INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NILMARA FARIAS DE ARAÚJO

CONSTRUINDO A GEOMETRIA

CAJAZEIRAS
2022

NILMARA FARIAS DE ARAÚJO

CONSTRUINDO A GEOMETRIA

Monografia apresentada junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática**, do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciada em Matemática**.

Orientador(a): Prof. Me. José Doval Nunes Martins.

CAJAZEIRAS

2022

NILMARA FARIAS DE ARAÚJO

CONSTRUINDO A GEOMETRIA

Monografia apresentada junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciada em Matemática**.

Data de aprovação: 13/04/2022

Banca Examinadora:

José Doval Nunes Martins

Prof. Me. José Doval Nunes Martins
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Stanley Borges de Oliveira

Prof. Me. Stanley Borges de Oliveira
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

RobertaFVOliveira

Profª. Esp. Roberta Flávia Vasconcelos de Queiroz Lira
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Suellen Conceição Ribeiro CRB-2218

A663c Araújo, Nilmara Farias de

Construindo a geometria / Nilmara Farias de Araújo. – Cajazeiras/Pb: Ifpb, 2022.

72f.:il.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba-IFPB, Campus Cajazeiras. Cajazeiras, 2022.
Orientador(a): Prof. Me. José Doval Nunes Martins.

1.Construção geométrica. 2.Geometria. 3. Matemática. 4. Desenho.

I. Araújo, Nilmara Farias de. II. Titulo.

CDU: 514.1 A663c

Este trabalho é dedicado ao meu avô Severino Correia de Farias, que neste ano completa um século de vida e a minha grande amiga Flaviana Vieira da Silva (in memorian) que me ensinou a apreciar a vida e enxergar a felicidade que a simplicidade carrega.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela permissão de que tudo isso fosse possível.

Aos meus pais, pelo apoio, confiança e suporte.

Aos meus irmãos, pela amizade, pelo cuidado, conselhos e motivação que sempre me é assegurado em cada nova etapa da minha vida.

Aos meus colegas de classe e de curso, que tornaram até mesmo os dias mais difíceis em momentos leves.

Aos professores e demais servidores do IFPB *campus* Cajazeiras, pelo amor a profissão e pela humanidade.

Ao meu prezado professor e orientador José Doval Nunes Martins, a quem tanto admiro pela didática, inteligência e profissionalismo.

Aos meus amigos e pessoas tão importantes na minha vida: Alisson, Erica, Felipe, Gabriel, José Neto, Henrique, Igor, Izabel, Kattielly, Lara, Matheus, Rafael e Thiago, por me manterem com a cabeça no lugar, pelas conversas e risadas, pela paciência que tiveram quando nem eu mesma tive e por me darem forças para chegar até aqui. Vocês fazem parte disso.

"É preciso força pra sonhar e perceber que a estrada vai além do que se vê".

Los Hermanos, Além do que se vê

RESUMO

A Geometria Euclidiana a qual hoje temos acesso foi desenvolvida inicialmente com o uso de duas ferramentas básicas: uma régua sem escalas e um compasso. Com apenas esses dois instrumentos, Euclides de Alexandria, tantas vezes referido como o "Pai da Geometria", realizou as primeiras construções gráficas, descobrindo relações importantes entre os elementos geométricos e realizando a demonstração de famosas proposições da geometria, o que atraiu os olhares de grandes matemáticos da época, contribuindo para o crescimento da área e levando ao reconhecimento do desenho geométrico como ciência, sendo então esses, os fatores responsáveis por mudar o seu rumo na matemática. Dada a relevância do desenho para a geometria, o trabalho aqui apresentado consiste em uma reunião de informações a cunho bibliográfico, que busca, partindo da compreensão teórica até chegar a prática do desenho, resgatar o uso de tais ferramentas para realizar construções geométricas fundamentais, com o intuito de construir assim um conhecimento geométrico por meio da visualização de conceitos que antes seriam somente abstratos.

Palavras-chave: Geometria. Construção Geométrica. Matemática. Desenho.

ABSTRACT

The Euclidean Geometry we have access to today was initially developed with the use of two basic tools: a ruler without scales and a compass. With only these two tools, Euclid of Alexandria, often referred to as the "Father of Geometry", made the first graphical constructions, discovering important relationships between geometric elements and demonstrating famous propositions of geometry, which attracted the eyes of great mathematicians of the time, contributing to the growth of the area and leading to the recognition of geometric drawing as a science, these being the factors responsible for changing its course in mathematics. Given the relevance of drawing for geometry, the work presented here consists of a gathering of bibliographic information, which seeks, from the theoretical understanding to the practice of drawing, to rescue the use of such tools to perform fundamental geometric constructions, in order to build geometric knowledge through the visualization of concepts that before would only be abstract.

Keywords: Geometry; Geometry Construction; Math; Design.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
LAL	Lado Ângulo Lado
LLL	Lado Lado Lado
ALA	Ângulo Lado Ângulo

LISTA DE SÍMBOLOS

$A, B, C...$	Ponto
$a, b, c...$	Reta
$\overline{AB}, \overline{CD}...$	Segmento de reta
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}...$	Semirreta
$\angle$	Ângulo
$\in$	Pertence
$\equiv$	Congruência
$\neq$	Diferente
$\parallel$	Paralelismo
$\triangle$	Triângulo
$\perp$	Perpendicularidade
$\cap$	Intersecção
$\sim$	Semelhança
β	Letra grega Beta
α	Letra grega Alpha
λ	Letra grega Lambda

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O desenho é, em sua definição formal, uma representação feita sobre uma superfície, por meios gráficos, com instrumentos apropriados, informalmente é definido como "manifestação da arte", ou como uma linguagem universal, natural dos seres humanos. Geométrico, relativo à geometria, é a parte da matemática cujo objeto é o estudo do espaço e das figuras que podem ocupá-lo.

> O objeto do Desenho Geométrico é, portanto, a obtenção de uma forma determinada, geométrica e precisa, obtida de forma natural, respeitando os preceitos essenciais de uma construção, quais sejam, instrumental bem cuidado, traços firmes e determinados, precisão na construção e observância às normas técnicas (VILLA, 2012, p. 17).

Segundo Costa (2016), o surgimento do desenho, que o autor considera como uma linguagem universal, pelo que se tem conhecimento, se deu basicamente em comum com a humanidade, sendo utilizado como o meio de comunicação antecedente à escrita. A propósito, é por meio das pinturas rupestres, inscritas em paredes de cavernas e pedras, que é possível compreender um pouco mais sobre os costumes, práticas culturais entre outras características importantes da nossa própria história.

> Nesse direcionamento, no decorrer da história, a humanidade também utilizou o Desenho Geométrico por meio das formas e dos traçados que possuíam uma melhor definição visual para que pudessem se comunicar. Nesse sentido, o desenho pode ser considerado como uma forma de linguagem não verbal baseada na utilização de imagens que são representações visuais dos fenômenos que ocorrem cotidianamente (ROSA; OREY, 2009 apud COSTA; ROSA, 2015, p. 58).

Além de ser utilizado como meio de comunicação, o desenho também teve grande destaque na resolução de problemas cotidianos. Antes mesmo de ser denominada como Geometria pelos gregos, os egípcios adquiriam conhecimento geométrico com a divisão de terras em lotes consequente da necessidade de medição dos terrenos.

Entretanto, foram os gregos que, segundo Costa e Rosa (2015, p. 59), "enfatizaram a utilização ampla do raciocínio lógico por meio do qual estabeleceram a maioria das conclusões obtidas na resolução dos problemas geométricos". Nesse período, para resolver problemas matemáticos, muitas vezes eram utilizados apenas um compasso e uma régua sem escalas como sendo os instrumentos necessários para a construção dos elementos geométricos conhecidos na época, os quais eram utilizados como base para a resolução.

Segundo Fontes (Idem), foi utilizando tais ferramentas, para construções geométricas, que Euclides realizou as primeiras construções gráficas, descobrindo relações importantes entre os elementos geométricos e realizando a demonstração de teoremas famosos da geometria, que contribuíram para seu crescimento e reconhecimento dentro da matemática atraindo olhares de grandes matemáticos da época.

> [...] para a realização dessas demonstrações, as construções foram embasadas nas propriedades e relações das figuras geométricas, que necessitam do Desenho Geométrico para concretizá-las e torná-las visíveis (JORGE, 1998), tornando perceptível a conexão entre as construções geométricas, a Geometria e a Álgebra (COSTA; ROSA, p. 61).

Dando um salto na linha do tempo, na segunda metade do século XIX o Desenho Geométrico foi considerado como ciência, abrindo novas perspectivas para seu ensino em proporção mundial, inclusive, nesse mesmo período começou a ser difundido no Brasil, porém, somente em algumas escolas, onde era baseado na construção com compasso e régua e em desenhos por observação. Entretanto, de acordo com Castro (2018), somente em 1931, após reformas na educação, o desenho geométrico tornou-se então oficial no currículo das escolas brasileiras, sendo dividido em quatro modalidades: desenho de observação, desenho geométrico, desenho decorativo e desenho convencional. Todavia, com o passar dos anos o ensino do Desenho Geométrico acabou enfraquecido, devido a leis e diretrizes que levaram a ser encarada como uma disciplina optativa, sendo em seguida, excluída da grade curricular, o que acarretou no abandono da mesma pelas matrizes curriculares das escolas do país, segundo o autor.

Na mesma década, em 1990, o Desenho volta a receber destaque, sendo citado nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática. De acordo com os PCN os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar o mundo em que vive. Já no ensino médio tem-se que:

> Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas (BRASIL, 2006, p. 123).

O PCN também explicita que com o trabalho de espaço e forma é esperado que o professor de Matemática introduza algumas construções geométricas com régua e compasso como meio de aplicar e visualizar as propriedades das figuras, entre outras relações que podem ser abordadas por meio de tais construções.

> Fazendo uma relação direta do desenho geométrico com o estudo da geometria, Castrucci [1981] aponta a necessidade do estudo do desenho e da geometria acontecerem em paralelo, quando as regras e teoremas dados na geometria irão ser postos em prática no desenho. Conceitos como pontos notáveis, tipos de triângulos, retas paralelas, relação entre circunferência e ângulo são mais fáceis de se visualizar a partir da prática da construção (CASTRO, 2018, p. 84).

Visto a importância da geometria e representação geométrica para a educação e desenvolvimento matemático do aluno, estando inclusive presente recorrentemente em provas olímpicas, tem-se como consequência o dever de promover um ensino completo e eficaz, onde o aluno consiga aprender os conceitos geométricos e não apenas decorar fórmulas sem compreendê-las de fato, para isso, faz-se necessário que o discente seja capaz de construir o seu próprio conhecimento, partindo do esforço e interesse próprio.

Segundo Villa (2012, p. 16) “a prática das construções geométricas ilustra, explica e motiva o estudante na aprendizagem dos abstratos conceitos matemáticos”. De fato, as construções geométricas surgem nesse contexto com o intuito de minimizar os porquês que venham a surgir durante esse percurso e de facilitar o aprendizado da geometria por meio da construção dos seus conceitos principais, com isso, o aluno é capaz de empregá-los para auxiliar no processo de resolução de problemas de geometria, onde desenho geométrico se faz essencial.

> [...] as relações do Desenho Geométrico e a Matemática são tão intrínsecas que, na maioria dos casos, é impossível entender as leis matemáticas sem os recursos gráficos oferecidos pelo Desenho Geométrico. Sem ele seria impossível aprender os conceitos, as definições e as demonstrações indispensáveis ao entendimento das relações geométricas (RAYMUNDO, 2010 apud SOUZA; VASCONCELOS; FERNANDES, 2014, p. 02).

Com o desenho geométrico é possível desenvolver o conhecimento geométrico construindo-o, da forma literal, onde por meio da construção geométrica, se estabelece a representação de conceitos que antes seriam puramente abstratos, contribuindo para o ensino e aprendizagem da geometria e auxiliando na resolução de problemas geométricos.

Em uma pesquisa que pretendia explicar porque não conseguia recuperar o ensino da geometria na educação básica, realizada durante a sua tese de doutorado, Gazire (2000 apud VILLA, 2012) concluiu que um dos fatores destacáveis que impedem tal recuperação é a repetição que ocorre de um ciclo vicioso, baseado no fato de que um indivíduo que não aprendeu geometria, não é capaz de ensiná-la.

Apesar de Geometria e Desenho Geométrico andarem de mão dadas, muitos professores não sabem como são feitas as construções geométricas e assim, não conseguem transmitir esse conhecimento para os seus alunos, visto que o desenho geométrico não é mais tido como disciplina obrigatória na educação básica e portanto não é levado a sala de aula com a seriedade e interesse necessário.

A iniciativa deste trabalho se dá a partir da percepção de uma deficiência no ensino e aprendizagem da geometria que parte da dificuldade de compreensão e visualização dos conceitos geométricos. Assim, neste trabalho, pretende-se, como principal objetivo, resgatar a geometria da forma como era explorada pelos gregos (sendo construída a mão), com intuito de construir também um conhecimento geométrico bem estruturado, que venha a melhorar o desempenho do indivíduo (professor ou aluno) na área em questão. Para isso, os objetivos específicos que devem ser alcançados, são: entender o que é o desenho geométrico e o importante papel que possui para a Geometria; embasar-se da teoria que rege o processo de construção do conhecimento geométrico; compreender conceitos e propriedades fundamentais da geometria por meio das construções geométricas apresentadas.

O procedimento metodológico adotado para a produção deste trabalho partiu de uma pesquisa de caráter exploratório e bibliográfico, dada pela reunião de informações selecionadas que abordam e discorrem sobre geometria, desenho geométrico e construções geométricas, onde tais informações estão organizadas em uma sequência lógica que visa atingir os objetivos indicados.

Portanto, iniciando com a introdução ao tema (Capítulo 1), o trabalho apresenta, na sequência, o Capítulo 2, composto pela fundamentação teórica que rege todo o desenvolvimento; o Capítulo 3, que contém noções básicas de geometria plana, tais como conceitos imprescindíveis e algumas propriedades que os cercam; Capítulo 4, que apresenta, de forma detalhada, as construções fundamentais da geometria plana, assim como as ferramentas necessárias à tal; e o Capítulo 5, dedicado à apresentação de alguns problemas que exigem da técnica e conhecimento vistos nos capítulos anteriores e suas devidas soluções.

2 O QUE DIZEM OS TEÓRICOS

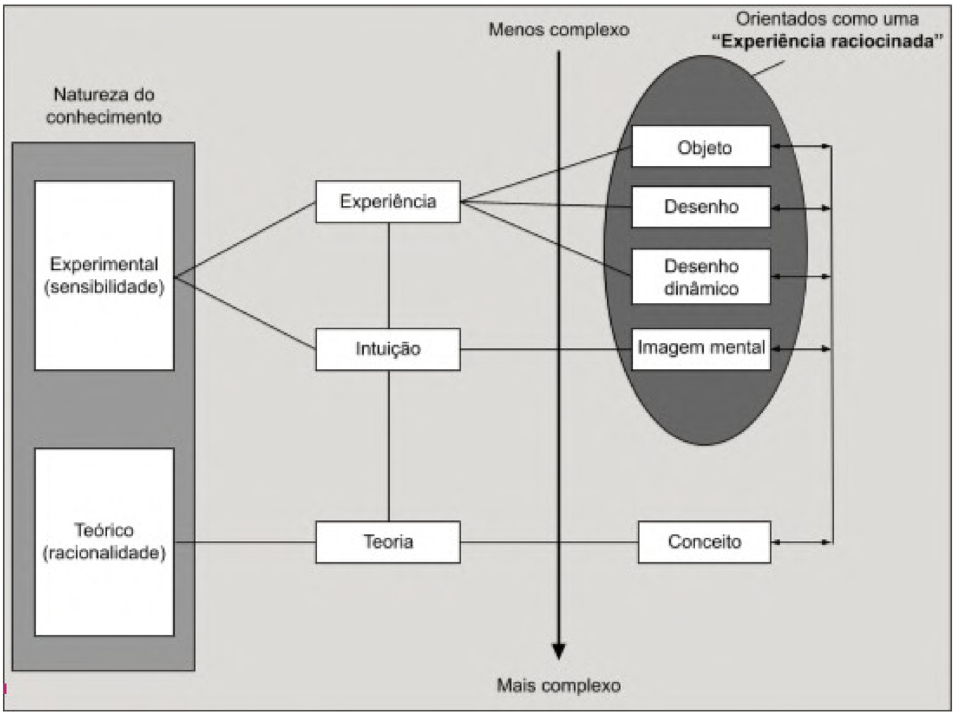
O desenho se faz presente na geometria como uma ferramenta essencial para a sua compreensão na construção de conceitos, explanação do conteúdo, demonstração de propriedades e até mesmo solução de problemas, pontos que facilitam o processo de aprendizagem geométrica de acordo com Souza (2014), pois, segundo o autor, o desenho pode ser utilizado como instrumento de auxílio que leva o aluno a conhecer de maneira objetiva os conceitos, uma vez que a visualização permite a compreensão do abstrato que a matemática carrega.

Todavia, o uso de materiais "concreto-pedagógicos", como a exemplo do desenho, segundo Jardinetti (1997) comumente aparecem na matemática como uma "solução mágica" capaz de superar todas as dificuldades e promover o ensino perfeito dos conceitos matemáticos, entretanto, segundo o autor, o que ocorre de fato na maioria dos casos, é o uso inadequado do material para o objetivo que se pretende atingir. Assim, Jardinetti enfatiza que por mais que seja engenhosa a ideia da produção e utilização desses materiais, se sua aplicação não estiver infundida da lógica e teoria que transpõem os conceitos, pode-se considerá-lo improdutivo, pois é nesse fato que reside a sua ineficácia.

Tratando do conhecimento geométrico, devemos primeiramente investigar como pode ser construído. De acordo com Pais (2006, apud COSTA, 2016) a natureza do conhecimento geométrico pode ser experimental ou teórico, como pode ser observado na Figura 2.1. Na experimental o conhecimento pode ser adquirido pela sensibilidade, seja a partir das experiências do indivíduo, que faz uso de objetos e desenhos para verificar proposições geométricas, ou por meio da intuição que o autor define como "uma forma de conhecimento que não requer uma dedução racional, pois está no espírito da pessoa", um conhecimento que foi acumulado pelo indivíduo, sendo associado também às imagens mentais.

Se eu pedir para que você, leitor, faça com um lápis, um ponto em uma folha de papel, é provável que você faça o movimento de toque da ponta do objeto no papel, deixando uma marca aproximada a forma de um círculo que pode variar de tamanho dependendo da ponta do lápis usado, a natureza desse conhecimento é intuitivo, tendo em vista que ponto é uma noção primitiva e portanto não possui definição formal. Esse tipo de representação é explicada por Costa (2016, p. 31) como sendo uma representação prototípica, onde "de tanto representar um ente geométrico da mesma forma, cria-se uma associação representação-conceito que é errônea", pois como exemplificado, a representação nem sempre depende do conceito.

Figura 2.1 – Diagrama interpretativo



Fonte: Costa (2016, p. 42).

Costa enfatiza então a importância de esclarecer a relação entre conceito e representação, evidenciando a ideia de que a representação do conceito não é o conceito em si, onde usa como exemplo a representação das noções primitivas, que não são conceitos propriamente ditos.

Desenhos geométricos, por sua vez, tratam-se de representações de conceitos geométricos e não do próprio conceito, segundo o autor, todavia, é compreensível que o conceito pode ser adquirido como consequência, com a construção do pensamento geométrico.

> O conhecimento geométrico que se espera que os alunos construam é, portanto, complexo, denso e contextualizado, permitindo uma leitura de mundo e de situações. Para que isso aconteça, é fundamental a mudança de postura: deve-se sair da concepção de um conhecimento transmitido para a de um conhecimento construído (COSTA, 2016, p. 26).

É imprescindível a consciência de que a construção geométrica por si não trará resultados significativos dentro da abordagem proposta, segundo Pais (2006 apud COSTA, 2016, p. 39), "é necessário a intervenção pedagógica do professor como responsável por transformar o processo numa experiência raciocinada". A postura do professor deve instigar, esclarecer, manipular situações que permita com que o aluno busque soluções e construa o conhecimento por meio da teoria, esse será, segundo o autor, o fator responsável pela eficácia do processo educativo, não apenas o conjunto de instrumentos usados.

Ainda segundo Costa, quando a intenção é a construção de um conhecimento geométrico deve-se destacar a importância de discutir a construção e não só fazê-la. Nas Construções Geométricas, não podemos nos basear na "aparência visual" dos objetos, já que são meras representações do conceito, "quando fazemos uma construção, para afirmar algo sobre ela, é necessário justificar, provar ou demonstrar que as propriedades que estamos afirmando são verdadeiras matematicamente" (COSTA, 2016, p. 53), para isso se faz necessário a teoria com o fim de convencer ou verificar a proposição.

Vale ressaltar que neste trabalho será realizado a construção de conceitos fundamentais da geometria, com o intuito de facilitar a compreensão das propriedades por meio da visualização da representação do conceito acompanhada da sua justificativa, que aqui não deve ser encarada como a demonstração formal dos conceitos e propriedades apresentados. Ainda assim, o processo de construção geométrica deve contribuir para a construção do conhecimento geométrico, tanto o conceito como a sua representação podem ser facilmente aplicados como meio facilitador na abordagem da resolução de problemas.

De acordo com o autor José Carlos Putnoki (1993, p. 9), "o Desenho Geométrico é classificado como desenho resolutivo, pois através dele, determinam-se respostas precisas para problemas de natureza prática ou teórica", o que viabiliza sua aplicação na perspectiva da resolução de problemas.

Zuin (2001 apud VILLA, 2012) reforça a importância da construção geométrica para a abordagem da resolução de problemas ao citar que a mesma, como tendência tão presente na matemática atualmente, seria muito beneficiada com os conhecimentos básicos de Geometria Euclidiana que é proporcionado por meio das construções geométricas.

Segundo Tortora e Pirola (2016), quando nos deparamos com problemas relacionados à matemática, precisamos, de antemão, possuir um rol de conhecimentos prévios que virão a nos auxiliar, inclusive ao fazer uso de técnicas e procedimentos que levarão a uma solução bem sucedida.

No que diz respeito às principais características dos problemas geométricos, Costa (2016) alega que exploram, na sua apresentação, propriedades e conceitos da geometria, sua relação com a linguagem geométrica, corrente e visual, além do pensamento argumentativo, logo, esses constituem alguns pontos básicos que devem ser desenvolvidos para se obter êxito na prática da resolução de problemas que abordam a geometria.

3 NOÇÕES BÁSICAS DE GEOMETRIA PLANA

Para que seja possível realizar as construções, é necessário o conhecimento acerca de conceitos básicos de geometria. Assim, neste capítulo, vamos compreender esses conceitos sob a perspectiva da matemática, tendo como principais referências os livros: Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria plana, escrito por José Nicolau Pompeo e Osvaldo Dolce; Geometria: Coleção PROFMAT, do autor Antonio C. M. Neto, bem como sob a perspectiva do desenho técnico, com o intuito de facilitar o processo prático da construção.

3.1 PONTO

Na matemática, o ponto é tido como uma noção primitiva, ou seja, não possui uma definição formal, apenas intuitiva, decorrente da experiência e observação. No Desenho Geométrico, o ponto é a interseção entre duas linhas, sejam elas retas ou curvas, não possui dimensões de largura e comprimento e é representado por uma letra latina maiúscula, como notação adotada. (ex: A, B, C, D. . .)

Figura 3.1 – Ponto

Fonte: Autor.

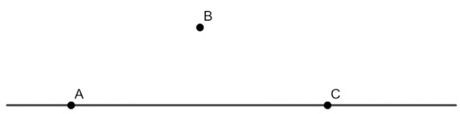
3.1.1 Pontos colineares

Três pontos ou mais podem ser colineares, quando são pontos que pertencem a uma mesma reta, ou não colineares, quando não pertencem a uma mesma reta. Conforme pode-se notar nas figuras abaixo:

Figura 3.2 – Pontos colineares

Fonte: Autor.

Figura 3.3 – Pontos não colineares



Fonte: Autor.

Nota: Observe que dois pontos sempre serão colineares, pois nesse caso sempre será possível traçar uma reta que contenha ambos.

Os conceitos matemáticos devem ser levados em consideração no desenho geométrico, pois interferem diretamente no processo de construção, é de extrema importância interpretar corretamente as instruções da construção a fim de minimizar eventuais erros. Um desses conceitos é a noção primitiva de “estar entre”. Como exemplo da sua utilidade, atente-se a instrução seguinte:

Dados os pontos A e C, considere um ponto B entre eles.

A partir da instrução acima podemos extrair algumas informações importantes para designar o ponto B no desenho. Note que:

(i) Se o ponto B está entre os pontos A e C, então os três são colineares.

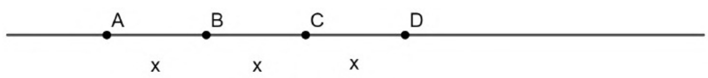
(ii) Se o B está entre A e C, então temos que os três pontos são distintos dois a dois e não coincidentes.

Além disso, a forma em que é expressa a afirmação nos induz à noção de ordem entre os pontos, onde no desenho geométrico, o ponto A seria o primeiro definido, seguido do ponto C e por fim o ponto B, entre A e C (como mostra a Figura 3.2).

3.1.2 Pontos equidistantes

Três ou mais pontos são considerados equidistantes se a distância entre eles, quando tomados dois a dois, é constante. Em uma reta, pontos equidistantes são aqueles que distam da mesma medida entre ele e o seu antecessor, assim como entre ele e seu sucessor. Na figura, os pontos A, B, C e D são equidistantes, pois a medida dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são iguais.

Figura 3.4 – Pontos Equidistantes



Fonte: Autor.

3.2 RETA

Para a matemática, reta também é um conceito primitivo, podendo ser associada a postulados importantes como:

(i) Por um ponto podemos traçar infinitas retas.

(ii) Postulado da determinação: Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.

(iii) Postulado da existência: Em uma reta, assim como fora dela, há infinitos pontos.

No desenho, a reta não pode ser confundida com o traço de uma linha, por exemplo, pois vale ressaltar que a reta não deve possuir ondulações ou interrupções no traço, portanto não é recomendado que seja feita a mão livre e sim com auxílio da régua. A notação adotada para a reta é a de uma letra minúscula do alfabeto. (ex: a, b, c, d, e...)

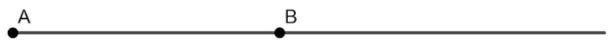
Figura 3.5 – Reta

Fonte: Autor.

3.2.1 Semirreta

Semirreta é um trecho da reta delimitado por um dos seus pontos como seu começo ou fim, sendo a outra extremidade infinita. No desenho, é representada como o traço realizado pelo deslocamento de um ponto (origem) em um único sentido, assim a outra extremidade pode ser representada com uma pequena seta ou simplesmente sem marco algum, indicando sua extensão infinita. A notação da semirreta de origem A, que passa pelo ponto B é expressa por $\overrightarrow{AB}$.

Figura 3.6 – Semirreta



Fonte: Autor.

3.2.2 Segmento de reta

Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta. No desenho, é o traço realizado na união de dois pontos, ou seja, o trecho compreendido entre eles. A notação de um segmento de reta delimitado pelos pontos A e B é indicado por $\overline{AB}$.

Figura 3.7 – Segmento de reta

Fonte: Autor.

Dados dois segmentos de reta, temos que:

(i) Quando ambos são trechos de uma mesma reta são chamados de segmentos colineares, podendo ou não possuir pontos em comum.

(ii) Quando o único ponto em comum entre dois segmentos colineares é uma extremidade de ambos, os segmentos são denominados de adjacentes.

(iii) Quando a extremidade de um coincide com a extremidade do outro mas os segmentos não são colineares, são chamados de segmentos consecutivos.

3.2.3 Medida de um segmento

A medida de um segmento (não nulo), indicada por $\overline{\mathrm{AB}}$, m($\overline{\mathrm{AB}}$) ou simplesmente AB, é um número real positivo associado ao segmento de forma tal que:

(i) Segmentos **congruentes** têm medidas **iguais** e, reciprocamente, segmentos que têm medidas **iguais** são **congruentes**.

$$\overline{\mathrm{AB}} \equiv \overline{\mathrm{CD}} \Leftrightarrow m(\overline{\mathrm{AB}}) = m(\overline{\mathrm{CD}})$$

(ii) Se um segmento é maior que outro, sua medida é maior que a deste outro.

$$\overline{\mathrm{AB}} > \overline{\mathrm{CD}} \Leftrightarrow m(\overline{\mathrm{AB}}) > m(\overline{\mathrm{CD}})$$

(iii) A um **segmento soma** está associada uma medida que é a soma das medidas dos segmentos parcelas.

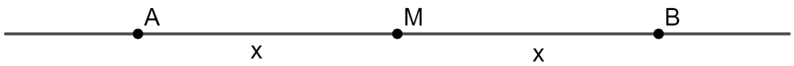
$$\overline{\mathrm{RS}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{CD}} \Leftrightarrow m(\overline{\mathrm{RS}}) = m(\overline{\mathrm{AB}}) + m(\overline{\mathrm{CD}})$$

À medida de um segmento, dá-se também o nome de **comprimento** do segmento.

3.2.4 Ponto médio de um segmento

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, existe um único ponto M entre A e B, tal que a distância entre A e M é igual a distância entre M e B, ou seja, $\overline{AM} \equiv \overline{MB} = x$. À esse ponto é designado o nome de ponto médio do segmento, nesse caso, M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Figura 3.8 – Ponto Médio de um Segmento



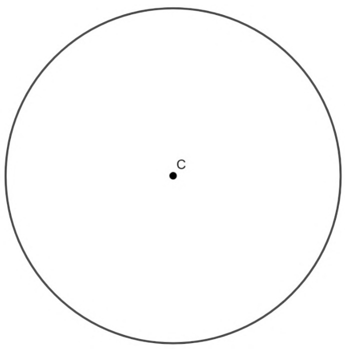
Fonte: Autor.

3.3 CÍRCULO

Um círculo é definido como o conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual ou menor a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o centro e a distância dada é o raio do círculo.

No desenho, ao traçarmos um círculo com o compasso determinamos seu ponto central, onde a distância entre ele e os pontos que constituem o traço são sempre iguais, definidas pela abertura entre as hastes do compasso.

Figura 3.9 – Círculo

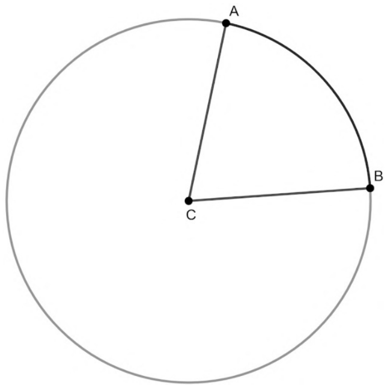


Fonte: Autor.

3.3.1 Arco de circunferência

Dado duas semirretas que possuem como ponto de origem C o centro de uma circunferência e que a interceptam em pontos distintos A e B, cada uma, o trecho da circunferência compreendida entre, ou externa a tais semirretas é chamado de arco, sendo arco menor e arco maior, respectivamente.

Figura 3.10 – Arco circunferência

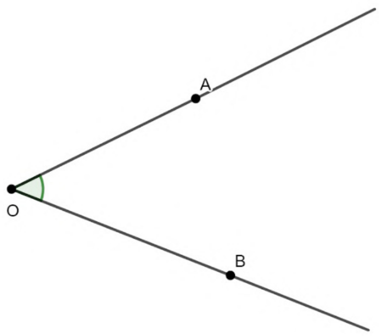


Fonte: Autor.

3.4 ÂNGULOS

Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, sendo denotado por $A\hat{O}B$, $\hat{O}$ ou $\angle AOB$.

Figura 3.11 – Ângulo AÔB

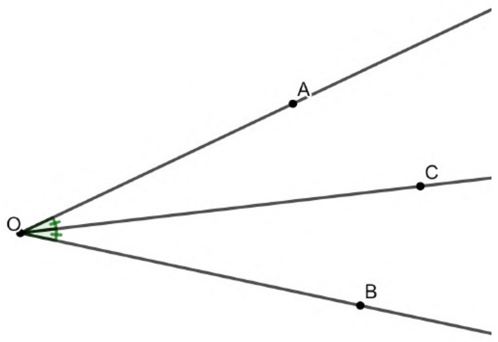


Fonte: Autor.

3.4.1 Bissetriz de um ângulo

Dado um ângulo qualquer $\angle AOB$, formado por duas semirretas com origem em O, temos que existe uma única semirreta $\overrightarrow{OC}$, na região angular compreendida entre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, tal que $\angle AOC \equiv \angle BOC$. A essa semirreta, é dado o nome de Bissetriz do ângulo $\angle AOB$.

Figura 3.12 – Bissetriz do ângulo AÔB



Fonte: Autor.

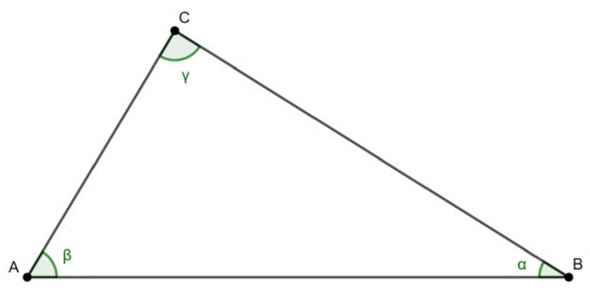
3.4.2 Ângulos notáveis

Alguns ângulos costumam aparecer com determinada frequência no estudo da geometria e por esse motivo são denominados como ângulos notáveis, são eles: ângulo de medida 60°, ângulo de medida 45° e ângulo de medida 30°.

3.5 TRIÂNGULOS

Dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se triângulo ABC e indica-se por $\triangle ABC$.

Figura 3.13 – Triângulo



Fonte: Autor.

Neste caso os pontos A, B e C são os seus **vértices**, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os **lados** e $\angle ABC$, $\angle BCA$ e $\angle CAB$ são os ângulos internos.

3.5.1 Classificação de triângulos

Quanto aos lados, os triângulos se classificam em:

(i) **Equiláteros** se, e somente se, têm os três lados congruentes;

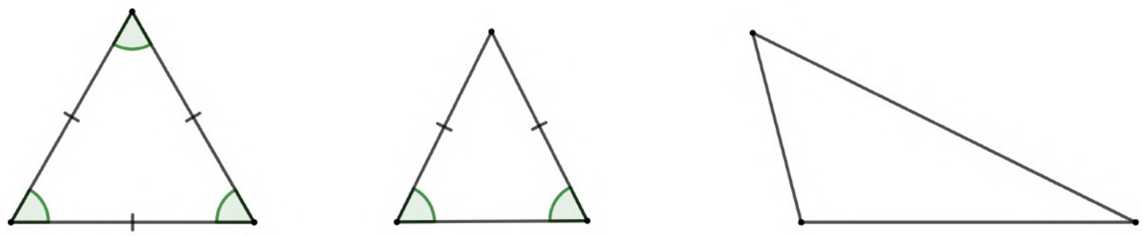
(ii) **Isósceles** se, e somente se, têm dois lados congruentes;

(iii) **Escalenos** se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes.

Se ABC é um triângulo isósceles com lados iguais $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$, dizemos que o lado BC é a **base** deste triângulo isósceles.

Na Figura 3.14 temos, em ordem um triângulo equilátero, um triângulo isósceles e um triângulo escaleno.

Figura 3.14 – Classificação de triângulos quanto aos lados



Fonte: Autor.

Quanto aos ângulos um triângulo se classifica em:

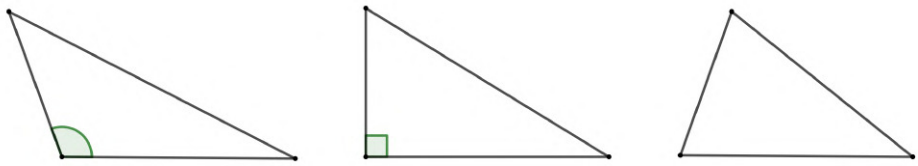
(i) **Obtusângulo** quando possui um ângulo interno obtuso.

(ii) **Retângulo** quando possui um ângulo interno reto, isto é, um ângulo interno de medida igual a 90°.

(iii) **Acutângulo** quando todos os seus ângulos internos forem agudos.

Na Figura 3.15 temos, em ordem um triângulo obtusângulo, um triângulo retângulo e um triângulo acutângulo.

Figura 3.15 – Classificação de triângulos quanto aos ângulos



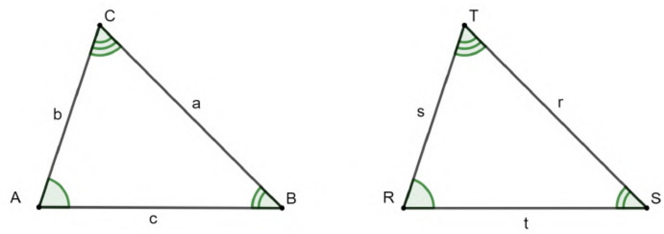
Fonte: Autor.

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

3.5.2 Congruência de triângulos

Dados dois triângulos, podemos dizer que eles são congruentes quando os lados do primeiro triângulo são ordenadamente congruentes aos lados do segundo triângulo, assim como os ângulos internos do primeiro triângulo são ordenadamente congruentes aos ângulos internos do segundo triângulo.

Figura 3.16 – Triângulos Congruentes



Fonte: Autor.

Para definir se dois triângulos são congruentes entre si, podemos levar em consideração algumas condições mínimas que devem ser satisfeitas para que isso ocorra, são essas, os denominados **casos ou critérios de congruência**.

A seguir apresentaremos os casos de congruências, sob um ponto de vista informal. Caso o leitor tenha interese em ver a prova formal da veracidade dos casos apresentados, deverá consultar a referência Matemática Elementar 9: Geometria plana.

1º caso de congruência - LAL: Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

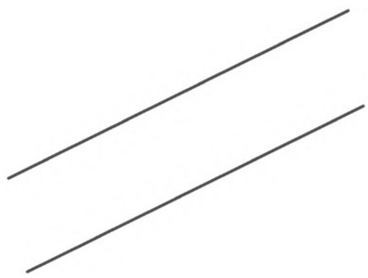
2º caso de congruência - ALA: Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

3º caso de congruência - LLL: Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

3.6 PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE

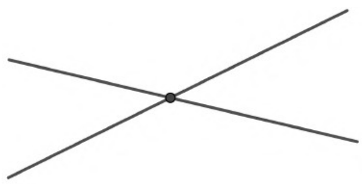
Dadas duas retas no plano, temos somente duas possibilidades para as mesmas: ou elas têm um único ponto em comum ou não têm nenhum ponto em comum; no primeiro caso, as retas são ditas concorrentes; no segundo, as retas são **paralelas**. Indica-se retas paralelas por $\|$. Como característica relevante, retas paralelas sempre possuem mesma inclinação, logo a distância entre ambas é sempre constante.

Figura 3.17 – Retas paralelas



Fonte: Autor.

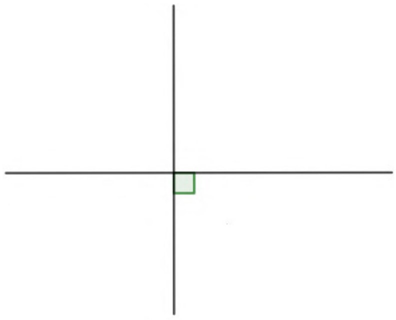
Figura 3.18 – Retas concorrentes



Fonte: Autor.

Sendo as duas retas concorrentes, temos ainda as possibilidades de serem oblíquas ou **perpendiculares**. No primeiro caso os ângulos formados com origem no ponto de intersecção entre elas, têm medida diferente de 90°; já no segundo caso, os ângulos citados medem exatamente 90°. Indica-se retas perpendiculares por $\perp$.

Figura 3.19 – Retas Perpendiculares



Fonte: Autor.

3.7 QUADRILÁTEROS

Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero. Nesta seção conheceremos alguns quadriláteros notáveis e suas propriedades.

3.7.1 Paralelogramo

Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui os lados opostos paralelos.

Figura 3.20 – Paralelogramo

Fonte: Autor.

Propriedades dos paralelogramos:

(i) **Ângulos opostos congruentes:** Em todo paralelogramo dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

(ii) **Lados opostos congruêntes:** Em todo paralelogramo dois lados opostos quaisquer são congruentes.

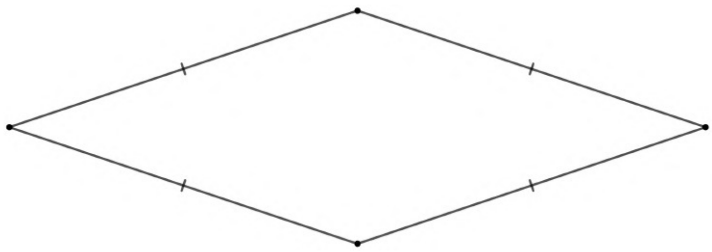
(iii) **Diagonais dividem-se ao meio:** Em todo paralelogramo, as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios.

(iv) **Dois lados paralelos e congruentes:** Todo quadrilátero convexo que tem dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.

3.7.2 Losango

Um quadrilátero plano convexo é um losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes.

Figura 3.21 – Losango

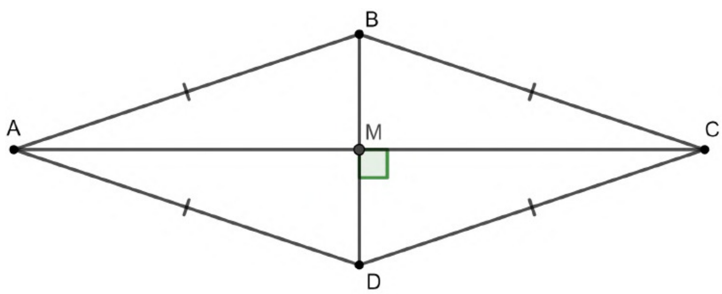


Fonte: Autor.

Propriedade do losango: Além das propriedades do paralelogramo, o losango tem a propriedade característica de possuir diagonais perpendiculares.

Demonstração: Por se tratar de um paralelogramo temos que $\overline{\mathrm{AM}} \equiv \overline{\mathrm{MC}}$ e $\overline{\mathrm{BM}} \equiv \overline{\mathrm{MD}}$, além disso, por LLL segue que o $\triangle$AMB, $\triangle$AMD, $\triangle$DMC e $\triangle$BMC são congruentes entre si. Assim, os ângulos $\angle$AMB, $\angle$AMD, $\angle$CMD e $\angle$CMB também são congruentes. Sabendo que a soma desses ângulos é igual a 360°, decorre então, que cada um deles equivale a 90°.

Figura 3.22 – Propriedade do Losango



Fonte: Autor.

Como propriedade decorrente, tem-se que todo paralelogramo que possui diagonais perpendiculares é um losango.

3.7.3 Retângulo

Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes.

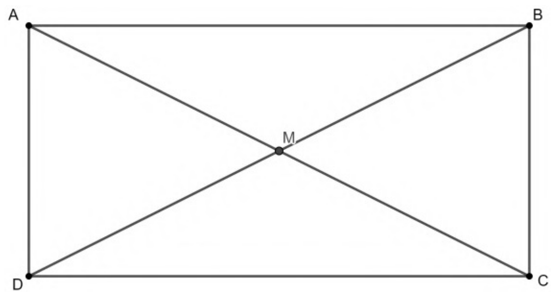
Figura 3.23 – Retângulo

Fonte: Autor.

Propriedade do retângulo: Além das propriedades do paralelogramo, o retângulo tem a propriedade característica de possuir diagonais congruentes.

Demonstração: Dado o retângulo ABCD, ao traçar suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, temos que os triângulos formados, $\triangle$ABM e $\triangle$CDM são, pelo caso LAL, congruentes. Assim, os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, correspondentes as diagonais, também são congruentes.

Figura 3.24 – Demonstração de Retângulo



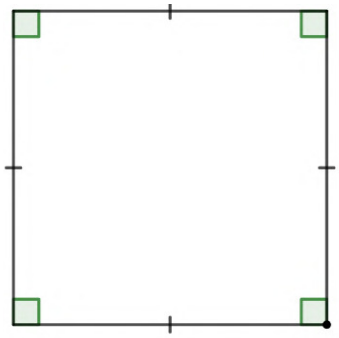
Fonte: Autor.

Como propriedade decorrente, tem-se que todo paralelogramo que possui diagonais congruentes é um retângulo.

3.7.4 Quadrado

Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos congruentes.

Figura 3.25 – Quadrado



Fonte: Autor.

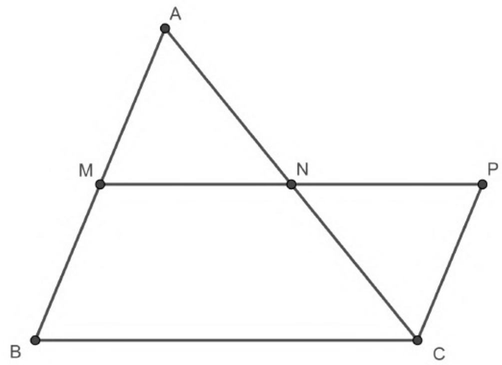
Pelas definições anteriores, podemos concluir que todo quadrado é retângulo e também é losango, logo, para o quadrado é valido as propriedades de ambos.

3.8 TEOREMA DA BASE MÉDIA

Se um segmento têm extremidades no ponto médio de dois lados de um triângulo, então ele é paralelo ao terceiro lado e ele é metade do terceiro lado.

Demonstração: Seja ABC um triângulo. Sejam M e N os pontos médios de $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{AC}}$, respectivamente. Devemos provar que $\overline{\mathrm{MN}}$ é paralelo a $\overline{\mathrm{BC}}$ e que $\overline{\mathrm{MN}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$. Para isto, considere na semirreta $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ um ponto P tal que $\overline{\mathrm{NP}} = \overline{\mathrm{MN}}$. Como $\overline{\mathrm{AN}} = \overline{\mathrm{NC}}$ (já que N é ponto médio de $\overline{\mathrm{AC}}$), $\angle\mathrm{ANM} = \angle\mathrm{CNP}$ (por serem opostos pelo vértice) e $\overline{\mathrm{MN}} = \overline{\mathrm{NP}}$ (por construção), então os triângulos ANM e CNP são congruentes. Como consequência tem-se que $\angle\mathrm{AMN} = \angle\mathrm{CPN}$ e $\overline{\mathrm{CP}} = \overline{\mathrm{AM}}$. Logo $\overline{\mathrm{CP}}$ e $\overline{\mathrm{MB}}$ são paralelos e têm o mesmo comprimento. Segue-se então que o quadrilátero BCPM é um paralelogramo. Portanto, $\overline{\mathrm{MP}} \parallel \overline{\mathrm{BC}}$ e tem o mesmo comprimento. Como N é ponto médio de $\overline{\mathrm{MP}}$, então $\overline{\mathrm{MN}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$.

Figura 3.26 – Teorema da base média



Fonte: Autor.

3.9 LUGARES GEOMÉTRICOS BÁSICOS

Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o lugar geométrico dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

(i) Todo ponto de L possui a propriedade P.

(ii) Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a L.

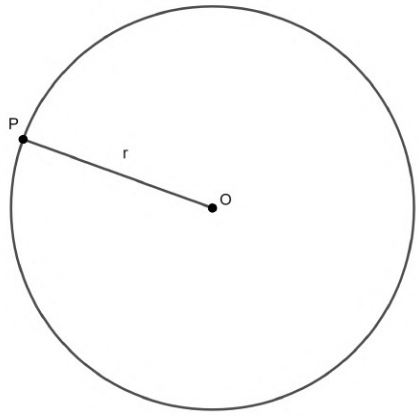
Na sequência apresentaremos alguns lugares geométricos que serão importantes no decorrer deste trabalho.

3.9.1 A circunferência

Dados um real positivo r e um ponto O do plano, o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à distância r do ponto O é a **circunferência** de centro O e raio r. Em símbolos,

$$\overline{\mathrm{AO}} = r \Longleftrightarrow A \in \Gamma(O, r).$$

Figura 3.27 – A circunferência

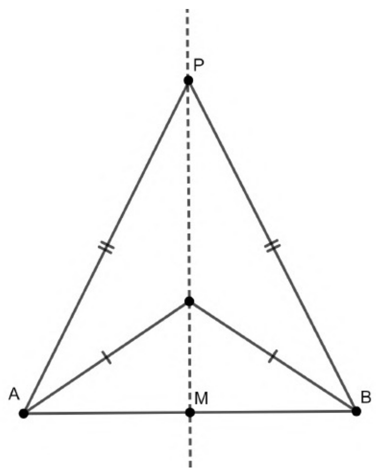


Fonte: Autor.

3.9.2 A mediatriz

Dados os pontos A e B no plano, a **mediatriz** do segmento $\overline{\mathrm{BC}}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de A e de B.

Figura 3.28 – Mediatriz



Fonte: Autor.

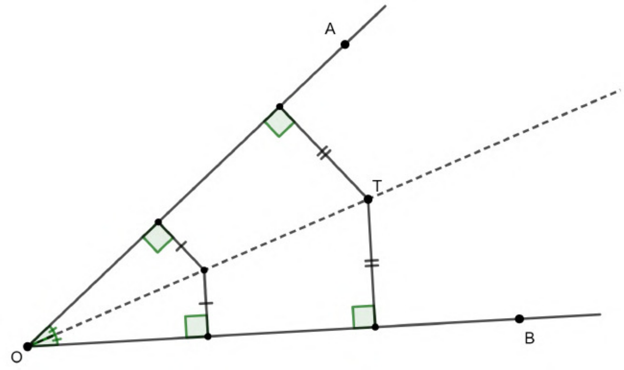
3.9.3 A bissetriz

Seja $\angle$AOB um ângulo dado. Se P é um ponto do mesmo, então

$$d(P, AO) = d(P, BO) \Longleftrightarrow P \in (\text{bissetriz de } \angle \text{ AOB}).$$

Em outras palavras, a **bissetriz** do $\angle$AOB é lugar geométrico dos pontos que equidistam do mesmo.

Figura 3.29 – A bissetriz



Fonte: Autor.

3.10 PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

Alguns pontos do triângulo carregam com si propriedades relevantes sobre ele, aparecendo assim com frequência em problemas geométricos, por esse motivo são denominados como pontos notáveis do triângulo, nesta seção conheceremos quais são e suas respectivas propriedades.

3.10.1 Baricentro

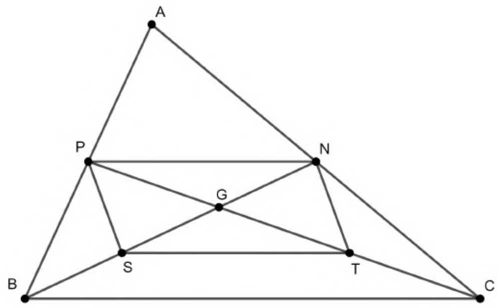
Em todo triângulo, as três medianas passam por um único ponto, o **baricentro** do triângulo. Ademais, o baricentro divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão $2:1$.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo. Sejam M, N e P, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$ e $\overline{\mathrm{AB}}$. Vamos mostrar que as medianas $\overline{\mathrm{AM}}$, $\overline{\mathrm{BN}}$ e $\overline{\mathrm{CP}}$ se interceptam em um único ponto, que indicaremos por G, e que G divide cada uma das medianas na razão $2:1$, a partir do vértice correspondente.

Seja G_1 o ponto tal que $\overline{\mathrm{BN}} \cap \overline{\mathrm{CP}} = \{G_1\}$. Sejam, ainda, S e T os pontos médios dos segmentos $\overline{BG_1}$ e $\overline{CG_1}$, respectivamente. Observe, agora, que $\overline{\mathrm{NP}}$ é base média de ABC relativa a $\overline{\mathrm{BC}}$ e $\overline{\mathrm{ST}}$ é base média do triângulo BCG relativa a $\overline{\mathrm{BC}}$; logo, pelo teorema da base média, tanto $\overline{\mathrm{NP}}$ quanto $\overline{\mathrm{ST}}$ são paralelos a $\overline{\mathrm{BC}}$ e têm comprimento igual à metade de $\overline{\mathrm{BC}}$. Portanto $\overline{\mathrm{NP}} = \overline{\mathrm{ST}}$, logo o quadrilátero $NPST$ é um paralelogramo. Segue, então, que $\overline{\mathrm{PG}} = \overline{\mathrm{GT}}$ e $\overline{\mathrm{NG}} = \overline{\mathrm{GS}}$. Como $\overline{\mathrm{BS}} = \overline{\mathrm{SG}}$ e $\overline{\mathrm{CT}} = \overline{\mathrm{TG}}$, segue que $\overline{\mathrm{BS}} = \overline{\mathrm{SG}} = \overline{\mathrm{GN}}$ e $\overline{\mathrm{CT}} = \overline{\mathrm{TG}} = \overline{\mathrm{GP}}$, igualdades que, por sua vez, fornecem $\overline{\mathrm{BG}} = 2\overline{\mathrm{GN}}$ e $\overline{\mathrm{CG}} = 2\overline{\mathrm{GP}}$.

Figura 3.30 – Baricentro



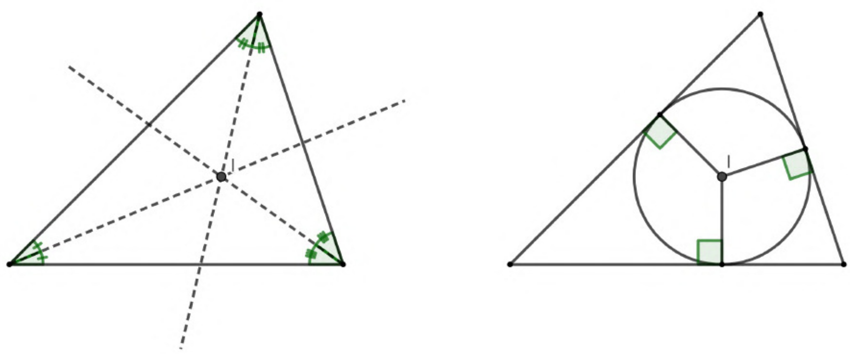
Fonte: Autor.

Seja G_2 o ponto tal que $\overline{\text{AM}} \cap \overline{\text{CP}} = \{G_2\}$, concluímos, analogamente, que G_2 divide $\overline{\text{AM}}$ e $\overline{\text{BN}}$ na razão $2:1$ a partir de cada vértice. Mas, daí, segue que os pontos G_1 e G_2 são tais que $\overline{BG_1} = 2 \cdot \overline{G_1N}$ e $\overline{BG_2} = 2 \cdot \overline{G_2N}$; O que implica em $G_1 \equiv G_2$. Por fim, chamando de G o ponto $G_1 \equiv G_2$, segue que $\overline{\text{AM}}$, $\overline{\text{BN}}$ e $\overline{\text{CP}}$ concorrem em G e que G divide cada uma das medianas na razão $2:1$, a partir do vértice correspondente.

3.10.2 Incentro

Um triângulo possui três retas bissetrizes, uma para cada um dos seus ângulos internos. O ponto de interseção destas três retas está a igual distância dos lados do triângulo e ele é o centro da circunferência inscrita no triângulo, que é a circunferência tangente aos lados. A esse ponto é dado o nome de **incentro**.

Figura 3.31 – Incentro

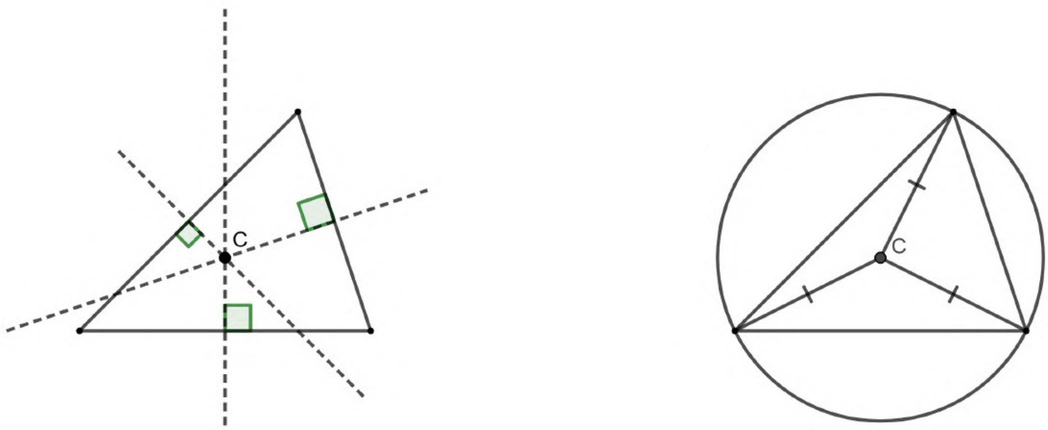


Fonte: Autor.

3.10.3 Circuncentro

Um triângulo possui três retas mediatrizes, uma para cada lado. O ponto de interseção destas três retas está a igual distância dos vértices do triângulo. Ele é chamado de **circuncentro** e é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, que é a circunferência que passa pelos vértices do triângulo.

Figura 3.32 – Circuncentro

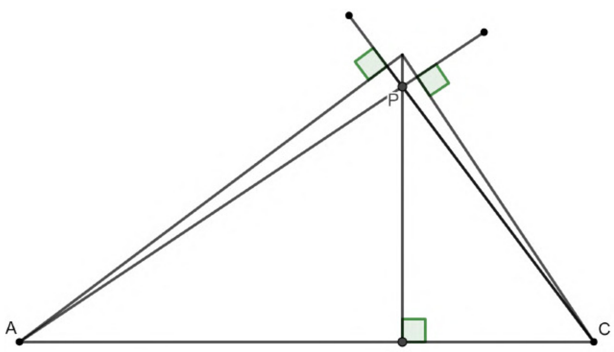


Fonte: Autor.

3.10.4 Ortocentro

Em todo triângulo, as três alturas se intersectam em um só ponto, o **ortocentro** do triângulo.

Figura 3.33 – Ortocentro



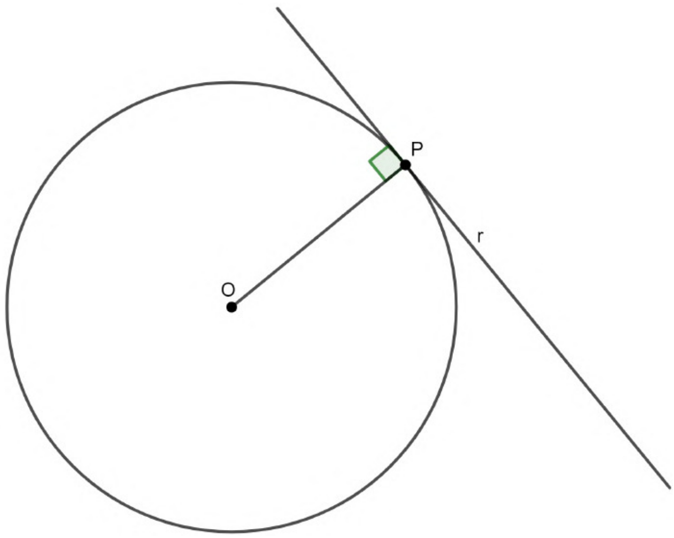
Fonte: Autor.

3.11 TANGÊNCIA E ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

3.11.1 Tangência

Dizemos que uma reta r e uma circunferência de centro O são tangentes se eles tiverem um único ponto P em comum, denominado como ponto de tangência. Como propriedade, $\overline{OP}$ é perpendicular a reta r.

Figura 3.34 – Tângencia



Fonte: Autor.

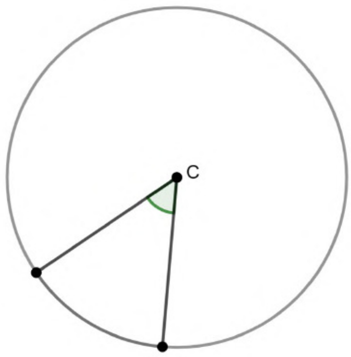
3.11.2 Ângulos na circunferência

Dada uma circunferência, cada arco nela tomado é equivalente a um ângulo que se encontra interno a mesma, podendo esse ângulo ser central ou inscrito, a depender do vértice tomado.

(i) **Ângulo central:** O ângulo central de uma circunferência é o ângulo que tem como ponto de origem o centro dessa circunferência. O arco compreendido entre as semirretas que limitam o ângulo corresponde ao próprio ângulo, como mostra a Figura 3.35.

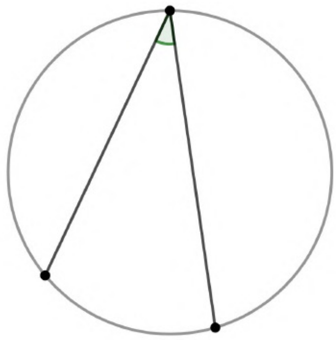
(ii) **Ângulo inscrito:** O ângulo inscrito é o ângulo interno à circunferência, cujo vértice pertence a tal circunferência e as semirretas que o limitam são secantes a ela, como é possível notar na Figura 3.36.

Figura 3.35 – Ângulo Central



Fonte: Autor.

Figura 3.36 – Ângulo Inscrito

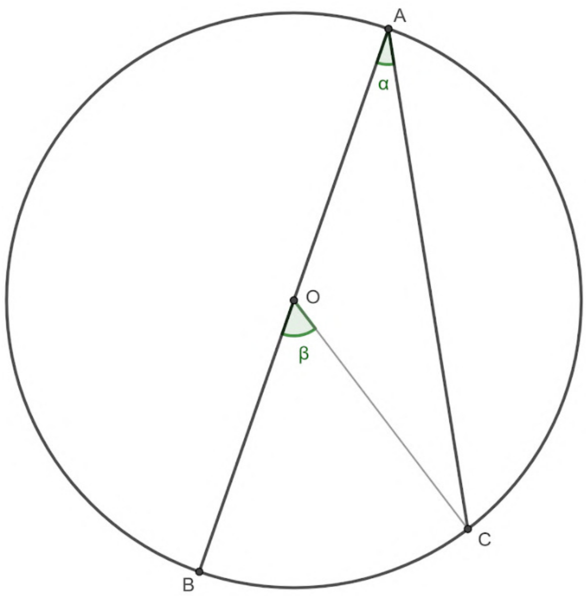


Fonte: Autor.

Propriedade do ângulo inscrito na circunferência: Para um ângulo inscrito em uma circunferência, tem-se que sua medida é igual a metade do ângulo central correspondente. Para demonstrar tal propriedade devemos considerar a representação de três possíveis casos:

1º caso: O ponto central da circunferência pertence a um lado do ângulo inscrito

Figura 3.37 – Caso 1

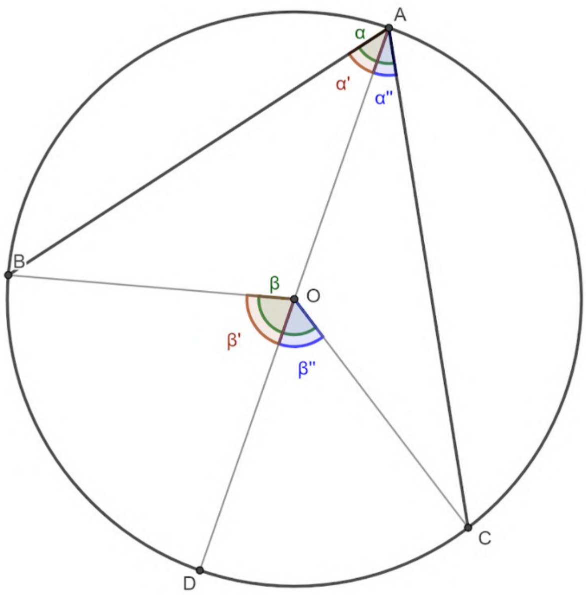


Fonte: Autor.

Neste caso, note que $\overline{AO} \equiv \overline{OC}$ = raio, logo, o $\triangle AOC$ é isósceles. Dessa afirmação decorre que $\angle$OAC $\equiv$ $\angle$OCA $= \alpha$. Sabendo que $\angle$BOC $= \beta =$ $\angle$OAC $+$ $\angle$OCA, temos então que $\beta = 2\alpha$.

2º caso: O ponto central da circunferência é interno ao ângulo inscrito

Figura 3.38 – Caso 2

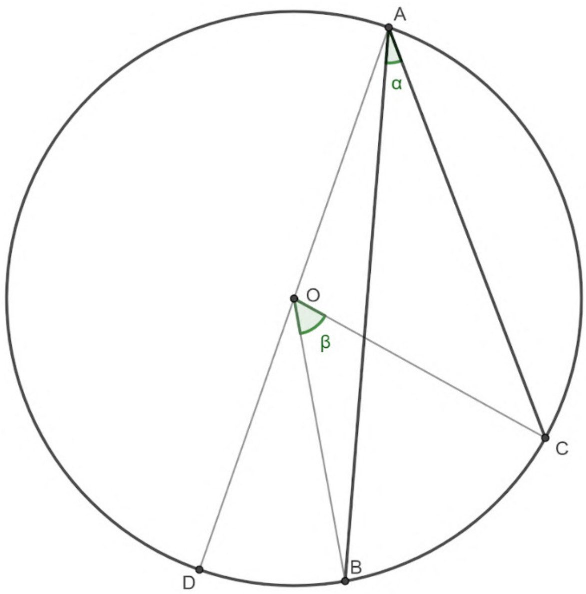


Fonte: Autor.

Traçando a semirreta $\overrightarrow{\text{AO}}$ que intercepta a circunferência em D, é fácil notar que semelhante ao caso 1, os triângulos $\triangle$AOB e $\triangle$AOC são isósceles, logo, $\angle$OAB $\equiv$ $\angle$OBA $= \alpha$’ e $\angle$OAC $\equiv$ $\angle$ACO $= \alpha$”. Assim, β’=2α’ e β”=2α”. Somando β’ e β”, temos que β’ + β”= 2α’+2α” = 2(α’+α”), onde β’ + β”= β, e α’+α”= α. Portanto, de fato, $\beta = 2\alpha$.

3º caso: O ponto central da circunferência é externo ao ângulo inscrito

Figura 3.39 – Caso 3



Fonte: Autor.

Seguindo a mesma ideia dos casos anteriores, é possível concluir que $\angle$DOC = 2 $\angle$CAD e $\angle$DOB = 2 $\angle$BAD. Por outro lado, $\angle$COB = $\angle$DOC - $\angle$DOB, substituindo por as relações de igualdade já encontradas, tem-se que $\angle$COB = 2 ($\angle$CAD - $\angle$BAD). Note que $\angle$CAD - $\angle$BAD é igual a α, logo, $\angle$COB = 2α, ou seja, $\beta = 2\alpha$.

Nota: Observe que todo ângulo inscrito cujo arco correspondente é uma semicircunferência, é reto, pois o ângulo central, nesse caso, mede 180º.

4 CONSTRUÇÕES FUNDAMENTAIS DA GEOMETRIA

Partindo do conhecimento obtido até aqui, neste capítulo vamos ter acesso as instruções de como realizar algumas construções geométricas fundamentais, cada uma seguida da sua respectiva justificativa que fortalece sua validade.

A escrita deste capítulo possui como principais referências a dissertação Um caderno de construções geométricas para sala de aula, do autor Ailton Borges do Nascimento e o livro Desenho geométrico, com autoria de Clarissa Ferreira Albrecht e Luiza Baptista de Oliveira.

4.1 INSTRUMENTOS DO DESENHO GEOMÉTRICO

Para realizar as construções geométricas são necessários alguns instrumentos, nesta seção conheceremos quais são e como utilizá-los de maneira correta a fim de evitarmos possíveis erros que podem vir a alterar o resultado final.

a) Superfície de trabalho

A superfície de trabalho é o local onde será realizado o desenho, podendo ser, por exemplo, uma folha de papel. A superfície deve ser plana, regular, limpa e que proporcione boa visualização do desenho, devendo ter contraste com o grafite ou lápis escolhido. É recomendado o uso de fita adesiva para melhor fixação do papel na mesa ou local onde será sobreposto, evitando possíveis deslocamentos.

b) Lápis

Para realizar o desenho é recomendado o uso de grafite do tipo HB, com dureza média. O traço deve ser feito com a precisão adequada para não marcar o papel, sempre da esquerda para a direita e com a mão bem posicionada e apoiada sobre a superfície.

c) Borracha

Para possíveis erros, é necessário ter em mãos uma ferramenta para corrigi-los. A fim de evitar marcas no papel, é recomendado o uso de uma borracha macia e limpa que apague o traço com facilidade, esquivando-se do uso da força que poderia levar ao desgaste e manchas no papel.

d) Compasso

Compasso é um instrumento de desenho conhecido na área da matemática e até mesmo da arquitetura e engenharia, sendo utilizado basicamente para traçar arcos e circunferências. A ferramenta consiste em duas hastes que são unidas por um ponto em comum, esse é o local onde podemos realizar o manuseio, cada uma das hastes possui uma ponta nas suas extremidades independentes, uma delas é constituída por uma espécie de agulha de metal denominada de ponta seca, essa se mantém fixa, enquanto a outra ponta é móvel sendo de grafite (na maioria dos casos), responsável por realizar o traço na superfície.

Figura 4.1 – Compasso

Fonte: PNGWING.

Para utilizar corretamente o compasso são necessários alguns passos básicos:

(i) Determinar o raio da circunferência desejada:

A medida do raio (distância entre centro e a circunferência) será equivalente a abertura entre as pontas do compasso, logo, o primeiro passo é posicioná-las de acordo com o tamanho da circunferência que se deseja obter, antes de apoiá-lo na superfície de trabalho.

(ii) Posicionar o centro da circunferência:

O centro da circunferência será marcado pela ponta seca do compasso, assim, posicione-a primeiramente na superfície e fixe-a bem, pois a mesma não poderá ser movida.

(iii) Traçar a circunferência:

Para traçar a circunferência é necessário tocar com a outra ponta do compasso na superfície e realizar o movimento de giro em torno da ponta fixa, até se obter o tamanho do arco desejado, ou até que o traço encontre a si mesmo na outra extremidade, caracterizando uma circunferência. Nesse momento é necessário cuidado e atenção para que a abertura entre as hastes não varie durante o movimento.

e) Régua

A régua é um instrumento utilizado tanto no desenho como na matemática, para auxiliar no ato de traçar linhas retas (segmentos de reta) e medir pequenas distâncias, quando com escala. Após ser apoiada na superfície, para que não ocorra falhas no traço, deve-se evitar o deslocamento da régua sobre o papel, podendo ser realizada uma considerável pressão sobre o instrumento para fixá-lo bem enquanto o movimento é executado.

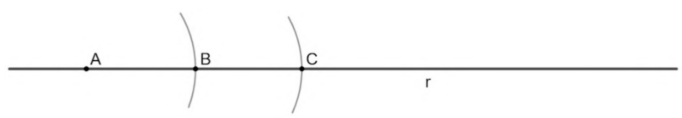
Para verificar proposições geométricas, Pitágoras fez uso de apenas esses instrumentos básicos responsáveis por auxiliá-lo em tais construções. Somente com tais ferramentas, já é possível obter eficácia nas representações, entretanto, trazendo para a atualidade, hoje temos acesso a meios que podem facilitar o processo de construção tornando-o mais prático como os esquadros e softwares de geometria dinâmica.

4.2 ALGUMAS CONSTRUÇÕES

4.2.1 Pontos equidistantes colineares

Instruções: Trace uma reta r, e determine um ponto A pertencente a ela. Determine a abertura entre as hastes do compasso, que corresponderá a distância entre os pontos. Fixe a ponta seca do compasso no ponto A e trace um pequeno arco de circunferência que intercepte a reta no ponto B. De maneira análoga, fixe a ponta seca do compasso, agora no ponto B, e novamente realize o traço do arco interceptando a reta no sentido contrário ao ponto A, obtendo o ponto C como a interseção entre reta e arco. Realize o mesmo procedimento quantas vezes necessárias para se obter a quantidade desejável de pontos equidistantes.

Figura 4.2 – Pontos equidistantes



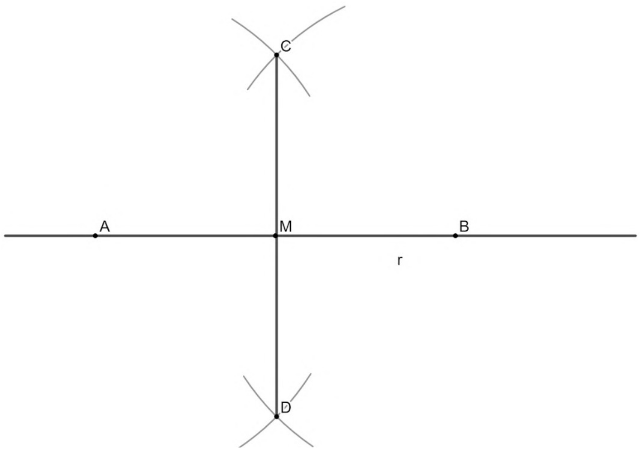
Fonte: Autor.

Justificativa: Note que, por construção, a distância entre os pontos A e B é igual a uma medida x entre as hastes do compasso, assim a distância entre os pontos B e C também é igual a mesma medida x, logo os pontos A, B e C são equidistantes, pois $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$.

4.2.2 Ponto médio de um segmento

Instruções: Trace uma reta r e marque os pontos A e B pertencentes a ela. Com as hastes do compasso a uma distância x, tal que x seja maior que a metade do comprimento do segmento $\overline{AB}$, fixe a ponta seca no ponto A e trace dois arcos de circunferência: acima e abaixo da reta. Analogamente, fixe a ponta seca no ponto B e realize o traço de dois arcos de circunferência acima e abaixo da reta, de maneira que os mesmos interceptem os arcos feitos anteriormente, onde a intersecção desses arcos serão os pontos C e D. Trace, por fim, uma reta s pelos pontos C e D. Temos então, que a interseção M entre r e s é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Figura 4.3 – Ponto médio



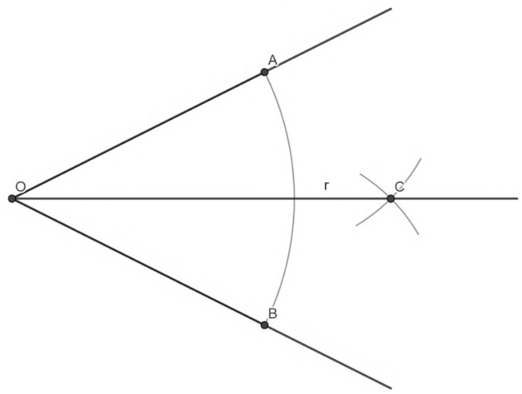
Fonte: Autor.

Justificativa: Note que, por construção, $\overline{AC} \equiv \overline{CB} \equiv \overline{AD} \equiv \overline{DB}$, partindo dessas congruências, podemos concluir que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADB$ são isósceles, o que implica dizer que os ângulos $\angle BAC$ e $\angle CBA$ assim como os ângulos $\angle BAD$ e $\angle DBA$ são congruentes, além disso, é possível notar também que, pelo caso LAL, $\triangle CBD \equiv \triangle CAD$ e ambos são isósceles, logo $\angle BCD \equiv \angle ACD$. Assim, pelo caso ALA, $\triangle BCM \equiv \triangle ACM$. Da congruência entre $\triangle ACM$ e $\triangle BCM$, decorre que os lados AM e MB, dos respectivos triângulos, são também congruentes, portanto conclui-se, de fato, que M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

4.2.3 Bissetriz de um ângulo

Instruções: Marque um ponto O sobre a superfície. Com centro em O e raio arbitrário x, trace um arco de circunferência e nele destaque os pontos A e B. Em seguida, trace as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, como os lados do ângulo $\angle AOB$ construído. Com raio arbitrário y, maior que a metade de $\overline{AB}$, fixe a ponta seca em A e trace um arco à frente do arco AB. Agora, com centro em B e mesmo raio y, trace um arco que intercepte o arco feito no passo anterior em um ponto C. Por fim, trace uma semirreta com origem em O e contendo C, obtendo, assim, a bissetriz do ângulo $\angle AOB$.

Figura 4.4 – Bissetriz de um ângulo



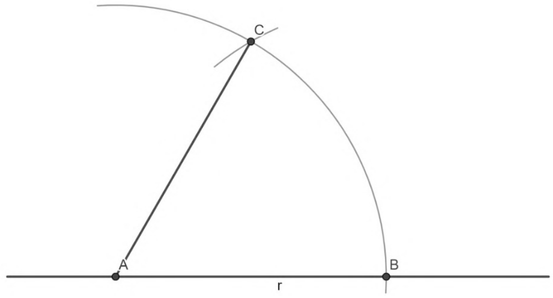
Fonte: Autor.

Justificativa: Por construção, o $\triangle AOC \equiv \triangle BOC$, pois $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$, $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{OC}$ é um lado comum entre ambos os triângulos, satisfazendo assim o caso LLL de congruência. Dessa forma, tem-se que $\angle AOC \equiv \angle BOC$, e portanto, $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $\angle AOB$.

4.2.4 Ângulo de medida 60°

Instruções: Trace uma reta r e nela destaque o ponto A. Com centro em A e raio arbitrário x, trace um arco que intercepte r em B. Com centro em B e mesmo raio x, trace um arco que intercepte o arco anterior em C. Por fim, trace uma semirreta com origem em A e que contém C. Assim, tem-se que o ângulo formado, $\angle CAB$, possui 60°.

Figura 4.5 – Ângulo 60°



Fonte: Autor.

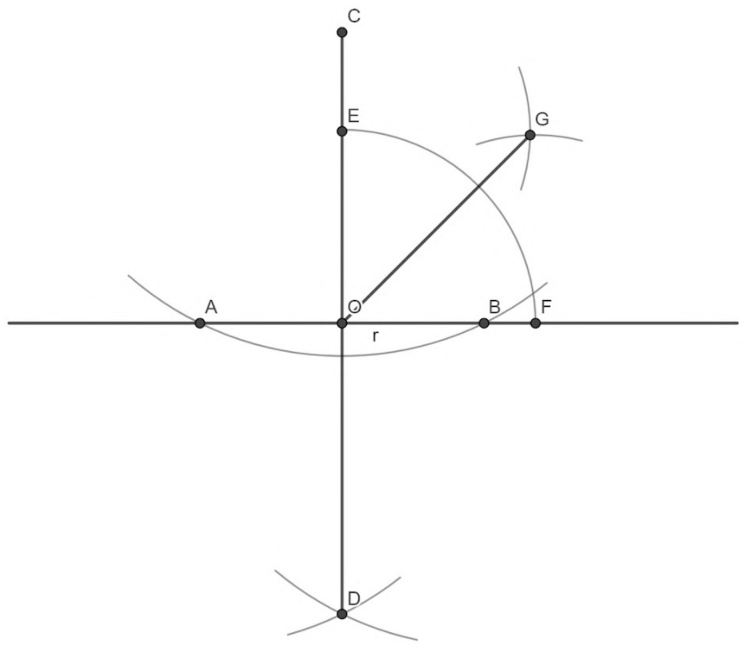
Justificativa: Por construção, $\overline{AC} \equiv \overline{CB} \equiv \overline{BA} = x$, logo o $\triangle ABC$ é equilátero, e, por consequência, seus ângulos internos são congruentes. Assim, sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, temos que $180 \div 3 = 60$, logo, $\angle CAB$, como um desses ângulos, possui 60°.

Nota: Atente-se ao fato de que a construção é válida também para três pontos equidistantes e não colineares.

4.2.5 Ângulo de medida 45°

Instruções: O ângulo de 45° pode ser construído ao traçar a bissetriz de um ângulo reto. Para construir um ângulo de medida 90°, verifique a construção de retas perpendiculares apresentado na subseção 4.2.11. Com a construção do ângulo reto, fixe a ponta seca do compasso no ponto O (origem do ângulo de 90°), como sendo o ponto de intersecção entre o segmento $\overline{CD}$ e a reta r. Com raio arbitrário, trace um arco interceptando $\overline{CD}$ e r nos pontos E e F, respectivamente. Agora com centro em E, trace novamente um pequeno arco no mesmo quadrante e acima do anterior. Repita o mesmo processo de construção de arco, dessa vez com centro em F, de forma que os dois se cruzem em um ponto G. Por fim, trace a semirreta $\overrightarrow{OG}$, obtendo assim a bissetriz do ângulo de 90°, dessa forma o $\angle EOG$, assim como o $\angle GOF$ são iguais a 45°.

Figura 4.6 – Ângulo 45°



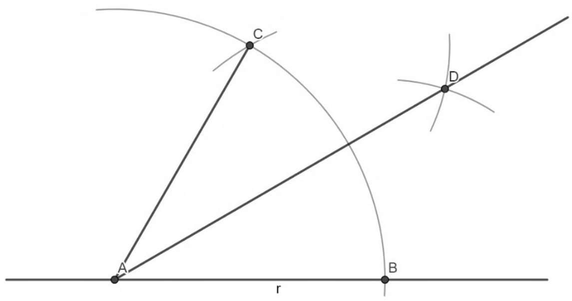
Fonte: Autor.

Justificativa: Note que, por construção, o $\triangle OEG$ e o $\triangle OFG$ são, pelo caso LLL, congruentes, pois $\overline{OF} \equiv \overline{OE}$, $\overline{EG} \equiv \overline{FG}$ e $\overline{OG}$ é um lado comum a ambos os triângulos. Sendo $\angle EOF = 90°$, tem-se que $\angle EOG = \angle GOF = 45°$.

4.2.6 Ângulo de medida 30°

Instruções: O ângulo de 30° pode ser construído ao traçar a bissetriz de um ângulo de medida 60°. Para isso, verifique a construção de um ângulo de medida 60° na subseção 4.2.4 e a construção da bissetriz de um ângulo da subseção 4.2.3.

Figura 4.7 – Ângulo 30°



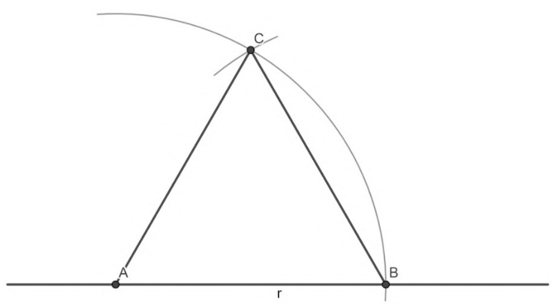
Fonte: Autor.

Justificativa: Note que, por construção, o $\triangle CAD$ e o $\triangle BAD$ são, pelo caso LLL, congruentes, pois $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$, $\overline{CD} \equiv \overline{BD}$ e $\overline{AD}$ é um lado comum a ambos os triângulos. Sendo $\angle CAB = 60°$, tem-se que $\angle CAD \equiv \angle DAB = 30°$.

4.2.7 Triângulo Equilátero

Instruções: Trace uma reta r e nela destaque o ponto A. Com centro em A e raio arbitrário x, trace um pequeno arco acima de r e outro que intercepte r em B. Com centro em B e mesmo raio x, trace um arco que intercepte o arco anterior em C. Por fim, trace os segmentos de retas $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$. Assim, tem-se que o triângulo ABC formado é equilátero.

Figura 4.8 – Triângulo Equilátero



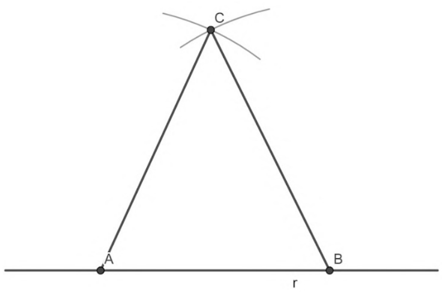
Fonte: Autor.

Justificativa: Note que, por construção, $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CA}$, logo o triângulo formado $\triangle ABC$ é equilátero.

4.2.8 Triângulo Isósceles

Instruções: Trace uma reta r e destaque os pontos A e B pertencentes a r. Com centro em A e raio arbitrário x, trace um arco acima de r. Analogamente, agora com centro em B, trace um novo arco com mesmo raio x, que intercepte o arco anterior em um ponto C. Com isso, trace os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, obtendo assim o triângulo isósceles ABC.

Figura 4.9 – Triângulo Isósceles



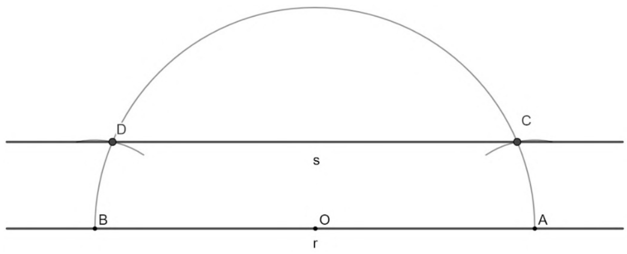
Fonte: Autor.

Justificativa: Por construção, os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são congruentes pois ambos são iguais ao raio x. Assim, o triângulo ABC formado, é de fato isósceles.

4.2.9 Retas paralelas

Instruções: Trace uma reta r e marque um ponto O pertencente a r. Em seguida, marque o ponto A, também pertencente a r. Agora, com centro em O e raio $\overline{OA}$, trace uma semicircunferência partindo de A até interceptar a reta r em um ponto B simétrico a A. Tomando um raio x menor que $\overline{OA}$ e com centro em A, trace um arco acima de r, que intercepta a semicircunferência em um ponto C. Analogamente, realize o mesmo processo, traçando um arco com mesmo raio x, que intercepta a semicircunferência em um ponto D, mas agora com centro em B. Por fim, ao traçar uma reta s passando pelos pontos C e D, temos que s $\parallel$ r.

Figura 4.10 – Retas Paralelas



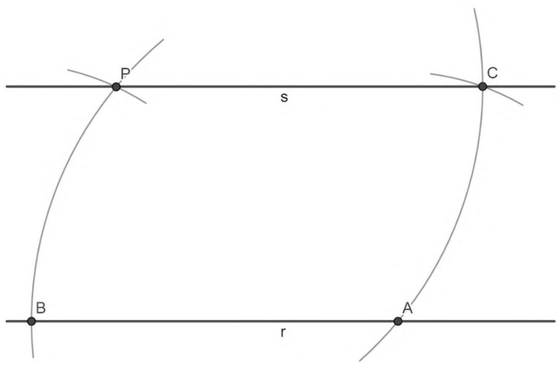
Fonte: Autor.

Justificativa: Note que, por construção, $\overline{\mathrm{OA}} \equiv \overline{\mathrm{OC}} \equiv \overline{\mathrm{OB}} \equiv \overline{\mathrm{OD}}$ = raio da semicircunferência, além disso, $\overline{\mathrm{AC}} \equiv \overline{\mathrm{BD}}$ = raio x. Assim, pelo caso LLL, os triângulos OAC e OBD são congruentes, logo, as alturas dos respectivos triângulos também são congruentes. Dado que as alturas dos triângulos é justamente a distância entre as retas r e s, da igualdade entre elas decorre que as retas são paralelas entre si.

4.2.10 Reta paralela passando por um ponto dado

Instruções: Dado uma reta r e um ponto P não pertencente a ela, fixe a ponta seca em P e com raio maior que a distância de P até r, trace um arco que intercepte r em um ponto A. Com o mesmo raio e centro em A, trace um arco que passa por P e intercepta r em B. Em seguida, com raio igual a $\overline{\mathrm{BP}}$, fixe a ponta seca em A e trace um pequeno arco que intercepta, em C, o arco ao qual o ponto A pertence. Por fim, trace a reta s passando pelos pontos P e C.

Figura 4.11 – Reta paralela passando por um ponto dado



Fonte: Autor.

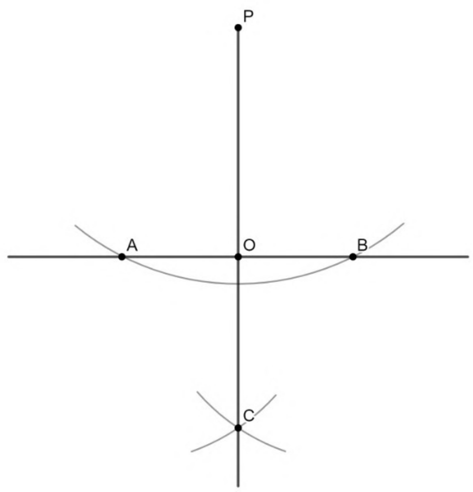
Justificativa: Note que, por construção, os segmentos $\overline{\mathrm{BP}}$ e $\overline{\mathrm{AC}}$ são congruentes, além disso, temos também que $\overline{\mathrm{CP}} \equiv \overline{\mathrm{AB}}$ = raio das circunferências de centro P e A, respectivamente. Traçando a diagonal $\overline{\mathrm{PA}}$ no quadrilátero ACPB formado, temos que, pelo caso LLL, $\triangle$ABP $\equiv$ $\triangle$PCA, dessa forma, $\angle$ACP $\equiv$ $\angle$ABP, assim como $\angle$CAB $\equiv$ $\angle$BPC. Sabendo que esses são, na verdade, ângulos opostos no quadrilátero convexo ACPB tomado, por serem iguais, conclui-se que ACPB caracteriza-se como paralelogramo. Portanto, $\overline{CP} \parallel \overline{AB}$ implicando em r$\|$s.

Nota: Perceba que a mesma construção é válida quando se quer obter um paralelogramo, visto que os pontos ACPB são seus vértices.

4.2.11 Reta perpendicular que passa por um ponto P dado

Instruções: Dado uma reta r e um ponto P não pertencente a ela, com um raio x maior que a distância de P até r, fixe a ponta seca em P e trace um arco que intercepte r nos pontos A e B. Com o mesmo raio x e centro em A, trace um arco abaixo de r. Analogamente, com a ponta fixa em B, trace um arco que intercepte o arco anterior em C, possuindo o mesmo raio. Assim, ao traçar, por fim, a reta s passando pelos pontos P e C, temos que r$\perp$s.

Figura 4.12 – Reta perpendiculares - 1



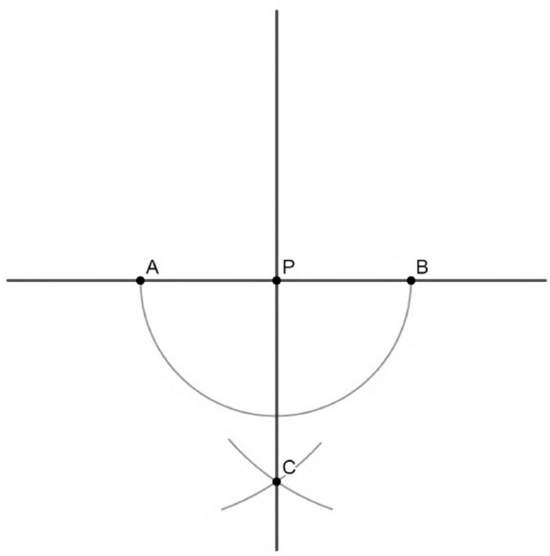
Fonte: Autor.

Justificativa: Tomando o ponto O como sendo a intersecção entre as retas r e s, note que, por construção, $\overline{AO} \equiv \overline{OB}$, assim como $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$, o segmento $\overline{OC}$, por sua vez, é um lado comum dos triângulos $\triangle$AOC e $\triangle$BOC, logo, pelo caso de congruência LLL, concluímos que $\triangle$AOC $\equiv$$\triangle$BOC, e como consequência, os ângulos $\angle$AOC e $\angle$BOC também são congruentes. Sabendo que a soma dos ângulos $\angle$AOC e $\angle$BOC formam um ângulo que mede 180°, decorre que cada um desses ângulos medem 90°, portanto, de fato, r e s são perpendiculares.

4.2.12 Reta perpendicular que passa por um ponto P contido em r

Instruções: Dado uma reta r e um ponto P que pertence a ela, com raio arbitrário e centro em P, construa uma semicircunferência que intercepte r nos pontos A e B. Em seguida, tomando um raio maior que $\overline{AP}$, fixe a ponta seca em A e trace um arco na região superior ou inferior a r. De maneira análoga, e mantendo o raio tomado, trace um novo arco (agora com centro em B) que intercepte o arco construído anteriormente em um ponto C. Por fim, trace a reta passando pelos pontos P e C, obtendo assim a reta s que é perpendicular a r.

Figura 4.13 – Reta perpendiculares - 2



Fonte: Autor.

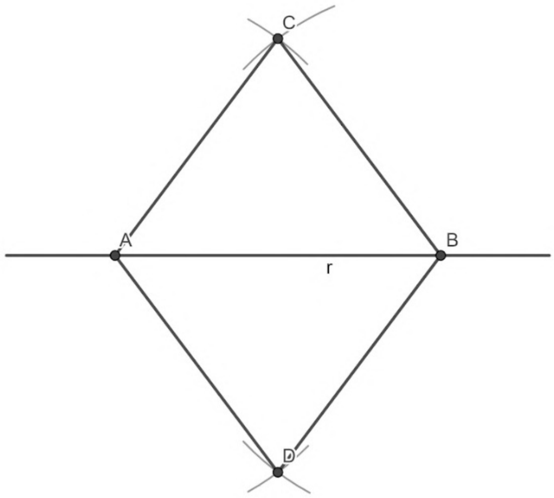
Justificativa: Neste caso, os pontos O e P coincidem, assim, é válida a justificativa do caso anterior.

Nota: Perceba que, em ambos os casos, a reta s que foi construída é também a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, pois além de ser perpendicular, o ponto de intersecção entre r e s é justamente o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

4.2.13 Losango

Instruções: Trace uma reta r, e, sobre ela, dois pontos distintos A e B. Com centro em A e raio x maior que a metade da distância de A até B, trace um arco acima e abaixo da reta r. Em seguida, repita os mesmos passos construindo dois arcos, com centro em B, que interceptam os arcos anteriores em C e D. Por fim, trace os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DA}$, obtendo assim o losango ACBD.

Figura 4.14 – Losango



Fonte: Autor.

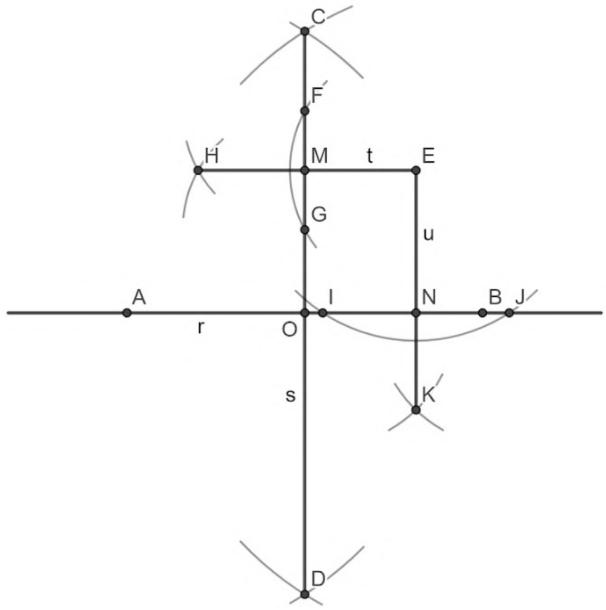
Justificativa: Por construção, as medidas dos lados do losango ACBD são todas iguais ao raio x, logo congruentes entre si.

Nota: Perceba que a construção do losango é semelhante a construção de retas perpendiculares, que neste caso, se traçadas, seriam justamente as diagonais de AEBD.

4.2.14 Retângulo

Instruções: Construa, de início, duas retas r e s, perpendiculares que se cruzam em O. Com isso, determine um ponto E, em um dos quadrantes. Em seguida, basta construir uma nova reta t, tal que t é perpendicular a s e passa pelo ponto E. Para isso, com centro em E e raio x, tal que x seja maior que a distância de E até s, trace um arco que intercepta s nos pontos F e G, agora, com centro em F e depois em G, trace dois arcos que se interceptam em H. Por fim, trace o segmento $\overline{EH}$, que é perpendicular a s. Realize o mesmo processo, agora construindo uma reta u perpendicular a r, passando pelo ponto E. Por fim, destaque a interseção entre $\overline{EH}$ e s como sendo o ponto M e o ponto comum entre $\overline{EK}$ e r como N, obtendo assim o retângulo OMEN.

Figura 4.15 – Retângulo



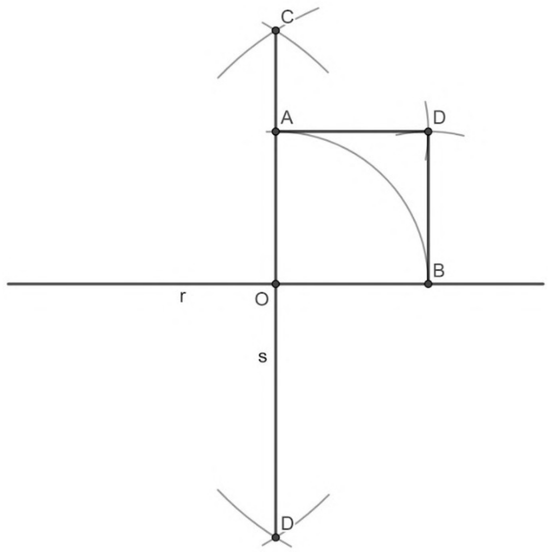
Fonte: Autor.

Justificativa: Note que, por construção, $\overline{EH}$ é perpendicular a r, logo $\overline{EH}$ é paralelo a s, e, por consequência, também é paralelo a $\overline{ON}$, portanto além dos $\angle EMO$ e $\angle NOM$ serem retos, decorrente da perpendicularidade, os lados $\overline{EM}$ e $\overline{ON}$ também são paralelos. Analogamente, o mesmo ocorre com os segmentos $\overline{EN}$ e $\overline{MO}$, que são paralelos, implicando $\angle ENO$ também é reto. Dessa forma, temos que $\angle MEN$ também é um ângulo de $90°$, portanto o quadrilátero OMEN é um retângulo.

4.2.15 Quadrado

Instruções: Dado duas retas perpendiculares r e s, com o ponto O comum. Trace um arco, com centro em O e raio x, que intercepte r e s nos pontos A e B, respectivamente. Posteriormente, com o mesmo raio x, com centro em A, e, em seguida em B, trace dois arcos que se encontram no ponto D. Por fim, trace os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$, obtendo a representação do quadrado ADBO de lado x.

Figura 4.16 – Quadrado



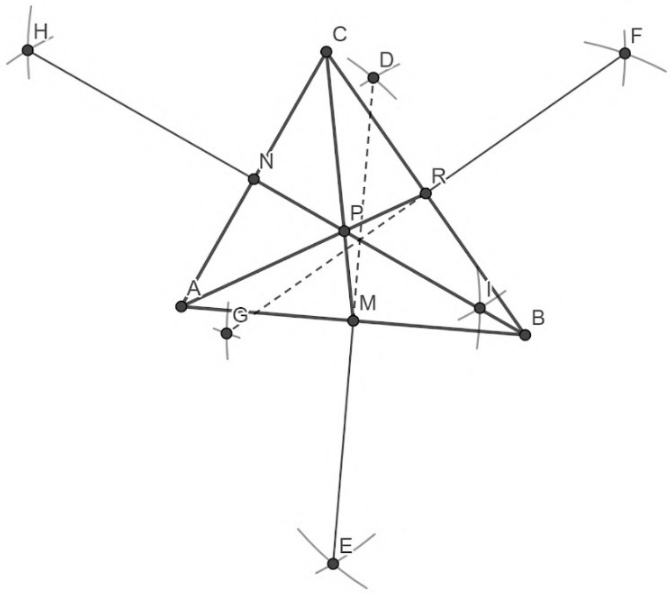
Fonte: Autor.

Justificativa: Por construção, os lados do paralelogramo são congruentes pois possuem a mesma medida x tomada do raio. Além disso, $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$ são perpendiculares, portanto, formam um ângulo reto. Sendo $\overline{AD} \parallel \overline{OB}$ e $\overline{AO} \parallel \overline{BD}$, tem-se que $\overline{AD}$ também é perpendicular a $\overline{BD}$.

4.2.16 Baricentro

Instruções: Dado um triângulo qualquer ABC, com centro em A e raio x, tal que x seja maior que a metade de $\overline{AB}$, trace dois arcos, acima e abaixo do segmento $\overline{AB}$. Com o mesmo raio e centro em B, trace novamente dois arcos, acima e abaixo de $\overline{AB}$, interceptando os arcos traçados anteriormente nos pontos D e E, respectivamente. Marque o ponto de interseção entre o segmento $\overline{DE}$ e o lado $\overline{AB}$ como sendo o ponto médio M, de $\overline{AB}$. Trace o segmento $\overline{CM}$, ligando o vértice ao ponto médio do lado oposto, essa é uma das medianas do triângulo. Realize o mesmo procedimento para traçar as demais medianas $\overline{NB}$ e $\overline{AR}$. O ponto P de interseção entre as medianas traçadas é o Baricentro do triângulo ABC.

Figura 4.17 – Baricentro



Fonte: Autor.

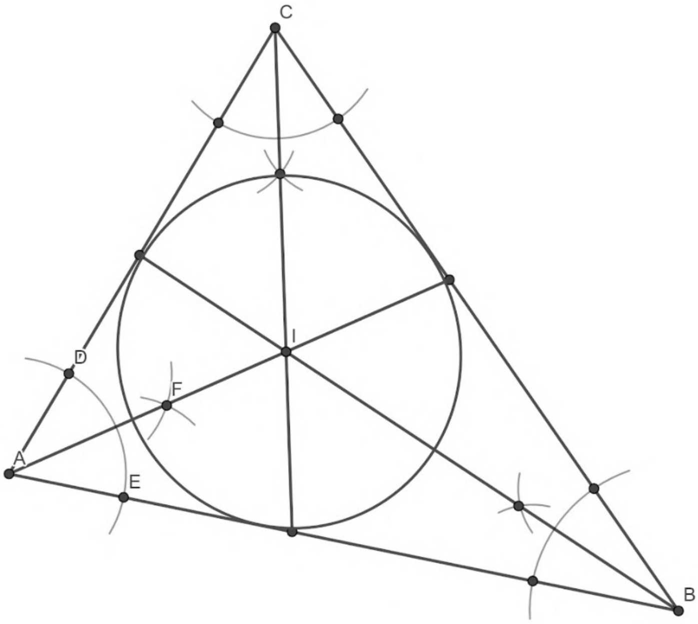
Justificativa: Por construção, note que os quadriláteros ADBE, AICH e ABFC são paralelogramos, e, como visto anteriormente, suas diagonais se interceptam nos seus respectivos pontos médios, assim, $M = \overline{AB} \cap \overline{ED}$ é o ponto médio de $\overline{AB}$, $N = \overline{AC} \cap \overline{HI}$ é o ponto médio de $\overline{AC}$ e $R = \overline{BC} \cap \overline{FG}$ é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Logo, os segmentos $\overline{AR}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CM}$ são as medianas do triângulo ABC, e o ponto P em comum entre elas, é o Baricentro desse triângulo.

Nota: Para melhor visualização do resultado e um desenho com informações mais claras, é recomendado reforçar os traços principais como os lados do triângulo ABC, suas medianas etc., deixando em segundo plano os traços auxiliares.

4.2.17 Incentro

Instruções: Dado um triângulo qualquer ABC, com centro em A, trace um arco de circunferência que intercepte os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ nos pontos D e E. Agora com centro em D, trace novamente um pequeno arco no mesmo sentido que o anterior. Realize o mesmo procedimento, traçando um arco com centro em E que intercepte o anterior em um ponto F. Trace um segmento de reta partindo do vértice A, passando por F e encontrando o lado do triângulo oposto ao vértice. Temos assim a bissetriz do $\angle$CAB. De forma análoga, construa as bissetrizes dos ângulos $\angle$ABC e $\angle$BCA. O ponto I onde as bissetrizes se encontram é justamente o Incentro do triângulo. Para verificar sua característica, com centro em I e raio igual a distância entre I e um dos lados do triângulo, trace uma circunferência e note que os lados do triângulo a tangenciam.

Figura 4.18 – Incentro



Fonte: Autor.

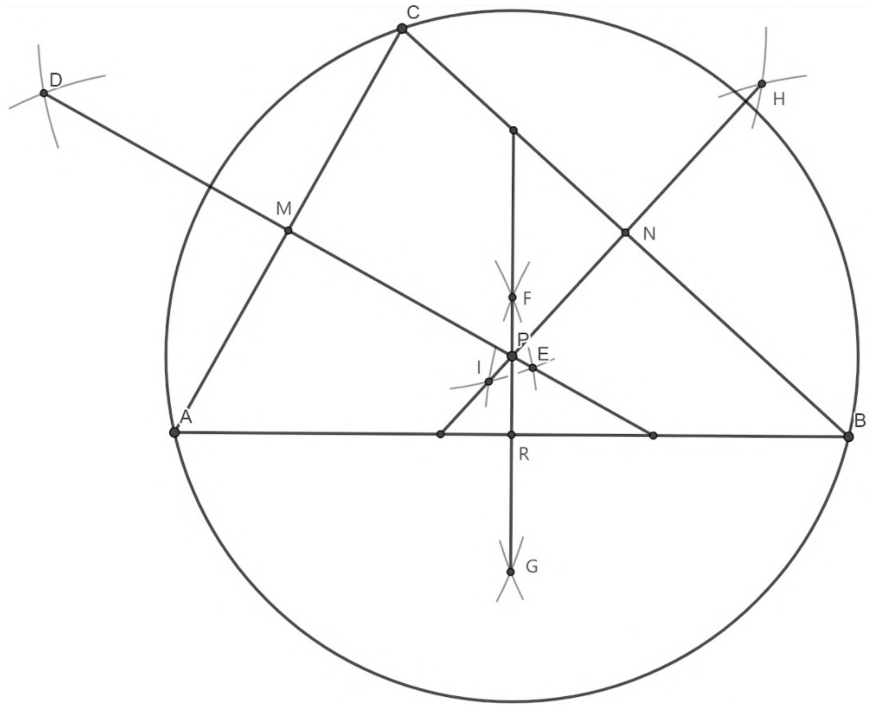
Justificativa: A justificativa está em concordância com a justificativa de Bissetriz de um ângulo (Verifique na subseção 4.2.3). Assim, visto que os segmentos traçados internamente ao triângulo são de fato suas bissetrizes internas, o ponto I comum entre elas, é o Incentro do triângulo.

Nota: Perceba que o ponto I de intersecção entre as bissetrizes está a igual distância dos lados do triângulo. Por ser o centro da circunferência inscrita no triângulo, a distância entre o Incentro e os lados do triângulo é igual a medida do raio da circunferência, tendo em vista que os lados do triângulo tangenciam a mesma.

4.2.18 Circuncentro

Instruções: Dado um triângulo qualquer ABC, com centro em A e raio x, tal que x seja maior que a metade de $\overline{AC}$, trace dois arcos, acima e abaixo do segmento $\overline{AC}$. Com o mesmo raio e centro em C, trace novamente dois arcos, acima e abaixo de $\overline{AC}$, interceptando os arcos traçados anteriormente nos pontos D e E, respectivamente. Assim, construa o segmento $\overline{DE}$, prolongando-o até o lado $\overline{AB}$ do triângulo, como sendo a mediatriz de $\overline{AC}$. Destaque o ponto de intersecção entre a mediatriz construída e o segmento $\overline{AC}$ como R, que é o ponto médio desse lado do triângulo. Repita o procedimento construíndo as mediatrizes correspondentes aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo. O ponto P de encontro das mediatrizes é o Circuncentro do triângulo ABC. Para verificar uma das características desse ponto notável, fixe a ponta seca em P, e, com raio igual a distância de P até um dos vértices, trace uma circunferência e note que é circunscrita ao triângulo.

Figura 4.19 – Circuncentro



Fonte: Autor.

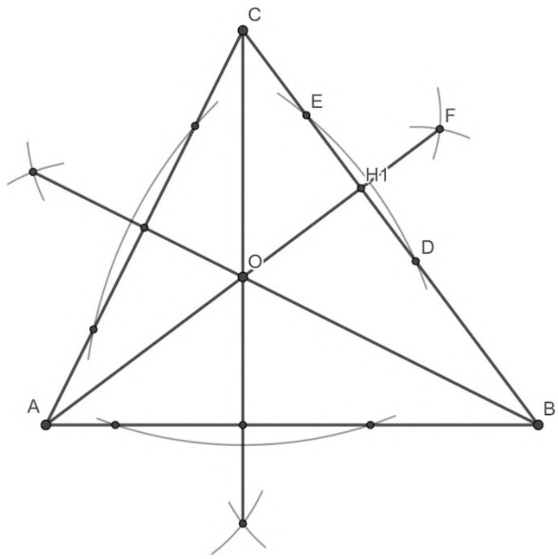
Justificativa: Note que os lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo são respectivamente diagonais dos losangos ADCE, AFBG e BHCI, justificando assim serem perpendiculares aos segmentos $\overline{ED}$, $\overline{FG}$ e $\overline{HI}$ (também diagonais) e interceptarem-se nos devidos pontos médios M, N e R. Assim, de fato, por construção, $\overline{ED}$, $\overline{FG}$ e $\overline{HI}$ são as mediatrizes do triângulo ABC, o ponto em comum entre elas é justamente o Circuncentro.

Nota: Observe que, por construção, a distância entre o Circuncentro e cada um dos vértices do triângulo é igual ao raio da circunferência circunscrita, essa é uma importante propriedade desse ponto notável, o circuncentro sempre está a igual distância dos vértices do triângulo.

4.2.19 Ortocentro

Instruções: A partir da construção de um triângulo qualquer ABC, para traçar as alturas, fixe a ponta seca em um dos vértices, como o A, por exemplo, e com raio maior que a distância desse vértice até o lado oposto a ele, trace um arco que o intercepte nos pontos E e D. Agora, construa a mediatriz correspondente ao segmento $\overline{ED}$, trançando dois arcos, com centro em E e em D, que se encontram no ponto F. Trace o segmento que vai do vértice A até o ponto F, onde a intersecção de $\overline{AF}$ com o lado oposto ao vértice A é a altura H1, do triângulo ABC. Para traçar as demais alturas realize o mesmo processo partindo dos vértices B e C. Por fim, o ponto O onde as alturas se interceptam é o Ortocentro do triângulo.

Figura 4.20 – Ortocentro



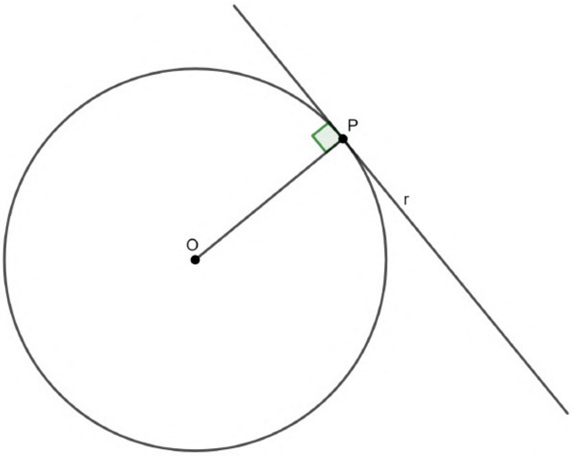
Fonte: Autor.

Justificativa: Como uma das propriedades da mediatriz é ser perpendicular ao segmento ao qual ela se refere, temos que ela também é perpendicular a reta que contém esse segmento. Sabendo que as mediatrizes traçadas são perpendiculares aos segmentos que estão contidos nos lados do triângulo, é notável que as mediatrizes são perpendiculares também aos lados. Por construção, note que as hipotéticas alturas foram traçadas como segmentos contidos nas mediatrizes, assim, de fato elas são perpendiculares aos lados do triângulo.

4.2.20 Construção de reta tangente a circunferência

Instruções: Dada a circunferência de centro O e raio $\overline{OP}$, podemos traçar a reta tangente a circunferência no ponto P ao traçar a reta perpendicular ao segmento $\overline{OP}$ que contém o ponto P. Para isso, prolongue o segmento $\overline{OP}$ e siga as intruções de reta perpendicular que passa por um ponto P contido em r disposto na subseção 4.2.12

Figura 4.21 – Reta Tangente a Circunferência



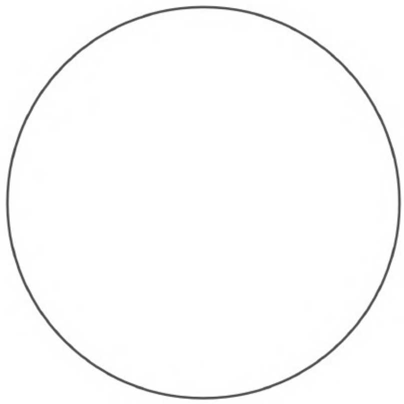
Fonte: Autor.

Justificativa: De acordo com a construçao, $r \perp \overline{OP}$, assim, nos resta saber se P é de fato o ponto de tangência. Determinando um ponto Q em r, distinto de P, temos que $\overline{OQ} > \overline{OP} =$ raio (dado que $\overline{OP}$ é a distância entre o ponto O e a reta r). Sabendo que $\angle QPO = 90°$ é o maior ângulo do $\triangle OQP$, temos então que Q não pertence a circunferência em questão, assim P é o único ponto em comum entre a reta r e a circunferência tomada, portanto, ponto de tangência.

5 ALGUNS PROBLEMAS E SUAS SOLUÇÕES

Com o intuito de fixar e fortalecer o conhecimento adquirido por meio das construções realizadas até aqui, será apresentado, neste capítulo, a resolução de alguns problemas geométricos que abordam os conceitos expostos e técnicas desenvolvidas a fim de revisar e exercitá-las.

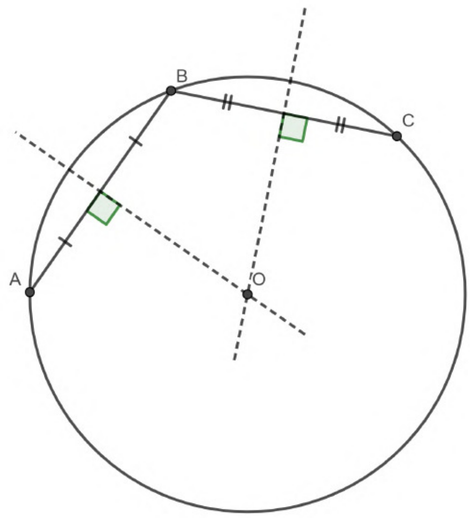
1. Na figura abaixo tem-se uma circunferência, cujo centro não está marcado. Descreva os passos para localizar o mesmo usando apenas régua e compasso.



Descrição dos passos:

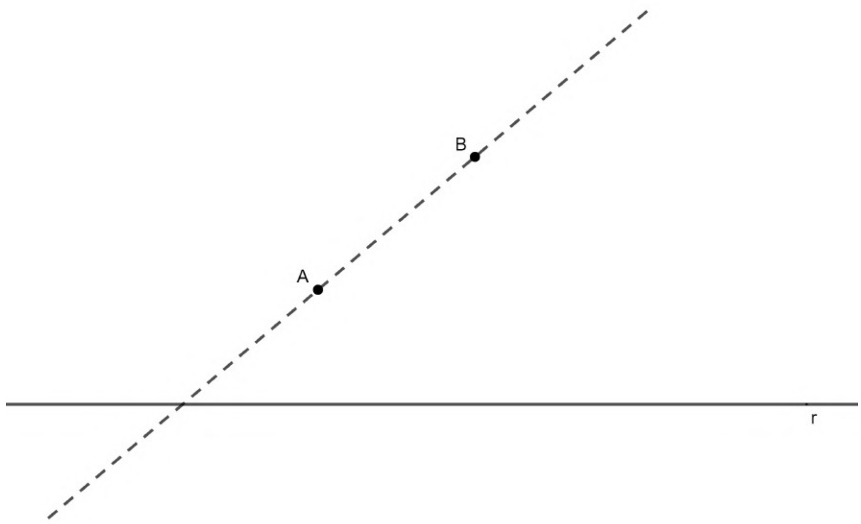
1. Marque na circunferência os pontos A, B e C;
2. Trace as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$;
3. Trace as mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$;
4. Marque o ponto O de intersecção das retas AB e BC, este será o centro da circuferência.

Figura 5.1 – Solução



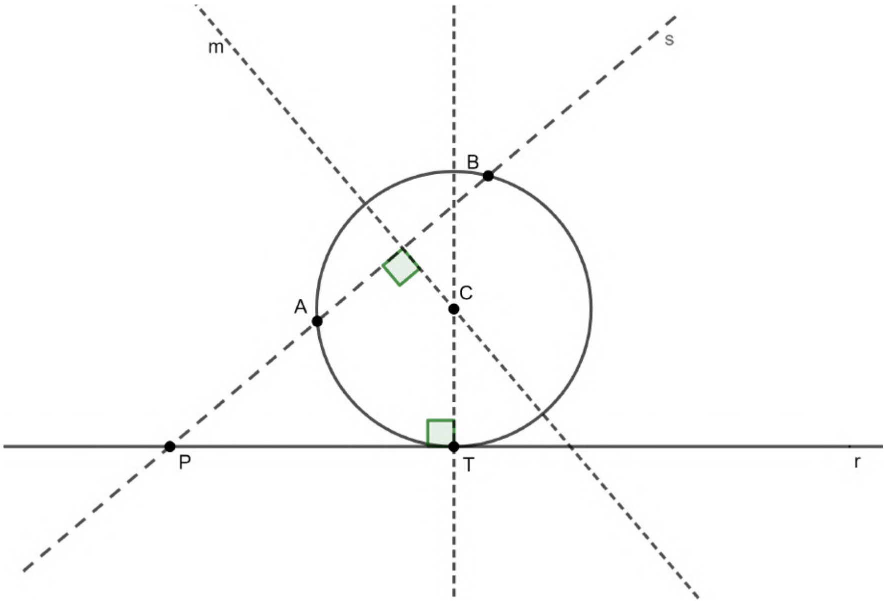
Fonte: Autor.

2. (ENQ 2017 - 1) Descreva a construção, com régua e compasso, do círculo tangente a r e contendo os pontos A e B da figura abaixo.



Supondo o problema resolvido, temos:

Figura 5.2 – Solução



Fonte: Autor.

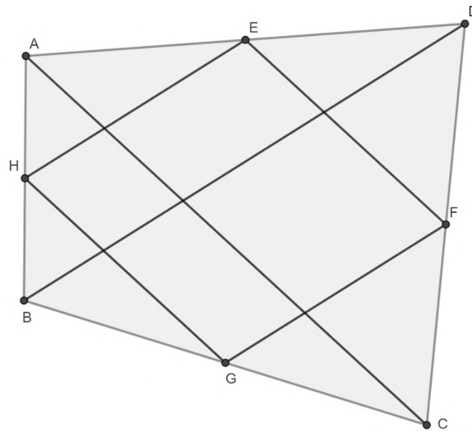
Descrição dos passos:

1. Marque o ponto P de intersecção da reta r com a reta que passa pelos pontos A e B;
2. Com a ponta seca do compasso centrada em P e abertura igual a $\sqrt{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}$ marque na reta r o ponto T;
3. Trace a reta s perpendicular à r passando por T;
4. Trace a mediatriz m do segmento $\overline{AB}$;
5. Marque o ponto C de intersecção das retas m e s;
6. Trace a circunferência de centro C e raio $\overline{CT}$.

3. Seja ABCD um quadrilátero qualquer. Mostre que os pontos médios de seus lados são os vértices de um paralelogramo.

   Solução: Traçando a diagonal $\overline{\text{AC}}$ é possível notar que o segmento $\overline{\text{EF}}$ é na verdade a base média do triângulo ADC, e portanto, $\overline{\text{EF}} \parallel \overline{\text{AC}}$. Do mesmo modo, o segmento $\overline{\text{HG}}$ é base a média do triângulo ABC, logo $\overline{\text{GH}} \parallel \overline{\text{AC}}$. Assim, se $\overline{\text{EF}} \parallel \overline{\text{AC}} \parallel \overline{\text{GH}}$, é correto então afirmar que $\overline{\text{EF}} \parallel \overline{\text{GH}}$. Analogamente, $\overline{\text{HE}}$ é base média do $\triangle$ABD e $\overline{\text{GM}}$ é base média do $\triangle$BCD, logo $\overline{\text{FG}} \parallel \overline{\text{BD}} \parallel \overline{\text{HE}}$, e portanto, $\overline{\text{GF}} \parallel \overline{\text{HE}}$. Dessa forma podemos concluir que o quadrilátero formado pelos pontos médios de ABCD trata-se, de fato, de um paralelogramo, pois seus lados opostos são paralelos.

Figura 5.3 – Questão 3



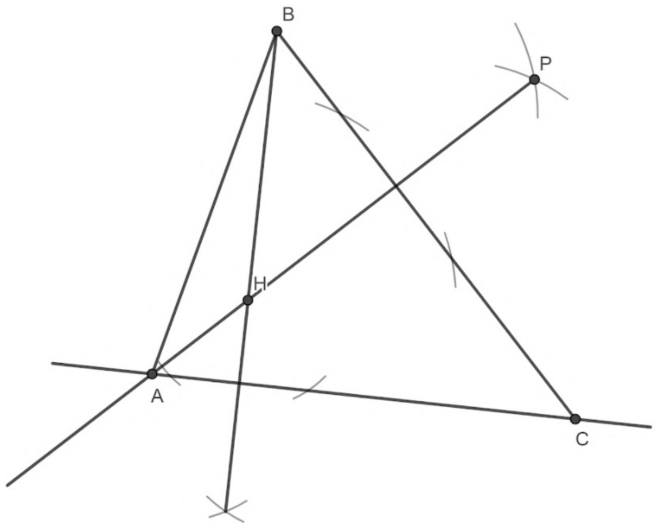
Fonte: Autor.

4. (profmat) De um triângulo ABC, conhecemos as posições dos vértices B e C e do ortocentro H. Construa, com régua e compasso o vértice A.

   Solução:

   1. Trace a reta perpendicular ao segmento $\overline{BC}$ que passa por H;
   2. Trace a semirreta $\overrightarrow{BH}$;
   3. Trace a reta perpendicular a semirreta $\overrightarrow{BH}$ passando pelo ponto C;
   4. Marque o ponto de intersecção entre a semirreta $\overrightarrow{PH}$ e a reta que passa por C, esse é o vértice A do triângulo ABC.

Figura 5.4 – Questão 4

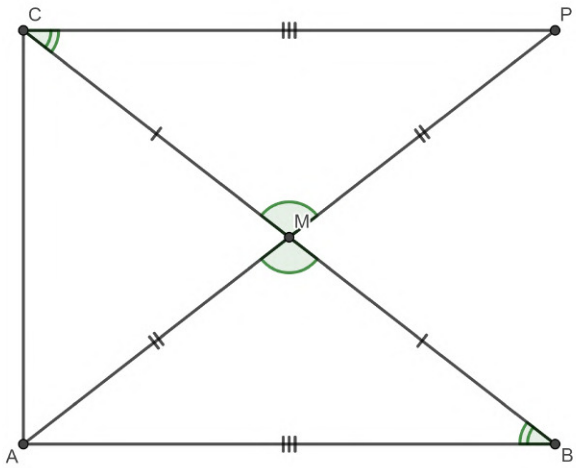


Fonte: Autor.

5. Mostre que a mediana relativa a hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.

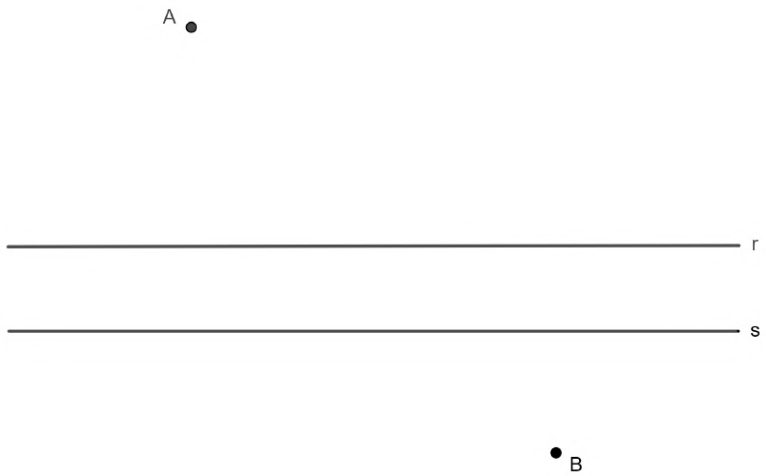
   Solução: Dado o triângulo retângulo ABC cujo segmento $\overline{\mathrm{AM}}$ corresponde a mediana relativa a hipotenusa $\overline{\mathrm{CB}}$, ao prolongar $\overline{\mathrm{AM}}$ até o ponto P tal que $\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{MP}}$, pode-se notar, pelo caso LAL, que os triângulos CMP e AMB são congruentes. Logo, $\angle$MBA $\equiv \angle$MCP, o que implica que $\overline{\mathrm{AB}} \parallel \overline{\mathrm{CP}}$, e portanto $\overline{\mathrm{AC}}$, por ser perpendicular a $\overline{\mathrm{AB}}$, é também perpendicular a $\overline{\mathrm{CP}}$. Por outro lado, observe que também por LAL, os triângulos ABC e PAC são congruentes, pois como $\triangle$AMB $\equiv$ $\triangle$PCM temos que $\overline{\mathrm{CP}} \equiv \overline{\mathrm{AB}}$, assim, $\overline{\mathrm{PA}} \equiv \overline{\mathrm{BC}}$.

Figura 5.5 – Questão 5



Fonte: Autor.

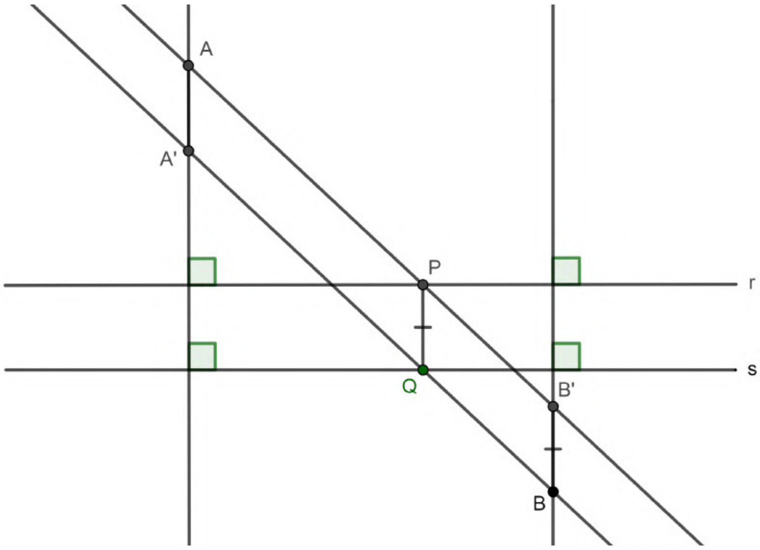
6. As paralelas r e s são as margens de um rio e os pontos A e B estão em lados opostos desse rio. Determine a posição de uma ponte PQ perpendicular às margens $P \in r$ e $Q \in s$ de forma que o percurso $AP + PQ + QB$ seja mínimo.



Descrição dos passos:

1. Trace por A e por B as perpendiculares às retas r e s;
2. Marque na perpendicular traçada no passo anterior o ponto B' tal que $\overline{BB'} = d(r, s)$;
3. Trace a reta que passa pelos pontos A e B';
4. Marque o ponto P de interseção da reta r com a reta que passa por A e B';
5. Trace por B a paralela a reta que passa por A e B';
6. Marque o ponto Q de intersecção da reta s com a reta construída no passo anterior.

Figura 5.6 – Solução



Fonte: Autor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho desenvolvido está composto por etapas e informações que levam o leitor a construir o conhecimento, partindo do primeiro contato com o conceito, assim como propriedades e demonstrações formais da geometria que se fazem presentes com o objetivo de complementar o conteúdo, seguido de instruções de como construí-lo com régua e compasso e a justificativa que estabelece a associação entre a representação e o conceito.

A justificativa apresentada se difere da demonstração pelo seu caráter não formal. Enquanto a demonstração matemática é considerada a prova da veracidade do conceito, a justificativa surge, nesse contexto, como uma forma de associar a construção do desenho ao conceito abordado, explicando o porquê de tal associação ser válida.

É importante ressaltar que as construções aqui apresentadas é apenas uma parcela do rol de construções geométricas que podem ser traçadas com régua e compasso, entretanto, como expresso, essas são consideradas fundamentais. De certo, utilizando as técnicas e instruções aqui trabalhadas é possível desafiar-se e construir a representação de distintos conceitos e propriedades geométricas.

As construções podem ser facilmente levadas para a sala de aula quando associadas ao método de ensino correto. O desenho e a técnica que ele exige, desenvolve habilidades importantes de disciplina, coordenação motora, raciocínio e independência, levando o aluno a posição de protagonista no processo de construção do seu próprio conhecimento, como algumas de suas vantagens.

Finalizando as últimas considerações, é importante ressaltar que, com o intuito de promover melhor visualização e organização textual, as figuras apresentadas na Seção 4.2 foram realizadas por meio do software de geometria dinâmica GeoGebra Classic.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ensino médio. In: **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. [s.n.], 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2021.

CASTRO, C. E. L. d. A importância do desenho geométrico no ensino da geometria. **Revista da ORM/SC**, São Paulo, n. 15, p. 80–87, 2018.

COSTA, E. A. S.; ROSA, M. Historiando o desenvolvimento do desenho geométrico: das inscrições nas cavernas à contemporaneidade. **VIDYA**, v. 35, n. 1, p. 57–69, 2015.

COSTA, J. L. **Prática de Ensino: Construções Geométricas**. Cabo Frio: Visão Editora, 2016.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. São Paulo: Atual, 2013. v. 9.

JARDINETTI, J. R. B. Abstrato e o concreto no ensino da matemática: algumas reflexões. **Bolema**, n. 12, 1997.

NASCIMENTO, A. B. **Um caderno de construções geométricas para sala de aula**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, 2019.

NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PIROLA, N. A.; TORTORA, E. Resolução de problemas geométricos: um estudo sobre o desenvolvimento conceitual e os conhecimentos declarativos de figuras planas nos iniciais do ensino fundamental. **Revista REAMEC**, v. 1, n. 4, p. 124–125, 2016.

PUTNOKI, J. C. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico**. São Paulo: Scipione, 1993.

SOUZA, D. M.; VASCONCELOS, M. B. F.; FERNANDES, M. C. V. A importância do desenho como recurso para o ensino e aprendizagem em trigonometria. In: **VIII EPBEM**. Campina Grande: [s.n.], 2014. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/editora/anais/epbem/2014/Modalidade_1datahora_21_10_2014_17_18_42_idinscrito_901_f800ebd678548648791827ff4d2b8333.pdf>. Acesso em: 22 nov. 2021.

VILLA, A. D. A resolução de problemas matemáticos, utilizando como ferramenta o ensino do desenho geométrico: A importância do desenho geométrico no 8º e 9º anos da educação básica. **O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense**, v. 1, 2012.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Restrito

Trabalho de Conclusão de Curso

Assunto:	Trabalho de Conclusão de Curso
Assinado por:	Nilmara Araújo
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Restrito
Hipótese Legal:	Direito Autoral (Art. 24, III, da Lei no 9.610/1998)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples