

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS

DAVID DOS SANTOS DIAS

**ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS RETICULADAS UTILIZANDO
ELEMENTOS LINEARES DE TRELIÇA, VIGA E PÓRTICO**

Cajazeiras-PB
2022

DAVID DOS SANTOS DIAS

**ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS RETICULADAS UTILIZANDO
ELEMENTOS LINEARES DE TRELIÇA, VIGA E PÓRTICO**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba-*Campus* Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil, sob Orientação do Prof. Dr. Sebastião Simão da Silva.

Cajazeiras-PB
2022

IFPB - Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) – Thiago Cabral CRB15 - 628

D541a

DIAS, David dos Santos

Análise matricial de estruturas reticuladas utilizando elementos lineares de treliça, viga e pórtico. David dos Santos Dias. - Cajazeiras, 2022. 90f..

TCC (PDF)

Orientador: Sebastião Simão da Silva
Monografia (Curso de Engenharia Civil)

1. Estruturas 2. Projetistas 3. Códigos Computacionais. I. David dos Santos Dias. II Título.

CDU: 624.014.2

Ficha catalográfica elaborada pelo Departamento de Bibliotecas DBIBLIO/IFPB/Reitoria

DAVID DOS SANTOS DIAS

**ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS RETICULADAS UTILIZANDO
ELEMENTOS LINEARES DE TRELIÇA, VIGA E PÓRTICO**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
Coordenação do Curso de Bacharelado em
Engenharia Civil do Instituto Federal de
Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba,
Campus Cajazeiras, como parte dos
requisitos para a obtenção do Título de
Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovado em 24 de março de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Sebastião Simão da Silva

Prof. Dr. Sebastião Simão da Silva – IFPE-*Campus* Cajazeiras
Orientador

[Assinatura]

Prof. Esp. Daniel Torres Filho – IFPB-*Campus* Cajazeiras
Examinador 1

[Assinatura]

Prof. M. Sc. Iuri Augusto Alves Lustosa – IFPI *Campus* Parnaíba
Examinador 2

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho aos meus pais: Martins Alves Dias e Lucineide Rodrigues dos Santos Dias, pelo apoio e confiança nos meus objetivos.

.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Federal de Ciência e Tecnologia da Paraíba *Campus* Cajazeiras, pela grande oportunidade que tive em fazer parte do corpo discente, aprendendo e desenvolvendo estudos e pesquisas no campo da Engenharia Civil.

Aos meus pais que sempre me apoiaram e confiaram nos meus sonhos. Ao orientador, Prof. Dr. Sebastião Simão da Silva, pela paciência e comprometimento em exercer o papel de orientador e ensinar, deixo aqui meus verdadeiros agradecimentos.

Agradeço a todos os professores e professoras e em especial ao Prof. M. Sc. Gastão Coelho de Aquino Filho, por tantos ensinamentos aos longos destes cinco anos de graduação, pela amizade e por ser uma inspiração de profissional para mim.

A minha família e amigos que estiveram comigo nessa caminhada, agradeço imensamente.

RESUMO

As engenharias e as ciências exatas sempre se embasaram nos métodos analíticos para solucionarem problemas físicos. Até os dias atuais essas metodologias são aplicadas, por exemplo, em análise estrutural para obter resultados dos deslocamentos e esforços internos e em situações diversas. No entanto, com o avanço da engenharia e a necessidade de se construir estruturas cada vez mais complexas tornou-se insuficiente se apoiar apenas nos métodos analíticos. Assim, cada vez mais adota-se métodos numéricos para solucionar problemas inviáveis de serem resolvidos por meios analíticos, podendo-se levar em conta situações mais gerais ou complexas de projetos. Nesse contexto, o aprofundamento no estudo teórico, das formulações e das aplicações do método de análise matricial pode contribuir para que engenheiros projetistas estruturais possam conceber e analisar situações especiais de projetos, transformando os fundamentos da teoria em códigos computacionais eficientes. Nesse trabalho de conclusão de curso foram analisadas, por meio do método matricial, estruturas reticuladas lineares se fundamentando nos conceitos e formulações de elementos 2D e 3D de barras, treliças, vigas e pórticos.

Palavras-chave: Análise matricial; estruturas reticuladas; elementos lineares; métodos computacionais.

ABSTRACT

Engineering and exact sciences have always been based on analytical methods to solve physical problems. Until the present day these methodologies are applied, for example, in structural analysis to obtain results of displacements and internal efforts and in different situations. However, with the advancement of engineering and the need to build increasingly complex structures, it has become insufficient to rely only on analytical methods. Thus, numerical methods are increasingly adopted to solve problems that cannot be solved by analytical means, taking into account more general or complex project situations. In this context, deepening the theoretical study, formulations and applications of the matrix analysis method can help structural design engineers to conceive and analyze special project situations, transforming the foundations of theory into efficient computational codes. In this course conclusion work, linear reticulated structures were analyzed using the matrix method, based on the concepts and formulations of 2D and 3D elements of bars, trusses, beams and frames.

Keywords: Matrix analysis of structures; reticular structures; linear element; computational methods.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 - Exemplos de estruturas reticuladas.....	18
Figura 2.2 – Modelos de treliça - (a) treliça em madeira para cobertura de telhado (b) treliça em aço para cobertura de galpão	19
Figura 2.3 – Treliça tipo <i>Howe</i> e tipo <i>Pratt</i>	19
Figura 2.4 Sistema equivalente para o método dos pórticos planos. (a) pórtico espacial; (b) pórtico plano.....	20
Figura 2.5 – Pórticos planos. (a) pórtico de nós móveis; (b) pórticos com nós fixos.....	21
Figura 2.6 – Treliça espaciais. (a) Estrutura em treliça espacial de cobertura (b) treliça em etapa de içamento.....	21
Figura 2.7 – Tipos de ligações de treliça espacial. (a) nó tipo amassado; (b) ligação STQC; (c) ligação LTECA.....	22
Figura 3.1 – Barra submetida a compressão.....	24
Figura 3.2 – Discretização da barra em elementos finitos.....	25
Figura 3.3 – Elemento finito característico e e seus graus de liberdade.....	25
Figura 3.4 – Barra discretizada em três elementos finitos.....	28
Figura 3.5 – Vetor de deslocamento geral em duas dimensões.....	31
Figura 3.6 – Elemento de barra rotacionado em relação ao sistema de coordenadas global x-y que compõem uma treliça 2D genérica.	33
Figura 3.7 – Barra no espaço tridimensional junto com deslocamentos nodais locais.....	35
Figura 3.8 – Viga prismática.....	37
Figura 3.9 – Elemento de viga com deslocamentos nodais positivos, rotações, forças e Momentos.....	37
Figura 3.10 – Convenções de sinais da teoria de vigas para forças de cisalhamento e momentos fletores.....	38
Figura 3.11 – Aplicação de deslocamento unitários para encontrar os coeficientes de rigidez.....	39
Figura 3.12 - Graus de liberdade do elemento do elemento de pórtico 2D.....	42
Figura 3.13 - Graus de liberdade do elemento de pórtico e coeficientes.....	43
Figura 3.14 – Equilíbrio de um elemento genérico de viga em pórtico plano.....	44
Figura 3.15 – Graus de liberdade do pórtico espacial.....	45

Figura 3.16 – Deformação torcional de um segmento de barra.....	46
Figura 4.1 – Fluxograma do funcionamento dos programas utilizados nesse trabalho.....	49
Figura 6.1 – Barra prismática sob carregamento de tração.....	54
Figura 6.2 – Discretização da estrutura de barra linear.....	54
Figura 6.3 – Carregamento distribuído triangular do caso 2.....	55
Figura 6.4 – (a) Croqui das áreas de influência relacionada com o carregamento nodal; (b) esquema para entendimento da distribuição do carregamento para cada nó.....	55
Figura 6.5 – Deslocamento ao longo do comprimento da barra.....	57
Figura 6.6 – Tensão ao longo do comprimento da barra.....	57
Figura 6.7 – Deslocamento e tensão ao longo do comprimento do elemento para o caso 3.....	58
Figura 6.8 – Viga de Euler-Bernoulli. (a) Viga bi apoiada. (b) Viga bi engastada.....	59
Figura 6.9 – viga discretizada em elementos finitos.....	59
Figura 6.10 – Deslocamento em função da coordenada x para viga bi apoiada.....	60
Figura 6.11 – Deslocamento em função da coordenada x para viga bi engastada.....	60
Figura 6.12 – Cotas de projeto da treliça de madeira.....	61
Figura 6.13 – Discretização da estrutura. Nós, elementos e carregamento.....	62
Figura 6.14 – Área de influência do peso da cobertura sobre a treliça.....	62
Figura 6.15 – Carregamento nodal.....	64
Figura 6.16 – Deformação de estrutura de treliça plana.....	66
Figura 6.17 – Pórtico espacial da edificação analisada com <i>Scilab</i>	66
Figura 6.18 – Planta de forma.....	67
Figura 6.19 – Corte AA.....	67
Figura 6.20 – Seção transversal dos elementos estruturais do pórtico plano.....	68
Figura 6.21 – Discretização do pórtico plano na direção 0°	69
Figura 6.22 – Discretização do pórtico plano na direção 90°	70
Figura 6.23 – Deformação do pórtico plano 0°	71
Figura 6.24 – Detalhe da deformação na ligação rotulada do pórtico plano.....	71
Figura 6.25 – Deformação do pórtico plano 90°	72
Figura 6.26 - Plantas e vistas da ponte rolante. a) vista frontal; b) vista superior; c) vista transversal.....	73
Figura 6.27 – Geometria espacial. a) bloco das extremidades das vigas; b) colunas; c) bloco que compõe a viga.....	74
Figura 6.28 – Geometria espacial da ponte rolante.....	74

Figura 6.29 – Carregamento nodal e condições de contorno.....	75
Figura 6.30 – Geometria deformada.....	75
Figura 6.31 – Deformação da ponte rolante.....	77
Figura 6.32 – Cargas concentradas e distribuídas e Discretização estrutural.....	78
Figura 6.33 – Seção genérica de um perfil W.....	79
Figura 6.34 – Forças resultantes devido as cargas distribuídas nas vigas e pilares.....	80
Figura 6.35 – Conversão de sinais.....	80
Figura 6.36 – Resultante do somatório dos momentos fletores e cargas axiais.....	81
Figura 6.37- Deslocamento no eixo x do pórtico espacial.....	83
Figura 7.1 – Discretização da ponte rolante.....	90

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1- Conectividade dos elementos constituintes da barra da figura 3.4.....	28
Tabela 3.2 – Graus de liberdade dos elementos mostrados na Figura 3.4.....	28
Tabela 3.3 - Propriedades materiais e geométricas dos elementos da barra da figura 3.4.....	29
Tabela 3.4 - Relação efeitos/grau de liberdade devido ao carregamento nos elementos que compõem o pórtico espacial.....	45
Tabela 6.1 – Posição nodal e cargas nodais.....	56
Tabela 6.2 – Deslocamento e tensão em relação à coordenada	58
Tabela 6.3 – Resumo de carga nodal de projeto.....	63
Tabela 6.4 – Forças e tensões resultantes.....	64
Tabela 6.5 – Parâmetros de bitola.....	79
Tabela 6.6 – Forças e tensões resultantes.....	83
Tabela 6.7 – Relação entre deslocabilidade e parâmetro B_2	84
Tabela 6.8 – Cálculo do parâmetro B_2	84

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	JUSTIFICATIVA.....	15
1.2	OBJETIVOS	16
1.2.1	Objetivo geral.....	16
1.2.2	Objetivos específicos	16
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO.....	17
2	ESTRUTURAS RETICULADAS E ANÁLISE MATRICIAL	18
2.1	ESTRUTURAS RETICULADAS PLANAS	18
2.1.1	Treliça 2D	18
2.1.2	Pórtico 2D.....	20
2.2	ESTRUTURAS RETICULADAS ESPACIAIS	21
2.2.1	Treliça 3D	21
2.2.2	Pórtico 3D.....	22
2.3	ANÁLISE MATRICIAL.....	22
3	FORMULAÇÕES	24
3.1	ELEMENTO UNIDIRECIONAL DE BARRA	24
3.1.1	Matriz de rigidez e vetor de força nodal equivalente da estrutura.....	27
3.1.2	Condições de contorno	30
3.1.3	Deformações e tensões	31
3.2	ELEMENTOS DE TRELIÇA 2D	31
3.3	TRELIÇA 3D	34
3.4	ELEMENTO DE VIGA	36
3.5	PÓRTICO 2D	41
3.5	PÓRTICO 3D	44
4	CÓDIGOS COMPUTACIONAIS	48

	13
4.1 PROGRAMA <i>BAR1D.SCE</i>	49
4.2 PROGRAMA <i>BEAM.SCE</i>	49
4.3 PROGRAMA <i>TRUSS2D.SCE</i>	49
4.4 PROGRAMA <i>TRUSS3D.SCE</i>	49
4.5 PROGRAMA <i>FRAME2DTRUSS.SCE</i>	49
4.6 PROGRAMA <i>FRAME3D.SCE</i>	50
5 METODOLOGIA	51
5.1 NATUREZA DA PESQUISA.....	51
5.2 ETAPAS E PROCEDIMENTOS	51
5.2.1 Estudo do estado da arte	51
5.2.2 Estudo e descrição das formulações matriciais dos elementos estudados.....	51
5.2.3 Códigos numéricos escritos com a linguagem <i>Scilab</i>	51
5.2.4 Seleções de exemplos numéricos	52
5.2.5 Análise comparativa	52
6 EXEMPLOS NUMÉRICOS	53
6.1 BARRA PRISMÁTICA SOB CARREGAMENTO AXIAL.....	53
6.1.1 Resultados.....	55
6.2 VIGA BI APOIADA E VIGA BI ENGASTADA DE BERNOULLI	57
6.2.1 Resultados.....	58
6.3 TRELIÇA DE MADEIRA PARA COBERTURA	60
6.3.1 Resultados.....	63
6.4 PÓRTICOS PLANOS ASSOCIADOS PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE	65
6.4.1 Análise de estabilidade utilizando pórticos planos associados.....	67
6.4.2 Resultados.....	69
6.4.2.1 Direção 0°	69
6.4.2.2 Direção 90°	70

	14
6.5 PONTE ROLANTE.....	71
6.5.1 Resultados.....	73
6.6 ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM PÓRTICO ESPACIAL.....	75
6.6.1 Constante torsional	77
6.6.2 Resultados.....	80
7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	83
7.1 CONCLUSÕES GERAIS	83
7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	85
REFERÊNCIAS	86
APÊNDICE A – NUMERAÇÃO DOS NÓS DA PONTE ROLANTE.....	89

1 INTRODUÇÃO

As Engenharias, como as ciências exatas, sempre se embasaram nos métodos analíticos para solucionar problemas de estruturas. Até os dias atuais essa metodologia é aplicada para, por exemplo, obter resultados do comportamento de elementos estruturais e baseado, em normas técnicas, avaliar se tais elementos atingiram algum estado limite (último ou de serviço).

Atualmente os *softwares* disponíveis no mercado modelam as estruturas de edificações em pórticos planos e/ou espaciais, considerando esses pórticos como sistemas reticulados, ou seja, como sendo formados por barras ligadas pelos nós.

De acordo com Souza (1998), as estruturas de treliça apresentam ótimos desempenho e diversas vantagens, tais como: a) possuem peso próprio reduzido e grande rigidez, sendo, portanto, uma solução viável para grandes vãos; b) seu alto grau de hiperasticidade, apresentando boa redistribuição de esforços; c) fáceis de serem transportada e montadas.

Se fundamentando nos conceitos e aplicações de métodos numéricos esse trabalho se propôs a analisar estruturas 2D e 3D de barras, vigas, treliças e pórticos por meios computacionais.

Os códigos de programação, para as análises das estruturas avaliadas nesse trabalho, foram desenvolvidos através da linguagem Scilab. Utilizou-se o programa ParaView para visualização gráfica dos resultados obtidos. O Software Excel[®] foi utilizado na fase de pré-processo para obter as malhas dos modelos gerados.

1.1 JUSTIFICATIVA

Todas as categorias de modelos de estruturas requerem análises computacionais que se fundamentem em algum método bem-sucedido. Uma abordagem bastante difundida que está implementa em vários pacotes comerciais é o método matricial.

Para o sucesso no projeto de estruturas, o método de análise deve conseguir predizer de forma eficiente e realista o seu comportamento ao nível local e global. Nesse momento, em que se busca construções arrojadas, vê-se a necessidade de recorrer a métodos de análises mais robustos. Assim, apoiar-se apenas nos métodos analíticos não satisfaz as novas exigências e, a adoção de métodos numéricos computacionais é uma maneira de vencer essas limitações de projetos.

As ferramentas computacionais estão cada vez mais acessíveis e completas. Assim, com computadores de alto desempenho de processamento, rapidamente se pode obter respostas

confiáveis. Entretanto, os usuários desses sistemas necessitam do conhecimento teórico bem fundamentado, para que dessa forma aplica possam aplicar corretamente tais ferramentas.

Na modelagem, para analisar de forma realista o problema estrutural, o engenheiro deve estabelecer de forma criteriosa as propriedades dos materiais, geometrias, condições de contorno, dentre outros fatores.

Objetivando a obtenção de resultados do comportamento das estruturas em várias situações, uma análise matricial pode ser, indubitavelmente, vantajosa. O projetista pode se deparar com diferentes circunstâncias que podem tornar o projeto inviável de ser avaliado apenas de forma analítica devido ao seu alto nível de complexidade.

Diante do exposto, depreende-se que um aprofundamento teórico e computacional nos métodos numéricos pode contribuir para que projetistas e pesquisadores possam transformar os fundamentos da teoria em algoritmos e, dessa forma, consigam conceber e analisar sistemas estruturais de forma realista, bem como adquirir maior profundidade no uso de sistemas computacionais disponíveis.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

O principal objetivo deste trabalho é apresentar de forma detalhada os conceitos, as formulações e os aspectos de implementação computacional do método de análise matricial de estruturas reticuladas. Através de algoritmos numéricos implementados, pretende-se estudar o comportamento de tais estruturas, discretizando-as com elementos 2D e 3D de barras, treliças, vigas e pórticos, e dessa forma obter os seus deslocamentos e esforços internos.

1.2.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo geral, foram delineados os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar de forma detalhada todos os conceitos, as formulações e os aspectos de implementação computacional relativos aos elementos matriciais de barra, treliça, viga e pórtico;
- Estudar os códigos computacionais desenvolvidos para a Disciplina Teoria das Estruturas II, ministrada no Curso de Engenharia Civil do IFPB – *Campus* Cajazeiras-PB;
- Selecionar de referências conhecidas, problemas de estruturas reticuladas e analisa-los

- Avaliar os resultados obtidos e comparar com aqueles fornecidos por outros autores e/ou calculados com sistemas computacionais clássicos (ABAQUS e Ftool).

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

No capítulo 1 é realizada uma apresentação do trabalho e mostrado os objetivos gerais e específicos. Nele é introduzido as problemáticas pertinentes nos projetos estruturais e questionado a necessidade da análise matricial.

No capítulo 2 é abordado as principais estruturas reticuladas, suas características e utilização, e acrescentado o conceito breve de análise matricial.

O capítulo 3 desse trabalho é dedicado a formulação matemática dos elementos com foco central na definição algébrica das matrizes de rigidez: importante para a interação da estrutura

A sequência lógica, bem como o funcionamento dos programas é explanado no capítulo 4.

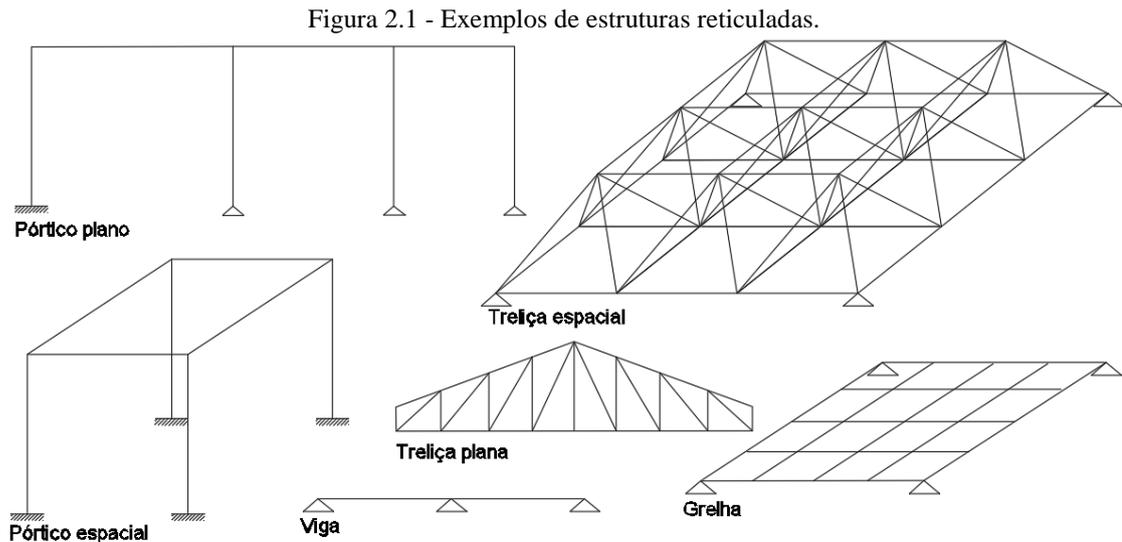
No capítulo 5 é apresentado a metodologia empregada. Nele é mostrado as etapas para análises das estruturas abordadas nesse trabalho.

No capítulo 6 são apresentados os exemplos numéricos analisados e os resultados obtidos com o uso do programa *Scilab* e confrontados os resultados com os dos autores.

O capítulo 7 é dedicado a apresentar as conclusões finais obtidas com o estudo em questão e sugerir temas para trabalhos futuros.

2 ESTRUTURAS RETICULADAS E ANÁLISE MATRICIAL

Dentre as várias categorias de estruturas existentes, pode-se destacar as estruturas reticuladas, pois estas são as mais comuns, estando presentes em praticamente todas as construções como em edifícios, ginásios de esportes, pontes, coberturas, dentre outras. Na Figura 2.1 tem alguns exemplos dessas estruturas.



Fonte: Autoria própria, 2022.

2.1 ESTRUTURAS RETICULADAS PLANAS

As estruturas reticuladas são formadas por elemento de barra que foram formulados e se encontram no capítulo 3. Pode-se destacar como estruturas reticuladas planas as treliças 2D e os pórticos 2D.

2.1.1 Treliça 2D

Segundo Nogueira (2017), as treliças são estruturas amplamente utilizadas em projetos de engenharia devido sua versatilidade, dado que proporcionam excelente eficiência quando analisada sua relação carga resistente/peso próprio.

O que destaca a treliça como pertencente ao grupo das estruturas reticuladas é a sua forma de conexão e de acordo com Araújo (2015), treliças são estruturas de elementos delgados ligados por suas extremidades, geralmente vigas em “I” ou em “U”, cantoneiras e barras, unidas através de soldagem, conexões rebitadas, parafusos ou pinos.

Tratando-se de treliça plana a Figura 2.2 apresenta um modelo de treliça plana metálica.

Figura 2.2 – Treliça em aço para cobertura de galpão.



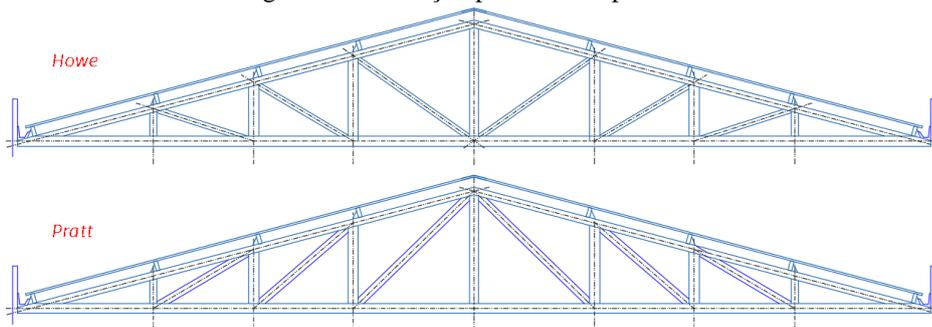
Fonte: Estruturas Jaguari, 2020.

Esse tipo de estrutura surgiu da necessidade de, como é dito por (MORESCO, 2015) vencer vãos maiores e suportarem cargas mais pesadas do que as vigas convencionais, sendo sua utilização comum em pontes, coberturas de grandes estruturas, guindastes e torres metálicas para telecomunicações e transmissão de energia elétrica.

Considerando a treliça plana da Figura 2.2, é comum que os projetistas estruturais criem modelos para analisá-las. De acordo com Leet, Uang e Gilbert (2010), em tais modelos é comum considerar que: (a) As barras são retas e só transmitem carga axial; (b) os membros são conectados nos nós por pinos sem atrito; e (c) as cargas são aplicadas somente nos nós.

Com a evolução dos estudos foram surgindo vários modelos geométricos de treliças, sendo o modelo tipo *Howe* e *Pratt* os mais usados para compor a estrutura de telhados residenciais ou de galpões conforme ilustrado na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Treliça tipo *Howe* e tipo *Pratt*.



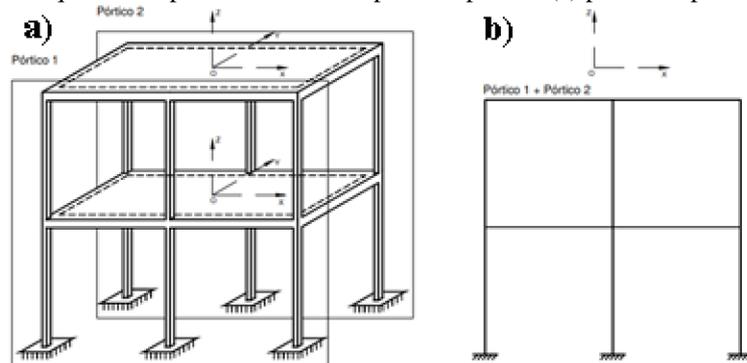
Fonte: Autoria própria, 2022.

A diferença do ponto de vista comportamental entre os dois modelos de treliça está na treliça *Howe* apresentar, quando aplicado os carregamentos, as diagonais comprimidas e os montantes tracionados. Já a treliça tipo *Pratt* funciona ao contrário da *Howe*, com as diagonais tracionadas e os montantes comprimidos.

2.1.2 Pórtico 2D

De acordo com Martha (2010), pórtico plano é um modelo estrutural plano de uma estrutura tridimensional. Na Figura 2.4b tem-se um exemplo de pórtico plano extraído de um espacial (Figura 2.4a).

Figura 2.4 - Sistema equivalente para o método dos pórticos planos. (a) pórtico espacial; (b) pórtico plano.



Fonte: Cesar, 2004.

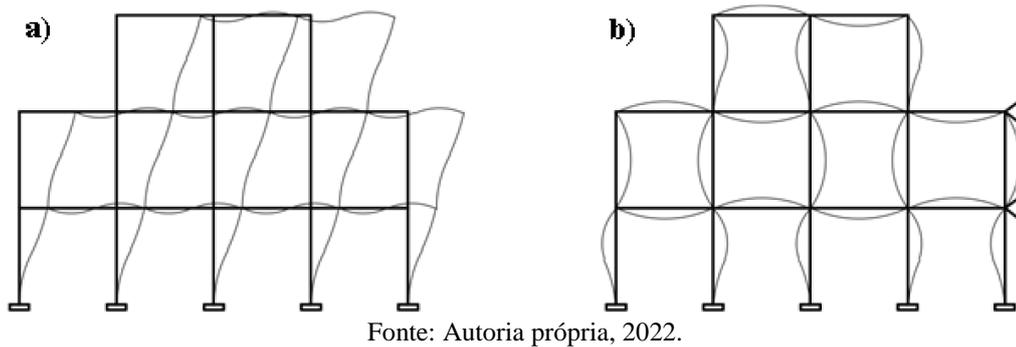
De acordo com Fontes (2005), os pórticos planos são composições de elementos lineares situados num mesmo plano. Nos edifícios, eles formam painéis compostos por vigas, pilares e possíveis tirantes. Os nós, pontos de interseção dos elementos, têm ligações rígidas, semirrígidas ou flexíveis.

Como se trata de uma estrutura reticulada, o princípio básico de formação dos pórticos se dá pela ligação dos elementos através de nós rígidos e, há a transmissão de momentos fletores. Nas análises de pórticos 2D podem envolver dois casos como observados na Figura 2.5a e 2.5b.

De acordo com César (2004), em pórticos de nós fixos, os nós das extremidades não sofrem translações e sim rotações com isso a perda de estabilidade se dá por rotação nodal. Em nós móveis, há a possibilidade de translação e, a carga crítica P_{cr} é menor que no primeiro caso.

Pórticos possui grande aplicabilidade no entendimento de projetos estruturais diversos que inclui pontes, edifícios, passarelas, entre várias outras estruturas.

Figura 2.5 – Pórticos planos. a) pórtico de nós móveis; b) pórtico com nós fixos.



2.2 ESTRUTURAS RETICULADAS ESPACIAIS

2.2.1 Treliça 3D

As treliças espaciais compõem boa parte das estruturas de cobertas que necessitam de grandes vãos livres, como postos de combustíveis, rodoviárias, centros de convenções, cobertura de centros esportivos entre outros. Na Figura 2.6a tem-se uma cobertura em treliças espaciais e em 2.6b uma das etapas de execução.

Figura 2.6 – Treliça espaciais. a) estrutura em treliça espacial de cobertura; (b) treliça em etapa de içamento.



Fonte: Ros Engenharia, 2016

Fonte: Spcom, 2018

Segundo Druzian (2015), treliças espaciais são estruturas reticuladas espaciais. Suas barras são definidas em um espaço de eixos cartesianos x , y e z , as barras e as cargas podem estar em qualquer direção no espaço e as ligações dessas barras são rotuladas.

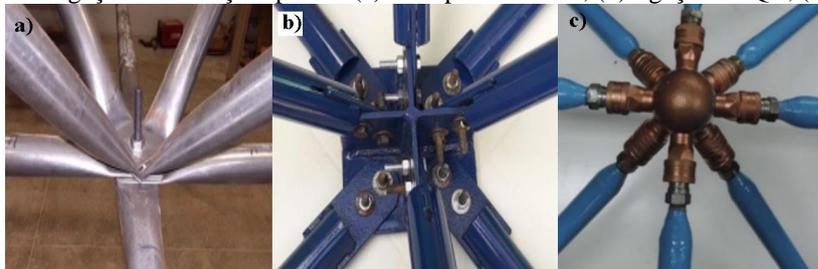
Segundo Suzuki (2012) concepção mais elementar dentre as treliças espaciais é formada por 6 barras e 4 nós configurando assim um tetraedro. De forma análoga à treliça simples bidimensional, adicionando mais três barras a treliça tetraédrica pode-se obter uma estrutura rígida maior.

As treliças, em geral, possuem uma característica que as tornam tão eficiente: trabalham

apenas com cargas axiais. Para tanto, essa condição só é concretizada se o projeto for bem elaborado e caso contrário pode haver colapso da estrutura. Nas treliças espaciais, assim como nas treliças planas, as barras são dimensionadas somente para trabalhar a esforços axiais de tração e/ou compressão. Além disso, considera-se que não existe momento entre as barras e os nós da estrutura (GARCIA, 2018).

Há muitas pesquisas dedicadas ao estudo das ligações, material e categoria de barra usadas em treliça para sempre buscar otimização da estrutura. As ligações entre as barras de um reticulado espacial são um dos fatores que tem a maior influência na confiabilidade, no comportamento e no custo final de um sistema (MARTINI, 2014). Na Figura 2.7 é apresentado alguns tipos de ligações.

Figura 2.7 - Tipos de ligações de treliça espacial. (a) nó tipo amassado; (b) ligação STQC; (c) ligação LTECA.



Fonte: Silva, 2020.

2.2.2 Pórtico 3D

Pórticos espaciais podem ser destacados segundo Ribeiro e Inoue (2014) como estruturas reticuladas nas quais cada ponto nodal apresenta seis graus de liberdade e uma seção genérica apresenta seis esforços internos, a saber: um esforço normal, dois esforços cortantes, dois momentos fletores e um momento de torção.

De acordo com Queiroz (2010), nas barras de pórtico espacial estão presentes os efeitos da flexão bidimensional (flexão em z e em y), tração axial e torção uniforme, resultando em doze graus de liberdade.

2.3 ANÁLISE MATRICIAL

Segundo Monte Pascoal (2019), se tratando do estudo de deslocamentos nodais, forças de reações, tensões, etc. o método de análise matricial tem se mostrado bastante eficiente. As variáveis primárias são os deslocamentos nodais, que uma vez determinados permite o cálculo das reações e dos esforços nas extremidades das barras, como consequência dos carregamentos ou deslocamentos aplicados aos nós.

O método de análise matricial permite realizar estudos de estruturas reticuladas simples de forma analítica e também estruturas com alta complexidade de formulação, sendo necessário, para esse segundo caso, aplicação de meios computacionais, pois, exigem a solução de relações algébricas inviáveis de serem feitas analiticamente devido seu grau de dificuldade.

Segundo Filho e Conceição (2018), têm-se as seguintes condições essenciais para a correta aplicação da análise matricial:

“Neste método determina-se um sistema de equações de equilíbrio, em que a matriz dos coeficientes é chamada de matriz de rigidez e o vetor dos termos independentes, vetor das forças nodais. Introduce-se então as condições de contorno do problema (deslocamentos conhecidos, apoios rígidos e deslocamentos prescritos) e resolvendo-se as equações resultantes obtêm-se os deslocamentos dos pontos nodais não restringidos.”

Por fim, de acordo com Vásquez e López (2001) o método matricial de análise de estruturas “É um método aproximado cujo grau de aproximação aumenta com o número de elementos em que a estrutura é dividida, quando a aplicação do método é correta”. Estes autores destacam ainda o seguinte algoritmo para resolução de problemas por meio desse método:

- a) Divisão em elementos finitos;
- b) vetor de deslocamentos do elemento;
- c) matriz de rigidez do elemento;
- d) matriz de rigidez completa da estrutura; e
- e) resposta da estrutura.

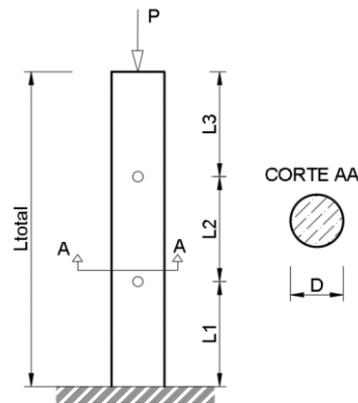
3 FORMULAÇÕES

Por meio dos métodos numéricos pode-se solucionar problemas complexos, onde a estrutura é composta por vários elementos, propriedades diferentes dos seus materiais, condições de contorno incomuns, etc. A seguir serão apresentadas em detalhe as formulações dos elementos de barra, de treliça, de viga e de pórtico, nos âmbitos uni, bi e tridimensional.

3.1 ELEMENTO UNIDIRECIONAL DE BARRA

Diversos sistemas estruturais são compostos por elementos de barras. Esses elementos possuem como principal característica a dimensão longitudinal bem maior que as dimensões da seção transversal. A Figura 3.1, ilustra uma barra submetida a compressão.

Figura 3.1 - Barra submetida a compressão.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Nos elementos de barras as tensões e as deformações estão relacionadas pela Lei de Hooke consoante a seguinte equação:

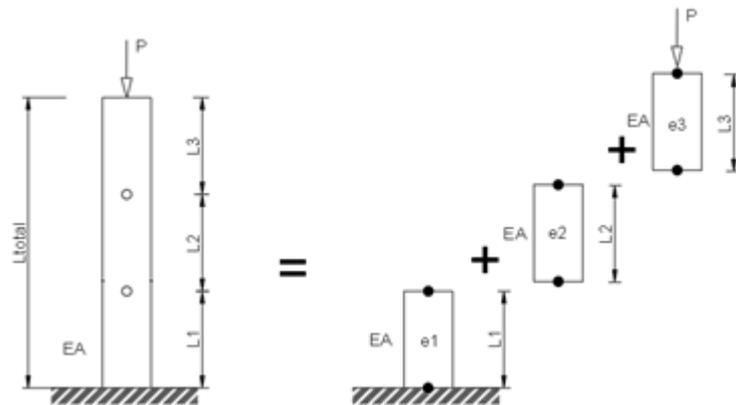
$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.1)$$

A Equação 3.2, uma diferencial integral, governa o problema da barra da Figura 3.1 para $0 \leq y \leq L_{total}$.

$$EA \frac{d^2u}{dy^2} + q = 0 \quad (3.2)$$

Em que E é o módulo de elasticidade e A, a área da seção transversal. Ao aplicar um valor para y no intervalo $0 \leq y \leq L_{total}$ tem-se como incógnita o deslocamento u do elemento analisado. A barra prismática da Figura 3.1 pode ser subdividida em três partes iguais, conforme Figura 3.2.

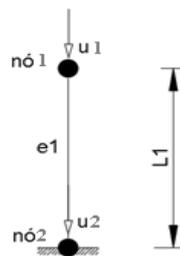
Figura 3.2 - Discretização da barra em elementos menores.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Cada elemento apresenta dois nós, conforme mostrado para o elemento e_1 , apresentado na Figura 3.3.

Figura 3.3 - Elemento finito característico e e seus graus de liberdade.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Recapitulando a Equação 3.1 pode-se reescreve-la da seguinte forma:

$$f = \frac{AE}{L} \Delta L \quad (3.3)$$

em que:

$\sigma = \frac{F}{A}$, tensão em termos de força sobre área;

$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$, deformação específica.

Um elemento de barra como o da Figura 3.3 pode ser reescrito matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Em que: os elementos K_{ij} são coeficientes de rigidez do elemento; os coeficientes u_1 e u_2 expressam os deslocamentos nodais; e F_1 e F_2 as respectivas forças aplicadas nos nós 1 e 2.

O sistema matricial pode ser simplificado como:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)} \quad (3.5)$$

Onde:

$\mathbf{K}^{(e)}$: matriz de rigidez do elemento;

$\mathbf{u}^{(e)}$: vetor de deslocamentos do elemento;

$\mathbf{F}^{(e)}$: vetor de carregamentos nodais do elemento.

Considerando a Figura 3.3 para haver o equilíbrio do elemento de barra, a força aplicada deve resultar em uma reação tal que $\sum F_y = 0$. Assim, obtém-se:

$$P = \frac{AE}{L} \Delta L \quad R = -\frac{AE}{L} \Delta L \quad (3.6)$$

Sendo ΔL o deslocamento nodal u_1 , a Equação 3.6 pode ser reescrita como:

$$P = \frac{AE}{L} u_1 \quad R = -\frac{AE}{L} u_1 \quad (3.7)$$

Sabendo que o deslocamento do nó 2 é zero e substituindo os valores das forças P e R o sistema matricial 3.4, tem-se:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{AE}{L} u_1 \\ -\frac{AE}{L} u_1 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema matricial, obtém-se os valores dos coeficientes K_{11} e K_{12} :

$$K_{11} = \frac{AE}{L}; \quad K_{21} = -\frac{AE}{L}$$

Repetindo o processo, mas fixando, agora, o nó 1 tornando, o mesmo, com deslocamento $u_1 = 0$ e aplicando a carga no nó 2, o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{AE}{L} u_2 \\ \frac{AE}{L} u_2 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se os coeficientes K_{12} e K_{22} :

$$K_{21} = -\frac{AE}{L}; \quad K_{22} = \frac{AE}{L}$$

Substituindo os valores dos coeficientes na Equação 3.5, fica:

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ \frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Portanto, a matriz de rigidez de um elemento de barra unidimensional é dada por:

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

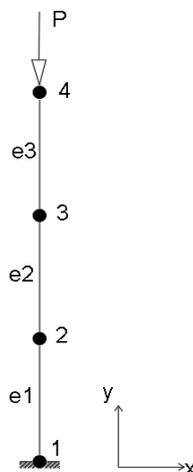
3.1.1 Matriz de rigidez e vetor de força nodal equivalente da estrutura

A formulação da matriz de rigidez de um elemento pode ser considerada a etapa mais importante do método numérico para análise estrutural. A partir da contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento obtém-se a matriz de rigidez da estrutura, ou matriz de rigidez global. Para a determinação do sistema de equações algébricas global, considere sua discretização representada na Figura 3.4. Pode-se estabelecer a Equação 3.10.

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (3.10)$$

Em que: \mathbf{F} é o vetor de força global da estrutura; \mathbf{K} é a matriz de rigidez da estrutura e \mathbf{U} o vetor de deslocamentos global.

Figura 3.4 - Barra discretizada em três elementos finitos.



Fonte: Autoria própria, 2022.

A conectividade de cada elemento indica onde esse elemento está localizado no sistema global. Assim, é necessário organizou-se essa informação na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Conectividade dos elementos constituintes da barra da Figura 3.4..

Elemento	Nó 1	Nó 2
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Fonte: Aatoria própria, 2022.

Deve-se destacar o conceito importante é o de grau de liberdade. Este representa as possibilidades de deslocamentos dos nós de um elemento e a posição de uma força. No caso do elemento unidimensional de barra, há apenas um grau de liberdade por nó, e os valores dos graus de liberdade, pode ser encontrado através da seguinte Equação:

$$gdl_x^{n^{\circ}nó} = 1 \times n^{\circ}nó \quad (3.11)$$

A partir da Equação 3.11, montou-se a Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Graus de liberdade dos elementos mostrados na Figura 3.4.

Elemento	Graus de liberdade	
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Fonte: Aatoria própria, 2022.

Da Equação 3.9 tem-se a matriz rigidez para todos os elementos isolados. Considerando as propriedades de cada elemento, as mesmas são mostradas na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 - Propriedades materiais e geométricas dos elementos da barra da figura 3.4.

Elemento	Área	Comprimento	Módulo de elasticidade
1	A_1	L_1	E_1
2	A_2	L_2	E_2
3	A_3	L_3	E_3

Fonte: Aatoria própria, 2022.

Elemento 1: O elemento possui dois graus de liberdade 1 e 2.

A matriz de rigidez é dada por:

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{A_1 E_1}{L_1} & -\frac{A_1 E_1}{L_1} \\ -\frac{A_1 E_1}{L_1} & \frac{A_1 E_1}{L_1} \end{bmatrix}$$

e o vetor de carga do elemento por meio de:

$$F^1 = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

em que R_1 é a reação do apoio de terceiro gênero no nó 1.

Elemento 2: O elemento possui dois graus de liberdade 2 e 3.

A matriz de rigidez é dada por:

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{A_2 E_2}{L_2} & -\frac{A_2 E_2}{L_2} \\ -\frac{A_2 E_2}{L_2} & \frac{A_2 E_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

e o vetor de carga do elemento por:

$$F^{(2)} = \begin{Bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemento 3: O elemento possui dois graus de liberdade 3 e 4.

A matriz de rigidez é dada por:

$$K^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{A_3 E_3}{L_3} & -\frac{A_3 E_3}{L_3} \\ -\frac{A_3 E_3}{L_3} & \frac{A_3 E_3}{L_3} \end{bmatrix}$$

e o vetor de carga do elemento:

$$F^{(3)} = \begin{Bmatrix} F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

Para obter a matriz global K , realiza-se a partir das matrizes de cada elemento, a montagem da matriz global, considerando a ocupação de cada coeficiente de rigidez no seu devido grau de liberdade.

$$K = \begin{bmatrix} E_1 A_1 / L_1 & -E_1 A_1 / L_1 & 0 & 0 \\ -E_1 A_1 / L_1 & E_1 A_1 / L_1 + E_2 A_2 / L_2 & -E_2 A_2 / L_2 & 0 \\ 0 & -E_2 A_2 / L_2 & E_2 A_2 / L_2 + E_3 A_3 / L_3 & -E_3 A_3 / L_3 \\ 0 & 0 & -E_3 A_3 / L_3 & E_3 A_3 / L_3 \end{bmatrix}$$

O vetor de deslocamentos é dado por:

$$U = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Por fim, para completar a Equação 3.10, o vetor de força nodal equivalente é dado por:

$$F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} + F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Portanto, inserindo 3.13 e 3.12 em 3.10 e unindo as matrizes elementares para obter a global e considerando $E = E_1 = E_2 = E_3$; $A = A_1 = A_2 = A_3$; $L = L_1 = L_2 = L_3$:

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

3.1.2 Condições de contorno

A priori, o sistema dado pela Equação (3.14) é inviável de solução, pois a matriz é singular. Necessita-se então impor condições de contorno. Analisando a Figura 3.4 do problema, o nó 1 não se move devido ao apoio fixo, logo:

$$u_1 = 0$$

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

O sistema pode ser solucionado por vários métodos, como métodos diretos da eliminação de Gauss, decomposição LU, decomposição de Cholesky, método de solução frontal (*wavefront*), e os métodos iterativos de Gauss Seidel, Jacobi, IOR, Gradiente Otimizado (*Steepest Descent*), Gradientes Conjugados, entre outros.

3.1.3 Deformações e tensões

A deformação para uma barra submetida a cargas normais é dada por:

$$\varepsilon_y = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (3.16)$$

Considerando a Lei de Hooke, tem-se:

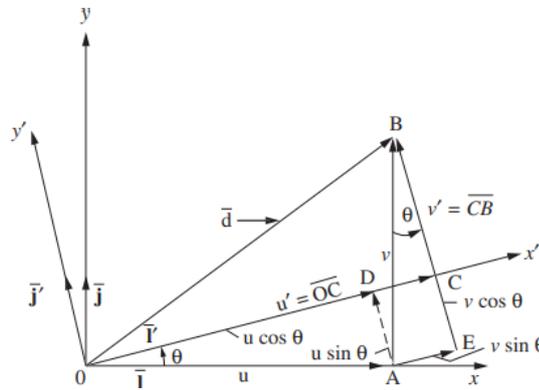
$$\sigma_y = E\varepsilon_y \quad (3.17)$$

3.2 ELEMENTOS DE TRELIÇA 2D

A formulação matricial de uma treliça se assemelha a de uma barra. Entretanto, a diferença mais notável está no fato de treliças ter elementos inclinados.

Considerando casos gerais de elementos inclinados é necessário transformar os valores das variáveis do sistema local para os sistemas globais através de uma matriz transformação. Para deduzir esta matriz, seja o vetor de deslocamento nos sistemas mostrados na Figura 3.5.

Figura 3.5 - Vetor de deslocamento geral em duas dimensões.



Fonte: Logan, 2017.

Considerando os vetores:

$$u = \overline{OA}, v = \overline{AB}, u' = \overline{OC}, v' = \overline{CB}.$$

É visto que há a relação:

$$\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DC} \quad (3.18)$$

Por meio de relações trigonométricas, tem-se que:

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \overline{OA} \cos \theta = u \cos \theta \\ \overline{DC} &= \overline{AE} = v \sin \theta \end{aligned} \quad (3.19)$$

Portanto, u' pode ser reescrita como:

$$u' = u \cos\theta + v \operatorname{sen}\theta \quad (3.20)$$

Agora, para encontrar v' , considera-se:

$$\overline{CB} = -\overline{AD} + \overline{BE} \quad (3.21)$$

Deve-se levar em consideração as relações trigonométricas:

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \overline{OA} \operatorname{sen}\theta = u \operatorname{sen}\theta \\ \overline{BE} &= \overline{AB} \cos\theta = v \cos\theta \end{aligned} \quad (3.22)$$

Substituindo a Equação 3.22 em 3.21 e o resultado da substituição no vetor v' obtém-se a relação do mesmo como:

$$v' = -u \operatorname{sen}\theta + v \cos\theta \quad (3.23)$$

Portanto, as Equações 3.20 e 3.23 podem ser reescritas matricialmente como:

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Ou de forma simplificada:

$$\{d'\} = [T]\{d\} \quad (3.25)$$

Onde:

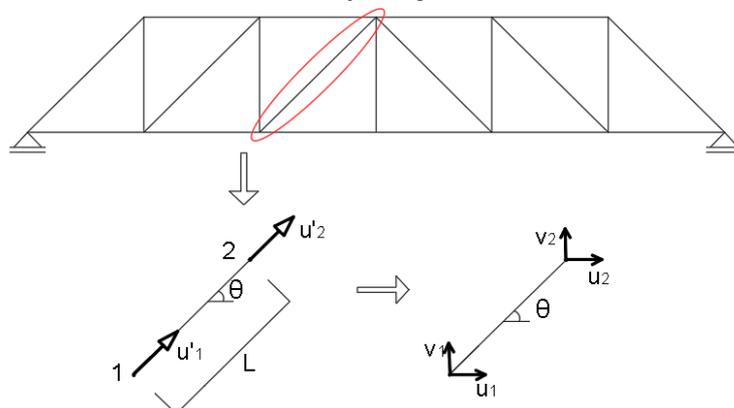
$\{d'\}$: posição global;

$[T]$: matriz transformação; e

$\{d\}$: posição local.

Agora, um elemento de barra que compõem uma treliça genérica (conforme mostrado na Figura 3.6 será formulado.

Figura 3.6 - Elemento de barra inclinado em relação ao sistema de coordenadas global x-y que compõem uma treliça 2D genérica.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Observando o elemento genérico na Figura 3.6 e considerando a Equação 3.20, verifica-se que no sistema local, para qualquer um dos nós, tem-se a seguinte expressão de deslocamento: $u' = u \cos\theta + v \sen\theta$. No sistema global os deslocamentos nodais do elemento são: u_1, u_2, u_3 e u_4 . Logo, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sen\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sen\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Para as forças aplicadas nos nós do elemento, tem-se, em termos de componentes:

$$P_x = \bar{P} \cos\theta \quad P_y = \bar{P} \sen\theta \quad (3.27)$$

Assim, para as forças nodais, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sen\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sen\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Como já foi formulado anteriormente, a Equação 3.8 para elementos de barra, substituindo a parcela que corresponde ao deslocamento pela Equação 3.26 e a parcela que corresponde a força pela Equação 3.28, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sen\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sen\theta \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sen\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sen\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Dessa forma, obtém-se, portanto, a matriz de rigidez do elemento expressa no sistema de coordenadas global $x - y$, e dada por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta \sen\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta \sen\theta \\ & \sen^2\theta & -\sen\theta \cos\theta & -\sen^2\theta \\ & & \cos^2\theta & \cos\theta \sen\theta \\ & & & \sen^2\theta \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

simétrica

As forças axiais podem ser encontradas sabendo o valor do deslocamento local.

Para isso pode-se inserir a Equação 3.26 na Equação 3.8 do elemento de barra dada por:

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix}$$

Inserindo as Equações 3.26 em 3.8:

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Desenvolvendo a Equação 3.31, obtém-se:

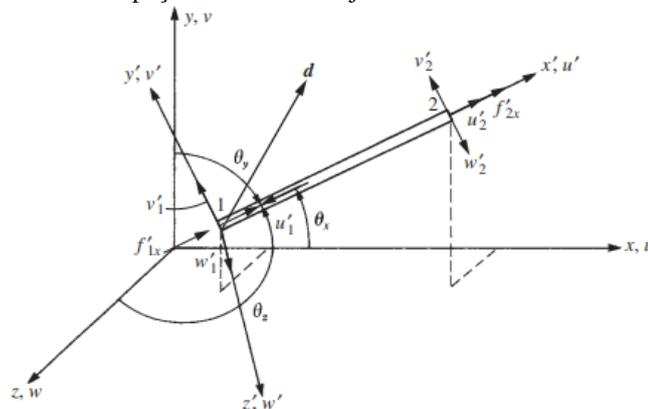
$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= \frac{AE}{L} [(u_1 - u_2)\cos\theta + (v_1 - v_2)\sin\theta] \\ \bar{P}_2 &= \frac{AE}{L} [-(u_1 - u_2)\cos\theta - (v_1 - v_2)\sin\theta] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Por fim, pode-se dividir a força \bar{P}_1 pela área correspondente, obtendo-se, assim, a tensão normal.

3.3 TRELIÇA 3D

Seja um elemento de treliça localizado no espaço tridimensional conforme a Figura 3.7. Conforme explanado no caso do elemento anterior, ao se trabalhar com elementos em orientações não paralelas com os eixos x , y e z , necessita-se de uma matriz transformação para obter-se a matriz de rigidez global.

Figura 3.7 - Barra no espaço tridimensional junto com deslocamentos nodais locais.



Fonte: Logan, 2017.

Considerando que o nó 1 tem deslocamento u_1 e o nó 2 u_2 sobre a perspectiva (x, y, z) e que ambos os nós têm 3 graus de liberdade decompostos nos eixos (x', y', z') , os deslocamentos de cada componente podem ser representados por u, v e w .

Tem-se também as relações:

$$i'.i = \frac{x_2 - x_1}{L} = C_x \quad (3.33)$$

$$i'.j = \frac{y_2 - y_1}{L} = C_y$$

$$i'.k = \frac{z_2 - z_1}{L} = C_z$$

Sendo:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$C_x = \cos\theta_x; C_y = \cos\theta_y; C_z = \cos\theta_z$$

em que C_x, C_y e C_z correspondem às projeções nos respectivos eixos i, j, k.

Dado que u_1 e u_2 representam os deslocamentos no sistema local (x, y, z), deve-se integra-los ao sistema global para, assim, obter-se uma expressão geral da matriz rigidez. Logo pode ser reescrito assim:

$$u_1 = C_x u_{1x} + C_y v_{1y} + C_z w_{1z} \quad (3.34)$$

$$u_2 = C_x u_{2x} + C_y v_{2y} + C_z w_{2z}$$

Matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ v_{1y} \\ w_{1z} \\ u_{2x} \\ v_{2y} \\ w_{2z} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

A Equação 3.35 pode ser reescrita como:

$$\{u'\} = [T]\{u\} \quad (3.36)$$

Como é de se esperar, T corresponde a matriz transformação. A matriz força se dá por:

$$\{f'\} = [T]\{f\} \quad (3.37)$$

Em problemas cotidianos as forças são dadas globalmente e o(a) engenheiro(a) estrutural deve descobrir os valores das forças locais para fazer análises em determinada região.

Portanto, convém isolar a força local, resultando na Equação 3.38.

$$\{f\} = [T]^T \{f'\} \quad (3.38)$$

As forças locais se relacionam com os deslocamentos locais por:

$$\{f'\} = [k']\{u'\} \quad (3.39)$$

Aplicando a Equação 3.36 em 3.39 e multiplicando ambos os lados por $[T]^T$

$$[T]^T \{f'\} = [T]^T [k'] \{u'\} [T] \{u\} \quad (3.40)$$

Agora inserindo a Equação 3.36 em 3.39 e no resultado da inserção inserir 3.37:

$$\{f\} = [T]^T [k'] [T] \{u\} \quad (3.41)$$

Pode-se relacionar as forças globais aos deslocamentos globais:

$$\{f\} = [k] \{u\} \quad (3.42)$$

Portanto substituindo 3.41 em 3.42, fica:

$$\{k\} = [T]^T [k'] [T] \quad (3.43)$$

A Equação 3.43 de forma detalhada pode ser reescrita como:

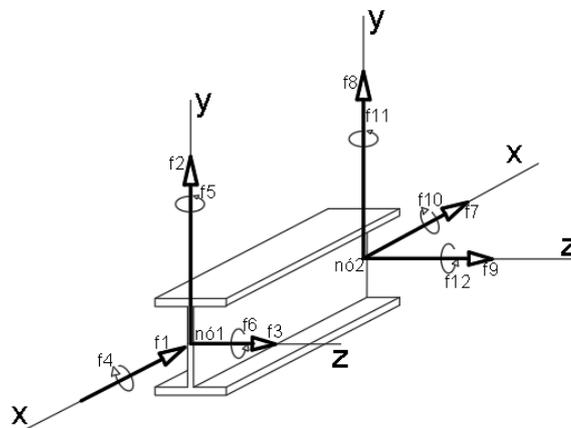
$$\{k\} = \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ C_y & 0 \\ C_z & 0 \\ 0 & C_x \\ 0 & C_y \\ 0 & C_z \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

3.4 ELEMENTO DE VIGA

Vigas são elementos estruturais que compõem todos os pórticos 2D e 3D sendo submetidas principalmente a momentos fletores e cisalhamento. Em construções convencionais elas recebem o carregamento da laje.

A Figura 3.8 mostra um elemento de viga reticulada. Para a formulação da matriz de rigidez da viga, convém considerar que os eixos principais x , y e z estão coincidindo com o centroide da peça estrutural.

Figura 3.8 - Viga prismática no espaço com todos os esforços internos representados.



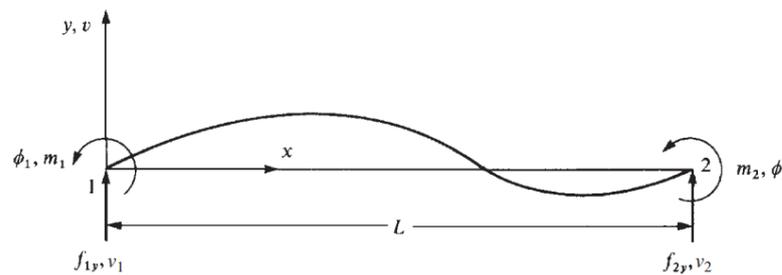
Fonte: Autoria própria, 2022.

Segundo Tiago (2020), para além das hipóteses básicas de linearidade física e

geométrica, admite-se que a peça linear tem eixo reto e secção constante, que as secções planas se mantêm planas sendo desprezáveis as deformações de corte. Estas são as hipóteses básicas da teoria de viga clássica de Euler-Bernoulli.

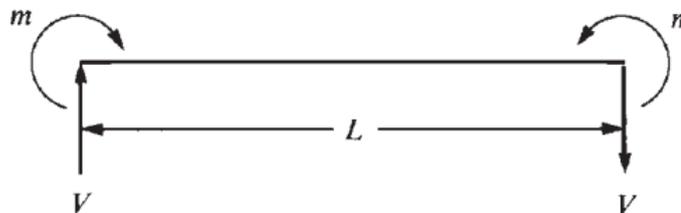
Para a formulação da matriz de rigidez consideramos o plano xy sob as ações de duas forças, f_1 e f_2 e dois momentos fletores M_1 e M_2 . Na Figura 3.9 são mostrados os deslocamentos, rotações, cargas e momentos e na Figura 3.10 as conversões adotadas para a formulação da matriz de rigidez.

Figura 3.9 – Elemento de viga com deslocamentos nodais positivos, rotações, forças e Momentos.



Fonte: Logan, 2017.

Figura 3.10 – Convenções de sinais da teoria de vigas para forças de cisalhamento e momentos fletores.



Fonte: Autoria própria, 2022.

As quatro componentes de forças agem nos extremos da viga, o que por sua vez resulta em deslocamentos (lineares e ou angulares). O vetor de forças nodais é dado por:

$$\{f\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Por sua vez, o vetor de deslocamentos nodais é dado por:

$$\{\delta\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

Assim, para a matriz rigidez do elemento de viga, a Equação 3.5 pode ser reescrita como:

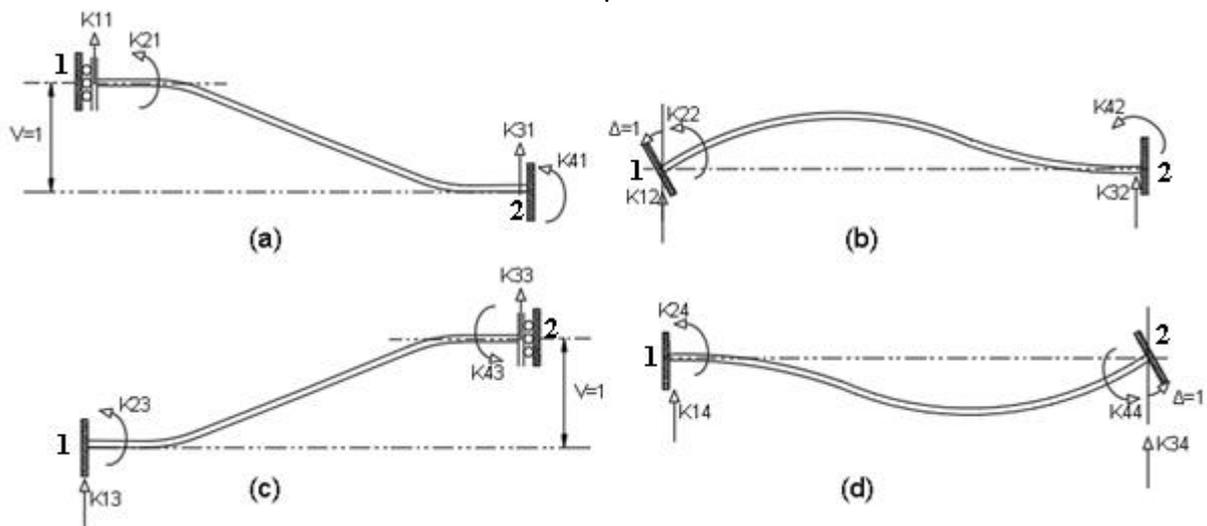
$$\{f\}_{4 \times 1} = K_{4 \times 4}^e \cdot \{\delta\}_{4 \times 1} \quad (3.47)$$

. Desta forma tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

Como no elemento de barra, para o elemento de viga também é necessário encontrar os valores dos coeficientes K_{ij} . Estes podem ser obtidos impondo deslocamentos unitários a cada um dos graus de liberdade do elemento conforme mostrados na Figura 3.11 e bloqueando os demais.

Figura 3.11 - Aplicação de deslocamento unitários para encontrar os coeficientes de rigidez.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Aplicando essas forças unitárias pode-se relacioná-las com a rigidez da estrutura por meio da análise do deslocamento gerado pelas das mesmas.

Considerando a Figura 3.11a, o momento fletor em uma região a direita a x unidade de distância do nó 1 pode ser dado por:

$$M = K_{11} \cdot x - K_{21} \quad (3.49)$$

Por meio da formulação da linha elástica, tem-se que:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M = K_{11} \cdot x - K_{21} \quad (3.50)$$

Integrando duas vezes a Equação 3.50:

$$EI \frac{dy}{dx} = K_{11} \cdot \frac{x^2}{2} - K_{21} \cdot x + C_1 \quad (3.51)$$

$$EIy = K_{11} \cdot \frac{x^3}{6} - K_{21} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (3.52)$$

Sendo as condições de contorno da Figura 3.11a:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad x = 0 \quad (3.53)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad x = L \quad (3.54)$$

$$y = 1 \quad \text{para } x = 0 \quad (3.55)$$

$$y = 0 \quad \text{para } x = L \quad (3.56)$$

Com isso, realizando a substituição da Equação 3.53 em 3.51, obtém-se:

$$C_1 = 0$$

A substituição da Equação 3.55 em 3.52, obtém-se:

$$C_2 = EI$$

A Equação 3.54 em 3.51, obtém-se:

$$K_{21} = \frac{K_{11}}{2} L \quad (3.57)$$

Associando a Equação 3.56 com 3.52, obtém-se:

$$K_{11} = \frac{12EI}{L^3} \quad (3.58)$$

E a Equação 3.58 em 3.57 obtém-se:

$$K_{21} = \frac{6EI}{L^2}$$

Com isso, foi encontrado os coeficientes K_{11} e K_{21} . Para obter o coeficiente K_{31} faz-se a consideração da condição de equilíbrio $\sum F_y = 0$.

$$K_{11} + K_{31} = 0$$

$$\frac{12EI}{L^3} + K_{31} = 0$$

$$K_{31} = -\frac{12EI}{L^3}$$

Para encontrar K_{41} faz-se $\sum M_1 = 0$, obtendo:

$$K_{41} = \frac{6EI}{L^2}$$

Esse mesmo raciocínio pode ser seguido para encontrar os demais coeficientes.

Agora, realizando o processo com base na Figura 3.11b, o momento fletor em uma

região a direita distante x unidade do nó 1:

$$M = K_{12} \cdot x - K_{22} \quad (3.59)$$

Por meio da linha elástica:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M = K_{12} \cdot x - K_{22} \quad (3.60)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = K_{12} \cdot \frac{x^2}{2} - K_{22} \cdot x + C_1 \quad (3.61)$$

$$EIy = K_{12} \cdot \frac{x^3}{6} - K_{22} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (3.62)$$

Sendo as condições de contorno da Figura 3.11b:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad x = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad x = L \quad (3.64)$$

$$y = 0 \quad \text{para } x = 0 \quad (3.65)$$

$$y = 0 \quad \text{para } x = L \quad (3.66)$$

Sendo assim, realizando as substituições conforme as anteriores, para encontrar os coeficientes da primeira coluna:

Equação 3.63 em 3.61:

$$C_1 = EI$$

Equação 3.65 em 3.62:

$$C_2 = 0$$

Equação 3.64 em 3.61:

$$K_{22} = \frac{K_{12}}{2}L + \frac{EI}{L} \quad (3.67)$$

Equação 3.66 com 3.62:

$$K_{12} = \frac{3K_{22}}{L} - \frac{6EI}{L^2} \quad (3.68)$$

Equação 3.68 em 3.67 obtém-se:

$$K_{22} = \frac{4EI}{L} \quad (3.69)$$

Substituindo 3.69 em 3.68 encontra-se K_{12}

$$K_{12} = \frac{6EI}{L^2}$$

Agora fazendo $\sum F_y = 0$.

$$K_{32} + K_{12} = 0$$

$$\frac{6EI}{L^2} + K_{32} = 0$$

$$K_{32} = -\frac{6EI}{L^2}$$

Por fim, para encontrar K_{42} faz-se $\sum M_1 = 0$, obtendo:

$$K_{42} = \frac{2EI}{L}$$

Para encontrar os coeficientes de terceira coluna observam-se os coeficientes da Figura 3.11c e segue o mesmo raciocínio aplicado para encontrar os da primeira coluna. E para os da quarta coluna a mesma analogia da segunda coluna, considerando, agora, a Figura 3.11d.

Após feito todo o procedimento, organizam-se os coeficientes nas suas respectivas posições.

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{12EI}{L^3} & K_{12} &= \frac{6EI}{L^2} & K_{13} &= -\frac{12EI}{L^3} & K_{14} &= \frac{6EI}{L^2} \\ K_{21} &= \frac{6EI}{L^2} & K_{22} &= \frac{4EI}{L} & K_{23} &= -\frac{6EI}{L^2} & K_{24} &= \frac{2EI}{L} \\ K_{31} &= -\frac{12EI}{L^3} & K_{32} &= -\frac{6EI}{L^2} & K_{33} &= \frac{12EI}{L^3} & K_{34} &= -\frac{6EI}{L^2} \\ K_{41} &= \frac{6EI}{L^2} & K_{42} &= \frac{2EI}{L} & K_{43} &= -\frac{6EI}{L^2} & K_{44} &= \frac{4EI}{L} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Portanto, tem-se os coeficientes da matriz de rigidez da viga, logo a Equação 3.48 fica:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

3.5 PÓRTICO 2D

Ao adicionar carga axial no elemento de viga, tem-se o elemento de pórtico 2D. Os graus de liberdade do pórtico 2D é mostrado na Figura 3.12. Nos graus de liberdade 1 e 4, acrescenta-se a contribuição da força axial.

Figura 3.12 - Graus de liberdade do elemento do elemento de pórtico 2D.



Fonte: Autoria própria, 2022.

A matriz de rigidez da viga, uma 4x4, com a adição do aporte da força axial passa a ser 6x6. Com isso, K^e da Equação 3.71 conserva os mesmos valores dos coeficientes e adiciona-se a matriz de carga axial, sendo:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & -K_{14} \\ -K_{41} & K_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Substituindo 3.72 em 3.71 nos devidos graus de liberdade e chamando $a = \frac{AE}{L}$ e $b = \frac{EI}{L^3}$

tem-se:

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 12b & 6bL & 0 & -12b & 6bL \\ 0 & 6bL & 4bL^2 & 0 & -6bL & 2bL^2 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -12b & -6bL & 0 & 12b & -6bL \\ 0 & 6bL & 2bL^2 & 0 & -6bL & 4bL^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

Nota-se que, os coeficientes do elemento de viga passam a ocupar outra posição, bem como é destacado na Figura 3.13.

Figura 3.13 - Graus de liberdade do elemento de pórtico e coeficientes.

$$\begin{matrix} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{a} & 0 & 0 & \mathbf{-a} & 0 & 0 \\ 0 & 12b & 6bL & 0 & -12b & 6bL \\ 0 & 6bL & 4bL^2 & 0 & -6bL & 2bL^2 \\ \mathbf{-a} & 0 & 0 & \mathbf{a} & 0 & 0 \\ 0 & -12b & -6bL & 0 & 12b & -6bL \\ 0 & 6bL & 2bL^2 & 0 & -6bL & 4bL^2 \end{bmatrix} & \mathbf{1} \\ & \mathbf{2} \\ & \mathbf{3} \\ & \mathbf{4} \\ & \mathbf{5} \\ & \mathbf{6} \end{matrix}$$

Fonte: Autoria própria, 2022.

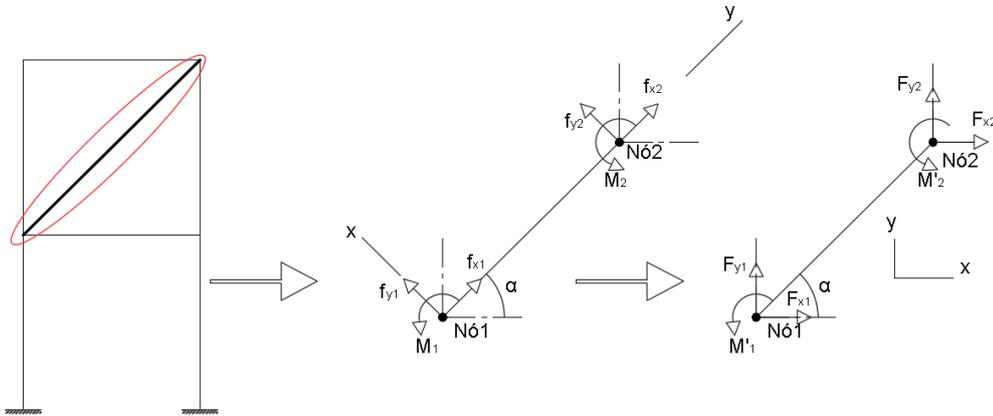
Os termos delimitados no retângulo azul são os já encontrados coeficientes da viga e os

demarcados em vermelho, a contribuição da carga axial.

A matriz transformação é muito importante para tornar o sistema globalizado, ou seja, considerar que os elementos que compõem a estruturas estejam num mesmo sistema de eixos comum, de tal modo que seja possível realizar combinações vetoriais.

Considerando a Figura 3.14 onde se tem um elemento de barra inclinado, há a necessidade de realizar a combinação do mesmo com os outros que compartilham do mesmo nó para que, assim, se possa desenvolver a matriz de rigidez global.

Figura 3.14 - Equilíbrio de um elemento genérico de viga em pórtico plano.



Fonte: Autoria própria, 2022.

A matriz transformação considera a angulação do elemento inclinado e por relações trigonométricas se extrai as componentes vetoriais. Com isso é possível combinar os elementos, independentemente de estarem inclinados. Desenvolvendo as componentes das forças, tem-se:

$$\begin{cases} f_{x1} = F_{x1} \cdot \cos \alpha + F_{y1} \cdot \sin \alpha \\ f_{y1} = -F_{x1} \cdot \sin \alpha + F_{y1} \cdot \cos \alpha \\ M_1 = M'_1 \\ f_{x2} = F_{x2} \cdot \cos \alpha + F_{y2} \cdot \sin \alpha \\ f_{y2} = -F_{x2} \cdot \sin \alpha + F_{y2} \cdot \cos \alpha \\ M_2 = M'_2 \end{cases} \quad (3.74)$$

Para destacar a matriz transformação, a expressão 3.74 pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ M_1 \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M'_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M'_2 \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

Simplificando:

$$\{f\} = [T] \cdot \{F\} \quad (3.76)$$

Sabendo que a transformação da matriz de um sistema local em um global é dada por:

$$[K] = [T]^T \cdot [k]^e \cdot [T] \quad (3.77)$$

Onde:

$[K]$: matriz global;

$[T]$: matriz transformação;

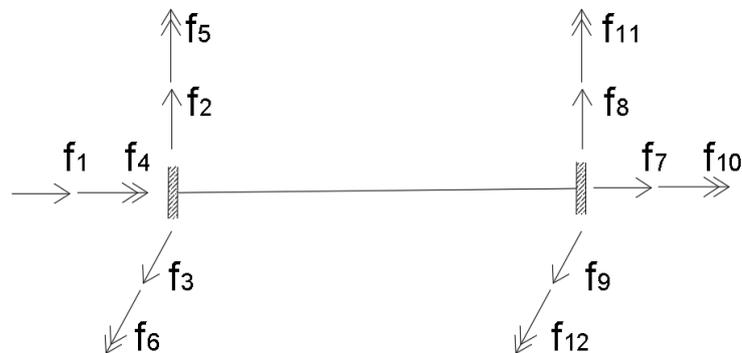
$[T]^T$: matriz transposta da matriz transformação; e

$[k]^e$: matriz local do elemento presente em 3.73.

3.5 PÓRTICO 3D

A matriz de rigidez do pórtico espacial é composta pelas informações de flexão, torção e esforço axial, acarretando, assim, em doze graus de liberdades, conforme pode-se observar na Figura 3.15.

Figura 3.15 – Graus de liberdade do pórtico espacial.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Considerando os graus de liberdade de cada elemento que compõem a estrutura global, de acordo com (RIBEIRO e INOUE, 2014):

A matriz de rigidez global da estrutura, K_g , é então obtida pela soma das contribuições de rigidez de cada um de seus elementos, isto é, pela soma dos coeficientes das matrizes de rigidez de cada elemento (referentes ao sistema de coordenadas global) nos correspondentes coeficientes da matriz de rigidez global da estrutura. Esta correspondência entre os termos da matriz de rigidez de elemento, K_g i , e os termos da matriz K_g é definida a partir dos graus de liberdade de cada um dos nós da estrutura. Após a obtenção da matriz de rigidez global da estrutura, do vetor de forças externas e da introdução das condições de contorno do problema podem-se determinar os deslocamentos dos pontos nodais da estrutura.

Analisando a Figura 3.15, pode-se construir a Tabela 3.4:

Tabela 3.4 – Relação efeitos/grau de liberdade devido ao carregamento nos elementos que compõem o pórtico espacial.

Grau de liberdade	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Efeito de flexão em z		X				X		X				X
Efeito de flexão em y			X		X				X		X	
Efeito axial	X						X					
Efeito de torção				X						X		

Fonte: Autoria própria, 2022.

Sabe-se que:

- Matriz efeito de tração (matriz do elemento de barra unidirecional):

$$Matriz_{tração} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz efeito da flexão em z (matriz do elemento de viga plana):

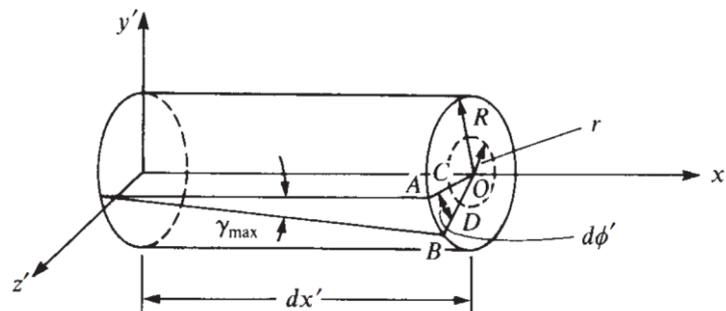
$$Matriz_{flexão,z} = \frac{EI_z}{L^2} \begin{bmatrix} 12/L & 6 & -12/L & 6 \\ 6 & 4L & -6 & 2L \\ -12/L & -6 & 12/L & -6 \\ -6 & 2L & -6 & 4L \end{bmatrix}$$

- Matriz efeito da flexão em y (matriz do elemento de viga plana):

$$Matriz_{flexão,y} = \frac{EI_y}{L^2} \begin{bmatrix} 12/L & -6 & -12/L & -6 \\ -6 & 4L & 6 & 2L \\ -12/L & 6 & 12/L & 6 \\ -6 & 2L & 6 & 4L \end{bmatrix}$$

Para obter a matriz de torção considera-se a Figura 3.16.

Figura 3.16 – Deformação torcional de um segmento de barra.



Fonte: Logan, 2017.

Sendo o arco AB dado por:

$$\overline{AB} = \gamma_{m\acute{a}x} dx' = Rd\phi' \quad (3.78)$$

Para qualquer disposição do raio, há a relação de semelhança de triângulos:

$$OAB = OCD$$

Então,  valido a Equação 3.79:

$$\gamma = \frac{r}{L} (\phi'_{2x} - \phi'_{1x}) \quad (3.79)$$

Tratando-se de materiais isotrópicos, tensão de cisalhamento τ relaciona-se com deformação γ como mostrado Equação 3.80 onde G  o módulo de cisalhamento.

$$\tau = G\gamma \quad (3.80)$$

De resistência dos materiais, tem-se:

$$m'_{x} = \frac{\tau J}{R} \quad (3.81)$$

Onde:

τ : tensão cisalhante;

J : momento polar de inercia; e

R : raio.

Inserindo a Equação 3.79 e 3.80 em 3.81, tem-se

$$m'_{x} = \frac{GJ}{L} (\phi'_{2x} - \phi'_{1x}) \quad (3.82)$$

Para haver o equilíbrio de momento torço $f_4 = -f_{10}$ na Figura 3.15.

Chamando f_4 de m'_{1x} e f_{10} de m'_{2x} , obtm-se:

$$m'_{1x} = \frac{GJ}{L} (\phi'_{1x} - \phi'_{2x}) \quad (3.83)$$

$$m'_{2x} = \frac{GJ}{L} (\phi'_{2x} - \phi'_{1x}) \quad (3.84)$$

Organizando num sistema:

$$\begin{Bmatrix} m'_{1x} \\ m'_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi'_{1x} \\ \phi'_{2x} \end{Bmatrix} \quad (3.85)$$

A matriz efeito de Torção  dada por:

$$Matriz_{torção} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Unindo essas matrizes em uma s e respeitando os graus de liberdade impostos na

Tabela 3, tem-se a matriz rigidez do pórtico espacial.

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\
 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}
 \end{bmatrix}$$

Segundo Ribeiro e Inoue (2014), para efetuar a soma das contribuições de coeficientes de rigidez dos diversos elementos estruturais e montar a matriz de rigidez global da estrutura, considera-se a matriz de rotação R dada em 3.86, que relaciona o sistema de coordenadas local com o sistema de coordenadas global.

$$R = \begin{bmatrix} \bar{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{R} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Onde:

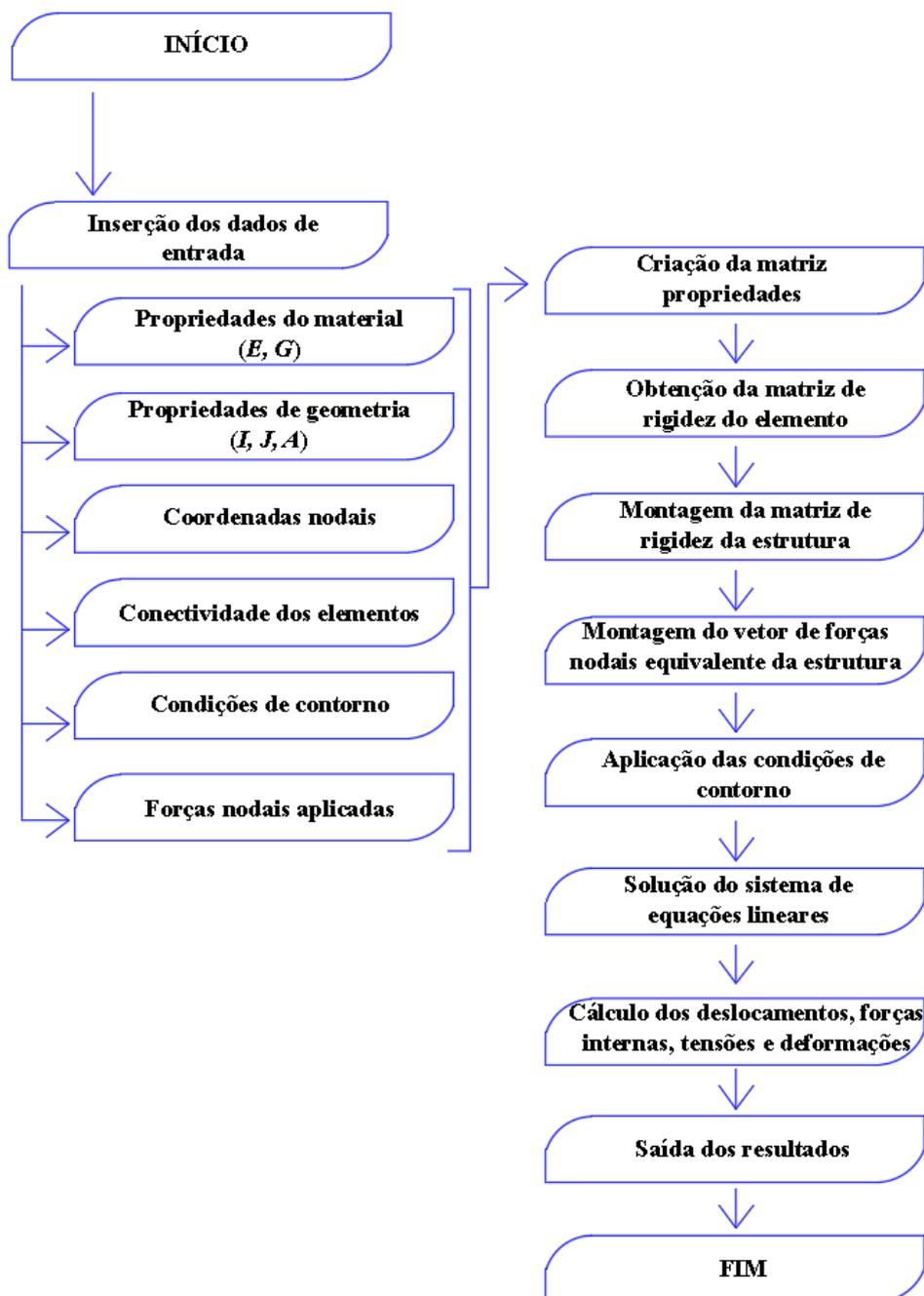
$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \lambda_{34} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44} \end{bmatrix}$$

Em que de acordo com Ribeiro e Inoue (2014) λ_{ij} é o cosseno diretor do eixo i local em relação ao eixo j global.

4 CÓDIGOS COMPUTACIONAIS

Os programas computacionais foram escritos pelo Prof. da Disciplina Teorias das Estruturas II do Curso de Engenharia Civil do IFPB, Campus Cajazeiras. Para tanto, utilizou-se a linguagem de programação livre Scilab. Na Figura 4.1 tem-se o fluxograma que permite entender o funcionamento básico dos códigos utilizados neste trabalho.

Figura 4.1 – Fluxograma do funcionamento dos programas utilizados.



Foram implementados diferentes programas nesse trabalho para realização das análises estruturais. Nas seções a seguir descreve-se sucintamente cada um desses códigos.

4.1 PROGRAMA *BAR1D.SCE*

O programa *Bar1D_Scilab* permite realizar análise matricial de deslocamento e tensões em elementos formados por barras unidirecionais de seções e propriedades variadas.

4.2 PROGRAMA *BEAM.SCE*

Com esse programa pode-se analisar o comportamento de vigas em quaisquer condições de contorno como viga bi apoiada, bi engastada, apoiada e engastada, e viga em balanço, e com cargas concentradas e distribuídas.

4.3 PROGRAMA *TRUSS2D.SCE*

Treliças planas são formadas por elementos de barra – alguns com inclinações em relação ao sistema de eixos global. O programa *Truss2D.sce* faz essa consideração pois nele foi implementada a matriz transformação.

4.4 PROGRAMA *TRUSS3D.SCE*

O programa *Truss3D.sce* foi implementado para a análise de treliças espaciais. Através dele foi possível desenvolver o estudo dos deslocamentos e tensões máximas em uma ponte rolante. Assim como os demais programas, o *Truss3D.sce* permite realizar análises considerando a possibilidade de estruturas com propriedades de material e geometria diversas.

4.5 PROGRAMA *FRAME2DTRUSS.SCE*

Com esse programa foi possível analisar uma estrutura formada por pórticos planos associados. Para isso foi implementado no programa *Frame2D.sce* o acoplamento do elemento de treliça 2D, o que tornou possível a associação de elementos de pórtico com elementos de barra. Assim, pode-se estudar problemas de estabilidade global.

4.6 PROGRAMA *FRAME3D.SCE*

Por meio do programa *Frame3D.sce* é possível estudar o comportamento de pórticos espaciais, obtendo-se resultados de deslocamentos e esforços internos. Com os resultados de deslocamentos é possível avaliar parâmetros de estabilidade global.

5 METODOLOGIA

Neste capítulo será abordado a natureza da pesquisa, os métodos e os procedimentos utilizados.

5.1 NATUREZA DA PESQUISA

Bem como é dito por Nascimento (2016), as tipologias de pesquisas são diversas, constituindo um cipoal de definições e classificações capazes de exigir de novos pesquisadores significativa parcela de tempo em levantamentos bibliográficos.

Segundo Nascimento (2016) a presente pesquisa classifica-se em pesquisa aplicada, onde é dedicada à geração de conhecimento para solução de problemas específicos, é dirigida à busca da verdade para determinada aplicação prática em situação particular

5.2 ETAPAS E PROCEDIMENTOS

De modo a alcançar os objetivos, foi seguido as etapas abaixo.

5.2.1 Estudo do estado da arte

Foi organizado um banco de fonte livros, s de pesquisa da literatura como teses, dissertações, trabalhos de conclusão de cursos, artigos, livros, periódicos, etc. de modo a obter uma fundamentação teórica farta com os conhecimentos de grande relevância para o bom desenvolvimento desse trabalho. Essa etapa foi importante para entender, dentre outros aspectos, quais os problemas mais pertinentes da análise estrutural de estruturas reticuladas.

5.2.2 Estudo e descrição das formulações matriciais dos elementos estudados

Nessa etapa foi realizado um exaustivo estudo e descrição das formulações matriciais dos elementos reticulados 2D e 3D. Foi utilizado apostilhas, artigos científicos, dissertações e teses para a compreensão das equações teóricas e transferido toda a aprendizagem para esse trabalho de forma clara e simplificada.

5.2.3 Códigos numéricos escritos com a linguagem *Scilab*

Os códigos computacionais desenvolvidos pelo Prof. Sebastião Simão da Silva para a Disciplina Teoria das Estruturas II, ministrada no Curso de Engenharia Civil do IFPB – Campus

Cajazeiras-PB, foram estudados. Para tanto, exemplos numéricos simples foram simulados e os resultados obtidos foram comparados com os valores teóricos.

Alguns códigos foram aperfeiçoados para a possível utilização em problemas particulares, como o caso da associação de elementos de barra com pórtico 2D.

5.2.4 Seleções de exemplos numéricos

Foi organizado uma lista com problemas já estudados por outros pesquisadores. O objetivo foi realizar as simulações utilizando o programa gratuito *Scilab* e comparar os resultados com os dos autores.

5.2.5 Análise comparativa

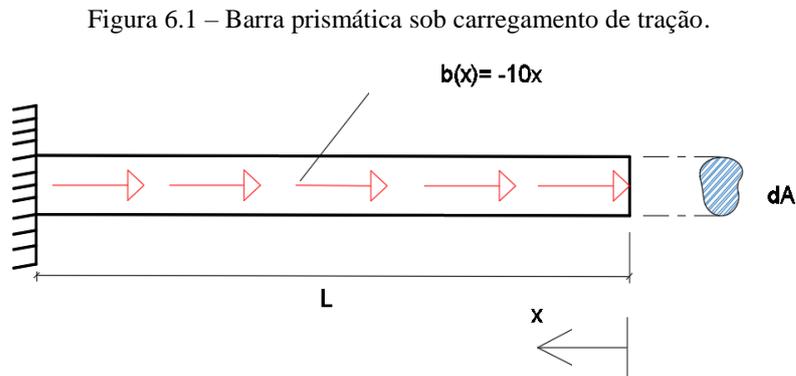
Após processados os problemas selecionados, foi realizada as comparações dos resultados, de modo a validar os obtidos com *Scilab* e também analisar o comportamento global das estruturas.

6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

6.1 BARRA PRISMÁTICA SOB CARREGAMENTO AXIAL

Determinados tipos de estruturas, como em tirantes, escoras e cabos de sustentação, as tensões se dão apenas sobre os seus eixos. Assim, convém analisar a aplicação de métodos computacionais para a simulação dessas estruturas.

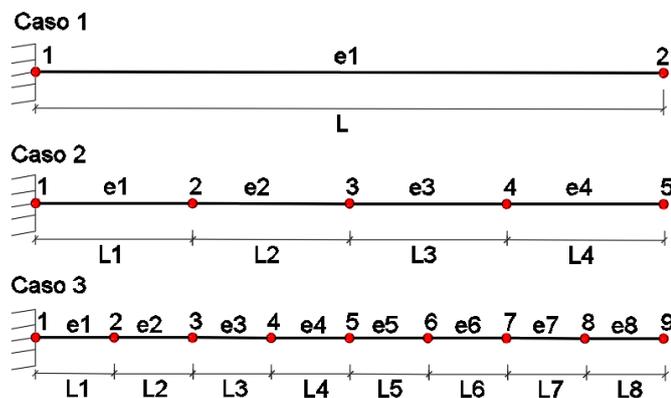
Neste primeiro exemplo, analisa-se o comportamento estrutural de uma barra sob efeito de tração. Este problema foi estudado por Almeida (2005). Pretendeu-se comparar os resultados do autor, que adotou a ferramenta *JAVA*, com os resultados obtidos com o programa *Bar1D_Scilab* utilizado nesse trabalho. A Figura 6.1 ilustra a estrutura analisada.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Os valores adotados por Almeida (2005) foram: $L=60uc$, $A=2uc^2$ e $E=30 \times 10^6 uf/uc^2$, em que uc e uf indica unidade de comprimento e unidade de força, respectivamente. A estrutura foi discretizada em 1, 4 e 8 elementos, conforme mostrado na Figura 6.2.

Figura 6.2 – Discretização da estrutura de barra linear.



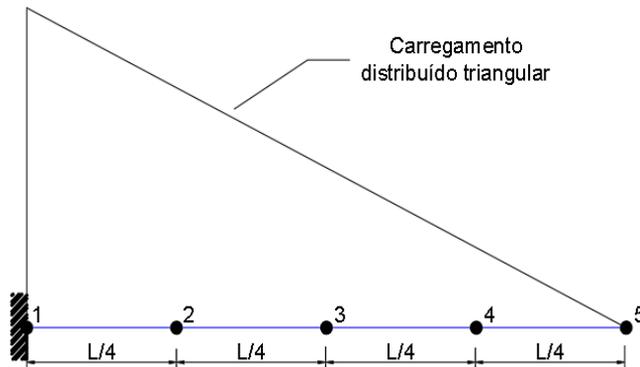
Fonte: Autoria própria, 2022.

Conforme mostrado na Figura 6.1 e expresso na Equação 6.1, a carga distribuída aumenta, em módulo, uniformemente, conforme a indicação do sentido positivo do eixo x.

$$b(x) = -10x \tag{6.1}$$

A Figura 6.3 mostra o carregamento do caso 2 que segue a mesma relação para os demais casos.

Figura 6.3 – Carregamento distribuído triangular do caso 2.

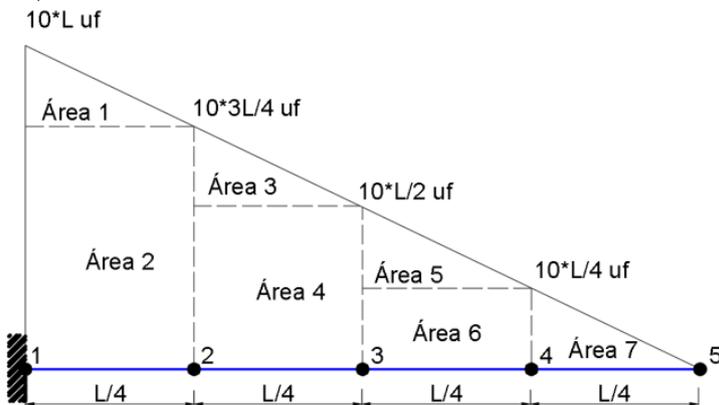


Fonte: Autoria própria, 2022.

Tendo um carregamento distribuído ao longo da estrutura, ao realizar a discretização desta, cada nó receberá uma contribuição. Para a determinação do vetor de carga nodal equivalente, o carregamento triangular deve ser distribuído entre os nós de forma correta. Um croqui mostrando como se faz o cálculo da força resultante para cada elemento é apresentado na Figura 6.4.

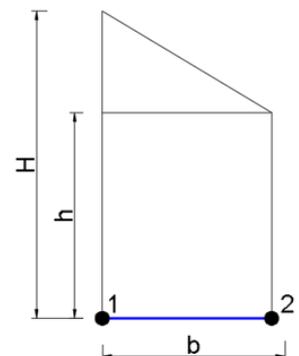
Figura 6.4 – Carregamento distribuíd. a) Croqui das áreas de influência relacionada com o carregamento nodal; (b) esquema para entendimento da distribuição do carregamento para cada nó.

a)



Fonte: Autoria própria, 2022.

b)



Considerando a Figura 6.4 (b) a contribuição nodal da carga é dada pelas formulas:

$$P_{nó1} = \frac{2b \times (H - h) + 3 \times h \times b}{6} \quad (6.2)$$

$$P_{nó2} = \frac{2b \times (H - h) + 6 \times h \times b}{12} \quad (6.3)$$

Convém destacar que os nós da extremidade da estrutura mostrada na Figura 6.4 (a) só recebem uma contribuição de força, já as demais duas contribuições (sendo uma imediatamente a esquerda, vindo da Equação 6.2 e uma da direita, atrelado a Equação 6.3). Essa analogia foi aplicada para todos os casos. Dessa forma, foi montada a Tabela 6.1 de carregamentos para os três casos analisados.

Tabela 6.1 – Posição nodal e cargas nodais equivalente para os 3 casos estudados.

Caso 1		Caso 2		Caso 3		
Nó	Posição x	Carga	Posição x	Carga	Posição x	Carga
1	60uc	-12000uf	60uc	-4125uf	60uc	-2150uf
2	0uc	-6000uf	45uc	-6750uf	52,5uc	-3931,25uf
3	----	----	30uc	-4500uf	45uc	-3368,75uf
4	----	----	15uc	-2250uf	37,5uc	-2806,25uf
5	----	----	0	-375uf	30uc	-2243,75uf
6	----	----	----	----	22,5uc	-1681,25uf
7	----	----	----	----	15uc	-1118,25uf
8	----	----	----	----	7,5uc	-556,25uf
9	----	----	----	----	0uc	-93,75uf

Fonte: Autoria própria, 2022.

Por fim, os dados de entrada para os e casos foram inseridos no programa *Bar1D_Scilab* para que pudessem ser analisados.

6.1.1 Resultados

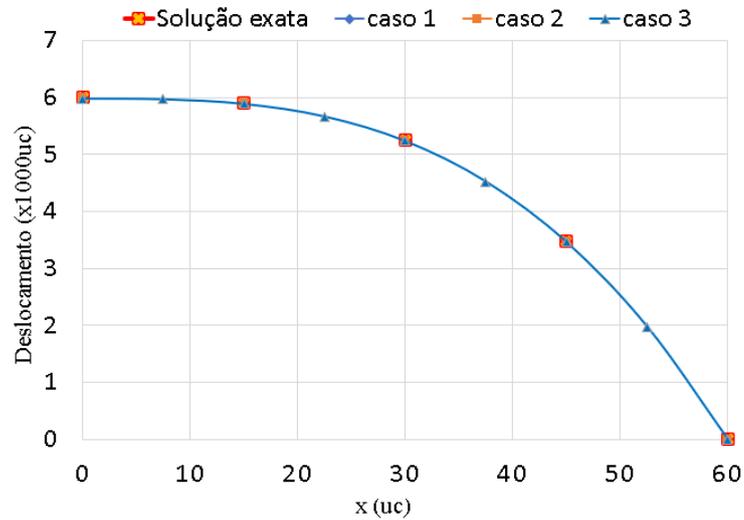
Na análise dos deslocamentos obtidos com auxílio dos códigos em *Bar1D.sce* verifica-se que para todos os três casos estudados, conforme mostrado na Figura 6.5, a solução numérica converge para a solução analítica. A Equação 6.4 expressa a solução exata do deslocamento.

$$\frac{3EA}{5L^3} u(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 1 \quad (6.4)$$

Conforme o esperado, verifica-se que à medida que se aproxima da extremidade livre

da barra, o deslocamento aumenta.

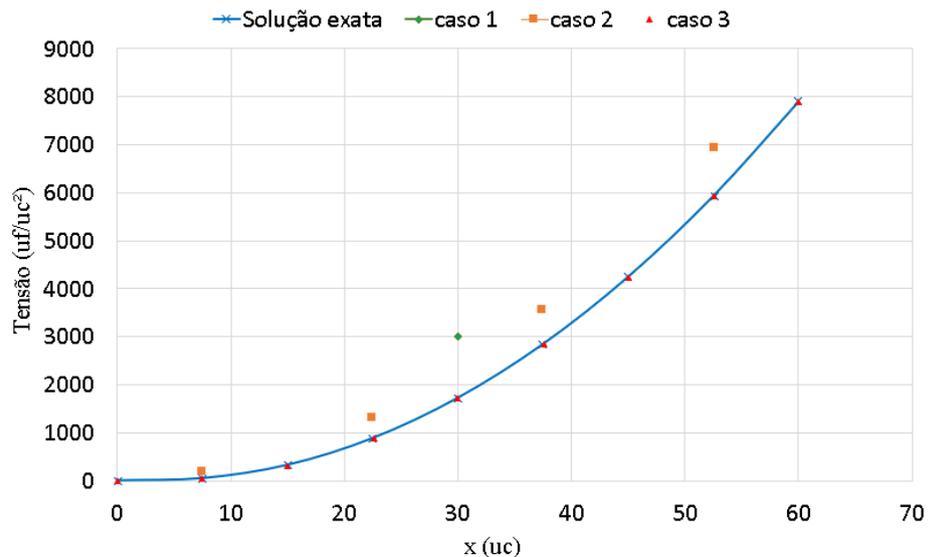
Figura 6.5 – Deslocamento ao longo do comprimento da barra.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Para as tensões, os resultados obtidos através do *Bar1D_Scilab* estão apresentados na Figura 6.6. Verifica-se que apenas para o caso 3, os valores numéricos convergem para a solução exata.

Figura 6.6 – Tensão ao longo do comprimento da barra.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Foi percebido também pelos resultados do programa, que a representatividade do deslocamento e tensão em relação à coordenada por nó se dá conforme o Tabela 6.2.

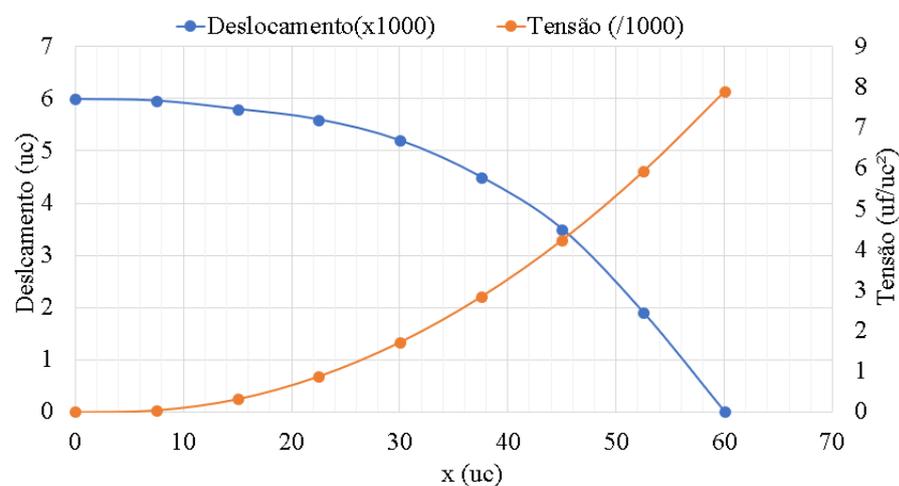
Tabela 6.2 – Deslocamento e tensão em relação à coordenada.

Caso 3				
X (uc)	Deslocamento (uc)	Representatividade (%)	Tensão (uf/uc²)	Representatividade (%)
60	0	0	7899,749	100
52,5	0,0019	31,8	5934,125	75,11
45	0,0034	56,9	4249,749	53,79
37,5	0,00452	75,3	2846,625	36,03
30	0,00523	87,6	1724,750	21,83
22,5	0,00566	94,8	884,124	11,19
15	0,00588	98,4	324,999	4,11
7,5	0,00596	99,8	46,875	0,59
0	0,00597	100	0	0
Total	0,00597	100	7899,74	100

Fonte: Autoria própria, 2022.

A Figura 6.7 destaca a relação entre deslocamento e tensão ao longo da barra.

Figura 6.7 – Deslocamento e tensão ao longo do comprimento do elemento para o caso 3.



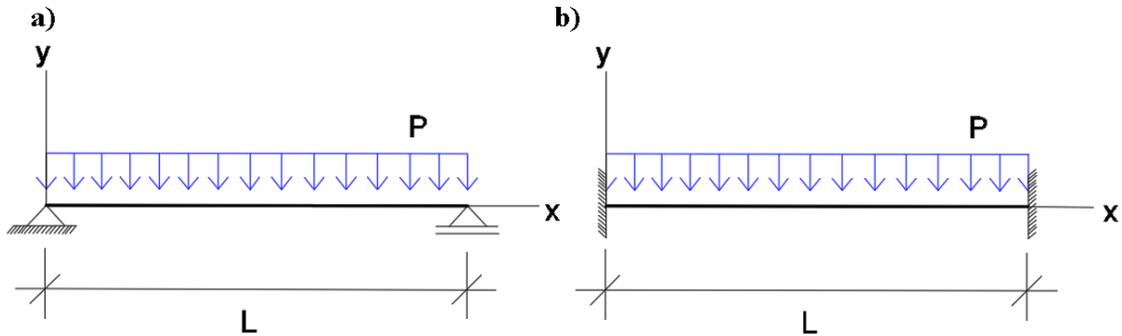
Fonte: Autoria própria, 2022.

6.2 VIGA BI APOIADA E VIGA BI ENGASTADA DE BERNOULLI

Elementos de vigas são encontrados, por exemplo, nos pórticos das edificações. Em estruturas convencionais de concreto armado com lajes, vigas e pilares, elas recebem as cargas das lajes. As vigas podem ser bi apoiadas, engastada e apoiada, bi engastadas e em balanço. Na

Figura 6.8 apresenta-se um problema de viga de Bernoulli que foi estudado por Ferreira (2008). Este autor adotou os seguintes parâmetros materiais, geométricos e de carregamento: $EI = 1$; $P = 1$; $L = 1$

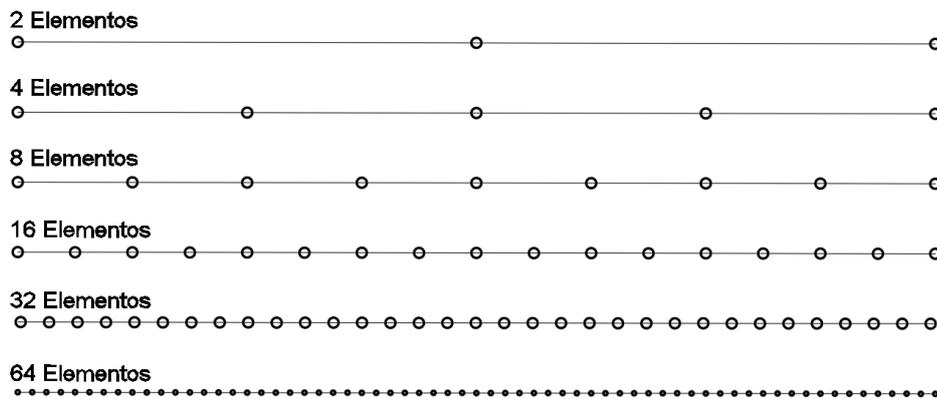
Figura 6.8 – Viga de Euler-Bernoulli. (a) Viga bi apoiada; (b) Viga bi engastada.



Fonte: Autoria própria, 2022.

A fim de obter valores de deslocamento a estrutura foi discretizada com 6 malhas, conforme ilustrado na Figura 6.9.

Figura 6.9 – Viga discretizada em elementos de viga.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Para a obtenção das coordenadas nodais e conectividades utilizou-se a planilha eletrônica *Microsoft Excel*®.

6.2.1 Resultados

As soluções exatas dos deslocamentos verticais máximos da viga bi apoiada bi engastada são dadas pelas Equações 6.5 e 6.6, respectivamente.

$$\delta = \frac{5PL^5}{384EI} \quad (6.5)$$

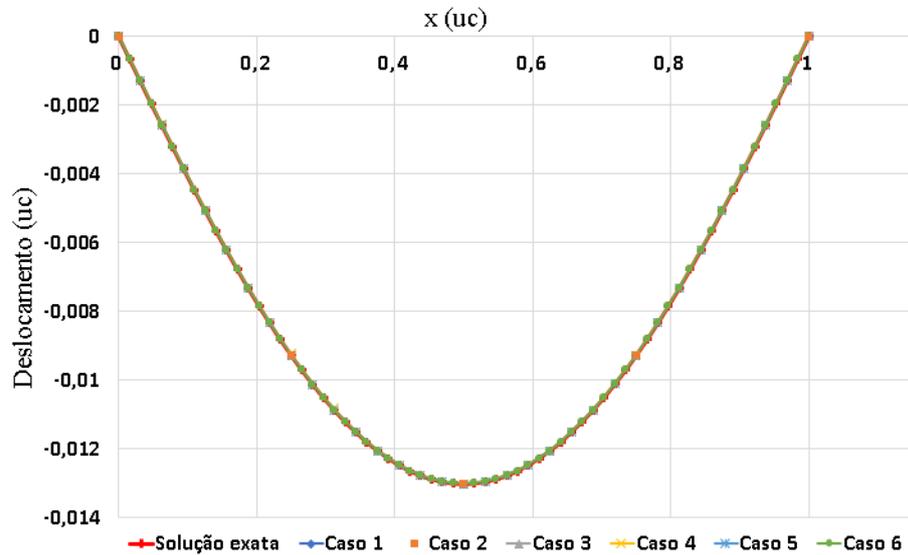
$$\delta = \frac{PL^5}{384EI} \quad (6.6)$$

Substituindo os parâmetros de cada viga nas equações anteriores obtém os seguintes valores exatos das flechas no meio do vão:

- Viga biapoiada: 0,01302 uc
- Viga biengastada: 0,002604 uc

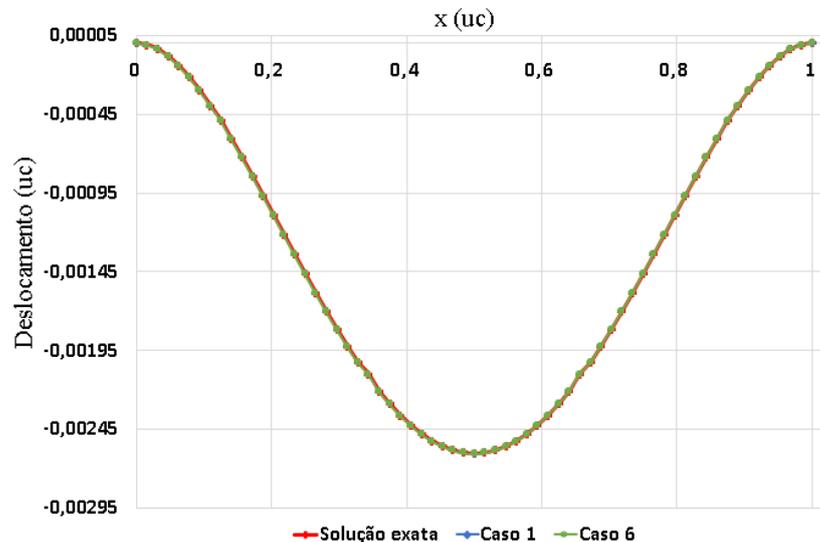
Os resultados numéricos dos deslocamentos máximos para o caso da viga bi apoiada e da viga bi engastada foram semelhantes aos valores analíticos, conforme apresentado nas Figuras 6.10 e 6.11.

Figura 6.10 – Deslocamento em função da coordenada x para viga bi apoiada.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Figura 6.11 – Deslocamento em função da coordenada x para viga bi engastada.



Fonte: Autorial própria, 2022.

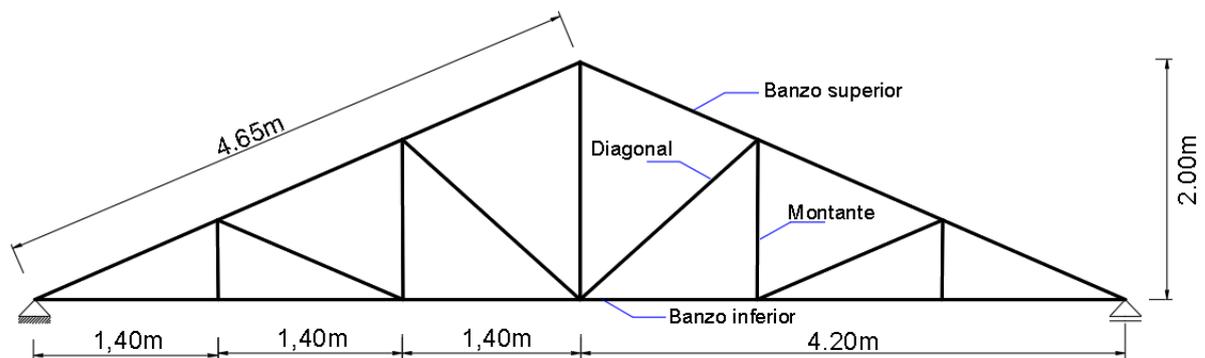
Foi percebido que o deslocamento máximo independe, para os dois casos analisados, do número de elementos. Isso ser percebido pelas sobreposições das linhas dos gráficos. Também é nítido a não rotação nos apoios para a viga bi engastada. Isso se dá devido ao apoio ser de terceiro gênero, condição que não ocorre na viga bi apoiada, sendo, esta, vinculadas com apoios de segundo e primeiro gênero.

6.3 TRELIÇA DE MADEIRA PARA COBERTURA

As treliças de madeira são muito utilizadas em coberturas, principalmente em casas residenciais. Elas estão presentes em quase todas as construções antigas e ainda são bastante empregadas atualmente, apesar de as treliças metálicas estarem sendo uma opção mais atrativa, principalmente em regiões urbanizadas.

Este problema trata-se da análise de uma treliça de madeira apresentada em Moliterno – Caderno de projetos de telhados em estruturas de madeira, 2ª edição. Na Figura 6.12 ilustra-se a geometria da treliça.

Figura 6.12 – Cotas de projeto da treliça de madeira.

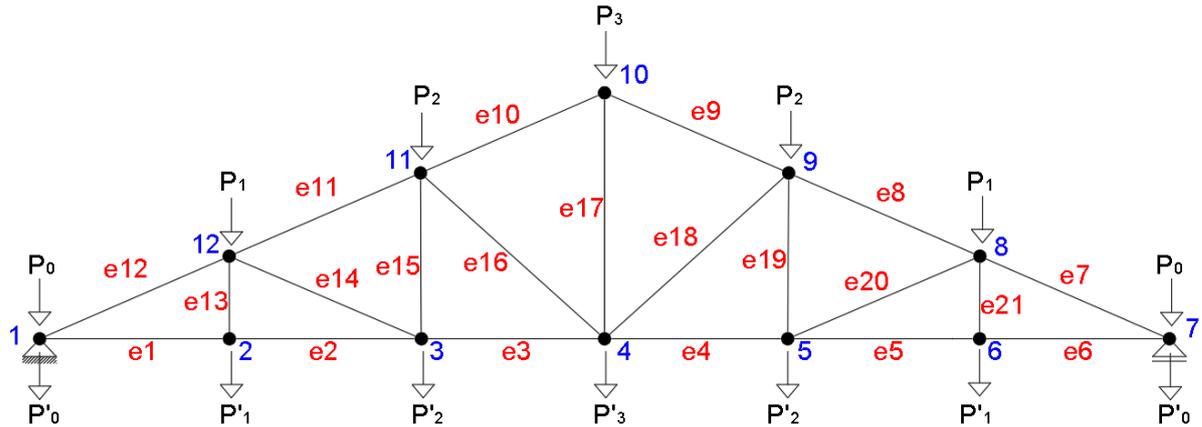


Fonte: Autorial própria, 2022.

Trata-se de uma treliça tipo *Howe* que foi analisada quanto aos esforços máximos de tração e compressão, bem como deslocamentos nodais. Para iniciar o processo de discretização foi numerado todos os nós da estrutura, os elementos e os carregamentos conforme Figura 6.13.

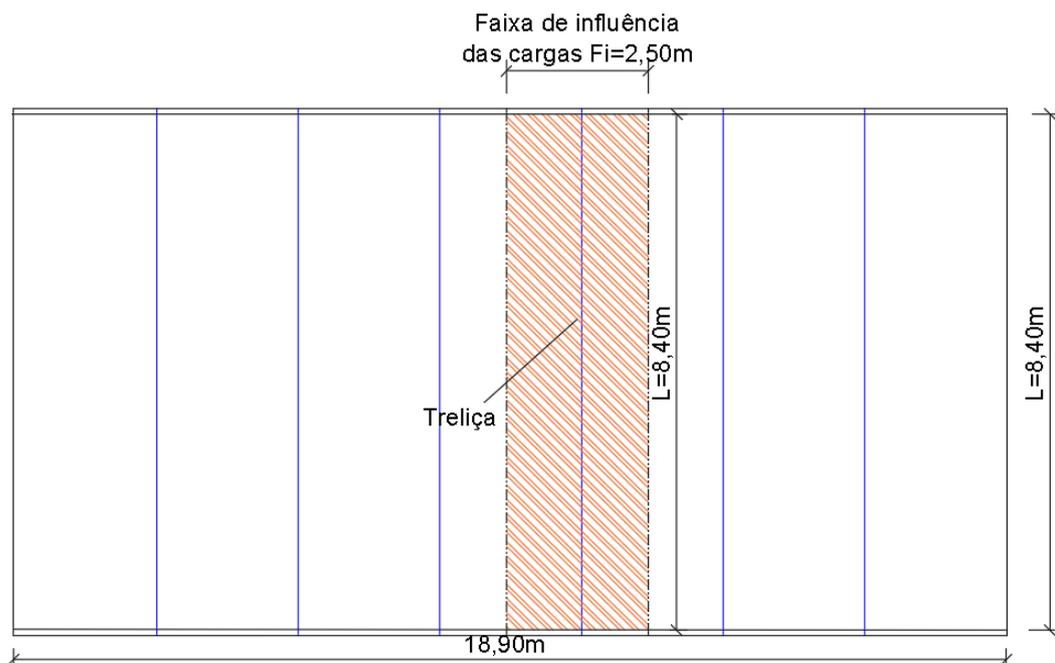
O telhado do problema possui 18,30m de comprimento por 8,40m de vão livre, com tesouras espaçadas de 2,50m. Dessa forma, o carregamento considerado para cada tesoura é dado pela área de contribuição delimitada pela hachura da Figura 6.14.

Figura 6.13 – Discretização da estrutura. Nós, elementos e carregamento.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Figura 6.14 – Área de influência do peso da cobertura sobre a treliça.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Acerca do material adotado para os banzos superior e inferior, diagonais e montantes, trata-se de uma madeira do tipo Peroba Rosa, que de acordo com a referência apresenta as seguintes propriedades.

- O peso específico aparente é $\rho = 780\text{kg/m}^3$;
- Tensões admissíveis:

Resistência característica a compressão paralela às fibras

$$\sigma_c = 85\text{kp/cm}^2$$

Resistencia de compressão normal às fibras

$$\sigma_n = 25kp/cm^2$$

Resistência a compressão inclinada às fibras

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_c \times \sigma_n}{\sigma_c \times \text{sen}^2 \alpha + \sigma_n \times \text{cos}^2 \alpha}$$

a) Módulo de elasticidade

$$E = 94500kgf/cm^2$$

As cargas no banzo superior são devidas ao peso próprio da tesoura, cobertura e terças.

Para os nós 8 ao 12 a carga é dada por:

$$P_i = [(g_T + g_c)m + g_0]a$$

$$[(10 + 67)1,40 + 8] \times 2,50 \cong 290kgf \quad (6.7)$$

Para os nós 1 e 7, tem-se:

$$P_e = \left[\frac{(g_T + g_c)m}{2} + g_0 \right] a + beiral \quad (6.8)$$

$$= [(10 + 67)1,40/2 + 8] \times 2,50 + 67 \times 0,70 \times 2,50 \cong 275kgf$$

As cargas no banzo inferior são devido ao forro, bem como nos nós 2 ao 6:

$$P'_i = (g_F \times m \times a)$$

$$= (15 \times 1,40 \times 2,50) \cong 54kgf \quad (6.9)$$

Para os nós 1 e 7:

$$P'_e = F_i/2$$

$$= 54/2 \cong 27kgf \quad (6.10)$$

Dessa forma, o carregamento nodal fica configurado conforme Tabela 6.3.

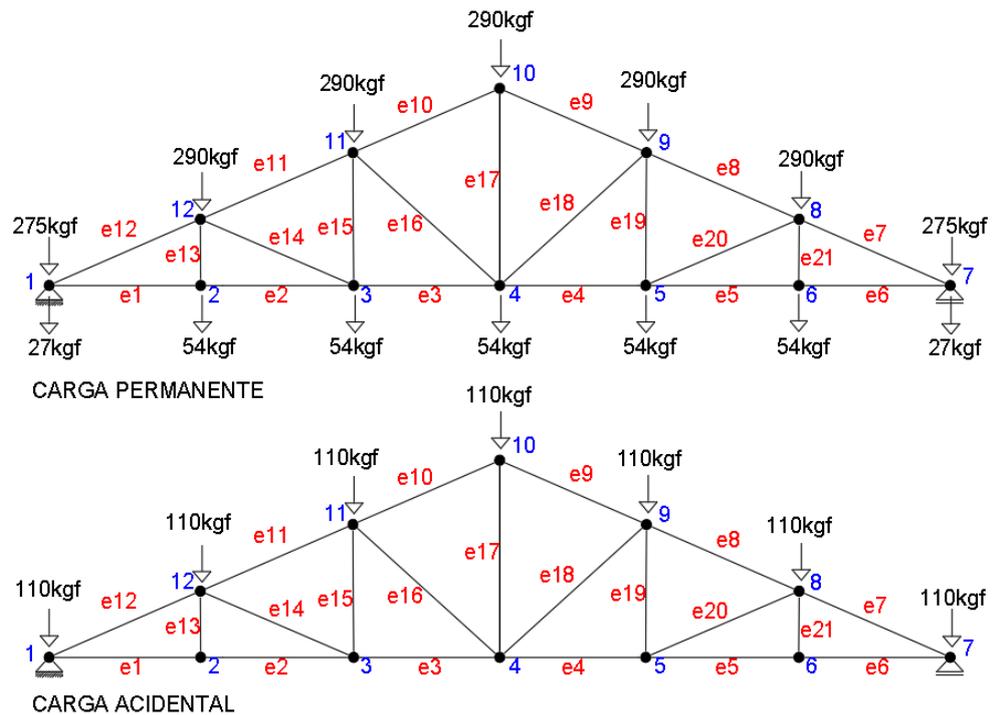
Tabela 6.3 – Resumo de cargas nodal de projeto.

Nó	Carga (kgf)
1 – 7	302
2 ao 6	54
8 ao 12	290

Fonte: Aatoria própria, 2022.

Levou-se em consideração também as cargas acidentais e, seguiu-se Moliterno (1981) que adotou 110kgf por nó do banzo superior. Por fim, os carregamentos nodais resultantes são mostrados na Figura 6.15.

Figura 6.15 – Carregamento nodal.



Fonte: Autoria própria, 2022.

6.3.1 Resultados

Para uma etapa de análise inicial de projeto, o engenheiro carece dos valores máximos de esforços nas barras da estrutura para assim realizar o dimensionamento. Os resultados obtidos com o programa *Truss2D.sce* foram confrontados com os do autor sendo observados uma aproximação nítida. Como era esperado, em treliça tipo *Howe*, o banzo superior e as diagonais apresentaram comportamento de compressão e o banzo inferior e montantes reações de tração.

A análise foi feita em três etapas: a primeira considerando apenas o carregamento permanente, a segunda atribuindo apenas as cargas acidentais e por último a combinação dos dois carregamentos anteriores. Sendo assim, foi obtido os seguintes valores da Tabela 6.4.

A máxima tração obtida por Moliterno (1981) considerando a combinação de todas as cargas foi de +2.380kgf nos elementos e1, e2, e5 e e6, todos no banzo inferior e máxima compressão foi de -2.650kgf em e7 e e12, ambos no banzo superior. Comparando os resultados do autor com os extraídos do *Scilab*, há uma pequena diferença. De modo a buscar o motivo da disparidade foi realizado o processo de análise com o programa *Ftool*© e obtido como resultado dos esforços os mesmos valores do *Scilab*. Logo, o autor optou por arredondar os resultados

presentes na sua obra.

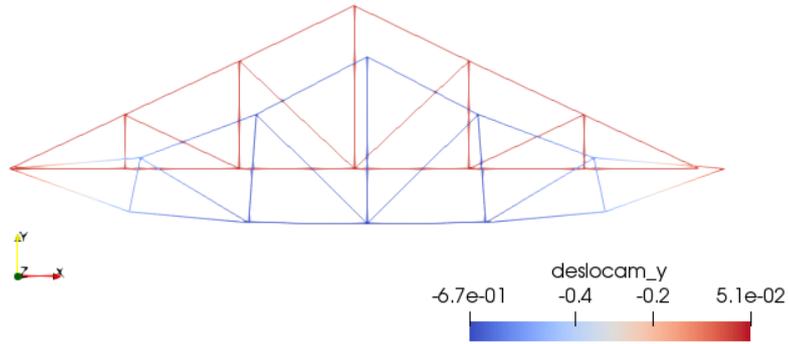
Tabela 6.4 – Forças e tensões resultantes.

Elemento	Permanente (kgf)	Acidental (kgf)	Permanente +Acidental(kgf)	Tensão (kgf/cm²)
1	1824,24	583,33	2407,57	33,43
2	1824,24	583,33	2407,57	33,43
3	1459,59	466,66	1926,25	26,75
4	1459,59	466,66	1926,25	26,75
5	1824,24	583,33	2407,57	33,43
6	1824,24	583,33	2407,57	33,43
7	-2016,79	-644,90	-2661,69	-27,72
8	-1613,43	-515,92	-2129,35	-22,1
9	-1204,65	-385,21	-1589,86	-16,56
10	-1204,65	-385,21	-1589,86	-16,56
11	-1613,43	-515,92	-2129,35	-22,18
12	-2016,79	-644,90	-2661,69	-27,72
13	53,99	0,00	53,99	1,07
14	-403,3	-128,98	-532,28	-7,39
15	225,99	54,99	280,98	5,62
16	-516,49	-165,15	-681,64	-9,46
17	762,64	226,60	989,24	19,78
18	-516,49	-165,15	-681,64	-9,46
19	225,99	54,99	280,98	5,62
20	-403,35	-128,98	-532,33	-7,39
21	53,99	0,00	53,99	1,07

Fonte: Autoria própria, 2022.

Portanto, os valores máximos de esforços internos, vindos do *Truss2D.sce*, foi de 2.407,57kgf para tração nos elementos e1, e2, e5 e e6, do banzo inferior e -2.661,69kgf para compressão em e7 e e12, do banzo superior. As máximas tensões encontradas de tração e compressão foram de 33,43kgf/cm² e -27,72kgf/cm² respectivamente. Também, por meio do *Truss2D.sce*, foi obtido a máxima flecha na tesoura, configurando um valor de 0,67cm no centro da tesoura. Já a flecha obtida por Moliterno (1981) foi de 0,63cm e novamente salientando que essa diferença se dá devido aos arredondamentos feitos pelo autor no centro da estrutura. A Figura 6.16 apresenta os deslocamentos da estrutura obtidos por meio do *Paraview*.

Figura 6.16 – Deformação da estrutura de treliça plana.

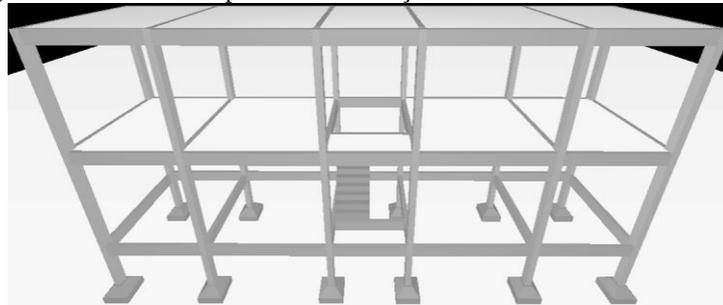


Fonte: Autoria própria, 2022.

6.4 PÓRTICOS PLANOS ASSOCIADOS PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE

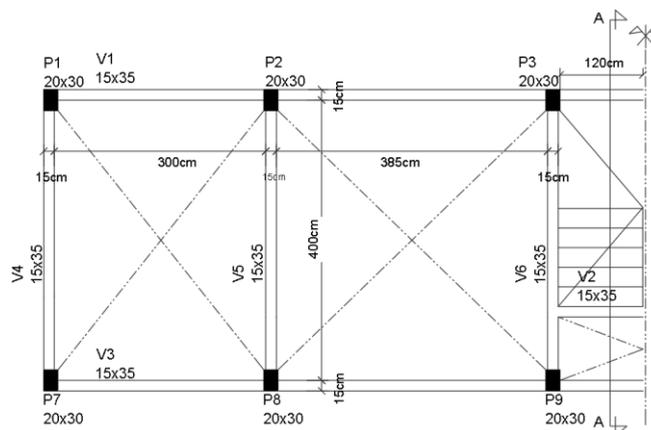
A próxima estrutura analisada foi extraída Torres Filho (2021) – Estruturas de concreto armado. Trata-se de uma associação de pórticos planos para análise da estabilidade global. A Figura 6.17 traz o pórtico espacial do qual foi extraído os pórticos planos. A Figura 6.18 apresenta a planta de forma do pavimento térreo que se repete para o pavimento superior. Figura 6.19 traz o corte AA.

Figura 6.17 – Pórtico espacial da edificação analisada com Scilab.



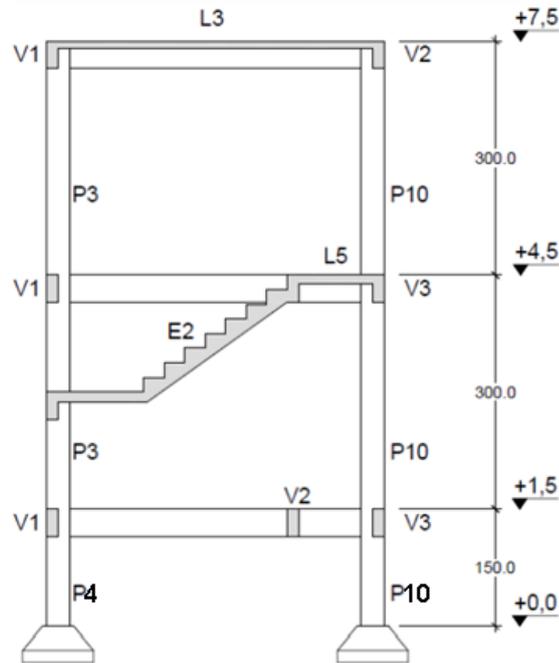
Fonte: Torres Filho, 2021.

Figura 6.18 – Planta de forma.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Figura 6.19 – Corte AA.



Fonte: Torres Filho, 2021.

O autor adotou para o concreto uma resistência característica de $f_{ck}=25\text{MPa}$. Segundo a ABNT NBR 6118:2014, para $20\text{MPa} \leq f_{ck} \leq 50\text{MPa}$, o módulo de elasticidade (E_{ci}), pode ser estimado por meio das expressões a seguir:

$$E_{ci} = \alpha_E \times 5600 \times \sqrt{f_{ck}} \quad (6.11)$$

Sendo o agregado escolhido para o projeto granito ou gnaiss, α_E segundo a NBR 6118 vale 1,0. A Equação 6.11 fica:

$$E_{ci} = 1 \times 5600 \times \sqrt{25} = 28\text{GPa}$$

Necessita-se do módulo de elasticidade secante, sendo ele calculado por meio da Equação 6.12.

$$E_{CS} = \alpha_i \times E_{ci} \quad (6.12)$$

em que:

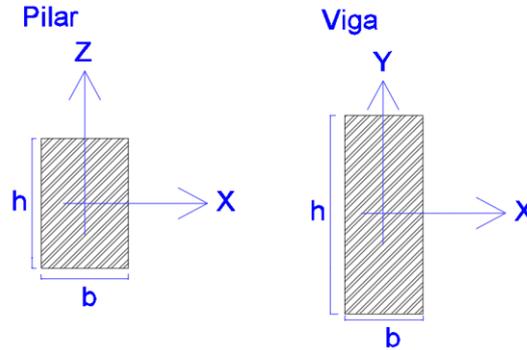
$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \times \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (6.13)$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \times \frac{25}{80} = 0,86$$

Portanto, E_{CS} é igual a 24,08GPa.

A Figura 6.20 retrata a seção dos pilares e vigas para a consideração do momento de inercia.

Figura 6.20 – Seção transversal dos elementos estruturais do pórtico plano.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Os momentos de inércia dos pilares foram calculados por meio da Equação 6.14 e para as vigas, foi considerada apenas a fórmula $I_{direção\ 90^\circ}$, pois, independentemente da direção, a seção da viga é sempre a mesma. As dimensões podem ser encontradas na Figura 6.18.

$$\begin{cases} I_{direção\ 0^\circ} = h \times \frac{b^3}{12} \\ I_{direção\ 90^\circ} = b \times \frac{h^3}{12} \end{cases} \quad (6.14)$$

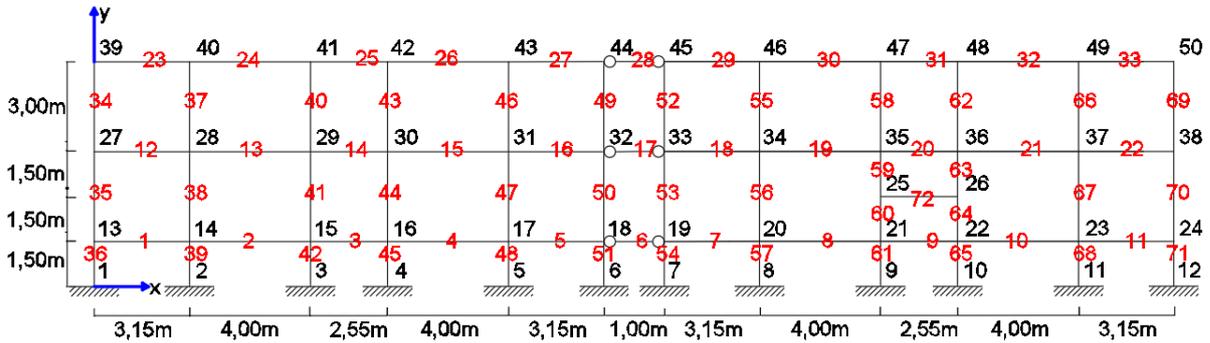
6.4.1 Análise de estabilidade utilizando pórticos planos associados

Dado que os pórticos planos, do problema analisado, são associados por meio de elementos rotulados com seção de 12x100cm e comprimento de 100cm, com mesmo módulo de elasticidade da estrutura, foi necessário adaptar o programa que antes era intitulado *Frame2D.sce*, criando assim um novo denominado *Frame2DTruss.sci*. Este, no que lhe concerne, possibilitou o acoplamento de elementos de pórticos 2D com elemento de treliça 2D.

A estrutura foi discretizada conforme mostrado na Figura 6.21. Vale ressaltar que os elementos 6, 17 e 28 foram tratados como elementos de barra e não como elementos de pórtico como os demais que formam a estrutura dos pórticos planos associados.

Quanto ao carregamento, seguindo a referência, foi inserido uma carga pontual de 200kN aplicada horizontalmente no nó 39 que, em termos de grau de liberdade essa força foi inserida no grau 115.

Figura 6.21– Discretização do pórtico plano na direção 0°.



Fonte: Autoria própria, 2022.

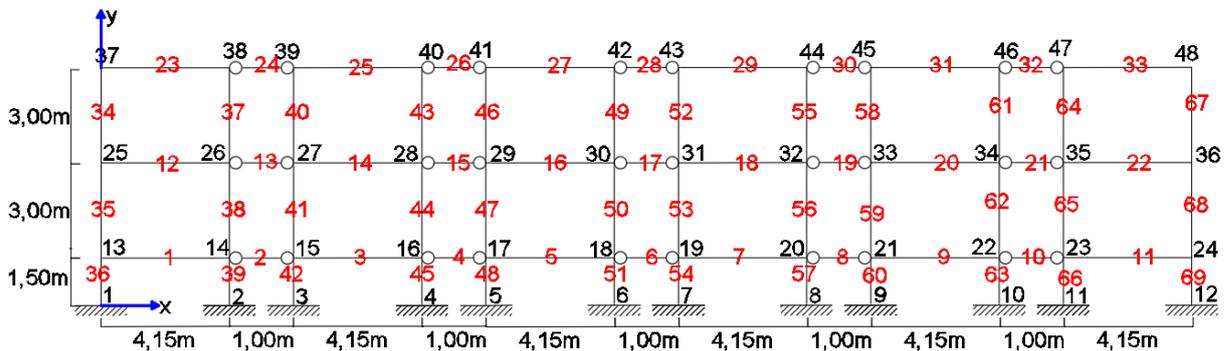
Semelhante ao cálculo do grau de liberdade para a carga, foi realizado o mesmo para as condições de contorno segundo o sistema de Equações 6.15.

$$\begin{cases} \text{Grau de liberdade, translação } x = n^{\circ}\text{nó} \times 3 - 2 \\ \text{Grau de liberdade, translação } y = n^{\circ}\text{nó} \times 3 - 1 \\ \text{Grau de liberdade, rotação } z = n^{\circ}\text{nó} \times 3 \end{cases} \quad (6.15)$$

Como os pilares nascem num apoio de terceiro gênero, o mesmo não permite rotação e translação.

O mesmo processo foi feito para a análise na direção 90° com uma carga pontual de 200kN no nó 37 no sentido positivo do eixo x. A discretização da estrutura é mostrada na Figura 6.22. Para a análise na direção 90°, todas as vigas identificadas com número par foram tratadas como elemento de barra no *Scilab*.

Figura 6.22– Discretização do pórtico plano na direção 90°.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Por fim, foi organizado todos os dados mostrados acima em ordem lógica e inseridos no programa *Frame2DTruss.sce* e posteriormente feitas as análises.

6.4.2 Resultados

O estudo de pórticos planos é muito importante e vantajoso para as análises estruturais, pois geralmente são mais simples de serem analisados comparados aos pórticos espaciais, tanto analiticamente como por meios computacionais. A importância de analisar os deslocamentos nodais de uma estrutura plana está no fato de verificar seu comportamento frente a um carregamento específico pré estabelecido e o quanto a estrutura desloca para assim poder ser extraídas informações de rigidez e inercia, por exemplo.

6.4.2.1 Direção 0°

Após inserir os dados de entrada do programa *Frame2DTruss.sce* o mesmo foi processado e, dessa forma, obtido os resultados. Sobre deslocamento máximo da estrutura, o mesmo teve um resultado de 2,3015cm semelhante ao do autor Filho (2021) mostrando a correta implementação do programa de associação de pórtico plano com elemento de barra.

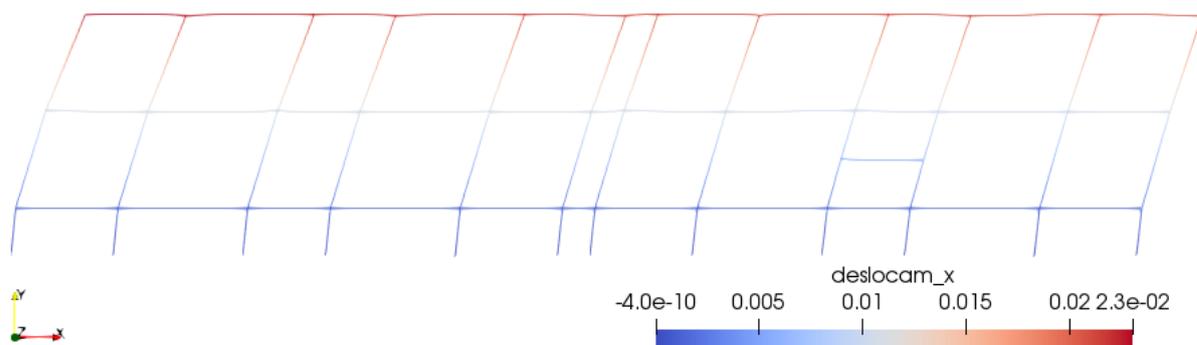
Com o resultado do deslocamento máximo δ , altura H da estrutura e carga aplicada F foi possível calcular a rigidez EI da estrutura, sendo essa propriedade importante para avaliação da susceptibilidade de deformação estrutural diante de um carregamento definido. Dessa forme, tem-se a Equação 6.16 apresentada em Filho (2021):

$$(EI)_{p\acute{o}rtico} = \frac{F \times H^3}{3 \times \delta} \quad (6.16)$$

$$(EI)_{p\acute{o}rtico\ 0^\circ} = \frac{200 \times 10^3 \times 7,5^3}{3 \times 0,0230} = 1222,82 \times 10^6 N.m^2$$

A Figura 6.23 mostra o deslocamento do pórtico no sentido de aplicação da carga, o eixo x.

Figura 6.23 – Deformação do pórtico plano 0°.

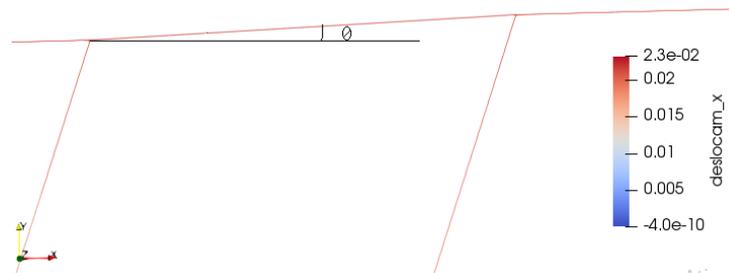


Fonte: Autoria própria, 2022.

Outra observação importante é a rotação que ocorreu nos nós que conectam as barras

nos pórticos. Como essa região foi dada como rotulada, se esperou esse resultado, como é observado na Figura 6.24.

Figura 6.24 – Detalhe da deformação na ligação rotulada do pórtico plano.

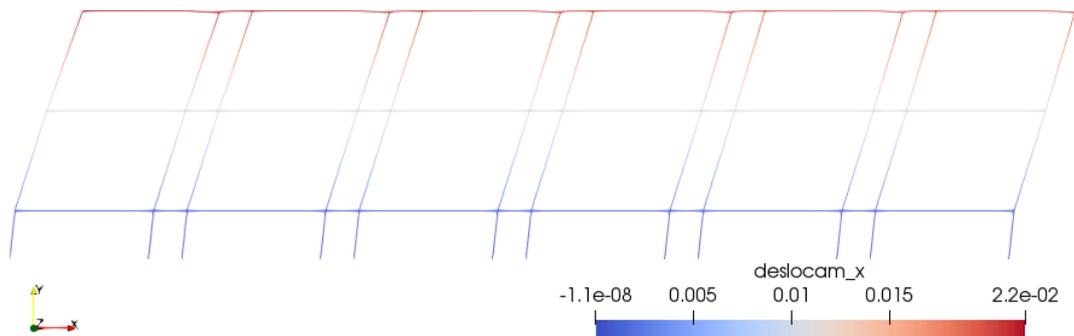


Fonte: Autoria própria, 2022.

6.4.2.2 Direção 90°

Realizado o mesmo processo para o sentido 90° foi obtido o deslocamento máximo de 2,1719cm no nó de aplicação da carga. A Figura 6.25 mostra a deformação do pórtico.

Figura 6.25 – Deformação do pórtico plano 90°.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Aplicado a Equação 6.16 para essa situação, obteve-se:

$$(EI)_{p\acute{o}rtico} = \frac{F \times H^3}{3 \times \delta}$$

$$(EI)_{p\acute{o}rtico\ 90^\circ} = \frac{200 \times 10^3 \times 7,5^3}{3 \times 0,0217} = 1296,82 \times 10^6 N.m^2$$

Observou-se que a estrutura teve maior rigidez no sentido 90°. Esse fato pode ter influência devido à locação dos pilares, pois, nesse caso, os mesmos foram dispostos com o eixo de maior inércia paralelo à carga de 200kN.

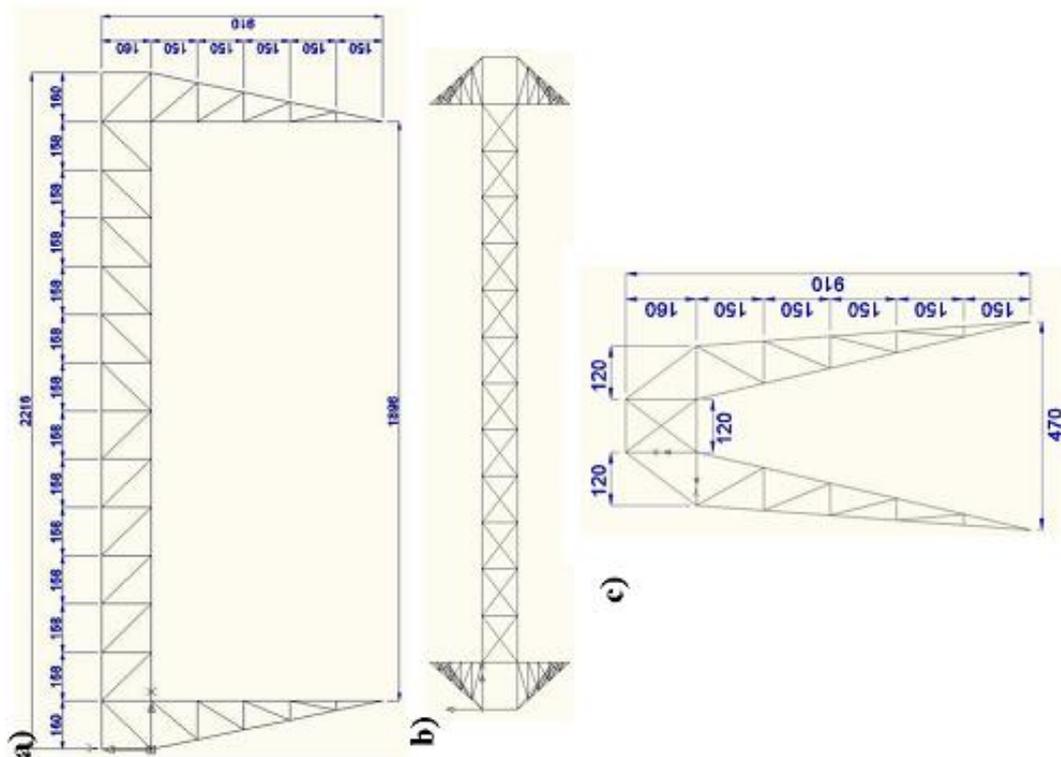
6.5 PONTE ROLANTE

Foi analisado uma estrutura de uma ponte rolante formada por treliça espacial. A estrutura foi retirada do material da aula 5 da disciplina de Método dos Elementos Finitos aplicados à engenharia de estruturas da UFPR.

A área da seção dos banzos, superior e inferior e dos elementos principais das colunas é $11,1\text{cm}^2$ e das diagonais, montantes e transversais da viga é $5,52\text{cm}^2$. Já das seções transversais das diagonais e horizontais das colunas é $3,95\text{cm}^2$. O módulo de elasticidade do material das barras é $2,1\text{ Kgf/cm}^2$. As plantas e cortes são representadas nas Figuras 6.26.

Para organização das informações de coordenadas nodais, conectividades, condições de contorno e carregamentos foi recorrido ao *Software Excel*® e em seguida utilizado o programa *Truss3D.sce* para a obtenção dos deslocamentos e tensões máximas. Por fim, o programa para análises gráficas *Paraview* foi usado como ferramenta auxiliar, visando verificar, inicialmente, possíveis erros humanos no processo de discretização da geometria da estrutura e posteriormente se a deformação da estrutura ocorria consoante o esperado fisicamente.

Figura 6.26 - Plantas e vistas da ponte rolante. a) vista frontal; b) vista superior; c) vista transversal.



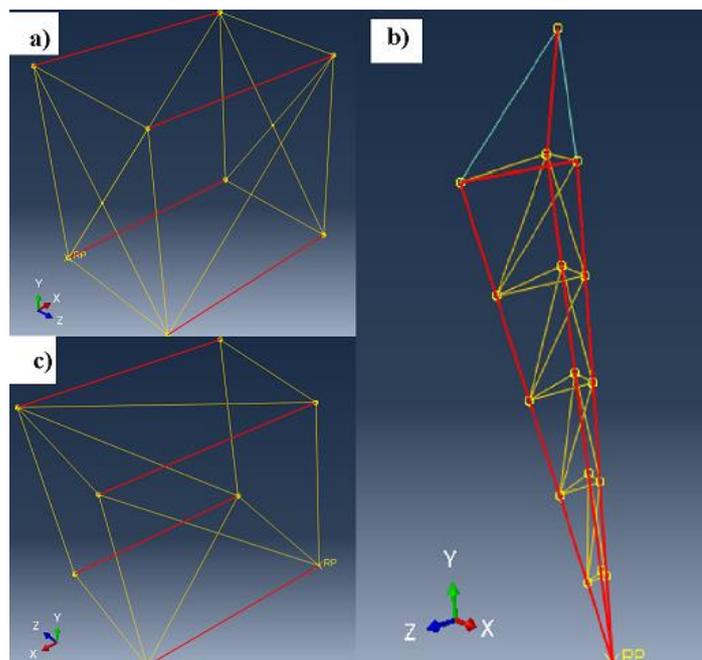
Fonte: Estruturas UFPR, 2017.

A etapa de criação do modelo da estrutura obedece a seqüências lógicas, tais como: nomeação dos nós; coordenadas nodais; conectividades; forças nodais; condições de contorno. Para a criação da malha que formou toda essa estrutura espacial foi consultado as plantas baixas e cortes, de modo a colher as coordenadas nodais (x, y, z) e organiza-las numa planilha *Excel*®.

Toda a estrutura possui três blocos que se repetem, denominados de “bloco_extremidade”, “bloco_meio” e “bloco_coluna”. Na Figura 6.27 tem-se o modelo geométrico dos blocos. Na seqüência foi atribuída as áreas das seções e propriedade dos materiais que, conforme a Figura 6.27, as barras em vermelho têm área da seção de 11,1cm², as barras em amarelo com seção de 5,52cm² e as barras em azul com 3,95cm². Todas as barras possuem o mesmo módulo de elasticidade, de 20,06E+10Pa. A treliça espacial foi discretizada em 344 elementos e 116 nó. A estrutural completa, tal como geometria espacial, consta na Figura 6.28.

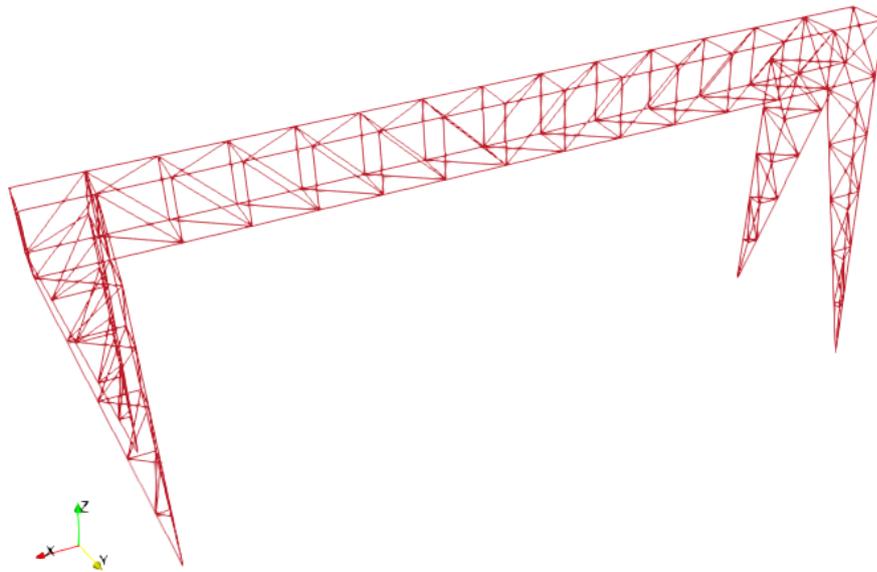
Foi atribuído as condições de contorno e criação dos carregamentos. Há três categorias de cargas atuando na estrutura, uma de -120*9,81N concentrada nos nós da extremidade inferior da viga, um de -240*9,81N atuando nos demais nós inferiores da viga e um de -2500*9,81N da talha na cor laranja sendo duas cargas paralelas. O carregamento foi aplicado dado conforme mostrado na Figura 6.29.

Figura 6.27 – Geometria espacial. a) bloco das extremidades das vigas; b) colunas; c) bloco que compõe a viga.



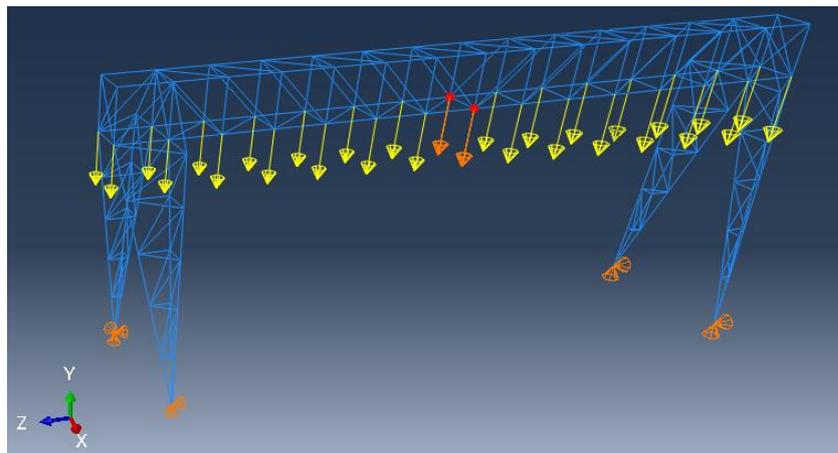
Fonte: Autoria própria, 2022.

Figura 6.28 – Geometria espacial da ponte rolante.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Figura 6.29 – Carregamento nodal e condições de contorno.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Os graus de liberdade para identificação do sentido das forças e condições de contorno seguem o sistema de Equação 6.17.

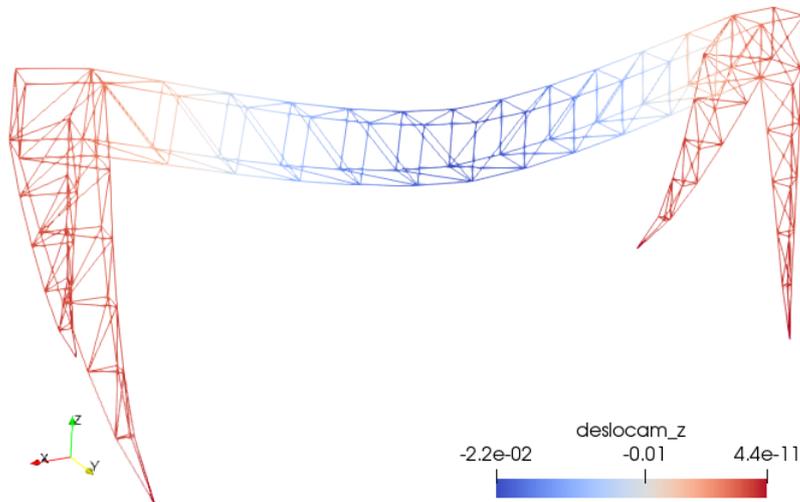
$$\begin{cases} \text{Grau de liberdade, } x = n^{\circ}\text{nó} \times 3 - 2 \\ \text{Grau de liberdade, } y = n^{\circ}\text{nó} \times 3 - 1 \\ \text{Grau de liberdade, } z = n^{\circ}\text{nó} \times 3 \end{cases} \quad (6.17)$$

6.5.1 Resultados

Seguido todas as etapas de discretização, bem como a aplicação das cargas conforme o e condições de contorno, foi encontrado, por meio do *Truss3D.sce*, um deslocamento vertical

máximo no meio do vão da viga de -2.23754cm nos nós 8, 23, 38 e 53 o qual corresponde a um resultado igual ao encontrado pelo autor. A Figura 6.30 mostra a geometria deformada.

Figura 6.30 – Geometria deformada.



Fonte: Autoria própria, 2022.

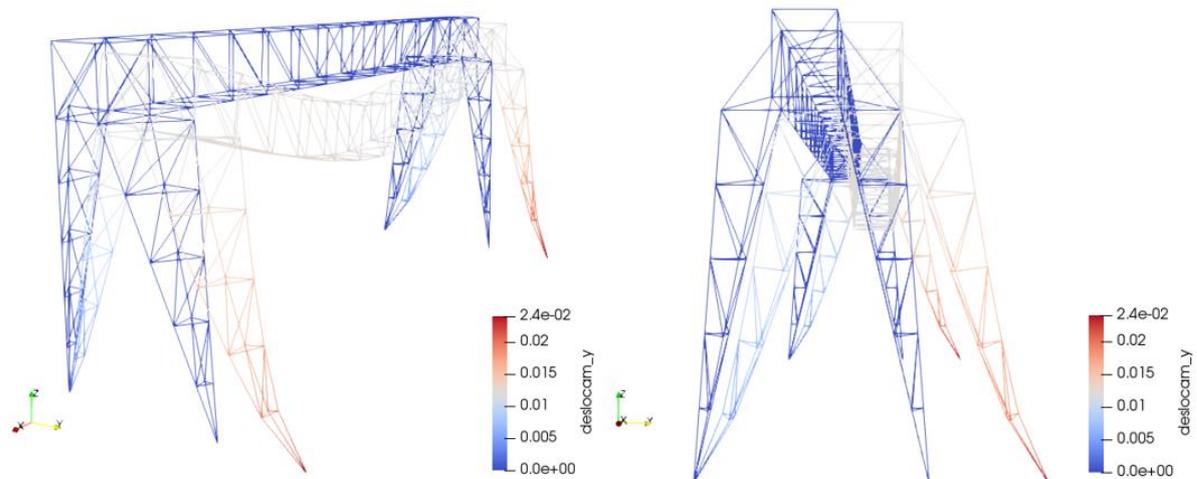
No entanto, o deslocamento no sentido do eixo z não é o máximo deslocamento global, apesar de, inicialmente, se ter essa imaginação devido às cargas serem aplicadas verticalmente para baixo nos nós inferiores da viga, ainda mais a carga da talha, sendo a maior carga da análise.

O máximo deslocamento em termos globais se deu no sentido positivo do eixo y , com um valor de $-2,3844\text{cm}$ no nó 88 (identificação dos nós no Apêndice A). Esse fato se deu devido às condições de contorno. O nó 74 é o único que não permite translação nos três sentidos. Os demais nós, 88, 116 e 102 são livres para se moverem apenas no sentido do eixo y . Logo, ao aplicar as cargas, as bases das colunas se deslocam linearmente naquela direção. Como os nós 116 e 102 são livres no eixo y , esse movimento é dividida por igual para os dois nós. O mesmo não ocorre nas colunas que nascem nos nós 74 e 88, pois essa primeira não desloca no eixo y , sendo essa liberdade permitida para o nó 88. Com isso, não houve o compartilhamento dos deslocamentos como ocorreu nos nós 116 e 102. Sendo assim, o nó 88 foi o que mais deslocou globalmente. A Figura 6.31 apresenta uma perspectiva mais apropriada para visualização dos deslocamentos no eixo y .

Com relação às tensões máximas, foi encontrado uma tensão de compressão de $-78,0839\text{MPa}$ nos elementos 7, 8, 22 e 23, localizados na região central do banzo superior. Observando a Figura 6.30 percebe-se realmente que a parte superior da viga é a mais comprimida. De fato,

pode-se considerar que a viga da ponte rolante é engastada nos pilares e com isso esperou-se a zona superior comprimida e a zona inferior tracionada. A tensão máxima de tração resultante foi +72,9381MPa, nos elementos 197 e 281 localizados nas transversais dos pilares 1 e 3. Como as regiões de apoios são muito solicitadas devido ao alto esforço cortante essas zonas tentem a sofrer mais com tensões de tração. Com isso, justificam-se as maiores tensões de tração estarem localizadas nas regiões próximas das ligações de viga/pilares, sobretudo nas regiões inferiores.

Figura 6.31 – Deformação da ponte rolante.



Fonte: Autoria própria, 2022.

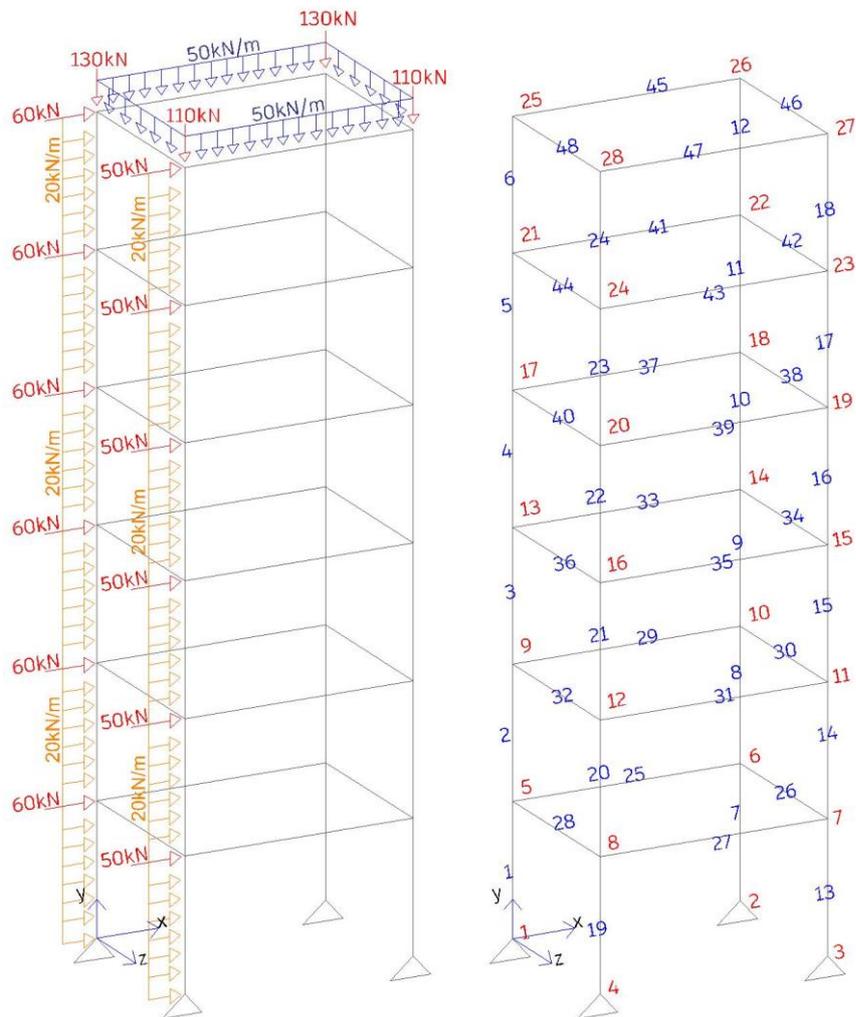
6.6 ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM PÓRTICO ESPACIAL

Por fim, a última estrutura analisada foi um pórtico espacial concebido com perfis W metálicos. Este problema estrutural foi extraído de Bernarski *et al* (2019), em que os autores utilizaram o *Software SAP2000*® para estudar parâmetros de estabilidade global de edificações. A NBR 8800 estabelece os critérios e requisitos básicos, com base nos estados-limites, para projetos de estruturas em aço ou mistas.

O pórtico a ser analisado trata-se de uma estrutura formada por vigas e pilares concebidos por perfis metálicos de aço A-36 com módulo de elasticidade de 200GPa e módulo de cisalhamento de 75GPa. As dimensões da edificação são de 4x5 metros de base por 3 metros de altura por cada pavimento e como o pórtico tem 6 pavimentos, totaliza uma estrutura de 18 metros de altura. A estrutura foi submetida a cargas horizontais em toda a face do plano yz, sendo elas distribuídas de 20kN/m e localizadas nos nós de 60kN e 50kN e cargas verticais também distribuídas de 50kN/m e localizadas de 130kN e 110kN. As cargas verticais aplicadas

no último pavimento são também aplicadas a os demais, com a mesma configuração. O carregamento e a discretização da estrutura estão ilustrados na Figura 6.32.

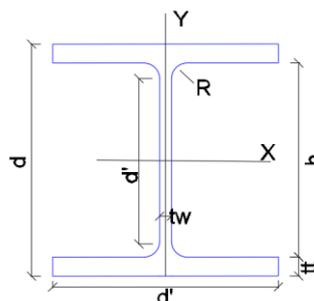
Figura 6.32 – Cargas concentradas e distribuídas e Discretização estrutural.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Existem vários tipos de perfis metálicos. A Figura 6.33 mostra uma seção genérica de um perfil W, com todas os parâmetros que definem a sua geometria.

Figura 6.33 – Seção genérica de um perfil W.



Fonte: Autoria própria, 2022.

No projeto analisado os perfis usados em todos os pilares foi o W250x115,0 e W310x52,0 para todas as vigas. Os valores dos parâmetros são mostrados na Tabela 6.5.

Tabela 6.5 – Parâmetros de bitola.

	W250x115,0	W310x52,0
d	269mm	217mm
bt	259mm	167mm
tw	13,5mm	7,6mm
tt	22,1mm	13,2mm
h	225mm	291mm
d'	201mm	271mm
I_x	18920cm ⁴	11909cm ⁴
I_y	6405cm ⁴	1026cm ⁴

Fonte: Gerdau, 2021.

Vale destacar que, assim como o autor adotou, os perfis dos pilares foram locados na planta baixa seguindo o mesmo sentido dos eixos da Figura 6.33, ou seja, foi considerado a estrutura concebida com a menor inércia frente as cargas horizontais.

6.6.1 Constante torsional

Outro parâmetro muito importante para realizar a análise (e não foi encontrado em tabelas) é a constante torsional. Conforme (GALAMBOS, 1968) a constante torsional é dada pela Equação 6.18.

$$J = \frac{2b_t t_t^3 + (d - t_t)t_w}{3} \quad (6.18)$$

A Equação 6.18 é aplicada para seções de parede fina e abertas sendo um parâmetro associado às tensões máximas cisalhantes do elemento estrutural que, para esse estudo, trata-se dos perfis W250x115,0 e W310x52,0. Sendo assim, consultando os valores dos parâmetros no quadro 6 e substituindo na equação a constante torsional de cada perfil é $J_{W250x115,0} = 206,62cm^2$ e $J_{W310x52,0} = 30,05cm^2$.

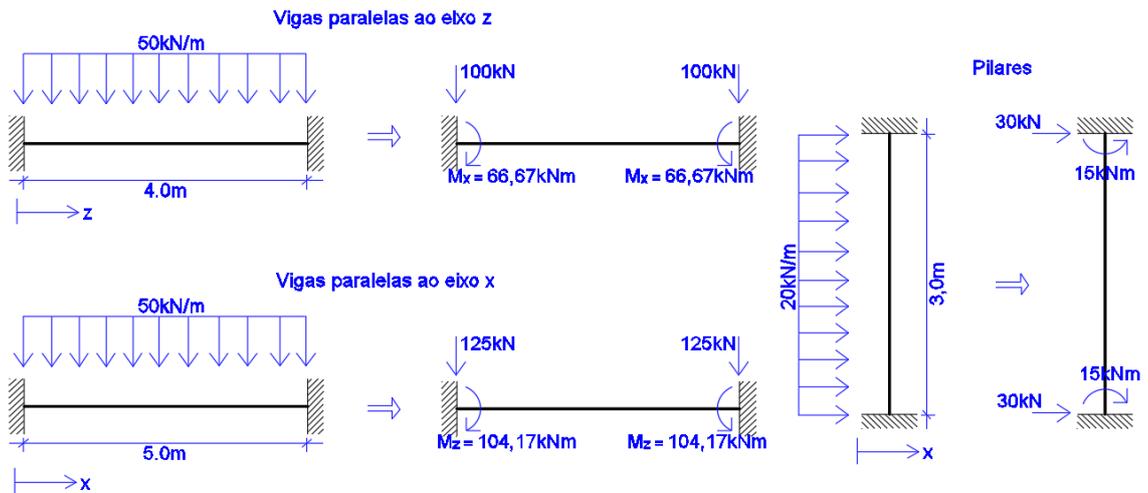
Para a obtenção do vetor de forças nodais equivalentes, consideram-se os elementos com extremidades perfeitamente engastadas. Dessa forma, em vigas bi engastadas, o máximo momento nos engastes é dado pela Equação 6.19 e a reação nos apoios pela Equação 6.20.

$$M_{engaste} = \frac{ql^2}{12} \quad (6.19)$$

$$V_A = V_B = \frac{ql}{2} \quad (6.20)$$

Aplicando essas equações em todos os elementos que possui carga distribuída no pórtico espacial, foi obtido as resultantes de momentos e forças nodais, apresentadas na Figura 6.34.

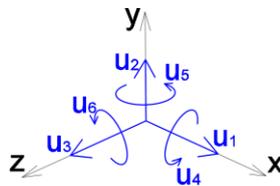
Figura 6.34 – Forças resultantes devido as cargas distribuídas nas vigas e pilares.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Feitos os cálculos anteriores, foi realizado os somatórios de contribuições nodais de cargas e momentos. A convenção de sinais adota é mostrada da Figura 6.35.

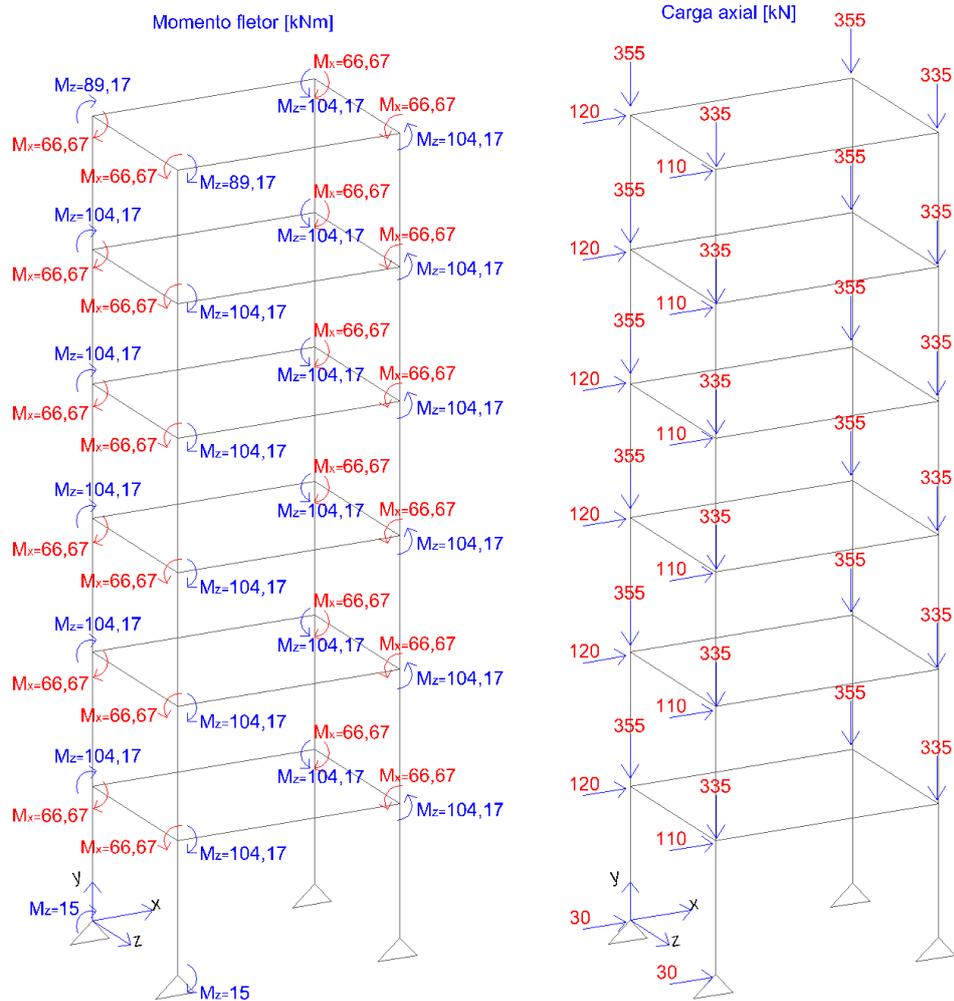
Figura 6.35 – Conversão de sinais.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Portanto, a resultante do somatório de todos os carregamentos e momentos foi concluído conforme Figura 6.36.

Figura 6.36 – Resultante do somatório dos momentos fletores e cargas axiais.



Fonte: Autoria própria, 2022.

Sabe-se que no espaço tridimensional há seis graus de liberdade por nó, sendo três de rotação e três de translação. Através do sistema de Equações 6.21 foi calculado os graus de liberdade, ou seja, as condições de contorno do pórtico espacial.

$$\begin{cases} GL_{translação,x} = n^{\circ}nó \times 6 - 5 \\ GL_{translação,z} = n^{\circ}nó \times 6 - 4 \\ GL_{translação,y} = n^{\circ}nó \times 6 - 3 \\ GL_{rotação,x} = n^{\circ}nó \times 6 - 2 \\ GL_{rotação,y} = n^{\circ}nó \times 6 - 1 \\ GL_{rotação,z} = n^{\circ}nó \times 6 \end{cases} \quad (6.21)$$

O pórtico está fixo na fundação por meio dos nós 1, 2, 3 e 4. Foi considerado os apoios dos quatro nós mencionados anteriormente como apoios de segundo gênero. Logo, os graus de liberdade de translação foram bloqueados. Concluiu-se que os graus de liberdade das condições de contorno são:

$$\begin{aligned}
 GL_{\text{translação},x,nó1} &= 1 \times 6 - 5 = 1 \\
 GL_{\text{translação},z,nó1} &= 1 \times 6 - 4 = 2 \\
 GL_{\text{translação},y,nó1} &= 1 \times 6 - 3 = 3 \\
 GL_{\text{translação},x,nó2} &= 2 \times 6 - 5 = 7 \\
 GL_{\text{translação},z,nó2} &= 2 \times 6 - 4 = 8 \\
 GL_{\text{translação},y,nó2} &= 2 \times 6 - 3 = 9 \\
 GL_{\text{translação},x,nó3} &= 3 \times 6 - 5 = 13 \\
 GL_{\text{translação},z,nó3} &= 3 \times 6 - 4 = 14 \\
 GL_{\text{translação},y,nó3} &= 3 \times 6 - 3 = 15 \\
 GL_{\text{translação},x,nó4} &= 4 \times 6 - 5 = 19 \\
 GL_{\text{translação},z,nó4} &= 4 \times 6 - 4 = 20 \\
 GL_{\text{translação},y,nó4} &= 4 \times 6 - 3 = 21
 \end{aligned}$$

Por fim, foi organizado todos os dados necessários em uma planilha com auxílio do *Software Excel*© e levados ao programa *Frame3D.sce* para a realização das análises.

6.6.2 Resultados

Os resultados dos deslocamentos obtidos no nível de cada pavimento com o programa *Frame3D.sce* são mostrados na Tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Forças e tensões resultantes.

Pavimento	Nó	Deslocamento x (cm)	BERNARSKI <i>et al, 2019</i>
1	5	22,55	22,62
1	8	21,47	
2	9	36,09	36,40
2	12	34,39	
3	13	45,78	46,19
3	16	43,67	
4	17	52,92	53,24
4	20	50,52	
5	21	57,84	57,92
5	24	55,26	
6	25	60,83	60,60
6	28	58,15	

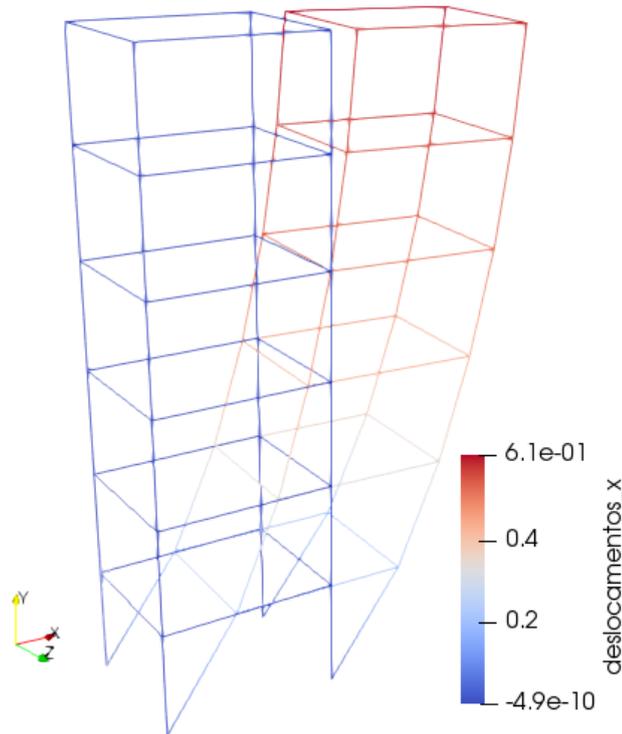
Fonte: Autoria própria, 2022.

O deslocamento máximo é aproximado ao obtido por Bernarski *et al* (2019) – sendo o

do mesmo de 60,60cm e o encontrado nesse estudo de 60,83cm.

Observando os resultados dos deslocamentos observou-se ainda uma pequena torção da estrutura. Este fato pode ser explicado pela desigualdade das cargas nodais horizontais aplicadas. Nos nós com coordenadas fixas em $z=0,00\text{m}$ e $y=0,00\text{m}$ as cargas nodais horizontais foram de 60kN e os nós com coordenadas fixas em $z=4,00\text{m}$ e $x=0,00\text{m}$ com carregamento horizontal de 50kN. A Figura 6.37 mostra a deformada da estrutura.

Figura 6.37- Deslocamento no sentido do eixo x do pórtico espacial.



Fonte: Autoria própria, 2022.

A NBR 8800 estabelece o método da amplificação dos esforços solicitantes, procedimento esse recomendado para a análise elástica aproximada de segunda ordem que pode ser verificado por meio do parâmetro B_2 .

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{R_s} \frac{\Delta_h}{h} \frac{\sum N_{Sd}}{\sum H_{Sd}}} \quad (5.22)$$

Onde:

$\sum N_{Sd}$ somatório da carga gravitacional atuante no pavimento analisado;

R_s coeficiente de ajuste que, para o pórtico espacial analisado aqui, vale 0,85;

Δ_h diferença de deslocamento entre o pavimento atual na qual busca-se o valor de B_2 e inferior ao pavimento;

$\sum H_{sd}$ força cortante no pavimento; e

h altura do pavimento.

Há três classificações de sensibilidade de estrutura ao deslocamento lateral, como é mostrado na Tabela 6.7.

Tabela 6.7 – Relação entre deslocabilidade e parâmetro B_2 .

Deslocamento	B_2
Pequeno	$B_2 \leq 1,1$
Médio	$1,1 < B_2 \leq 1,4$
Grande	$B_2 > 1,4$

Fonte: NBR 8800, 2008.

O resultado do parâmetro B_2 foi dado na Tabela 6.8.

Tabela 6.8 – Cálculo do parâmetro B_2 .

Pavimento	Deslocamento (cm)	Δ_h (cm)	R_s	h (cm)	$\sum N_{sd}$ (kN)	$\sum H_{sd}$	B_2
1	22,55	22,55	0,85	300	6840	1380	1,780347874
2	36,09	13,54	0,85	300	5700	1150	1,357186493
3	45,78	9,69	0,85	300	4560	920	1,232054853
4	52,92	7,14	0,85	300	3420	690	1,161147011
5	57,84	4,92	0,85	300	2280	460	1,105744214
6	60,83	2,99	0,85	300	1140	230	1,061703722
Média							1,283031

Fonte: Autoria própria, 2022.

Dessa forma foi concluído que a edificação se encontra com $1,1 < B_2 \leq 1,4$, configurando médio deslocamento.

O modelo trabalho do pórtico plano é formado apenas por vigas e pilares. A inserção da laje traz uma maior rigidez a estrutura e com isso reduz significativamente os deslocamentos.

Conforme Bernarski *et al* (2019) a análise considerando uma laje de concreto fez diminuir o deslocamento em 58,6%, tornando a estrutura com parâmetro B_2 igual a 1,1 no limite para considera-la como baixo deslocamento e assim, de acordo com a NBR 8800, desnecessário a análise de segunda ordem.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

7.1 CONCLUSÕES GERAIS

Esse trabalho explorou a ferramenta de linguagem de programação *Scilab* disponível gratuitamente com alto poder de confiabilidade desde que construído, os códigos e discretizados as estruturas, de forma que a se aproximar ao máximo da realidade.

Para a análise de barra foi utilizado o programa *Bar1D.Scilab* que por meio deste foi possível identificar as tensões e deformações de uma barra submetida a uma carga distribuída. Foi percebido que, no estudo de barra, o aumento do número de elementos na discretização não influenciou significativamente os resultados de deslocamento. O mesmo não ocorreu para as tensões que precisou de um número maior de elementos para que a resposta numérica convergisse para a solução exata.

Para a análise dos dois tipos de vinculações da viga, foi utilizado o programa *Beam_Scilab*. Foi percebido que o resultado das flechas nas vigas independeu da quantidade de elementos utilizadas. Conforme esperado, a viga bi apoiada apresentou rotação nos apoios devido à categoria de vinculação, no caso, segundo e primeiro gênero no apoio da esquerda e direita, respectivamente. A viga bi engastada, que se caracteriza por possuir apoios de terceiro gênero, não apresentou rotação nas extremidades.

A análise da treliça plana, feita com o programa *Truss2D.scilab*, foi que dependendo do tamanho da treliça e das quantidades de elementos que a forma, o uso de uma ferramenta computacional podem acelerar o processo de estudo e/ou projeto.

Com o programa de pórtico plano *Frame2DTruss.scilab* foi possível analisar a estabilidade global de uma estrutura formada por pórticos planos associados, em que pode obter resultados de deslocabilidade e posteriormente valores de rigidez do pórtico em duas direções de aplicação da carga. Na direção 0° o pórtico apresentou maior deslocamento e esse fato foi associado a disposições dos pilares já que os mesmos foram locados com eixo de maior inércia paralelo ao eixo x adotado no problema.

Por meio do programa *Truss3D.scilab* foi analisado os deslocamentos e tensões em uma ponte rolante extraída dos materiais de aula da UFPR. A estrutura foi analisada pelo autor para consultoria para uma empresa, onde foi realizado o estudo com *Software Abaqus*©.

Visando confrontar os resultados, esse trabalho dispôs-se a refazer a análise da ponte rolante com um programa gratuito, o *Scilab*, e obtido os mesmos resultados de um *Software* comercial, chegando a conclusões de deslocamento máximo na base do pilar 4 (identificação

no Apêndice A) mais próximo ao outro com travamento em todas as direções.

Esse deslocamento foi máximo justamente nesse pilar e não nos demais pelo fato que ele absorveu todo o deslocamento necessário para manter o equilíbrio estático da estrutura, pois o pilar 1, mais próximo e paralelo em relação ao eixo longitudinal da estrutura, foi bloqueado de se deslocar em todas as direções. O mesmo não ocorreu com os pilares 2 e 3, pois ambos podiam se deslocar no eixo y e com isso havendo a distribuição do deslocamento entre eles para manter o equilíbrio estático.

A máxima tensão de compressão, como esperado em uma viga bi apoiada com carregamento no sentido gravitacional, foi na parte superior da mesma em específico no banzo superior e a máxima tração, nas barras transversais que ligam os pilares a viga. Logo, para fins de estudos de estabilidade global, essas regiões são de interesse.

A última estrutura analisada foi de um pórtico espacial e para isso foi utilizado o programa *Frame3D.scilab*. A principal conclusão dessa análise foi a importância de lajes para contribuir com uma maior rigidez global, tornando a edificação com menores deslocamentos. Foi concluído também que os deslocamentos de translação foram significativamente maiores que a rotação. Por isso, como os deslocamentos por translação dominaram no comportamento da estrutura, o mesmo foi crucial para as análises de estabilidade global por meio do parâmetro B_2

Sem dúvidas há a necessidade do uso de programas computacionais para análise de treliça espacial, pois, essa categoria de estrutura, apresenta muitos elementos e nós dispostos no espaço tridimensional ficando inviável a análise apenas analítica. Conclui-se também a importância de uma ferramenta que mostrem os resultados gráficos das estruturas, tanto indeformada como deformada.

A importância da visualização gráfica se dá pela oportunidade de poder observar como a estrutura foi discretizada; se foi feita de forma correta e ao visualiza-la, o pesquisador ou projetista pode perceber inconformidades podendo estar atreladas a erros humanos na etapa de criação da malha.

Pode ser percebido também a necessidade de uma ferramenta que crie de forma automática as malhas dos projetos trabalhados, pois essa etapa é a mais demorada, principalmente quando a estrutura é complexa, como a treliça espacial analisada desse estudo.

Por fim, concluiu-se que, na análise do pórtico espacial, a estima por programas computacionais pode trazer valiosas informações como a presença de rotações e translações nas estruturas que são variáveis de suma importância para o desenvolvimento de projeto estrutural.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros, pode-se destacar:

- O desenvolvimento de um programa que realize a etapa de discretização das estruturas para criar malhas automáticas pode contribuir para o avanço dos estudos na área, pois essa etapa demanda muito trabalho manual atrasando o processo de análise.
- O desenvolvimento de um programa que possa realizar análises com elementos associados, como, por exemplo elemento de grelha com pórtico espacial, de tal forma que seja possível processar uma estrutura de vigas, pilares e lajes de forma conjunta.
- O desenvolvimento de uma interface gráfica para poder visualizar de forma instantânea a etapa de criação do modelo.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Marcelo Lucas de. **Elementos finitos paramétricos implementados em Java**. 2005. Dissertação – Universidade Federal de Minas Gerais, 2005.
- AMORIM, D. L. N. F.; BARBOZA, A. S. R.; BARBIRATO, J. C. C. **Análise do comportamento de sistemas estruturais de pontes em vigas utilizando a técnica de analogia de grelha aplicada ao tabuleiro associada a um modelo de pórtico**. Bueno Aires: Asociación Argentina de Mecánica Computacional, v. 29, p. 133-157, 2010.
- ARAÚJO, Camila Machado de. **Desenvolvimento de um algoritmo para análise estática e dinâmica de treliças planas**. 2015. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2015.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projetos de estruturas de aço e estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro: ABNT, 2008.
- BERNARSKI, Marina Luiza *et al.* **Análise de deslocabilidade de pórticos 3D pelo parâmetro B2**. Palmas: Congresso técnico científico da engenharia e da agronomia, v1, 2019.
- CÉSAR, Manuel Teixeira Braz. **Estudo paramétrico sobre a instabilidade de pórticos metálicos bidimensionais e tridimensionais**. 2004. Dissertação - Universidade do Porto, Porto, 2004.
- CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. **Determinação do módulo de elasticidade longitudinal em estruturas planas de madeira do tipo treliça**. Minerva Pesquisa e Tecnologia, São Paulo, v. 4, n. 2, p. 217-224, jul./dez. 2007.
- DRUZIAN, Bruna Moro. **Rotina computacional para análise de treliças espaciais**. 2015. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.
- ESTRUTURAS.UFPB. **Material para uso do ANSYS ED v9.0** Curitiba, 2017. Disponível em: <http://www.estruturas.ufpr.br/disciplinas/graduacao/metodo-dos-elementos-finitos-aplicados-a-engenharia-de-estruturas/material/> Acesso em: 14 jan. 2022.
- FILHO, W. J. O.; CONCEIÇÃO, R.S. **Análise matricial de pórticos espaciais com implementação computacional**. Maceió: Congresso técnico científico da engenharia e da agronomia, 2018.

FERREIRA, A. J. M. **Matlab codes for finite element analysis**. Porto, Editora Springer. 2009. p. 81.

FILHO, Daniel Torres. **Estruturas de concreto armado**, 1ª edição. Cajazeiras, Editora do autor, 2021. p 103.

FONTENELLE, André. **Metodologia científica: Como definir os tipos de pesquisa do seu TCC?** Fortaleza, 201? Disponível em: <https://andrefontenelle.com.br/tipos-de-pesquisa/>. Acesso em: 18 jan. 2022.

FONTES, Fernando Fernandes. **Análise estrutural de elementos lineares segundo a NBR 6118:2003**. 2005. Dissertação - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

GARCIA, Vinícius Augusto Fonseca. **Análise de Treliça Espacial Constituída de Material Hiperelástico**. 2018. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018.

GALAMBOS. Theodore. V, **Structural Members and Frames**. New Jersey, Editora: Dover Publications, 1968. p. 36

KATTAN, Peter. L. **Matlab guide to finite elements**. 2ª Edição. Berlin: Editora Springer, 2008.

LEET, K. M.; UANG, C. M.; GILBERT, A. M., **Fundamentos da análise estrutural**, 3ª edição. Porto Alegre, AMGH Editora Ltda, 2010. p 127.

LOGAN, Daryl L. **A first course in the finite element method**. 6ª Edição. Boston: Editora Cengage Learning, 2017.

MARTHA, Luiz Fernando. **Métodos básicos da análise de estruturas**, 1ª edição. Rio de Janeiro, Editora Gen Ltc, 2010. p 13.

MARTINI, Renata Jardim. **Estrutura de cobertura metálica em malha treliçada espacial**. 2014. Dissertação - Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2014.

MOLITERNO. Antônio., **Caderno de projetos de telhados em estruturas de madeira**, 2ª edição. Editora Edgard Blücher Ltda, 1981. p 235.

MORESCO, Rafael Luís. **Rotina computacional para análise de treliças planas considerando deslocamentos de apoio e fundações flexíveis**. 2015. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

NASCIMENTO, Fernando Paulo de. **Classificação da Pesquisa. Natureza, método ou abordagem metodológica, objetivos e procedimentos**. Brasília, 2016. Disponível em: <http://franciscopaulo.com.br/arquivos/Classifica%C3%A7%C3%A3o%20da%20Pesquisa.pdf>. Acesso em: 18 jan. 2022.

NOGUEIRA, Luís Gustavo Oliveira. **Ferramenta em ambiente Excel para análise estrutural de treliças espaciais pelo método dos elementos finitos**. 2017. Trabalho de

conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Federal Rural do Semi Árido, Mossoró, 2017.

PAROLIN, Betina. **Projeto estrutural de uma treliça de madeira maciça de acordo com diferentes sistemas construtivos** 2017. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal Do Paraná, Curitiba, 2017.

QUEIROZ, Paulo César de Oliveira. **Análise estática e dinâmica de estruturas reticuladas: ambiente de simulação em Java**. 2010. Dissertação – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2010.

ROS, Arquitetura e engenharia. **Estruturas espaciais**. Aracaju 2016. Disponível em: <http://www.rosengenharia.com.br/site/estruturas-espaciais-93>. Acesso em: 02 mar. 2022.

RIBEIRO, L. S.; INOUE, H. Análise linear elástica de pórticos espaciais. In: XI Simpósio de Mecânica Computacional, 5., 2014, Juiz de Fora. **Anais [...]**. Juiz de Fora, 2014.

SILVA, Welington Vital da. **Estudo experimental, estático e dinâmico, analítico e numérico de estruturas tridimensionais em aço com correções na ligação típica estampada**. 2020. Tese - Universidade de Brasília, Brasília, 2020.

SOUZA, Alex Sander Clementino de. **Análise teórica e experimental de treliças espaciais**. 2003. Tese - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

SPCOM, Construções metálicas. **Cervejaria Petrópolis SA. Petrópolis**, 2018. Disponível em: <https://spcom.eng.br/portfolios/cervejaria-petropolis-sa-2/> Acesso em: 06 mar. 2022

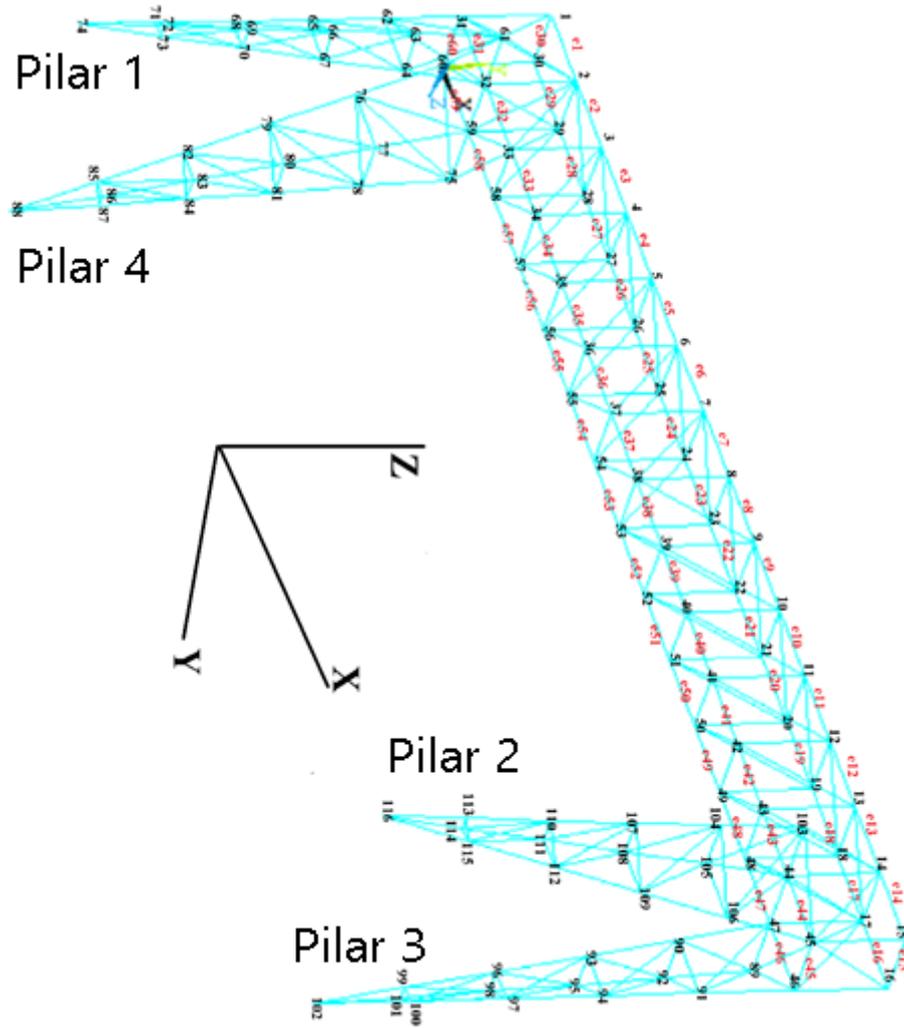
SOUZA, Alex Sander Clementino de. **Contribuição ao estudo das estruturas metálicas espaciais**. 1998. Dissertação – Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1998.

SUZUKI, Marcos Seiti. **Análise estrutural de treliças espaciais no software Excel® utilizando o método dos elementos finitos**. 2012. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Guaratinguetá, 2012.

VÁZQUEZ, M.; LÓPES, E. **El metodo de los elementos, finitos aplicados al analisis estructural**. Madrid: Editorial Noela, 2001.

APÊNDICE A – NUMERAÇÃO DOS NÓS DA PONTE ROLANTE

Figura 7.1 – Discretização da ponte rolante.



Fonte: Autoria própria, 2022.