados dessa propriedade.

Exemplo 2.8. Se $364 =_3 1$ e $477 =_3 3$ qual o resultado da Congruência módulo três do produto $364 \cdot 477$?

O enunciado nos fornece o resultado das Congruências de 364 e 477 referentes ao módulo três, em seguida ela solicita o resultado da Congruência do produto entre esses dois números também em relação ao módulo três, podemos então usar a *Propriedade 4* item *i)*, pois estamos tratando do mesmo módulo, sendo assim:

$$364 \cdot 477 =_3 1 \cdot 3. \text{ Logo, } 364 \cdot 477 =_3 3.$$

Exemplo 2.9. Qual o último dígito de $32 \cdot 51 \cdot 13$?

Sabemos que o nosso sistema de numeração é decimal, ou seja, a representação dos valores é agrupada em dezenas. Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{aligned} 32 &= 10 + 10 + 10 + 2 = 3 \cdot 10 + 2. \\ 25 &= 10 + 10 + 5 = 2 \cdot 10 + 5. \end{aligned}$$

Note que os números estão sempre em agrupamentos de dez unidades e o valor restante é sempre o último digito.

Partindo desse raciocínio, estabelecendo individualmente a Congruência módulo 10, o algarismo que restar será o das unidades. Calculando separadamente as Congruências em relação ao módulo dez, temos: $32 =_{10} 2$, $51 =_{10} 1$ e $13 =_{10} 3$. Usando a *Propriedade 4* item *i)*.

$$32 \cdot 51 \cdot 13 =_{10} 2 \cdot 1 \cdot 3.$$

Logo o último dígito de $32 \cdot 51 \cdot 13$ é 6.

Exemplo 2.10. Sabendo que $3300 =_7 3$, qual o resto da divisão por sete de 3323 ?

O questão solicita o resto da divisão por sete de 3323, o enunciado nos diz que $3300 =_7 3$, note que a partir do número 3300 podemos construir o número 3323, é fácil perceber que $3300 + 23 = 3323$. Também é fácil perceber que, $23 =_7 2$, sendo assim, podemos fazer a junção das Congruências $3300 =_7 3$ e $23 =_7 2$, conforme mostra a *Propriedade 4* item *ii)*, fazendo isso, a Congruência ficara da seguinte maneira.

$$3300 + 23 =_7 3 + 2.$$

Podemos concluir que, $3323 =_7 5$, logo o resto da divisão de 3323 por sete é 5

Proposição 2.11. ***(Lei do Corte).*** Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$, podemos afirmar que:

i) Se $a + c =_m b + c$, então $a =_m b$.
ii) Se $a \cdot c =_m b \cdot c$ e $mdc(c, m) = 1$, então $a =_m b$.

Demonstração: ***(i)***

Se $a + c =_m b + c$, pela *Definição 2.5*, temos temos $m \mid (a + c) - (b + c) = a - b$ e, com isso, $a =_m b$. ∎

Demonstração: ***(ii)***

Temos que $a \cdot c =_m b \cdot c$, logo $m \mid (ac - bc) = c(a - b)$. Por outro lado, $mdc(c, m) = 1$ e, pelo lema de Gauss, $m \mid (a - b)$, sendo assim $a =_m b$. ∎

Por último veremos uma importante proposição que é de grande ajuda no processo de resolução tanto dos problemas que daremos enfoque, quanto na gama mais variada de problemas dentro do contexto escolar, olímpico e de índices de avaliação.

Proposição 2.12. Sejam m e $n \in \mathbb{N}$. Se $a =_m b$ então $a^n =_m b^n$.

Demonstração: Se $a =_m b$, pela *Definição 2.5* temos que $m \mid (a - b)$.

É sabido que:

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}).$$

É fácil ver que número m divide a parcela $(a - b)$ do termo $a^n - b^n$ (como foi constatado inicialmente pela *Definição 2.5*). Sendo assim, podemos concluir que:

$$m \mid a^n - b^n$$

.

Assim, $a^n =_m b^n$. ∎

Exemplo 2.13. Qual o resto da divisão de 19^{1001} por 9?

Queremos saber o resto da divisão de um número que está escrito em forma de potência, em casos como esse, é interessante fazer uma análise das Congruências do número desde as suas potências mais baixas, e tentar encontrar um padrão ou forma de reescreve-lo de forma a tornar a sentença mais trivial. Partindo desse raciocínio, vamos analisar uma das Congruências do número 19.

$$19 =_9 1.$$

Essa sentença é verdadeira e pela *Proposição 2.13.* podemos elevar cada membro a um mesmo expoente natural, em particular a potência 1001. Logo:

$$(19)^{1001} =_9 (1)^{1001}.$$

Usando propriedades básicas de potência chegamos a conclusão que o resto da divisão de 19^{1001} por 9 é 1.

2.4. CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE POR MEIO DE NOÇÕES DE CONGRUÊNCIA

Ao analisar livros didáticos do Ensino Fundamental é possível notar a presença de critérios de divisibilidade, onde são expostos já em forma de resultados. Usaremos agora as noções estabelecidas até aqui sobre Congruência para mostrar a validade de alguns critérios de divisibilidade.

Pelo *Teorema 2.3*, um número $a \in \mathbb{Z}$ na base decimal pode ser escrito da seguinte forma.

$$a = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_n \cdot 10^n.$$

Podemos observar que cada fator acima depende de uma potência de 10, sendo assim, basta escolher o número para qual se deseja montar o critério de divisibilidade e estabelecer a Congruência das potências de 10. Usando então o auxílio da *Proposição 2.13* será possível identificar um padrão lógico e estabelecer um critério.

2.4.1. Divisibilidade por 2

"Um número é divisível por 2 se, e somente se, seu último algarismo for par"

Utilizando a metodologia citada, primeiramente observaremos como se comportam as das potências de 10 quando se estabelece a Congruência módulo 2.

$$\begin{aligned} 10^0 &=_2 1 \\ 10^1 &=_2 0 \\ &\vdots \\ 10^n &=_2 0 \end{aligned}$$

Independente da potência não nula de 10, o resultado da Congruência sempre será zero, dessa forma qualquer que seja o número a ficaria escrito da seguinte forma:

$$a =_2 a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0.$$

Logo:

$$a =_2 a_0.$$

Sendo assim, um número só poderá ser divisível por 2 se a_0 também o for, ou seja, seu último algarismo tem que ser um número divisível por 2. Justificando assim a afirmação "Um número é divisível por 2 se, e somente se, seu último algarismo for par".

2.4.2. Divisibilidade por 3

Estabelecendo as Congruências de 10 com módulo de Congruência 3 temos:

$$\begin{aligned} 10^0 &=_3 1 \\ 10^1 &=_3 1 \\ &\vdots \\ 10^n &=_3 1 \end{aligned}$$

Como podemos observar, todas as potências de 10 quando estabelecida a Congruência módulo 3 deixam o mesmo resultado. Assim, um número a escrito na nossa base decimal ficaria da forma:

$$a =_3 a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1.$$

Logo:

$$a =_3 a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

E isso justifica a afirmação "Um número é divisível por 3, se e somente se, a soma dos seus algarismos for divisível por 3".

2.4.3. Divisibilidade por 5

Estabelecendo as Congruências das potências de 10 com módulo de Congruência 5 temos:

$$\begin{aligned} 10^0 &=_5 1 \\ 10^1 &=_5 0 \\ &\vdots \\ 10^n &=_5 0 \end{aligned}$$

Independente da potência não nula de 10, o resultado da Congruência módulo 5 sempre será zero, dessa forma:

$$a =_5 a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0.$$

Logo:

$$a =_5 a_0.$$

Dessa forma, podemos afirmar que um número só será divisível por 5 se o algarismo das unidades também o for. Justificando assim nossa afirmação “Um número será divisível por 5 se, e somente se, seu algarismo das unidades for 0 ou 5”.

2.4.4. Divisibilidade por 8

Poderíamos enxergar as Congruências das potências de 10 módulo 8 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 10^0 &=_8 1 \\ 10^1 &=_8 2 \\ 10^2 &=_8 4 \\ 10^3 &=_8 0 \\ &\vdots \\ 10^n &=_8 0 \end{aligned}$$

Observando que as potências de 10 a partir da potência de ordem 3 sempre terão um fator 2^3, podemos então reescrever o número a da seguinte forma:

$$a =_8 a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 4 + a_3 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0.$$

Simplificando, teríamos:

$$a =_8 a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 4.$$

Estabelecendo assim o seguinte critério:

“Dado um número a ele será divisível por 8 quando a soma do algarismo das unidades com o dobro do algarismo das dezenas com o quádruplo do algarismo das centenas for divisível por 8." Conseguiríamos também enxergar as Congruências da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 10^0 &=_8 1 \\ 10^1 &=_8 (-6) \\ 10^2 &=_8 (-4) \\ 10^3 &=_8 0 \\ &\vdots \\ 10^n &=_8 0 \end{aligned}$$

O número a ficaria da seguinte forma:

$$a =_8 a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot (-6) + a_2 \cdot (-4) + a_3 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0.$$

Logo:

$$a =_8 a_0 - 6 \cdot a_1 - a \cdot a_2.$$

Poderíamos então extrair o seguinte critério de divisibilidade:

"Um número a será divisível por 8 quando o algarismo da unidade subtraído do sêxtuplo do algarismo das dezenas subtraído do quádruplo do algarismo da centena for divisível por 8."

Percebemos que é possível realizar diversas combinações com o intuito de encontrar a melhor sentença (fórmula) que satisfaça as nossas necessidades, propiciando assim uma maneira mais adequada para resolver algum problema dado.

3. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O sucesso na assimilação de conteúdos matemáticos pode ser, em parte, um grande reflexo da prática de resolução de problemas. Quando o aluno estabelece a ideia de um conceito novo, seja por intermédio da exposição do professor ou da prática do próprio aluno, esse novo pensamento pode ser um grande facilitador para a assimilação de conteúdos futuros.

Segundo Polya (1995, p. 3), resolver problemas é uma habilidade prática que se assemelha a nadar, esquiar ou tocar piano, podendo ser aprendida por meio de imitação e prática. Assim, para aprender a nadar, deve-se praticar indo à água, e para ser um bom "resolvedor de problemas" tem-se que resolver problemas.

Partindo desse pressuposto, quando estabelecida a noção de um novo conteúdo, a mesma oferece condições ao aluno de resolver mais problemas de maneira mais rápida e intuitiva. Isso ocorre porque a cada questão que o aluno resolve, há um incentivo para apropriação de método novo de resolução, e viabiliza uma reflexão em resolver questões, construir ideias e pensamentos que podem agregar tanto na análise e resolução de outras questões mais complexas, como ponto de ajuda para estruturação e assimilação de novos conhecimentos.

Veremos a seguir como as noções estabelecidas até aqui sobre Congruências podem aflorar ideias facilitadoras no processo de resolução de problemas, tornando-se, como citado, uma excelente ferramenta para o processo de ensino-aprendizagem.

Vale recordar que o presente trabalho tem o intuito de servir de subsidio para auxiliar o professor a trabalhar em salas do Ensino Fundamental a partir do 6º ano. Sendo assim, algumas resoluções levarão em consideração essa condição. Será dada ênfase ao conteúdo proposto, porém algumas questões que poderiam ser aplicadas em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental não alavancarão conceitos que extrapolem a compreensão desse grupo. Dessa forma, desejamos que o caro leitor leve isso em consideração ao se deparar com raciocínios que podiam ser bem mais simplificados, em alguns casos.

Em suma, o trabalho tem o intuito de mostrar que o estudo de Congruências é viável e pode acrescentar pontos positivos ao Ensino Fundamental, sendo possível facilitar cálculos, raciocínios e incitar ideias menos complexas para a resolução de problemas, permitindo que os alunos possam resolver questões que só seriam viáveis com conhecimentos que eles construiriam apenas em séries futuras.

3.1. ALGUNS EXERCÍCIOS RESOLVIDOS COMO PROPOSTAS DE APLICAÇÃO DE CONGRUÊNCIA

Exercício 1. (OCM 1994, adaptado). Seja $A = 777\ldots77$ um número onde o digito 7 aparece 1001 vezes. Determinar o resto da divisão de A por 1001.

Solução. Em questões que solicitam o resto ou o ultimo algarismo é interessante tralhar com o número escrito na sua separação por suas potências de 10, pois ao estabelecer a Congruência conveniente, tende-se a enxergar mais facilmente um possível padrão.

Partindo dessa ideia, vamos escrever o número A conforme mostra o *Teorema 2.3.*

$$a = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_{1001} \cdot 10^{1000}.$$

Como todos os dígitos de A são iguais, temos que:

$$a = a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{1000} = 7.$$

Agora que temos nosso número escrito em forma de soma de parcelas, estabeleceremos Congruência módulo 1001 (pois estamos querendo saber o resto da divisão por 1001) de todas elas, dessa forma:

$$\begin{aligned}
10^0 &=_{1001} 1 \\
10^1 &=_{1001} 10 \\
10^2 &=_{1001} 10^2 \\
10^3 &=_{1001} (-1) \\
10^4 &=_{1001} (-10) \\
10^5 &=_{1001} (-10^2) \\
10^6 &=_{1001} 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Podemos perceber que existe um padrão de repetição nas potências de expoente múltiplo de 3. Além disso, devemos observar o resultado da Congruência de 7 em relação a 1001.

$$7 =_{1001} 7.$$

Levando isso em consideração, o número A ficaria com a seguinte configuração

$$A = \underbrace{(7 \cdot 1 + 7 \cdot 10 + 7 \cdot 10^2) - (7 \cdot 1 + 7 \cdot 10 + 7 \cdot 10^2)}_{\text{332 vezes}} + (7 \cdot 1 + 7 \cdot 10 + 7 \cdot 10^2) - 7 \cdot 1 + 7 \cdot 1.$$

Perceba que uma parcela anulara a outra 332 vezes até chegarmos nos últimos termos que são da forma:

$$(7 \cdot 1 + 7 \cdot 10 + 7 \cdot 10^2) - 7 \cdot 1 + 7 \cdot 10 = 777 - 77 = 700.$$

Concluímos então, que o resto da divisão de A por 1001 é 700.

$\square$

Exercício 2. Qual é o algarismo das dezenas da soma.

$$\underbrace{7}_{\text{um sete}} + \underbrace{77}_{\text{dois setes}} + \underbrace{777}_{\text{três setes}} + \ldots + \underbrace{777\ldots777}_{\text{setenta e sete setes}}$$

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Solução. Ao estabelecer uma Congruência módulo 10 de um número, torna-se possível identificar o algoritmo das unidades do mesmo, assim, ao estabelecermos a Congruência módulo 100 conseguiremos encontrar o algarismo das dezenas.

Visando facilitar os cálculos, vamos escrever a expressão do enunciado em termos da potência 10^2, pois, como vamos estabelecer a Congruência módulo 100, todo termo que acompanhar a potência 10^2 será nulo (já que $10^2 = 100$ e $100 =_{100} 0$). Escrevendo o número em termos de potência 10^2, temos:

$$7 + 77 + (7 \cdot 10^2 + 77) + (77 \cdot 10^2 + 77) + \ldots + (\underbrace{777\ldots77}_{\text{75 setes}} \cdot 10^2 + 77).$$

Levanto em consideração o fato de $10^2 = 100$ e $100 =_{100} 0$, teremos:

$$7 + \underbrace{77 + (0 + 77) + (0 + 77) + \ldots + (0 + 77)}_{\text{76 vezes}}.$$

Fica fácil enxergar que o número 77 irá se repetir 76 vezes, sendo assim, basta fazer:

$$7 + 77 \cdot 76 = 5859.$$

Queremos descobrir o algarismo das dezenas, sendo assim, basta estabelecer a Congruência de 5859 em relação 100, teremos que $5859 =_{100} 59$.

Concluímos que o algarismo das dezenas é 5.

$\square$

Exercício 3. (OBMEP – Banco de Questões 2015, p. 51). O mágico Magimático diz para uma pessoa da plateia escolher uma peça qualquer de um dominó comum. Tal peça é formada por um par de números de 0 a 6. Em seguida, ele diz para a pessoa escolher um dos números da peça e realizar a seguinte sequência de operações:

1. multiplicá-lo por 5;
2. somar o resultado anterior com 15;
3. multiplicar o último resultado por 2 e, finalmente;
4. somar o último resultado com o outro número da peça.

Realizadas tais operações, o resultado é divulgado e Magimático impressiona a plateia dizendo exatamente os números escritos no dominó escolhido.

a) Sabendo que o resultado foi 62, como o mágico descobriu o número escolhido pelo membro da plateia?

b) Se o resultado tivesse sido n, como descobrir os números da peça escolhida?

Solução.

a) Cada peça do dominó é composta por duas partes que chamaremos de $P1$ e $P2$, seguindo o que foi proposto pelo mágico para gerar o número P, nas etapas 1, 2, teremos um número múltiplo de 5, fazendo a etapa 3 esse número P se tornara múltiplo de 10 (pois nessa etapa multiplicamos o número por 2), logo:

$$P =_{10} 0.$$

No passo 4, o mágico estabelece que seja somado a parte $(P2)$ ao número P, dessa forma, se fizermos a Congruência de $P + P2$ módulo 10, teremos:

$$P + P2 =_{10} 0 + P2.$$

Sendo assim, teremos:

$$P + P2 =_{10} 0 + P2, \text{ pois, } P2 < 7.$$

Segundo o enunciado o resultado foi 62, dessa forma:

$$62 =_{10} 2.$$

Logo, uma das partes do dominó é 2.

□

Como mostrado, o algarismo das unidades sempre será a parte P2. Para achar P1, basta desfazer a sequencia de operações sugeridas no enunciado, visando facilitar os cálculos vamos considerar apenas até a terceira etapa sugerida, ou seja, antes de somar a parte P2.

Seguindo a sequencia de operações até a terceira etapa, temos que o número P que procuramos obedece a seguinte igualdade:

$$P = 2 \cdot (5 \cdot P1 + 15).$$

A igualdade também pode ser vista da seguinte maneira:

$$P = 10(P1 + 3).$$

Concluímos então que para achar a parte P1 basta dividir P por 10 e subtrair 3 conforme a equação P=10(P1+3), logo as duas partes do dominó são 3 e 2.

b) Conforme mostrado na letra a), para achar uma das partes basta fazer a Congruência módulo 10, depois, subtrair o resultado dessa operação por o número escolhido pelo participante, dividir por 10 e subtrair 3.

Exercício 4. Sabendo que o ano de 2021 não é bissexto e começou em uma sexta-feira, em que dia cairá a data 21/01/2022?

Solução. Para resolver o problema, levaremos em consideração o seguinte raciocínio, como 2021 não é um ano bissexto, ou seja, ele tem 365 dias. Queremos saber o dia da semana referente a 21/01/2022. Como de Janeiro até Dezembro de 2021 teremos 365 dias, para alcançar a data de 21/01/2022 devemos somar mais 21 dias. Logo, faremos 365+21=386, trabalharemos então com 386 dias.

O enunciado que afirma que sexta-feira foi o primeiro dia do ano, partindo disso temos a seguinte sequência: sexta-feira foi o dia 1, sábado foi o dia 2, domingo foi o dia 3 e seguindo sucessivamente, quinta-feira foi o dia 7.

Basta estabelecer a Congruência de 386 (pois de 01/01/2021 até 21/01/2022 terão se passado 386 dias) módulo 7 (pois a semana tem 7 dias) e fazer a correspondência do resultado com a sequencia a cima. Observe também que todos os múltiplos de 7 são congruentes a 0 módulo 7. Com isso, podemos ver que, $7 \cdot 5 = 35 =_7 0$ e $7 \cdot 50 = 350 =_7 0$ e somando teremos que, $385 =_7 0$, logo $386 =_7 1$.

Concluímos então que, 21/12/2022 será uma sexta-feira.

□

Exercício 5. Determinar o resto da divisão por 8 do produto: $9428 \cdot 7613 \cdot 36249$, sem efetuá-lo.

Solução. O enunciado do problema solicita que encontremos o resto da divisão por 8 do produto de alguns números, em problemas dessa natureza é interessante resolver cada Congruência de forma individual, pois, como se trata de um produto, com o auxílio da *Propriedade 4*, podemos juntar as Congruências feitas de forma individual em uma única.

De acordo com o *Teorema 2.3*, podemos escrever cada número de acordo com sua separação em potências de 10 da seguinte maneira.

$$a = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_n \cdot 10^n.$$

O maior número tem 5 dígitos, logo a maior potência de 10 que teremos será 10^4, partindo disso, estabeleceremos inicialmente as Congruências, em relação ao módulo 8, das potências de 10 até a potência 10^4, visando facilitar os cálculos. Sendo assim:

$$\begin{aligned} 10^0 &=_8 1 \\ 10^1 &=_8 2 \\ 10^2 &=_8 4 \\ 10^3 &=_8 0 \\ 10^4 &=_8 0 \end{aligned}$$

Feito isso escreveremos nosso primeiro número (9428), de acordo com o *Teorema 2.3*:

$$9428 = 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3.$$

Estabelecendo as Congruências número a número módulo 8 teremos:

$$9428 =_8 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 0.$$

Concluímos, então, que: $9428 =_8 4$.

Da mesma forma para 7613, reescreveremos de acordo com o *Teorema 2.3.*

$$7613 = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^3.$$

Estabelecendo as Congruências:

$$7613 =_8 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 0.$$

Concluímos, então, que: $7613 =_8 5$.

Por último, para 36249, com a mesma analogia anterior:

$$36249 = 9 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^4.$$

Com isso:

$$36249 =_8 9 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0.$$

Logo, $36249 =_8 1$

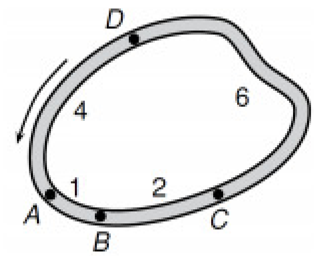
Finalmente usaremos a *Propriedade 4*, item *i)* para juntar todas as Congruências, o resultado do produto ficara da seguinte forma:

$$9428 \cdot 7613 \cdot 36249 =_8 4 \cdot 5 \cdot 1.$$

Consequentemente, $9428 \cdot 7613 \cdot 36249 =_8 4$. Concluímos que o resto da divisão será 4.

□

Exercício 6. (OBMEP – Banco de Questões 2012, p. 27). A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Fonte: (17)

Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.

a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?

b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?

c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Solução.

a) Para solucionar esse problema usaremos o seguinte raciocínio; imagine que você quer fazer uma corrida de 13 km, não importa o lugar que você comece, pois toda a extensão da pista é 13 km (conforme mostra o enunciado).

Agora imagine que você deseja fazer uma corrida de exatamente 15 km e ela se inicia no ponto D, ao dar uma volta e chegar no ponto D a corrida teria a extensão de 13 km, então para atingir os 15 km você continuaria correndo até o ponto mais próximo (nesse caso o A), porém, a distancia de D até A é 4 km, sua corrida totalizaria então 17 km. Assim, seria mais conveniente seria iniciar a corrida no ponto B, pois, ao dar uma volta e se deslocar até o ponto mais próximo (nesse caso o C), totalizando os 15 km.

Levando em conta esse raciocínio, como a extensão da pista é 13 km basta fazer Congruência módulo 13 da quilometragem desejada como percurso da corrida, e escolher pontos consecutivos, cuja soma seja o resultado obtido na Congruência, por exemplo, na assertiva a). Temos: $14 =_{13} 1$, logo, a extensão do ponto A ao ponto B é única, que é 1. Para esse caso o ponto de partida será em A e a chegada em B.

b) Usando o mesmo raciocínio da assertiva a), temos: $100 =_{13} 9$. Basta olhar para a figura e notar que a extensão de A a D é a única que tem 9 km. Logo: largar em A e acabar em D.

c) Os possíveis restos de uma divisão por 13 estão no conjunto (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12). Veja que todos esses números podem ser escritos como soma ou diferença dos algarismos $(1, 2, 6, 4)$, por exemplo, a distância 8, poderíamos escrever como sendo $6+2$, ou seja, a distância de B até D. Sempre obedecendo à direção que a figura mostra.

□

Exercício 7. (OCM/95). Prove que o número $1^{99}+2^{99}+3^{99}+4^{99}+5^{99}$ é divisível por 5.

Solução. Para verificar essa divisibilidade, basta mostrar que $1^{99}+2^{99}+3^{99}+4^{99}+5^{99} =_5 0$, faremos então uma analise parcela por parcela.

Para 1^{99}, temos que $1 =_5 1$, (pela *Propriedade 1*) e usando a *Proposição 2.12*, teremos:

$$1^{99} =_5 1^{99}, \text{ logo } 1^{99} =_5 1.$$

Analisando a parcela 2^{99}, temos $2^1 =_5 2$, dessa forma $2^3 =_5 3$ e continuando a analise, $2^4 =_5 3 \cdot 2$, sendo assim $2^4 =_5 1$. A partir desse resultado e fazendo uso da

Proposição 2.12, teremos $(2^4)^{24} =_5 (1^4)^{24} =_5 1$. Fazendo uso da *Proposição 2.11*, item *ii)* e dos resultados obtidos nas Congruências anteriores, temos:

$$2^{96} \cdot 2^3 =_5 1 \cdot 3, \text{ assim } 2^{99} =_5 3.$$

Para 3^{99}, temos inicialmente que $3 =_5 3$, $3^2 =_5 4$, $3^3 =_5 2$ e $3^4 =_5 1$. Assim $(3^4)^{24} =_5 (1^4)^{24} =_5 1$, dessa forma:

$$3^{99} \cdot 3^3 =_5 1 \cdot 2 =_5 2, \text{ concluimos então que } 3^{99} =_5 2.$$

Agora para a parcela 4^{99}. Podemos perceber inicialmente que $4^2 =_5 1$, pela *Proposição 2.4*.

$$(4^2)^{49} =_5 1^{98} =_5 1, \text{ logo } 4^{99} =_5 4.$$

Por último para 5^{99}, teremos que $5^{99} =_5 0$. Feito para todas as partes, vamos estabelecer a Congruência parcela por parcela.

$$1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99} =_5 1 + 3 + 2 + 4 + 0 = 10.$$

Dessa forma:

$$1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99} =_5 0.$$

Concluindo assim, que o número é múltiplo de 5.

□

Exercício 8. (OBMEP 2017). Somando 1 a um certo número natural, obtemos um múltiplo de 11. Subtraindo 1 desse mesmo número, obtemos um múltiplo de 8. Qual é o resto da divisão do quadrado desse número por 88?

a) 0 b) 1 c) 8 d) 10 e) 80

Solução. Vamos fazer a construção da ideia que a questão nos fornece. Denotaremos o "número natural qualquer" expresso no enunciado por n, o enunciado nos diz que somando 1 a esse número natural, obtemos um múltiplo de 11, assim:

$$n + 1 = 11 \cdot k, \text{com } k \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

Também pelo enunciado, ao subtrairmos 1 desse mesmo número, obtemos um múltiplo de 8. Dessa forma:

$$n - 1 = 8 \cdot p, \text{com } p \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

A questão solicita o resto da divisão do quadrado de n por 88, é visível que se fizermos o produto entre (3.1) e (3.2) aparecera o número 88, sendo assim;

$$11k \cdot 8p = (n+1) \cdot (n-1) = n^2 - 1.$$

Logo

$$n^2 - 1 = 88 \cdot k \cdot p, \text{com } k \cdot p \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

De acordo com a *Definição 2.5*, dizer que $a =_b c$ é o mesmo que dizer $a - b = c \cdot x$, onde x é um número inteiro qualquer, sendo assim, a equação (3.3) ficara da seguinte forma:

$$n^2 =_{88} 1.$$

Concluímos assim, que o resto da divisão é 1, que a resposta está na letra b).

□

Exercício 9. (OBMEP – Banco de Questões 2015, p. 45). A partir do meio-dia, João faz, a cada 80 minutos, uma marca na posição do ponteiro das horas do seu relógio.

a) Depois de quanto tempo não será mais necessário fazer novas marcas no relógio?

b) Qual a soma dos ângulos internos do polígono formado pelas marcas?

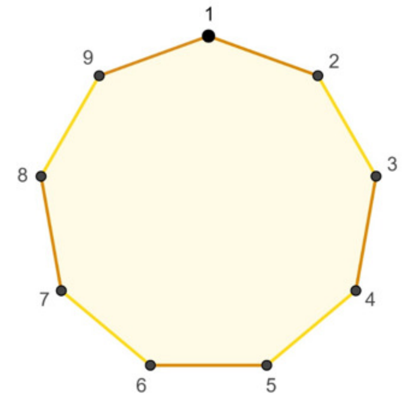
Solução.

a) Para o ponteiro das horas completar uma volta inteira no relógio, é necessário que o ponteiro dos minutos percorra doze vezes o relógio inteiro. Como cada volta completa leva sessenta minutos, isso contabilizará $12 \cdot 60 = 720$ minutos para que o ponteiro das horas dê uma volta completa no relógio. como João faz as marcas a cada oitenta minutos, estabeleceremos a Congruência módulo 80, e, com isso, temos que $720 =_{80} 0$. A Congruência deixou resultado 0, concluímos que ao completar a volta o ponteiro das horas voltará a posição inicial, sendo assim, as marcas que seriam feitas posteriormente serão coincidentes com as marcas da primeira volta, dessa forma serão necessários apenas 720 minutos para não se fazer mais marcas no relógio.

b) Dividindo 720 para 80 temos o número de marcas que foram feitas. O resultado da divisão é nove, logo foram feitas nove marcas. Esboçando as marcas no relógio teremos a forma mostrada na Figura 3.1. Ligando o centro da figura com cada uma das marcas teríamos a Figura 3.2.

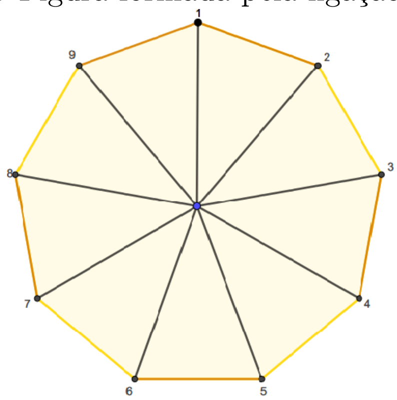
   Podemos claramente observar que foram formados 9 triângulos e para saber o valor da soma desses ângulos basta fazer a soma dos ângulos dos 9 triângulos e subtrair os ângulos em volta do centro da figura, que, como formam uma volta completa tem o valor de 360°. Assim, o valor da soma dos ângulos internos do polígono será $9 \cdot 180° - 360° = 1260°$.

Figura 3.1: Marcas no relógio



Fonte: Acervo Pessoal

Figura 3.2: Figura formada pela ligação das marcas



Fonte: Acervo Pessoal

□

Exercício 10. Qual o ultimo dígito de 777^{777} ?

Solução. O nosso sistema de numeração é composto por agrupamentos de dezenas, podendo ser facilmente perceptível no *Teorema 2.3.* Sendo assim, para saber o último dígito de um número basta estabelecer a Congruência módulo 10 do número solicitado. Como 770 é um múltiplo de 10, temos $777 =_{10} 7$. Elevando os dois lados ao quadrado temos $777^2 =_{10} 7^2$, logo:

$$777^2 =_{10} (-1).$$

Observação. Essa Congruência pode ser 9 ou -1, podendo a última ser obtido fazendo a subtração de 10 unidades.

Queremos chegar ao expoente 777, pela *Proposição 2.12* elevando ambos os lados a 388 teremos que:

$$(777^2)^{388} =_{10} (-1)^{388} =_{10} 1, \text{ logo } 777^{776} =_{10} 1.$$

Fazendo o uso da *Propriedade 4*, item *i)*, teremos:

$$777^{776} \cdot 7 =_{10} 1 \cdot 7.$$

Por fim:

$$777^{777} =_{10} 7.$$

Concluímos, então, que o último digito de 777^{777} é 7.

$\square$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A finalidade principal deste trabalho foi discutir a introdução de noções de Congruências e de aritmética modular, especialmente no Ensino Fundamental a partir do 6º ano, como meio de proporcionar a aprendizagem e oferecer uma ferramenta para o aluno, visando tanto a assimilação do conteúdo proposto quanto a fixação dos conteúdos nos quais as noções de Congruências estão amparadas.

Como vimos no decorrer do trabalho, os conceitos de Congruência estão muito presentes no cotidiano, sendo possível vinculá-los a noções de conteúdos anteriormente lecionados, aumentando o sucesso na assimilação. Por meio das exposições e dos exercícios propostos, podemos concluir que o conteúdo de Congruência vem a ser um potencializador no que se refere ao processo de resolução de problemas, servindo de aporte para alcançar ideias facilitadoras para tal ação, competindo ao professor planejar o seu uso de forma que facilite a aprendizagem.

Além disso, trabalhar o conteúdo de Congruência nos permitiu fazer uma abordagem histórica de grandes nomes que contribuíram para o desenvolvimento do meio científico em diversas áreas, dando ênfase a jovens que foram prodígios principalmente no ramo da Matemática, mostrando que é possível descobrir talentos por meio do estímulo do raciocínio.

Incentivados principalmente pela situação crítica que nossa educação se encontra, evidenciada por dados de programas de avaliação, como o PISA, e do fracasso em alcançar metas estabelecidas no PNE (Lei Nº 13.005 de 25 de Junho de 2014), acreditamos que buscamos e conseguimos apresentar as noções básicas do conteúdo de Congruências, mostrando a viabilidade de sua difusão aos alunos. Baseado em documentos oficiais e teorias educacionais, podemos concluir que as noções de Congruência podem ser facilitadoras no processo de ensino-aprendizagem, visando melhorar a situação educacional.

Após as discussões apresentadas neste trabalho, consideramos que a proposta de conteúdo pode ser inserida no Ensino Fundamental a partir do 6º ano, uma vez que é de grande importância para a sucessão de estudo dos alunos.

Desejamos que este trabalho seja uma forma de motivação para que os leitores, pesquisadores e demais professores de Matemática percebam a viabilidade e a necessidade de inovar na sala de aula, visto que a educação no nosso país está muito atrasada.

Referências Bibliográficas

1 ASSIS, Cleber; BARBOSA, Régis; FEITOSA, Samuel; MIRANDA, Tiago. **OBMEP - Banco de Questões 2015.** Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2015.pdfL> Acessado em: 13 de abr. de 2021.

2 BACELAR, Roberto. **Divisibilidade e Resto.** Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/divisibilidade_e_resto-1.pdf> Acessado em: 14 de abr. de 2021.

3 Biografia de Carl Friedrich Gauss. **Unidos pela Matemática**, 2013. Disponível em: <http://matematicaleonelevrg.blogspot.com/2013/02/biografia-de-carl-friedrich-gauss.htmlURL> Acessado em: 01 de set. de 2021.

4 BRASIL. **Lei Nº 13.005 de 25 de Junho de 2014.** Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2014/Lei/L13005.htm> Acessado em: 17 de jun. de 2021.

5 BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018

6 BRASIL. Princípios e fundamentos dos Parâmetros Curriculares Nacionais. In: BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).** Brasília, 1997. p. 33-50. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf> Acessado em: 17 de jun. de 2021.

7 Évarist Galois. **ALGOSOBRE**, sd. Disponível em: <https://www.algosobre.com.br/biografias/evariste-galois.html> Acessado em: 23 de mai. de 2021.

8 Évariste Galois (o gênio encrenqueiro). **MATEMATIQUÊS**, sd. Disponível em: <http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=921> Acessado em: 22 de mai. de 2021.

9 Frases de Blaise Pascal. **Citações e Frases Famosas**, sd. Disponível em: <https://citacoes.in/autores/blaise-pascal/> Acessado em: 23 de mai. de 2021.

10 FRAZÃO, Dilvia. Blaise Pascal. **EBIOGRAFIA**, 2020. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/blaise_pascal/#:~:text=Blaise%20Pascal%20(1623%2D1662),educa%C3%A7%C3%A3o%20aos%20cuidados%20do%20pai> Acessado em: 23 de abr. de 2021.

11 FEITOSA, Samuel Barbosa. **Polos Olímpicos de Treinamento.** Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~laurarifo/poti/tn-aula12-divisibilidade_I_II.pdfL> . Acessado em: 13 de abr. de 2021.

12 HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

13 KISHI, Kátia. Évariste Galois, o revolucionário matemático que inspirou o Galoá. **Galóa Journal**, sd. Disponível em: <https://galoa.com.br/blog/evariste-galois-o-revolucionario-matematico-que-inspirou-o-galoa> Acessado em: 01 de set. de 2021.

14 MELO, Lawrence. **NOIC**, sd. Disponível em:<https://noic.com.br/materiais-informatica/curso/math-01/> Acessado em: 19 de jun. de 2021.

15 MOREIRA, Marco. Antonio. A teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel. In: MOREIRA, Marco. Antonio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006, p. 13-42.

16 O Brasil no PISA 2018, **Cenpec**, s.d. Disponível em: <https://www.cenpec.org.br/tematicas/o-brasil-no-pisa-2018> Acessado em: 19 de jun. De 2021.

17 OBMEP. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2012.pdf> Acessado em: 13 de abr. de 2021.

18 OBMEP. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1O_nEyPi-LqlBE7aZYgB6CXclkPhL7qXO/view> Acessado em: 28 de mai. de 2021

19 POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1985.

20 PORTAL DA MATEMÁTICA OBMEP. **Exercício 14**. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/uploads/material/5oeoy5b8w0gso.pdf> Acessado em: 29 de mai. de 2021.

21 PORTANOVA, Ruth (org.) & NINA, Clarissa, T. D. et al. A matemática e o desenvolvimento do pensamento. In: PORTANOVA, Ruth (org.) & NINA, Clarissa, T. D. et al. **Um currículo de matemática em movimento**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2005, p. 19-33.

22 Problema para ajudar na escola. Uma função de Euler. **Clubes de Matemática da OBMEP**, sd. Disponivel em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-para-ajudar-na-escola-uma-funcao-de-euler/> Acessado em: 29 de jun. de 2021.

23 REVISTA ELEMENTOS. **Nota histórica de Carl Friedrich Gauss**. Disponivel em: <http://www2.ufac.br/elementos/edicoes/edicao-no-03-2013/johann-carl-friedrich-gauss.pdf> Acessado em: 23 de mai. de 2021.

24 Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em leitura, matemática e ciências no Brasil. **INEP**, 2019. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206> Acessado em: 30 de mai. de 2021.

25 Relógio Analógico. **Prefeitura de Goiânia**, sd. Disponível em: <https://sme.goiania.go.gov.br/conexaoescola/ensino_fundamental/aprendendo-a-fazer-leitura-de-horas-em-relogios-analogicos/> Acessado em: 26 de jun. de 2021.

26 SILVA, Maycon. PLIMPTON 322. **MS-Matemática**, 2015. Disponível em: <http://ms-matematica.blogspot.com/2015/01/plimpton-322.html> Acessado em: 23 de abr. de 2021.

27 UVA, Marcelo. Conheça a Trágica História de Évariste Galois. **Marcelo uva**, s.d. Disponível em: <https://www.marcelouva.com.br/conheca-a-tragica-historia-de-evariste-galois/#:~:text=O%20primeiro%20e%20mais%20c%C3%A9lebre,o%20duelo%20tr%C3%A1gico%20ao%20amanhecerL> Acessado em: 22 de mai. de 2021.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Restrito

Entrega de trabalho de conclusão de curso

Assunto:	Entrega de trabalho de conclusão de curso
Assinado por:	Francisco Leite
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Restrito
Hipótese Legal:	Informação Pessoal (Art. 31 da Lei no 12.527/2011)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Francisco Alison Barbosa Leite**, **ALUNO (202012210018) DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 08/12/2021 12:51:13.

Este documento foi armazenado no SUAP em 08/12/2021. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 394205
Código de Autenticação: 366badf310