INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JÉSSICA SANTOS SILVA

UMA ANÁLISE DO CONHECIMENTO DE ESFERA NOS LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE DUVAL

CAJAZEIRAS-PB
2022

JÉSSICA SANTOS SILVA

UMA ANÁLISE DO CONHECIMENTO DE ESFERA NOS LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE DUVAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Fernanda Andrea Fernandes Silva.

CAJAZEIRAS-PB

2022

JÉSSICA SANTOS SILVA

UMA ANÁLISE DO CONHECIMENTO DE ESFERA NOS LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE DUVAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Data de aprovação: 27/04/2022

Banca Examinadora:

Fernanda Andréa F. Silva

Prof.ª Dra. Fernanda Andrea Fernandes Silva
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

Stanley Borges de Oliveira

Prof. Me. Stanley Borges de Oliveira
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

William de Souza Santos

Prof. Dr. William de Souza Santos
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Suellen Conceição Ribeiro CRB-2218

S586u Silva, Jéssica Santos

Uma análise do conhecimento de esfera nos livros didáticos à luz da teoria dos registros de representações semióticas de Duval / Jéssica Santos Silva. – Cajazeiras/PB: IFPB, 2022.

89f.:il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba-IFPB, Campus Cajazeiras. Cajazeiras, 2022.

Orientador(a): Prof.a Dra. Fernanda Andrea Fernandes Silva.

1. Livros didáticos. 2. Aprendizagem. 3. Matemática. 4. Esfera.

I. Silva, Jéssica Santos. II. Titulo.

CDU: 51 S586u

Dedico este trabalho a Deus que sempre está comigo, sem Ele nada seria possível.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à Deus todo poderoso, por sempre me dá força e manter minha fé firme em todos os momentos.

À minha família, em nome dos meus pais Josefa Santos Silva e Roberto Caetano da Silva, por terem me proporcionado ensinamentos que me ajudaram chegar até aqui e por sempre estarem presentes na minha vida.

Aos meus amigos e colegas de curso, que de alguma forma contribuíram para a realização desse momento tão especial.

À minha orientadora Prof.ª Dra. Fernanda Andrea Fernandes Silva, por toda ajuda, colaboração, dedicação e ensinamentos transmitidos na elaboração desse trabalho.

A todos os docentes do curso de Licenciatura em Matemática, da instituição IFPB – Cajazeiras, por todo empenho e dedicação, que foram fundamentais para a minha formação acadêmica e pessoal.

A todos, meus sinceros agradecimentos.

"O céu deve ser necessariamente esférico, pois a esfera, sendo gerada pela rotação do círculo, é, de todos os corpos, o mais perfeito".

Aristóteles

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo analisar um Livro Didático (LD) do 2° ano do Ensino Médio quanto ao conhecimento de Esfera, mais precisamente, quanto ao volume da esfera e área da superfície esférica, à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Raymond Duval. Esta aborda o modelo de funcionamento cognitivo do pensamento matemático e analisa as dificuldades encontradas na aprendizagem da Matemática considerando a forma de acesso aos objetos matemáticos, que se dá por meio das suas representações semióticas. Dessa forma, esta pesquisa caracteriza-se como sendo de abordagem qualitativa, do tipo bibliográfica, se deu por meio de estudo descritivo do tipo exploratório e de natureza aplicada. Como modelo de pesquisa, foi utilizado o método hipotético dedutivo. Considerando a importância do LD e que este, é o recurso principal utilizado pelos professores em sala de aula, analisamos a abordagem do livro didático aprovado no PNLD/2021 e mais adotado pelas escolas estaduais do município de Cajazeiras – PB, quanto aos registros de representações e os tipos de conversões dos objetos, volume da esfera e área da superfície esférica trabalhadas no LD. Com isso, identificamos que o LD apresenta lacunas em relação aos objetos matemáticos volume da esfera e superfície esférica, pois nas questões propostas analisadas, foi priorizado o registro em língua natural dos objetos matemáticos, o que na visão de Duval (2004), não favorece na compreensão dos objetos geométricos, pois os tratamentos discursivos e figurais devem ser feitos de forma simultânea. Com relação as conversões, apontamos que o livro prioriza algumas conversões entre registros de representações semióticas do volume da esfera e da área da superfície esférica em detrimento de outras. Concluímos, que no processo de ensino-aprendizagem de matemática o professor não deve limitar-se apenas ao livro didático, pois utilizar apenas este recurso não garante a compreensão dos objetos matemáticos.

Palavras-chave: Aprendizagem da Matemática; Livro Didático; Esfera; Registros de Representações; Conversões.

ABSTRACT

The present work aimed to analyze a Textbook (LD) of the 2nd year of high school regarding the knowledge of Sphere, more precisely, regarding the sphere volume and spherical surface area, in light of Raymond Duval's Theory of Records of Semiotic Representations (TRRS) It approaches the cognitive functioning model of mathematical thinking and analyzes the difficulties encountered in the learning of mathematics considering the form of access to mathematical objects, which takes place through their semiotic representations. Thus, this research is characterized as being of qualitative approach, of the bibliographic type, was carried out through a descriptive study of exploratory type and applied nature. As a research model, the hypothetical deductive method was used. Considering the importance of LD and that this is the main resource used by teachers in the classroom, we analyzed the approach of the textbook approved in the PNLD/2021 and more adopted by the state schools of the municipality of Cajazeiras – PB, regarding the records of representations and types of conversions of objects, volume of the sphere and spherical surface area worked in the LD. With this, we identified that LD presents gaps in relation to mathematical objects sphere volume and spherical surface, because in the proposed questions analyzed, the registration in natural language of mathematical objects was prioritized, which in Duval's view (2004), does not favor the understanding of objects because discursive and figurative treatments should be done simultaneously. With regard to conversions, we point out that the book prioritizes some conversions between records of semiotic representations of the volume of the sphere and the spherical surface area to the detriment of others. We conclude that in the process of teaching-learning mathematics the teacher should not be limited to because using only this resource does not guarantee the understanding of mathematical objects.

Keywords: Mathematics learning; Textbook; Sphere; Representation Records; Conversions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
LD	Livro Didático
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
SIMAD	Sistema de Material Didático
TRRS	Teoria dos Registros de Representações Semióticas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática tem gerado grandes discussões acerca do processo de ensino-aprendizagem dos docentes e educandos, as dificuldades existentes na educação básica, no que se refere as abordagens dos conteúdos matemáticos, fazem pesquisadores e professores desenvolverem pesquisas que debatem métodos e técnicas de aprendizagem que buscam facilitar o processo de compreensão dos alunos. A Geometria espacial é um dos campos da matemática, que tem importante papel na educação básica de leitura e interpretação do espaço, já que seu estudo busca desenvolver o raciocínio geométrico e compreender a relação entre espaço e forma.

Dessa forma, temos como objeto de pesquisa deste trabalho, a Esfera, a qual é um Corpo redondo e faz parte da geometria espacial, que requer um processo de familiarização com os sólidos geométricos e no desenvolvimento de percepções e habilidades dos sujeitos em identificar estes sólidos, as formas e espaços de maneira que consiga entender o conteúdo geométrico. Além disso, é bastante comum encontrarmos objetos com formato esférico no dia a dia, como por exemplo, a bola de futebol, o Globo Terrestre entre outros objetos.

A escolha da Esfera para este trabalho, surgiu por uma instigação pessoal, como admiradora das curiosidades e fatos científicos do Espaço, que envolvem a matemática. Entendo que é importante o estudo desse objeto matemático, pois por meio de conhecimentos esféricos pode-se compreender melhor como funcionam alguns acontecimentos no planeta Terra, a exemplo do fuso horário e das projeções cartográficas, como também, pode possibilitar um significado do seu estudo aos alunos e gerar interesse pela astronomia. Para isso, o ensino deste objeto matemático deve ser satisfatório, de modo que se consiga a compreensão dos alunos.

Desse modo, a Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba (2020), regulamenta o ensino da esfera na 2ª série do Ensino Médio. Assim, neste trabalho abordaremos o estudo da Esfera de acordo com o que é abordado no Ensino Médio. Seguindo essa premissa, teremos como foco principal os objetos matemáticos volume da Esfera e área da superfície esférica.

Essa pesquisa tem como fundamentação teórica, a Teoria de Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Raymond Duval, a qual aborda o modelo cognitivo do pensamento, analisando os obstáculos existentes na aprendizagem da matemática e considerando a forma de acesso aos objetos matemáticos, que de acordo com Duval (2016, p.

17), “são unicamente acessíveis por meio da produção de representações semióticas”, assim, os objetos matemáticos não possuem existência física e só é possível ter acesso a estes objetos, por meio de suas representações semióticas.

Por outro lado, o Livro Didático (LD) é um dos principais recursos utilizados pelos docentes na sala de aula, pois possibilita a organização do currículo escolar e o planejamento de aulas, mediante sua pluralidade de abordagens e usos. Para Saviani (2007) o livro didático é um instrumento insubstituível e adequado para a transformação da mensagem científica em educativa. Em matemática, Carvalho e Lima (2010) apontam que o LD tem papel fundamental de favorecer a aquisição dos conteúdos pelos discentes, bem como auxilia na avaliação da aprendizagem. Diante disto, podemos afirmar que é essencial analisar o LD trabalhado no âmbito escolar.

Neste sentido, surgem os questionamentos: como os livros didáticos abordam o objeto matemático esfera, quanto às suas representações? Estas abordagens podem levar os alunos a uma compreensão desse objeto matemático?

Sendo assim, esse trabalho tem como objetivo geral analisar um Livro Didático do 2° ano do Ensino Médio quanto ao conhecimento de Esfera, mais precisamente, quanto ao volume da esfera e área da superfície esférica, à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas. Para isso, temos como objetivos específicos: Analisar a BNCC e a Proposta curricular do Ensino médio da Paraíba quanto aos objetos matemáticos volume da esfera e área da superfície esférica; analisar o LD quanto aos registros de representações semióticas dos objetos matemáticos volume da esfera e área da superfície esférica; analisar o LD quanto as conversões entre registros de representações semióticas dos objetos matemáticos volume da esfera e área da superfície esférica.

Nessa perspectiva, esta pesquisa caracteriza-se como sendo de abordagem qualitativa, do tipo bibliográfica, se deu por meio de estudo descritivo do tipo exploratório e de natureza aplicada. Como modelo de pesquisa, buscando entender o problema, foi utilizado o método hipotético dedutivo, “esse modelo gera, através de um trabalho lógico, as hipóteses, os conceitos e os indicadores para os quais será necessário buscar correspondentes no real” (GERHART, 2009, p. 54).

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos a justificativa, a problemática da pesquisa, os objetivos gerais e específicos e a estrutura do trabalho. No segundo capítulo, trazemos uma pesquisa de ‘estado da arte’ que apresentam pesquisas com contribuições relevantes sobre o ensino da Esfera no Ensino Médio e da Geometria. No terceiro capítulo, apresentamos a fundamentação teórica com considerações importantes acerca da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, bem como as contribuições que trazem a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba. No quarto capítulo, apresentamos todo o trajeto metodológico deste trabalho. No quinto capítulo, trazemos a análise do LD e a síntese dos resultados. Para finalizar, apresentamos as considerações finais.

2 ESTADO DA ARTE DE PESQUISAS QUE TRAZEM REFLEXÕES E CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DA GEOMETRIA E DO OBJETO MATEMÁTICO ESFERA

Neste capítulo apresentamos pesquisas que trazem reflexões acerca da educação matemática, bem como do processo de aprendizagem para o ensino da geometria espacial e da esfera. Estes estudos foram encontrados por meio de pesquisa denominada estado da arte ou estado do conhecimento, que apresenta caráter bibliográfico e desafiador para os pesquisadores pois, "buscam discutir uma certa produção acadêmica em diferentes campos do conhecimento, tentando responder que aspectos e dimensões vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares, de que formas e em que condições têm sido produzidas" (FERREIRA, 2002, p. 258) estas produções acadêmicas.

2.1 Impressões iniciais acerca das Pesquisas Selecionadas

Para que fossem identificadas as pesquisas de interesse deste trabalho, recorremos ao banco da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), que traz pesquisas pertinentes de teses e dissertações defendidas nos programas brasileiros de Pós-Graduação, considerando o período entre 2010 a 2021.

Para selecionar as pesquisas, na primeira análise fizemos a leitura do resumo, palavras chaves e introdução, a fim de investigar se a pesquisa poderia contribuir com este trabalho. Assim, identificamos o conteúdo matemático trabalhado, o nível de ensino dos sujeitos envolvidos na pesquisa e se as mesmas abordavam a TRRS como fundamentação teórica.

Foram feitas duas buscas no BDTD em janeiro de 2022, na primeira foi pesquisado o termo "esfera em matemática", que resultou em 535 resultados de teses e dissertações, sendo que, após a análise descrita no parágrafo anterior, foi identificado do que se tratava cada trabalho, e assim, foram selecionadas apenas 3 dissertações, pois apontam a abordagem e o ensino da esfera no Ensino Médio. Na busca seguinte, foi pesquisado o termo "geometria espacial e a teoria dos registros de representações semióticas", resultando em 7 dissertações, destas, duas foram selecionadas, pois abordam o ensino da geometria e estão fundamentadas na TRRS de Duval. Vale ressaltar que foram encontradas poucas pesquisas sobre o ensino da esfera com abordagem na geometria espacial, como também, não foram encontradas pesquisas que trabalham o objeto matemático esfera com embasamento na TRRS, o que justifica serem feitas duas buscas separadamente.

2.2 Pesquisas com destaque no Ensino da Esfera

Dentre as pesquisas selecionadas, quanto ao ensino do sólido esfera, tomamos como referência os trabalhos de Medeiros (2014), Tavares (2019) e Pilati (2015).

O trabalho de Medeiros (2014) apresenta um estudo sobre o ensino das fórmulas para o cálculo do volume da esfera e da área da superfície esférica, para isto, o autor definiu a pesquisa como sendo de caráter quanti-qualitativo e tem como objetivo principal, identificar de que forma estes conteúdos são abordados e quais os métodos utilizados por professores em sala de aula. Por meio de um questionário composto por 14 questões objetivas e subjetivas, foram entrevistados 30 professores do ensino médio das redes de ensino pública, estadual e federal da cidade de Natal – RN.

Dentre os resultados obtidos mediante o questionário, Medeiros (2014) ressalta quanto ao ensino de área e volume da esfera e a importância da abordagem geométrica em sala de aula que,

> [...] a familiarização com as figuras geométricas e o desenvolvimento de habilidades ligadas à percepção espacial são essenciais em várias situações escolares, no dia a dia das pessoas e no exercício das mais variadas profissões. O conhecimento geométrico pode ser caracterizado pelo exercício de habilidades que configuram uma estrutura comportamental a partir da qual se pode apreender o significado e as funções do ensino da geometria (MEDEIROS, 2014, p. 08).

Neste sentido, torna-se bastante importante a abordagem da TRRS de Duval e as atividades de tratamento e conversão, as quais corroboram para que o estudante estimule o conhecimento de ao menos dois registros de um mesmo objeto, e assim, consiga desenvolver a habilidade de reconhecer a geometria e o objeto matemático esfera, em situações problemas do cotidiano.

Quanto ao uso das fórmulas e dos materiais concretos, 73% dos docentes entrevistados afirmaram que só utilizam fórmulas nas aulas e 50% disseram não utilizar materiais concretos. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN’s (BRASIL, 1997, p. 127)

> O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades.

Medeiros (2014) ressalta que as dificuldades relatadas pelos professores entrevistados, mostram a necessidade de abordar a geometria de forma mais simples e acessível ao entendimento do aluno. Mediante os resultados da pesquisa, o autor afirma que, pode-se utilizar as resoluções matemáticas para a geometria espacial construídas no estudo por ele apresentado, como um caminho para o professor justificar e simplificar o ensino de área e volume da esfera em sala de aula. Com isso, o autor apresenta a noção intuitiva e a definição de volume, como também, aborda o volume da esfera usando o Princípio de Cavalieri, como também, usando aproximações.

O trabalho de Tavares (2019) traz contribuições para o ensino do cálculo do volume da esfera e da área da superfície esférica, e é caracterizado como uma pesquisa bibliográfica, a qual foi realizada em livros de geometria, artigos, sites e revistas especializados em geometria e dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Como resultado desta pesquisa bibliográfica, foi verificado que a literatura aborda o volume da esfera por intermédio do método da exaustão inscrevendo cilindros retos na semiesfera.

Essa pesquisa apresentada por Tavares (2019), possui o objetivo de apresentar estratégias para determinar as relações para o cálculo do volume da esfera e da área da superfície esférica que podem ser adaptadas e utilizadas pelo professor de matemática no Ensino Médio, que a partir destas estratégias, pode elaborar atividades para a sala de aula.

Há uma grande relevância ao investigar o contexto histórico do objeto matemático trabalhado, o professor amplia a familiarização com o conteúdo abordado em sala. Tavares (2019) ressalta a importância do ensino da geometria Euclidiana no Ensino Médio e o quanto é imprescindível explorar o seu papel na evolução humana, como também, a sua ligação com a própria matemática.

Assim como na pesquisa de Medeiros (2014), Tavares (2019) também aborda o Princípio de Cavalieri no cálculo do volume da esfera, além de também abordar o segundo Teorema de Pappus, o Teorema de Arquimedes e o método da exaustão. Os dois autores destacam a importância de mediar o ensino da esfera de forma que não sejam apenas apresentadas as fórmulas. Com as pesquisas, eles sugerem que a abordagem deste conteúdo seja também, por meio de demonstrações, teoremas e definições, para facilitar a aprendizagem dos alunos.

A partir disto, pode-se destacar a importância de entender a forma de pensar em matemática citada por Duval (2018), onde ele afirma que a matemática tem uma característica própria de pensar e trabalhar, o que torna um desafio fazer com que os alunos consigam adquirir esse modo de pensar e trabalhar que é essencial para a aquisição dos conceitos matemáticos. Dessa maneira, apenas apresentar as fórmulas do cálculo do volume da esfera e da área da superfície esférica aos discentes, não garante que os mesmos consigam alcançar este modo matemático de pensar e trabalhar.

Tavares (2019) menciona aplicações da esfera e da superfície esférica no cotidiano e descreve três atividades sobre o volume da esfera que podem ser adaptadas para o Ensino Médio e reforça que é muito mais enriquecedor propor alternativas para justificar ou deduzir a relação do cálculo do volume da esfera. Em umas das atividades é utilizado o *software* GeoGebra 3D, a autora defende a utilização de ferramentas computacionais de forma a ampliar as possibilidades de entendimento pelos estudantes das relações geométricas abordadas, bem como facilita na compreensão das demonstrações matemáticas estudadas e contribui com o registro de elementos gráficos para as aulas de geometria espacial.

Com isso, a autora busca uma motivação dos professores de matemática, de modo que organizem atividades que comprovem as relações matemáticas e não abordem apenas a apresentação destas relações, e também, que utilizem aplicativos de geometria dinâmica na organização e aplicação destas atividades.

A pesquisa de Pilati (2015) nos traz outro olhar, pois a mesma visa apresentar vários métodos que possibilitam determinar o cálculo do volume da esfera de forma eficaz, geral e sistemática. Dessa forma, é estimado o volume da esfera por aproximações por somas de Riemann utilizando cilindros, prismas de base quadrada e retangular e com a inscrição de sólidos geométricos na esfera de raio r, além de mostrar a existência de um prisma de base quadrada, o qual o volume é igual ao volume da esfera, utilizando a quadratura do círculo.

Como nas pesquisas de Medeiros (2014) e Tavares (2019), Pilati (2015) também demonstra o Princípio de Cavalieri para o cálculo de áreas e volumes da esfera, da mesma forma que é abordado nos Livros Didáticos que utilizam este princípio como método. Com isto, a autora busca responder se o Princípio de Cavalieri é, de fato, o melhor método a ser abordado no Ensino Médio.

A autora conclui que mediante todos os métodos apresentados no decorrer do trabalho, é fundamental a reflexão dos cálculos obtidos nas tentativas de aproximação do volume da esfera apresentados. Dessa maneira, o Princípio de Cavalieri é o mais acessível para os discentes do Ensino Médio, pois se baseia em conhecimentos já vistos e adquiridos pelos educandos, bem como possui uma abordagem com cálculos mais simples e que dependem apenas do raio da esfera, tornando a demonstração mais perceptível para os alunos.

Porém, isto não quer dizer que os alunos do Ensino Médio não conseguem compreender as formas de calcular o volume da esfera, realizadas no trabalho, com base no cálculo infinitesimal. "Pelo contrário, pois ao estudar progressões aritméticas e geométricas o aluno constrói conceitos de limites e somas infinitesimais mesmo sem a formalização desses conceitos" (PILATI, 2015, p. 52). Realizar a comparação do volume da esfera, até então desconhecido para o aluno, aos volumes de objetos já conhecidos, é uma forma de mensurá-los.

> Entendemos que o professor deve oportunizar a compreensão de demonstrações matemáticas, pois conhecer o processo de construção do conhecimento desperta o interesse do educando em investigar, planejar, criar e testar hipóteses e analisar resultados, provocando uma visão diferenciada dos saberes desenvolvidos ao longo dos séculos (PILATI, 2015, p. 2).

Portanto, vale salientar o quão é importante que o professor de matemática busque meios diferentes de trabalhar o conteúdo apresentado nos livros didáticos, de modo que permita ampliar as possibilidades de compreensão dos educandos.

2.3 Pesquisas com destaque no Ensino da Geometria

O ensino da Geometria está presente nos documentos normativos que regem a educação básica brasileira, pois esse desenvolve "um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar de forma organizada, o mundo em que vive" (BRASIL, 1998, p. 39). Deste modo, a aprendizagem da geometria auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico dos educandos, bem como possibilita uma abordagem crítica da realidade por meio de comparações com situações concretas do cotidiano.

Com base nisso, foram identificadas duas pesquisas que trabalham a educação matemática, com foco no ensino da geometria, os trabalhos de Kluppel (2012) e Bullmann

(2018), os quais abordam a importância do ensino da geometria no Ensino médio e trazem contribuições relevantes quanto ao ensino deste conteúdo que é indispensável na descoberta da matemática. Vale destacar que, estas pesquisas estão interligadas ao objeto matemático esfera, o qual faz parte da geometria espacial.

Na pesquisa de Kluppel (2012) é apresentada uma análise do conteúdo de geometria em livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental (anos finais) do período de 2002 a 2009, com o objetivo de explicitar como se dá a abordagem deste conteúdo, quanto as especificidades da TRRS, segundo Raymond Duval (2003, 2004). Esta análise foi feita de modo que, foram observados quais aspectos da TRRS são contemplados nos livros didáticos, quanto aos tratamentos figurais e discursivos, bem como quanto as conversões.

O LD é um recurso essencial, com importante função no processo de ensino-aprendizagem na educação básica, por meio deste recurso, o aluno tem acesso aos conteúdos de forma mais prática, possibilita a organização do currículo escolar e o planejamento das aulas. Destes fatos, percebe-se a importância de analisar este recurso.

Além disso, Kluppel (2012, p. 34) afirma que, "por meio da Teoria de Representações Semióticas, Raymond Duval apresenta um caminho para aprendizagem da matemática, ressaltando a necessidade de utilização de diversos registros de representação para o mesmo objeto matemático". Com isto, a autora esclarece a importância da TRRS no ensino da matemática e busca contribuições para a superação dos obstáculos no processo de aprendizagem dos discentes.

A pesquisa de Kluppel (2012) possui abordagem qualitativa e ocorreu por meio de estudo descritivo do tipo exploratório, a análise do tipo pesquisa bibliográfica sobre os livros didáticos de matemática. Foram analisadas cinco coleções de livros didáticos de matemática aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), localizados num acervo da Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), como também, livros didáticos de escolas da rede pública do Paraná.

Dessa forma, foram analisados os conteúdos, definições, demonstrações e exercícios, com base na TRRS. Mediante as análises, a autora ressalta que poucas vezes são apresentadas demonstrações e que existe uma falta de interação entre o tratamento figural e o discursivo,

> As definições apresentadas em livros didáticos precisam cumprir as quatro funções, no tratamento do discurso, e interagir com os tratamentos figurais para permitir, na resolução de exercícios e demonstrações de teoremas e utilização de operações discursivas (descrição, explicação, narração e raciocínio). Considera-se que a não

> congruência dimensional tem que ser explorada para aumentar a percepção das figuras (KLUPPEL, 2012, p. 71).

Apenas a figura por si só não diz nada quanto as suas características, é preciso um tratamento de discurso para que complemente o entendimento que se pretende passar ao aluno. Assim, de acordo com Duval (2004, p. 172) “o discurso não só articula expressões que cumprem uma função referencial, como os nomes em posição de sujeito nas frases, mas também unidades que tem um valor lógico e epistêmico, como as proposições”.

Desse modo, a autora conclui que o LD auxilia no planejamento e na gestão de aulas, tanto pelas atividades e elucidações dos conteúdos, como pelos exercícios propostos. Tal como, que o livro é utilizado pelo professor, e com isto, não se deve esquecer a importância da prática docente no processo de ensino e aprendizagem que se inicia desde a escolha do LD, até a utilização nas aulas.

Contudo, Kluppel (2012) constata que no tocante à geometria, a abordagem deste conteúdo nos livros didáticos apresenta lacunas em relação a aspectos da TRRS, os resultados apontam sobre as possibilidades de fragilidade de interlocução entre o livro, o aluno e o professor, no que diz respeito a forma de apresentação dos exercícios, demonstrações ou definições.

Quanto ao tipo de conversão encontrada nos livros analisados, Kluppel (2012) afirma que foram: da língua natural para um enunciado em língua natural ou uma ou várias representações figurais. Entretanto, essa conversão por vezes negligencia os tratamentos discursivos (aplicação de definições, teoremas...), que são os tratamentos vinculados ao registro de partida. E também não considera que, no caso da conversão inversa, de uma figura em um discurso, existe a exigência de uma explicação, argumentação ou demonstração que leva à expansão discursiva e as distintas formas de funcionamento cognitivo do raciocínio.

A pesquisa de Bullmann (2018) igualmente a pesquisa de Kluppel (2012), tem como fundamentação teórica a TRRS de Duval. Além disso, tem como objeto de estudo a geometria espacial, que trata do estudo dos sólidos geométricos, desenvolve a noção de espaço tridimensional e proporciona ao ser humano habilidades de enxergar o espaço, por meio de diferentes ângulos de observação.

Levando em conta as dificuldades dos estudantes quanto a exploração de conceitos da geometria espacial, o motivo destas dificuldades, identificadas em pesquisas pela autora, é a forma como são propostas as atividades em sala de aula, bem como aulas que não proporcionam a interação do aluno com o objeto matemático e a não utilização de metodologias que possibilitem a produção de sentidos e negociação de significados.

É neste sentido, que Bullmann (2018) busca entender, compreender e refletir o processo de aprendizagem dos discentes de duas turmas do 3º ano do Ensino Médio Integrado de Móveis e Edificações, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Santa Rosa, quanto à geometria espacial. Assim, a pesquisa objetiva identificar aprendizagens quanto aos conceitos específicos de área e volume em sólidos geométricos e para isto, foi desenvolvida uma sequência de ensino que faz uso do *software* GeoGebra considerando atividades de tratamento e conversão dos registros de representações semiótica, de Duval.

Essa sequência de ensino, foi organizada em oito encontros, considerando a abordagem da geometria espacial e pautada nos registros de representação semiótica e o uso do GeoGebra. Os dados foram obtidos por meio das atividades propostas, que buscaram obter diálogos e discussões em dupla de estudantes, e facilitou na construção do material para análise mediante escrita destas discussões.

Bullmann (2018) apresenta estado da arte com pesquisas que trazem contribuições para o ensino da geometria espacial, como também, o impacto do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), por meio de propostas de ensino. Além disso, a autora aponta que

> A escolha de uma metodologia necessita do conhecimento da mesma pelo professor, de uma finalidade e especificidade que auxilie o docente na tomada de decisões coerentes e com possibilidade efetiva de tornar o sujeito ativo no seu processo de aprendizagem. Do contrário, a prática não se potencializa (BULLMANN, 2018, p. 25).

Existem muitos tipos de metodologias de ensino que podem ser utilizadas pelo professor de matemática em sala de aula, mas para que o processo de aprendizagem dos estudantes ocorra de forma satisfatória, é necessário que o docente tenha conhecimento suficiente e domínio dos recursos utilizados, para orientar e conduzir os alunos no desenvolvimento das atividades propostas.

Com base na TRRS, Bullmann (2018) apresenta classificação dos registros de representação utilizadas na pesquisa considerando que a representação dos sólidos geométricos pode ser realizada no plano e no espaço, são elas: Registro Figural (representação geométrica); Registro Simbólico (representação numérica e algébrica) e Registro da Língua Natural (representação natural). A partir disso, é destacado o quanto é importante a “apresentação de vários registros de um mesmo objeto matemático e o trabalho interno que precisa ser desenvolvido mediante atividades de tratamento nos registros e entre os registros, em atividade de conversão" (BULLMANN, 2018, p. 50).

Nos oito encontros que ocorreram para desenvolvimento da pesquisa de Bullmann (2018), foram trabalhados, não necessariamente nesta ordem: a familiarização e apresentação do GeoGebra; construção de sólidos como o cubo, prismas e pirâmide; planificação do cubo; classificação e definição dos prismas e pirâmides; exploração do cálculo de área e volume do sólido prisma e da pirâmide; reconhecimento do formato do cilindro e seus elementos conceituais, a partir de uma atividade prática, com auxílio de material concreto; planificação do Cilindro e dedução da fórmula de área e volume, com respectiva resolução de problemas. As aulas foram de forma expositivas e discursivas, com o auxílio do GeoGebra para construção dos sólidos apresentados.

Bullmann (2018, p. 78) explica que os sexto e sétimo encontros tiveram como objetivos relacionar

> o estudo de Cilindro, a partir das três etapas do processo cognitivo de Duval, ou seja, visualização, construção e raciocínio; compreender a situação proposta na linguagem natural para obter a apreensão do conhecimento; construir o sólido geométrico de modo a demonstrar a apreensão sequencial; interpretar o sólido, seus elementos e articulá-los ao enunciado de modo a explorar a apreensão perspectiva e discursiva; promover a modificação e reorganização como, por exemplo, a planificação do sólido a fim de constatar a apreensão operatória e explorar o cálculo de perímetro, área e volume.

No último encontro com os discentes, foram propostas atividades que tinham de ser representadas e desenvolvidas no *software* GeoGebra. A autora ressalta que todos os encontros foram filmados e transcritos, que constituiu um documento no qual se marcavam os diálogos realizados pela própria, com os estudantes.

Diante das discussões quanto as atividades abordadas na pesquisa, Bullmann (2018) confirma a importância do sistema de produção das representações semióticas no processo de ensino e aprendizagem na matemática, pois a partir de notações simbólicas, a exemplo de códigos e figuras e suas representações; através de enunciado em língua materna; fórmula algébrica ou representação gráfica; torna-se essencial a compreensão dos objetos matemáticos.

Portanto, de acordo com as respostas dos alunos foi possível perceber que a abordagem a partir do registro figural e das conversões entre os registros, que lhes foi apresentado pela a autora, os estudantes conseguiram distinguir o objeto matemático de suas representações, como também relacionar conceitos do cotidiano aos conceitos específicos da matemática.

Com base em todas as pesquisas apresentadas neste trabalho, identificamos que existem lacunas quanto ao ensino do sólido esfera no Ensino Médio. Os docentes, muitas vezes, apenas apresentam as fórmulas de área e volume da esfera para os alunos, sem buscar outras possibilidades que facilitem as apresentações e demonstrações destas fórmulas, e isso pode privar o discente de uma convicção própria a respeito da veracidade de uma afirmação matemática, além de, não possibilitar um significado do estudo deste sólido aos alunos.

Dessa forma, podemos perceber a importância da reflexão do professor em sua prática docente, tal como deve-se buscar métodos que possibilitem a compreensão dos estudantes quanto aos conteúdos matemáticos. Quanto ao ensino da esfera, é essencial que o docente não se limite apenas a apresentar fórmulas, é necessário o uso de demonstrações, teoremas e definições, de modo que o aluno consiga adquirir um entendimento mais apurado.

Também, a contribuição da TRRS de Duval, no ensino da matemática torna-se evidente diante do que foi exposto, as representações de um objeto são fundamentais para a atividade cognitiva do pensamento.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentadas considerações importantes acerca da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de modo geral, bem como, de maneira específica ao estudo da Geometria e aos registros dos objetos matemáticos volume da Esfera e área da superfície esférica. Também traz as contribuições dos currículos sobre o conteúdo.

3.1 Introdução à Teoria dos Registros de Representações Semióticas

O ensino da Matemática tem gerado grandes discussões acerca do processo de ensino-aprendizagem a partir do ponto de vista dos docentes e dos educandos. As dificuldades existentes na educação básica, no que se referem as abordagens dos conteúdos matemáticos, trazem pesquisas que debatem métodos e técnicas de aprendizagem que buscam facilitar o processo de compreensão dos alunos.

Na Teoria dos Registos de Representações Semióticas de Raymond Duval, é abordado o modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, relacionado a registros de representações semióticas. O autor afirma que como os objetos matemáticos não possuem existência física, só é possível ter acesso a estes objetos, por meio de suas representações semióticas.

> As diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias. De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos "reais" ou "físicos". É preciso, portanto, dar representantes. (DUVAL, 2012a, p. 268).

As representações semióticas em matemática são as figuras geométricas, os gráficos, os esquemas, as escritas simbólica, algébrica e numérica, entre outras. Assim sendo, "as representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática" (DUVAL, 2012a, p. 268). Por conseguinte, o autor apresenta um caminho para a compreensão da matemática, através da diferenciação entre um objeto matemático e suas respectivas representações. Daí, portanto, pode ser considerado um paradoxo cognitivo do pensamento matemático, pois:

> De um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas

> que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível. Este paradoxo pode constituir-se num grande círculo para a aprendizagem (DUVAL, 2012a, p. 268).

Por não ser possível ter acesso aos objetos matemáticos de forma imediata, é importante que não se confunda o objeto matemático com sua representação, é a possibilidade de multirepresentação de um mesmo objeto que permite contornar este paradoxo cognitivo do pensamento matemático, o qual passa despercebido no ensino por existir "muito mais importância às representações mentais do que às representações semióticas" (DUVAL, 2012a, p. 269).

À vista disso, vale ressaltar que,

> As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento (DUVAL, 2012a, p. 269).

Dessa forma, as representações semióticas de um objeto não são apenas necessárias para fins de comunicação, mas também são fundamentais para a atividade cognitiva do pensamento, visto que, o desenvolvimento das representações mentais depende de uma interiorização das representações semióticas, as quais possibilitam complementar funções cognitivas fundamentais como a de tratamento (DUVAL, 2012a).

Outros dois termos essenciais na TRRS são a semiose e a noesis. "Se é chamada "semiose" a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e "noesis" a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a noesis é inseparável da semiose" (DUVAL, 2012a, p. 270). Sendo assim, é possível notar que não existe noesis sem semiose, dado que, só se tem acesso ao objeto matemático apenas por meio de sua representação.

Com relação a semiose, para que um sistema semiótico seja um registro de representação é preciso permitir as três atividades cognitivas fundamentais: a formação de uma representação identificável, que deve seguir as regras e características do registro usado; o tratamento, que se refere a transformação de uma representação dentro do mesmo registro em que esta representação foi formada, ou seja, é uma transformação interna a um registro; e a conversão, trata-se da transformação de uma representação semiótica em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou parte do objeto abordado, ou seja, é a transformação externa ao registro.

Quanto as formas de tratamento de uma representação, Duval destaca a paráfrase, a inferência, o cálculo, a reconfiguração e a anamorfose:

> A **paráfrase** e a **inferência** são formas de tratamento em língua natural. O **cálculo** é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A **reconfiguração** é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: é uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras o seu papel heurístico. A **anamorfose** é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural (DUVAL, 2012a, p. 272).

No que concerne a conversão de uma representação, os tipos destacados por Duval são a ilustração, a tradução e a descrição:

> A **ilustração** é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A **tradução** é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em outra representação linguística de outro tipo de língua. A **descrição** é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma função linguística. (DUVAL, 2012a, p. 272).

Diante do exposto, é importante ressaltar que as atividades cognitivas de tratamento e conversão são distintas e independentes, um exemplo a ser observado isto é o cálculo numérico. Segundo Duval (2012a) alunos podem chegar ao ensino médio sem saber transformar uma representação decimal em uma representação fracionária de um número racional apesar de poder saberem efetuar perfeitamente uma operação matemática, como a adição por exemplo, de dois números racionais com sua representação decimal e fracionária.

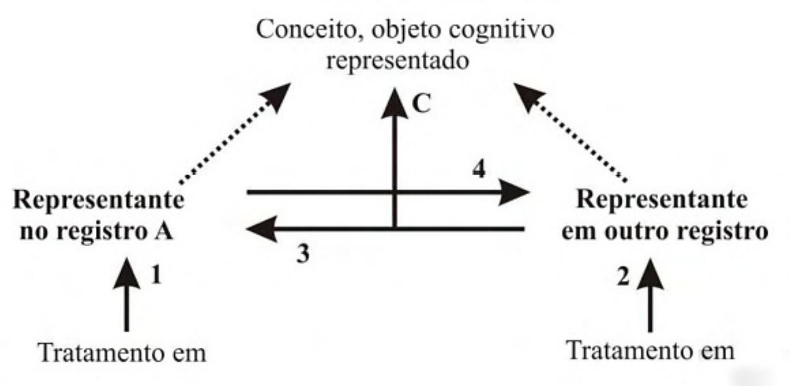
É a falta de associação por parte dos estudantes de que “a expressão decimal, a expressão fracionária e a expressão com expoente constituem três registros diferentes de representação de números” (DUVAL, 2012a, p. 273). Portanto, é imprescindível que os alunos tenham acesso aos tratamentos e as conversões dos objetos matemáticos.

Quanto a noesis (apreensão conceitual de um objeto) e a coordenação de registros de representação, Duval (2012a) ressalta que a existência de muitos registros de um mesmo objeto matemático, possibilita a modificação de um deles, como também, a mudança de registro tem a finalidade de permitir realização de tratamentos de uma forma mais econômica e mais potencializada.

Cada registro possui suas particularidades, a escolha de um registro semiótico para representar um objeto depende da função das possibilidades e dos inconvenientes semióticos do registro escolhido. Segundo Duval, isto significa que “toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa, e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados" (2012a, p. 280).

Duval (2012a) considera como hipótese fundamental de aprendizagem, a compreensão integral de um conteúdo conceitual que ocorre quando há a coordenação de ao menos dois registros de representação de forma espontânea e ágil da atividade cognitiva de conversão. Com isto, é apresentado na Figura 1 uma descrição da estrutura de representações semióticas e de seu funcionamento:

Figura 1 – Estrutura da representação em função da conceitualização.



Fonte: (DUVAL, 2012a, p. 282).

As flechas 1 e 2 correspondem ao tratamento de um registro, ou seja, as transformações internas a um registro; as flechas 3 e 4 correspondem as conversões entre dois registros; a flecha C representa a compreensão integral de uma representação, o que implica dizer que considera a coordenação entre dois registros, as flechas pontilhadas representam a diferenciação que existe entre representante e representado, o qual torna-se possível notar que "o representante de um registro pode ser considerado como o representante de outro registro, como é o caso em uma relação entre texto e imagem" (DUVAL, 2012a, p. 282). O esquema da figura traz o caso mais simples da coordenação entre dois registros, por isto, não exibe exemplos para os tratamentos próprios a cada registro.

A falta de coordenação não impede toda compreensão, entretanto, limita esta compreensão ao contexto semiótico de apenas um registro, e isto, não favorece na construção de aprendizagens, bem como na utilização, do que foi compreendido, em situações que esses conhecimentos deveriam ser utilizados. Neste caso, o estudante não possui a possibilidade de controle do "sentido" daquilo que é feito.

Os tratamentos que podem ser realizados durante a mudança de registro têm grande importância no processo de compreensão. Assim, a TRRS de Duval traz como sugestão, uma aprendizagem em que seja considerada a ligação estreita que existe entre a noesis e a semiose, com isso torna-se possível elevar os alunos a uma condição de tomada de conscientização mais global, e para isto, são necessárias atividades de ensino mais específicas.

3.2 O Ensino da Geometria na perspectiva da TRRS

No que se refere ao ensino da geometria na Educação Básica, Duval (2004) traz que esta atividade é efetuada por meio de dois registros: o das figuras, para designar as figuras geométricas e suas propriedades, e o da língua natural, para descrever as definições, teoremas, hipóteses e conceitos em geral.

A atividade cognitiva que a geometria requer é mais exigente que as outras áreas de conhecimento, os tratamentos quando são realizados de maneira separada e alternada em cada um dos registros são insuficientes para que se chegue em algum resultado, pois “os tratamentos figurais e discursivos precisam ser realizados simultaneamente e de forma interativa” (DUVAL, 2004, p. 155, tradução nossa).

Quadro 1 – Registro figural e em língua natural do objeto matemático esfera.

Registro figural (tridimensional)		Não discursivo
Registro em língua natural	Consideremos um ponto O e um segmento de medida r. Chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância do segmento OP seja menor ou igual a r.	Discursivo

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

O Quadro 1 mostra a concepção de Duval quanto ao registro figural, o qual trata-se de um registro não discursivo; e quanto ao registro em língua natural, que é um registro discursivo. Quanto ao sólido geométrico esfera, apresentado, pode-se observar que o registro figural, por se tratar de um objeto espacial, é uma figura tridimensional. No registro em língua natural é apresentado a definição do objeto esfera.

Desse modo, com apenas a apresentação da figura do objeto esfera, não é possível descrever suas características, é necessário um tratamento de discurso para que complemente o entendimento que se pretende que o estudante construa.

Para Duval (2004, p. 168, tradução nossa) deve ocorrer,

> [...] uma interação entre os tratamentos figurais que por abdução orientam a abordagem heurística, e os tratamentos discursivos que por dedução constituem a abordagem a partir dos objetos representados na figura. Naturalmente, essa interação pode ser bloqueada por importantes fenômenos de não congruência nas múltiplas idas e vindas que a mobilização simultânea desses registros exige.

De acordo com Duval (2004), os tratamentos realizados no ensino da geometria são distintos dos demais tratamentos matemáticos, pois são específicos para que não ocorra uma caracterização heurística das figuras como simples acessórios. O autor também afirma que, quanto as dificuldades na aprendizagem da geometria, os conceitos geométricos não são o principal motivo, mas a falta de coordenação entre tratamentos de vários registros e a proximidade entre tratamentos relevantes e irrelevantes inseridos em um mesmo registro. Destarte, Duval (2012b, p. 120) ressalta que,

> [...] a resolução de problemas em geometria e a entrada nesta forma de desenvolvimento do raciocínio que esta resolução exige, depende da **conscientização da distinção, quer dizer, da conscientização da oposição entre as três primeiras formas de apreensão das figuras.** No entanto, isto constitui não mais do que um aspecto do modo de raciocinar geométrico.

Dessa forma, o autor elenca as chamadas apreensões na aprendizagem da geometria, as quais são maneiras diferentes de ver as figuras segundo o seu papel, são elas: as apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial. Estas três últimas apreensões, são subordinadas a apreensão perceptiva. Estas apreensões do conhecimento, são as interpretações que o aluno necessita ser capaz de realizar quando se depara com as situações propostas.

A aprendizagem dos tratamentos das figuras geométricas, geralmente fica ligada ao tratamento perceptivo ou ao tratamento matemático. As atividades de construção das figuras possibilitam descobrir, controlar e mobilizar a produtividade heurística das figuras. A apreensão perceptiva, também chamada de apreensão gestáltica, busca compreender como as figuras se organizam e são percebidas pelo estudante, ou seja, tem função de identificação, segundo Duval (2012b, p. 120)

> Não importa qual figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas; e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais.

Duval (2012a) ressalta que os tratamentos que estabelecem a produtividade heurística das figuras geométricas muitas vezes formam operações que não são do tipo de apreensão puramente perceptiva, como também, não mostram ser do tipo conceitual, o que acaba por vezes, favorecendo estas operações por meio dos fatores próprios à apreensão perceptiva, mas também, pode ocorrer de inibir estas operações, que são independentes de todo raciocínio dedutivo e do emprego de definições.

Uma figura geométrica admite tratamentos figurais distintos, a apreensão operatória corresponde a descoberta da resolução do problema, por meio das operações realizadas sobre as figuras e possuem fins heurísticos. A apreensão operatória está sempre ligada à apreensão perceptiva, a conexão entre elas resulta no que se chama de visualização. Assim,

> A apreensão operatória de figuras é uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações. Para cada tipo de modificação, são diversas as operações possíveis (DUVAL, 2012b, p. 125).

Sobre as modificações possíveis de uma figura geométrica Duval apresenta três: modificação mereológica, que trata da separação da figura em partes que formam subfiguras e desenvolve a relação parte-todo, permitindo a operação de reconfiguração; modificação ótica, a qual considerando a imagem, transforma uma figura em outra; e a modificação posicional, que realiza um deslocamento em relação a um referencial (ALMOULOUD, 2003).

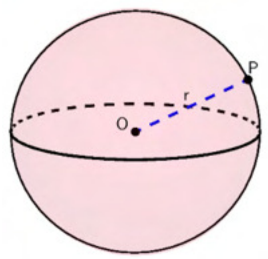
Duval (2004) sugere que as operações de modificação das figuras sejam solicitadas de forma explícita e sistemática e, para que isso ocorra, é preciso propor exercícios onde a resolução utilize um tratamento figural.

A ligação entre as apreensões sequencial e discursiva resulta em atividades de construção geométrica, a qual esta atividade também necessita da apreensão perceptiva. A compreensão de um objeto geométrico quando associada aos seus enunciados, definições e conceitos, trata-se da apreensão discursiva.

Duval (2003) traz e descreve duas classificações quanto aos registros: os registros monofuncionais que possuem algoritmos próprios em sua estrutura, são os registros específicos da matemática, como por exemplo, o simbólico algébrico, e os registros multifuncionais, os quais são registros que possuem tratamentos que não são algoritmizáveis, bem como não são específicos da matemática, pois também são utilizados em outras áreas do conhecimento, como por exemplo, a língua natural e as figuras.

Assim, o Quadro 2 mostra os registros de representações quanto ao volume da esfera, considerando os registros de representações em língua natural, figural e simbólico algébrico. No registro em língua natural é apresentada a definição de esfera, pois é considerado que o volume da esfera está inserido em sua definição, visto que o volume abrange o conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância do segmento OP seja menor ou igual a r. No registro figural é apresentada uma esfera de centro O e um segmento OP de medida r. No registro simbólico algébrico é mostrada a relação do cálculo do volume da esfera.

Quadro 2 – Registros de representação quanto ao volume da esfera.

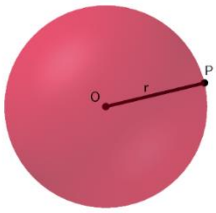
Língua natural	Figural	Simbólico algébrico
Consideremos um ponto O e um segmento de medida r. Chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância do segmento OP seja menor ou igual a r.		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Destarte, da mesma forma que apresentada anteriormente, o Quadro 3 traz os registros de representação da área da superfície esférica.

Quadro 3 – Registros de representação da área da superfície esférica.

Língua natural	Figural	Simbólico algébrico

Chama-se superfície da esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja igual a r.		$A = 4\pi r^2$

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Segundo Duval (2003) o registro em língua natural são representações discursivas e utilizam representações de escritas de conceitos, enunciados e teoremas e, da mesma maneira como o registro simbólico algébrico, são considerados discursivos; o registro figural, o qual trata-se da representação da esfera em figura geométrica tridimensional, é considerado não discursivo.

Dessa forma, as apreensões do conhecimento apresentadas neste texto, podem auxiliar no processo de aprendizagem da geometria, bem como da esfera.

3.3 A Base Nacional Comum Curricular e a Proposta Curricular da Paraíba sobre a Esfera

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que regulamenta o processo de ensino, na Educação Básica, das escolas brasileiras. Sobre a matemática, a BNCC ressalta que,

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (BRASIL, 2018, p. 265).

É imprescindível que seja considerado o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática. No Ensino Fundamental, a BNCC (2018) apresenta os diversos campos da matemática, é necessário que a inter-relação entre estes campos garanta que os estudantes consigam relacionar observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associar essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas.

De acordo com a BNCC (2018) a Geometria compreende o estudo de conceitos e procedimentos que são necessários para que o aluno consiga resolver problemas do cotidiano e de diferentes áreas do conhecimento como também, é importante considerar o aspecto funcional presente na geometria, o estudo de formas e relação entre elementos de figuras planas e espaciais e de posição e deslocamentos no espaço, pode desenvolver o pensamento geométrico dos estudantes. Assim,

> [...] a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras (BRASIL, 2018, p. 272).

A BNCC (2018) organiza o ensino da matemática em cinco grandes áreas temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, as habilidades estão organizadas segundo unidades de conhecimento da própria área. Quanto ao Ensino Fundamental, pode-se encontrar o objeto matemático Esfera inserido nos objetos de conhecimento da unidade temática de Geometria, bem como nas habilidades, dos 1°, 2° e 3° anos iniciais do Ensino Fundamental.

Com relação ao Ensino Médio, o qual é o foco deste trabalho, a BNCC "propõe a consolidação, ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental" (BRASIL, 2018, p. 527). Dessa maneira, a BNCC (2018) enuncia que como forma de continuidade as aprendizagens do Ensino Fundamental, no Ensino Médio o ensino da matemática tem de aproveitar o potencial já constituído pelos estudantes, e para isso, esta etapa se concentra na construção de uma visão integrada da Matemática, que se aplique à realidade em situações distintas.

A BNCC ressalta que o aluno deve ser capaz de representar, as competências que estão relacionadas a representação consideram a produção de registros para evocar um objeto matemático, daí, é possível verificar a importância das representações para a compreensão da matemática, já que o acesso aos objetos matemáticos se dar por meio delas. À vista disso,

> [...] na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações

> diversas por meio da linguagem específica da matemática – verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas – e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio (BRASIL, 2018, p. 529).

A BNCC traz cinco competências específicas para a área da Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio, bem como são indicadas habilidades relacionadas as competências e que devem ser alcançadas nessa etapa. As habilidades são dispostas sem indicação de seriação, o qual permite a flexibilização dos currículos e propostas pedagógicas de cada escola.

Uma proposta para o Ensino Médio apresentada pela BNCC, é a organização curricular levando em conta a organização por unidades. Assim, na unidade de Geometria e Medidas, inserida na competência específica 3, pode-se encontrar a habilidade:

> **(EM13MAT309)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 545).

Esta habilidade diz respeito ao cálculo de volume e áreas totais de sólidos geométricos, bem como dos Corpos Redondos, o qual a Esfera faz parte. Dessa forma, esta habilidade indica a interpretação, resolução e formulação de problemas matemáticos relacionando com situações reais.

Diante do exposto, a realização da Proposta Curricular do Estado da Paraíba para o Ensino Médio foi decorrente da aprovação da BNCC e propõe a aprendizagem das suas competências e habilidades, visando traçar os caminhos e implementar nos sistemas de ensino, considerando as características regionais. Dessa maneira, destaca para a área de Matemática e suas Tecnologias, que deve-se induzir o estudante a pensar de modo crítico, como forma de potencializar a capacidade de deduzir/induzir/inferir sobre situações em que sejam aplicados os conhecimentos matemáticos e assim, o aluno consiga sustentação para suas ideias, bem como, formular e resolver problemas em diversos contextos.

Outro ponto importante destacado na Proposta Curricular da Paraíba para o Ensino Médio é que na Matemática os objetos são abstratos, ou seja, estão no mundo das ideias e são acessados por meio de representações semióticas, evidenciando assim, a utilização de símbolos e signos que compõem os registros de representações semióticas destacados por Duval (2003).

Desse modo, as soluções dos problemas matemáticos, sobretudo os problemas do dia a dia, podem ser expressadas na linguagem materna e possuir vários elementos que são próprios da linguagem matemática, se fazendo necessário muitas vezes, o processo de conversões entre os registros de representações.

Da mesma forma que a BNCC, a Proposta Curricular da Paraíba apresenta as competências específicas da matemática incluindo as peculiaridades paraibanas, bem como traz as habilidades. A organização curricular da matemática se dá por áreas do conhecimento, apontando as habilidades de cada área e definindo o ano/série a ser estudado cada conteúdo.

Assim, com base na Proposta Curricular do Estado da Paraíba para o Ensino Médio, o Quadro 4 apresenta a unidade temática Geometria, os objetivos de aprendizagem e o objeto de conhecimento Corpos redondos.

Quadro 4 – Organização curricular do objeto de conhecimento Corpos redondos.

2º Ano		
UNIDADE TEMÁTICA	**OBJETIVO DE APRENDIZAGEM**	**OBJETO DE CONHECIMENTO**
GEOMETRIA	-Diferenciar poliedros de corpos redondos. -Compreender os conceitos primitivos da geometria espacial. -Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações. -Resolver problemas envolvendo o cálculo de volumes e áreas lateral e total de corpos redondos e poliedros. -Investigar obtenção da medida de volume de poliedros e corpos redondos por meio do Princípio de Cavalieri.	Corpos redondos

Fonte: (PARAÍBA, 2020, p. 276-277) adaptado pela autora, 2022.

Neste quadro, pode-se observar que o sólido redondo Esfera, está inserido no objeto de conhecimento e que a Proposta Curricular regulamenta que seja abordado no segundo ano do Ensino Médio, bem como seu ensino seja planejado para que se consiga atingir os objetivos de aprendizagem. Assim, o documento orienta que as escolas paraibanas desenvolvam a organização curricular da forma apresentada.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com base no objetivo deste trabalho, que visa analisar o LD quanto ao conhecimento de Esfera tendo como embasamento a TRRS. Esta pesquisa caracteriza-se como sendo de abordagem qualitativa e do tipo bibliográfica, que de acordo com Gil (2008)

> [...] é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas (p. 50).

Dessa forma, a pesquisa se deu por meio de estudo descritivo do tipo exploratório e de natureza aplicada. Como modelo de pesquisa, buscando entender o problema, foi utilizado o método hipotético dedutivo, "esse modelo gera, através de um trabalho lógico, as hipóteses, os conceitos e os indicadores para os quais será necessário buscar correspondentes no real" (GERHART, 2009, p. 54).

A coleção do LD selecionada para análise, foi aprovada no PNLD de 2021 e escolhida por meio de uma pesquisa, realizada no site do Sistema de Controle de Materiais Didáticos – SIMAD, a qual comprovou ser a coleção mais adotada pelas escolas estaduais da cidade de Cajazeiras, estado da Paraíba. Foi escolhida esta cidade por ser o local onde reside a autora deste trabalho.

Assim, a coleção escolhida, intitulada Prisma Matemática, é formada por seis volumes autocontidos, ou seja, sem ordem definida para sua utilização. Os volumes são separados por conteúdos matemáticos: Conjunto e Funções; Funções e Progressões; Geometria e Trigonometria; Sistemas, Matemática Financeira e Grandezas; Geometria; e Estatística, Combinatória e Probabilidade. A estrutura de cada volume, considera as orientações para adequação ao Novo Ensino Médio, que começa a ser implementado, gradativamente, neste ano de 2022, finalizando esta fase de implementação em 2024.

O Novo Ensino Médio reformula a carga horária de aulas definidas para os três anos do Ensino Médio, sendo parte desta carga horária direcionada para a formação geral básica dos estudantes, atendendo a BNCC. E a outra parte é voltada para cumprimento de itinerários formativos. Além disso, entre outras mudanças, a composição curricular passa a ser estruturada por áreas de conhecimento integradas, sendo elas: Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Diante do exposto, o volume da coleção Prisma Matemática, selecionado nesta pesquisa foi o livro Geometria, manual do professor. Este livro possui quatro capítulos, dentre eles, o capítulo quatro, intitulado “Corpos Redondos”, que no tópico quatro aborda a esfera, mais precisamente, os objetos matemáticos volume da esfera e superfície esférica.

Dessa maneira, o capítulo quatro inicia com uma situação, na qual descreve obras com formas arredondadas de um famoso arquiteto brasileiro, apresentando três questões discursivas. Também traz as competências gerais e especificas da BNCC, trabalhadas no decorrer do capítulo, isto tanto no livro manual do professor, como também no livro do estudante. O capítulo apresenta cinco tópicos, o tópico um é a “Introdução”, que descreve os sólidos que serão abordados, bem como traz representações figurais de edifícios conhecidos, com formatos arredondados.

Os tópicos dois e três, abordam os objetos matemáticos Cilindro e Cone, respectivamente, apresentando seus conceitos, definições, elementos, secções, volumes, áreas da superfície e atividades resolvidas e atividades propostas, nas representações discursiva em língua materna, figural geométrica, numérica e algébrica.

O tópico quatro, escolhido para ser analisado nesta pesquisa, é intitulado “Esfera” e apresenta a definição de esfera, de superfície esférica e dos elementos da esfera, aborda também, o volume de uma esfera, atividades resolvidas e atividades propostas, nas representações discursiva em língua materna, figural geométrica e algébrica. Posteriormente, traz a área uma superfície esférica, a secção de uma esfera, atividades resolvidas e atividades propostas, nas representações discursiva em língua materna, figural geométrica e algébrica. Este tópico encerra com a seção “História da Matemática”, que traz um breve relato sobre as contribuições do matemático Arquimedes no estudo da esfera e do cilindro.

O tópico cinco, traz o conteúdo “Projeções Cartográficas” que apresenta três tipos de projeções: Projeção cilíndrica, cônica e plana. Também traz atividades resolvidas e atividades propostas, nas representações discursiva em língua materna, figural geométrica e algébrica.

Posteriormente, o LD apresenta mais três seções inseridas no capítulo quatro, a seção “Explorando a Tecnologia” que apresenta uma ferramenta tecnológica para auxílio no cálculo de áreas e volumes de corpos redondos, a seção “Atividades Complementares” que possui questões de vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e por fim, a seção

“Para Refletir”, que faz um pequeno resumo do que foi visto no capítulo e apresenta quatro questões reflexivas, com respostas discursivas e pessoais.

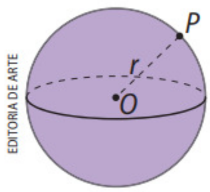
A análise desenvolvida no tópico 4 do LD, denominado ‘Esfera’ busca identificar os registros de representações semióticas da superfície esférica e do volume da esfera trabalhados, assim como, as conversões que podem ser realizadas entre estes registros, nas questões propostas, as apreensões geométricas que podem ser utilizadas e os objetos matemáticos que são trabalhados concomitante com a superfície esférica e o volume da esfera.

5 ANÁLISE DO CONTEÚDO ESFERA DO LIVRO DIDÁTICO

O capítulo quatro da coleção analisada neste trabalho, é intitulado como “Corpos Redondos”, nele são apresentados tópicos, nesta ordem, Introdução; Cilindro; Cone; Esfera; e Projeções Cartográficas. Para este trabalho o foco é no estudo da Esfera, sendo assim, este será o tópico analisado.

Logo no início do tópico Esfera, o LD apresenta o objeto matemático esfera na representação discursiva em língua materna, exemplifica que existem vários objetos que possuem o formato esférico e outros que se aproximam deste formato e, por isso, são considerados uma esfera, como por exemplo, o planeta Terra. Ao lado da representação discursiva em língua materna, os autores trazem a representação figural geométrica da esfera e pede para que se considere o centro O, o raio r e o ponto P. Como pode ser observado na Figura 2.

Figura 2 – Apresentação da Esfera no LD.

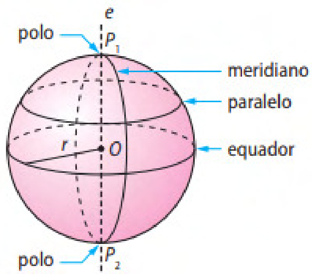


Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 128).

Em seguida, na representação discursiva em língua materna, é explicado a definição de superfície esférica, a qual trata-se do conjunto de todos os pontos P do espaço, cuja distância ao ponto O é igual a r. Como também, é apresentada a definição de esfera, que é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor ou igual a r. Após isso, o LD mostra uma imagem de um edifício chamado Domo da Rocha, localizado em Jerusalém, que possui parte de sua estrutura com formato de uma esfera e também o descreve na representação discursiva em língua materna.

Também são apresentados os elementos da Esfera e suas definições, na representação discursiva em língua materna, e na representação figural geométrica apresentada na Figura 3.

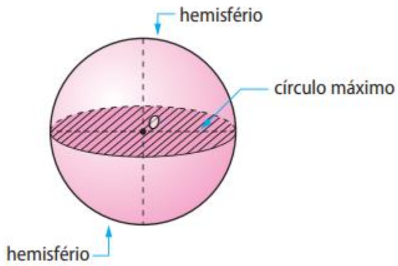
Figura 3 – Representação figural geométrica dos elementos da Esfera.



Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 129).

Logo abaixo, é apresentada a definição de círculo máximo de uma esfera, na representação discursiva em língua materna e na representação figural geométrica apresentada na Figura 4.

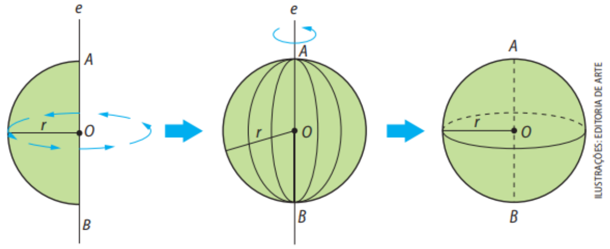
Figura 4 – Representação figural geométrica do círculo máximo da esfera.



Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 129).

Ainda na mesma página do LD, é descrita na representação discursiva em língua materna, a definição da esfera como um sólido de revolução, pois também pode ser obtida por meio da rotação de um semicírculo que possui seu diâmetro, em torno de um eixo de rotação. Dessa forma, também é mostrado como ocorre essa rotação na representação figural geométrica, apresentada na Figura 5.

Figura 5 – Representação figural geométrica da esfera obtida pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo.

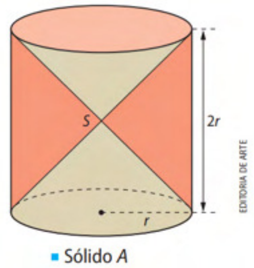


Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 129).

Após essas descrições, o LD apresenta o “Volume de uma Esfera”, como um conteúdo. Dessa maneira, inicia introduzindo o conteúdo na representação discursiva em língua materna, traz um exemplo de uma situação real, sobre a quantidade de aço que seria necessária para formar um rolamento de esferas, seguido de uma representação figural geométrica de um rolamento de esferas.

Assim, o livro aborda o volume da esfera pelo princípio de Cavalieri, utilizando dois corpos redondos já abordados anteriormente no mesmo capítulo, o cilindro e o cone. Na representação discursiva em língua materna, é considerado um cilindro equilátero de altura 2r e raio da base r, depois é retirado dois cones circulares retos, de altura r e raio da base r, cujas bases coincidem com as bases desse cilindro, onde se obtém o sólido A, apresentado também na representação figural geométrica, como mostra a Figura 6.

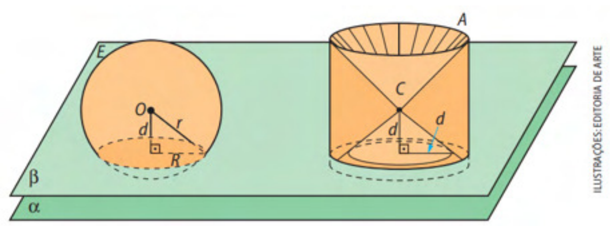
Figura 6 – Representação figural geométrica do sólido A.



Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 130).

Em seguida, é expressa tanto na representação discursiva em língua materna, quanto na representação simbólica algébrica, o volume do sólido A como sendo a diferença entre os volumes do cilindro e dos dois cones. Após isso, é considerado um plano α, onde uma esfera E de raio r e o sólido A estão apoiados sobre ele; da mesma forma, os autores utilizaram a representação discursiva em língua materna e a representação figural geométrica. Posteriormente, utilizando os mesmos registros de representação, em língua natural e figural, é considerado um plano β paralelo a α que secciona a esfera e o sólido A, a uma distância d do centro O, como apresenta a figura 7.

Figura 7 – Representação figural geométrica do volume da esfera pelo princípio de Cavalieri.

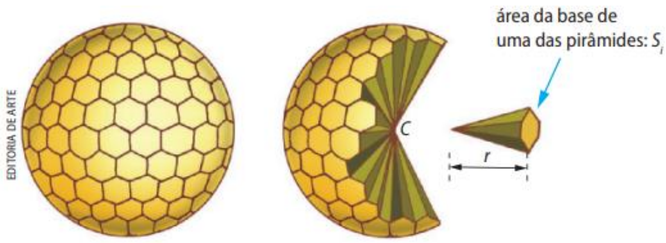


Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 131).

A secção determinada pelo plano β na esfera é um círculo, e no sólido A é uma coroa circular. A partir daí o LD apresenta o cálculo da área do círculo e da coroa circular por meio da representação discursiva em língua materna e da representação simbólica algébrica, bem como compara as duas equações obtidas e assim, obtém-se o volume da esfera na representação algébrica. Depois disso, o LD traz duas questões resolvidas na seção “Atividades Resolvidas”, as quais abordam o volume da esfera, e uma delas apresenta enunciado no registro em língua natural, o comando, também no registro em língua natural e suporte no registro figural, a solução é dada no registro simbólico algébrico; a outra apresenta apenas enunciado e comando, no registro em língua natural, e traz o registro figural e o registro simbólico algébrico na solução da questão. Posteriormente, são apresentadas oito questões propostas na seção “Atividades”, as quais serão analisadas neste trabalho.

Logo em seguida, o LD explícita o conteúdo “Área de uma superfície esférica” utilizando os registros em língua natural, figural e simbólico algébrico. Dessa forma, é considerado uma esfera formada por n sólidos com formato de pirâmides, com vértices no centro C da esfera, como mostra a Figura 8.

Figura 8 – Representação figural geométrica de uma esfera formada por pirâmides.



Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 134).

Assim, quanto maior for o número n de sólidos construídos, mais próxima estará a soma da área das bases destes sólidos com formato de pirâmide, da área da superfície esférica. Como também, mais próximo estará a soma dos volumes de todas essas "pirâmides", do volume da esfera. Partindo deste pressuposto, conhecendo o volume da pirâmide, cuja altura é igual ao raio da esfera, o volume da esfera é igual à soma dos volumes das n pirâmides. Logo, fazendo n tender ao infinito, encontra-se a área de uma superfície esférica.

O último conteúdo, abordado no tópico Esfera é “Secção de uma esfera”, cujo livro apresenta de forma breve, no registro em língua natural e no registro figural. Em seguida, são apresentadas três questões na seção “Atividades Resolvidas”, as quais trazem o enunciado e o comando, na representação discursiva em língua materna e não apresentam suporte. As resoluções destas questões são mostradas na representação discursiva em língua materna e na simbólica algébrica. Apenas na resolução de uma questão, é utilizada a representação figural geométrica. Logo em seguida, são apresentadas oito questões propostas, na seção “Atividades”, as quais serão analisadas neste trabalho.

Posteriormente, o LD traz uma seção denominada “História da Matemática” que aborda a representação discursiva em língua materna, representação simbólica algébrica e representação figural geométrica, exibindo um texto sobre os estudos de Arquimedes sobre a esfera e o cilindro. Dessa forma, é encerrado o tópico Esfera.

Mais à frente no LD, são apresentadas questões na seção “Atividades Complementares” que possui questões de exames oficiais relacionadas aos conteúdos estudados no capítulo. Sendo assim, são selecionadas sete questões relacionadas ao objeto matemático esfera, as quais também serão analisadas neste trabalho.

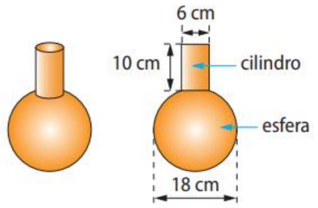
5.1 Análise das questões propostas no LD sobre o conteúdo matemático Esfera

Ao todo, serão analisadas 24 questões propostas na seção “Atividades” e na seção “Atividades Complementares”, relacionadas ao objeto matemático esfera.

A Questão 36, apresentada na Figura 9, traz dois registros de representação, o registro figural e o registro em língua natural. O enunciado do exercício, apresentado por meio da representação discursiva em língua materna, sugere o uso da calculadora para auxílio dos cálculos, bem como sugere o valor de π. O comando pede para que seja calculada a capacidade do recipiente apresentado. O suporte traz a representação de uma figura geométrica composta, formada por dois corpos redondos (cilindro e esfera) com as medidas destes sólidos e indica o cilindro e a esfera por meio da representação em língua materna.

Figura 9 – Questão 36

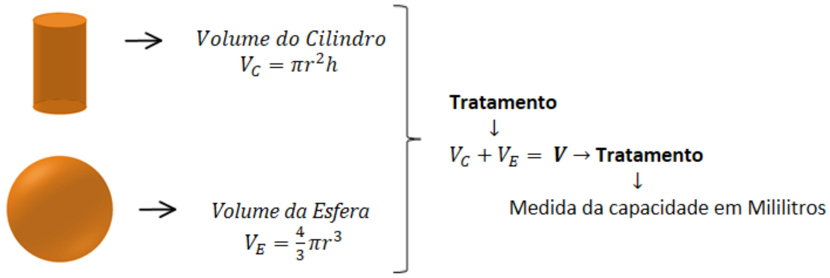
36. Calcule, aproximadamente, a capacidade em mililitros do recipiente indicado na figura. Adote $\pi = 3{,}14$.
Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos. 3 334,68 mL



Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 132).

Na resolução desta questão é necessário que se utilize as apreensões, perceptiva das formas das figuras geométricas apresentadas e discursiva entre os dados descritos na língua materna e aqueles das figuras geométricas, pois os dados são fornecidos de modo que é preciso identificar os elementos do cilindro e da esfera, como a altura e o diâmetro, como também, fazer o tratamento na representação simbólica numérica de forma escrita ou ao menos mental, para que se encontre o raio de cada sólido. A questão envolve dois objetos matemáticos o volume da esfera e o do cilindro, como mostra a Figura 10.

Figura 10 – Esquema 1

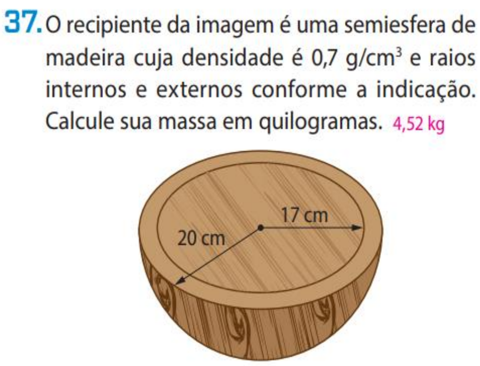


Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Assim, é preciso realizar duas conversões, uma do registro figural geométrico para o simbólico algébrico do volume do cilindro, e a outra, do registro figural geométrico para o simbólico algébrico do volume da esfera. Logo após, como é apresentado no esquema da Figura 10, fazer um tratamento na representação numérica para adicionar os dois volumes, e outro tratamento para transformar para a medida de capacidade em mililitros, como indicado no comando.

A Questão 37, apresentada na Figura 11, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, indica a figura tridimensional trabalhada e apresenta o dado da densidade e a indicação dos raios da representação geométrica. O comando pede para que seja calculado a massa do sólido em quilogramas. O suporte traz uma representação figural geométrica de uma semiesfera, com as medidas dos raios externos e internos a este sólido, apesar disto, a representação figural não deixa claro que a semiesfera se trata de um sólido vazado.

Figura 11 – Questão 37


37. O recipiente da imagem é uma semiesfera de madeira cuja densidade é 0,7 g/cm³ e raios internos e externos conforme a indicação. Calcule sua massa em quilogramas. 4,52 kg

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 132).

Para o desenvolvimento desta questão, são utilizadas as apreensões discursiva e perceptiva das formas geométricas, pois é necessário que seja identificado os raios da semiesfera e reconhecer que seu volume é a metade do volume de uma esfera. Dessa forma, sendo necessário realizar um tratamento na representação algébrica, dividindo o volume da esfera por dois, para obter o volume de uma semiesfera. Além disso, é necessário realizar uma conversão do registro figural para o simbólico algébrico do volume da semiesfera de raio externo, e outra conversão, do registro figural para o simbólico algébrico do volume da semiesfera de raio interno. Feito isto, é preciso fazer um tratamento na representação numérica de diferença entre os dois volumes encontrados.

Neste ponto, vale salientar que o enunciado e o suporte da questão, não explicitam que se trata de uma semiesfera vazada, apesar de citar ser um recipiente, entende-se que isso pode induzir o aluno ao erro. Também é importante ressaltar, que para a resolução desta questão, é imprescindível que o estudante conheça a representação algébrica da densidade, para que, após realizar os passos citados anteriormente, consiga realizar o tratamento em representação numérica para encontrar a massa da semiesfera. Ademais, deve-se realizar um tratamento na representação numérica, para transformar para a medida de capacidade em quilogramas, como indicado no comando.

A Questão 38, apresentada na Figura 12, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, indicando o sólido abordado e o diâmetro deste sólido. O comando aponta que deve ser calculado o volume de água que o reservatório suporta. Diferentemente das questões anteriores, esta questão não traz um suporte.

Figura 12 – Questão 38

38. Um reservatório no formato de uma semiesfera tem 18 m de diâmetro. Qual é o volume de água que cabe nesse reservatório? 486π m^3

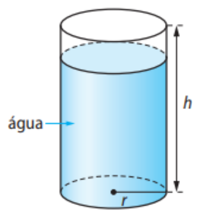
Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 133).

Para resolução desta questão, é utilizada a apreensão discursiva. Deve-se identificar os dados mostrados no enunciado da questão, e assim, realizar o tratamento na representação simbólica numérica de forma escrita ou ao menos mental, para encontrar o raio da semiesfera, como o realizado na questão 36 (Ver Figura 9). Após isso, fazer a conversão do registro discursivo em língua materna para o simbólico algébrico do volume da esfera, em seguida, realizar o mesmo tratamento em representação algébrica realizado na questão 37 (Ver Figura 11), dividindo o volume da esfera por dois, para obter o volume de uma semiesfera. Por fim, realizar tratamento na representação algébrica do volume da semiesfera e encontrar o volume de água que cabe no reservatório, como solicitado no comando.

A Questão 39, apresentada na Figura 13, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, onde indica a forma do sólido abordado (cilindro) e suas medidas, bem como afirma que o recipiente contém 1 litro a menos que sua capacidade total. São exibidos dois comandos na representação discursiva em língua materna, o primeiro pede para calcular o volume do cilindro e sugere o valor de π, o segundo questiona qual o raio de uma esfera, que quando inserida neste cilindro, esteja totalmente submersa e transborde 2 litros de água. O suporte traz a representação figural geométrica do cilindro e aponta a altura h, o raio r e o líquido (água).

Figura 13 – Questão 39

39. (Unifesp-SP) Um recipiente, contendo água, tem a forma de um cilindro circular reto de altura $h = 50$ cm e raio $r = 15$ cm.



Este recipiente contém 1 litro de água a menos que sua capacidade total.

a) Calcule o volume de água contido no cilindro (use $\pi = 3{,}14$). 34,325 L

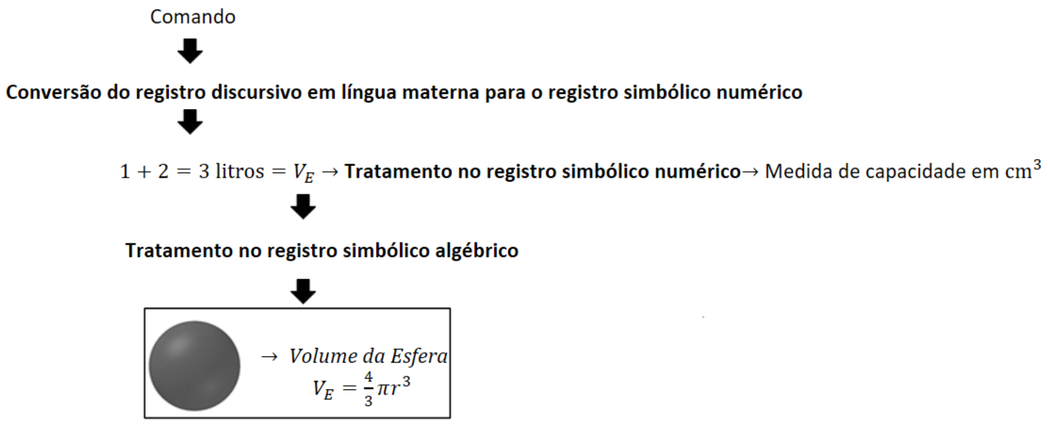
b) Qual deve ser o raio R de uma esfera de ferro que, introduzida no cilindro e totalmente submersa, faça transbordarem exatamente 2 litros de água? 8,95 cm

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 133).

Na resolução dessa questão, são utilizadas as apreensões perceptiva e discursiva. A questão envolve dois objetos matemáticos, o volume do cilindro e o da esfera. No primeiro comando, deve-se realizar a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico do volume do cilindro e depois, fazer um tratamento na representação numérica para transformar o volume encontrado na medida de capacidade em litros.

No segundo comando, a partir do que é afirmado, é preciso fazer uma conversão do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico numérico de forma escrita ou ao menos mental, encontrando assim, o valor total do volume da esfera em litros, como mostra o esquema da Figura 14.

Figura 14 – Esquema 2



Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Com isso, é necessário realizar um tratamento na representação numérica, para transformar para a medida de capacidade em centímetros cúbicos, para encontrar o raio em centímetros. Por fim, fazer um tratamento no registro simbólico algébrico, dessa forma, tornando-se possível encontrar o valor do raio R.

A Questão 40, apresentada na Figura 15, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, e indica que uma esfera está inscrita num cilindro equilátero de raio a, neste caso, é necessário que o aluno reconheça que no cilindro equilátero o raio é igual a duas vezes a altura. O comando pede a razão entre os volumes dos corpos redondos, esfera e cilindro. Diferentemente da questão 39 (Ver Figura 13), esta questão não traz um suporte, o que pode dificultar a resolução, pois é importante que se faça a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro figural geométrico, de forma escrita ou pelo menos mental.

Figura 15 – Questão 40

40. Uma esfera está inscrita em um cilindro equilátero de raio *a*. Qual é a razão entre o volume V_1 da esfera e o volume V_2 do cilindro? $\frac{2}{3}$

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 133).

Para a resolução desta questão, é utilizada a apreensão discursiva, pois deve-se identificar os sólidos abordados e organizar os dados expostos no enunciado. Como na questão 36 (Ver Figura 9), esta questão envolve dois objetos matemáticos o volume da esfera e o do cilindro. É preciso fazer o tratamento na representação simbólica numérica de forma escrita ou ao menos mental, para que se encontre a altura do cilindro e seja identificado o raio da esfera, como mostra o esquema 3, na Figura 16.

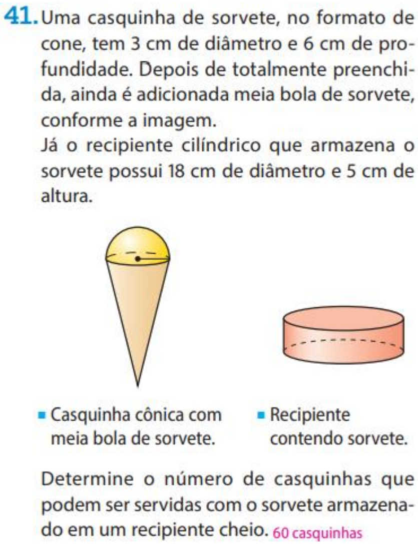
Figura 16 – Esquema 3

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Dessa forma, deve-se realizar duas conversões, uma do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico do volume do cilindro, e outra, do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico do volume da esfera. Feito isso, efetuar um tratamento na representação simbólica algébrica para encontrar a razão entre os volumes encontrados, como solicitado no comando.

A Questão 41, apresentada na Figura 17, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, indicando os sólidos abordados (cone, cilindro, semiesfera) e o diâmetro e a altura de cada um deles. O comando pede a quantidade de casquinhas (cone e semiesfera) que podem ser servidas com o sorvete armazenado no recipiente (cilindro) cheio. O suporte traz a representação de uma figura geométrica composta, formada por três corpos redondos (cone, semiesfera e cilindro) e indica por meio da representação em língua materna, o cilindro, que é o recipiente de sorvete, o cone e a semiesfera, que é a casquinha e a meia bola de sorvete.

Figura 17 – Questão 41



41. Uma casquinha de sorvete, no formato de cone, tem 3 cm de diâmetro e 6 cm de profundidade. Depois de totalmente preenchida, ainda é adicionada meia bola de sorvete, conforme a imagem.
Já o recipiente cilíndrico que armazena o sorvete possui 18 cm de diâmetro e 5 cm de altura.

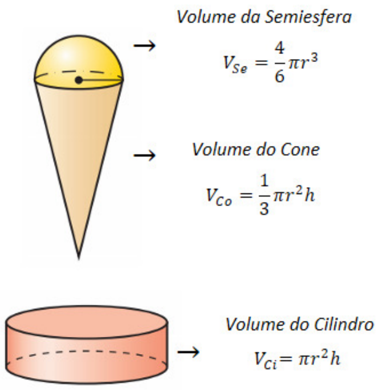
- Casquinha cônica com meia bola de sorvete.
- Recipiente contendo sorvete.

Determine o número de casquinhas que podem ser servidas com o sorvete armazenado em um recipiente cheio. 60 casquinhas

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 133).

Para resolução desta questão é utilizada as apreensões perceptiva e discursiva, já que os dados são fornecidos de modo que é preciso identificar os elementos do cone, da semiesfera e do cilindro, como a altura e o diâmetro, como também, deve-se fazer o tratamento na representação simbólica numérica de forma escrita ou ao menos mental, para que se encontre o raio de cada sólido. A questão envolve três objetos matemáticos o volume do cone, da semiesfera e o do cilindro, como mostra o esquema da Figura 18.

Figura 18 – Esquema 4



Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 133) adaptado pela autora, 2022.

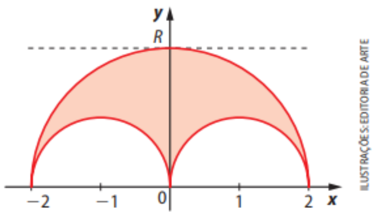
Assim, é necessário realizar três conversões, uma do registro figural geométrico para o simbólico algébrico do volume do cilindro, outra, do registro geométrico para o simbólico algébrico do volume do cone, e uma terceira, do registro figural geométrico para o simbólico algébrico do volume da semiesfera. No caso do volume da semiesfera, sua representação algébrica é obtida por meio de um tratamento na representação algébrica do volume da esfera, dividindo-a por dois.

Após isso, é necessário realizar um tratamento na representação algébrica do volume do cone e da semiesfera, somando os dois volumes e dessa forma, obtém-se o volume da casquinha de sorvete. Por fim, é preciso fazer um tratamento na representação algébrica do volume do cilindro e da casquinha de sorvete, dividindo os dois volumes e dessa maneira, encontrando o que é solicitado no comando.

A Questão 42, apresentada na Figura 19, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, indicando que a região R mostrada na figura, está limitada por três semicírculos e que R realiza uma volta completa em torno do eixo x. Assim, o comando pede para calcular o volume do sólido gerado. O suporte traz a representação de uma figura geométrica que apresenta três semicírculos no plano cartesiano, mostra a região R e os raios dos semicírculos.

Figura 19 – Questão 42

42. (PUC-RS) A região R da figura está limitada por três semicírculos.



Sabendo que R efetua uma volta completa em torno do eixo x, calcule o volume do sólido gerado. 8π

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 133).

Para a resolução dessa questão, são utilizadas a apreensão perceptiva das formas e a apreensão discursiva, sendo esta última necessária, porque deve-se identificar as informações presentes no suporte, no registro figural, e relacioná-las com os dados presentes no enunciado e comando, no registro discursivo em língua materna. Além disso, ao olhar apenas para o registro figural, não seria suficiente reconhecer seus elementos.

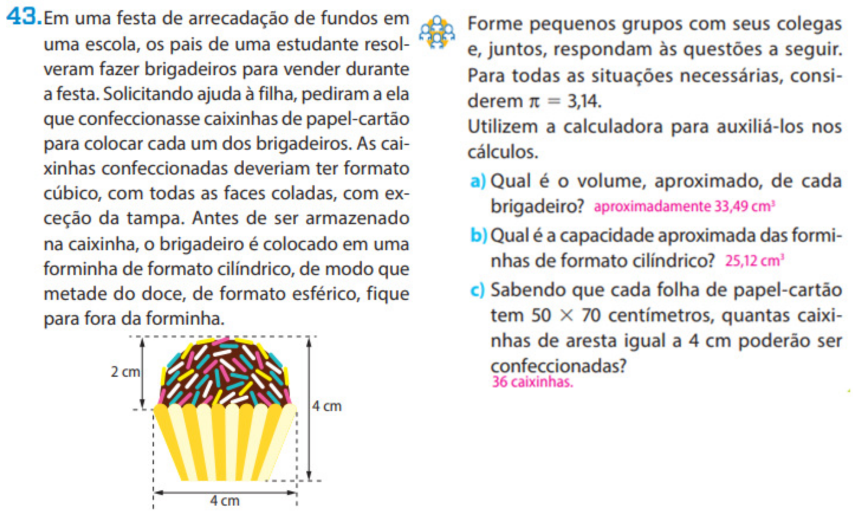
Nesta questão, também é utilizada a apreensão operatória uma vez que, o aluno ao identificar os raios dos três semicírculos, deve realizar ao menos mentalmente, a rotação da região R em torno do eixo x, gerando assim, três esferas; duas esferas menores de mesmo raio e uma esfera maior, circunscrita às esferas menores e com o dobro do raio.

Dessa forma, é fundamental fazer ao menos duas conversões, uma do registro figural para o registro simbólico algébrico do volume da esfera maior, e outra do registro figural para o registro simbólico algébrico do volume da esfera menor. Após isso, fazer um tratamento no registro simbólico numérico multiplicando o volume da esfera menor por dois, já que se trata de duas esferas de mesmo raio, inscritas na esfera maior. Por fim, deve-se realizar um tratamento no registro simbólico numérico da diferença entre os volumes encontrados das esferas.

A Questão 43, apresentada na Figura 20, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, contextualizando uma situação entre uma estudante e seus pais, onde os mesmos solicitaram a filha que confeccionasse caixinhas de papel-cartão em formato cúbico, para colocar brigadeiros em formato esférico, de modo que os brigadeiros fiquem com metade para fora da caixinha. Porém, antes de serem armazenados nas caixinhas, os brigadeiros são colocados em forminhas com formato cilíndrico. Usando esta situação, ainda no enunciado, é pedido para que os alunos formem grupos para responder os comandos, bem como é dado o valor de π e sugerido o uso da calculadora para auxílio nos cálculos.

Dessa forma, são apresentados três comandos, o primeiro pede para que seja calculado o volume de cada brigadeiro, o segundo pergunta a capacidade, ou seja, o quanto de brigadeiro que cabe nas forminhas em formato cilíndrico, e o terceiro, pede a quantidade de caixinhas com aresta igual a 4 cm que poderão ser confeccionadas levando em consideração as medidas do papel-cartão dadas. O suporte traz a representação figural geométrica do brigadeiro já inserido na forminha de formato cilíndrico, e mostra medidas importantes como, o raio do brigadeiro em formato esférico, e consequentemente, da forminha em formato cilíndrico, e mostra a medida da aresta da caixinha em formato cúbico, como pode ser observado na Figura 20 abaixo.

Figura 20 – Questão 43



43. Em uma festa de arrecadação de fundos em uma escola, os pais de uma estudante resolveram fazer brigadeiros para vender durante a festa. Solicitando ajuda à filha, pediram a ela que confeccionasse caixinhas de papel-cartão para colocar cada um dos brigadeiros. As caixinhas confeccionadas deveriam ter formato cúbico, com todas as faces coladas, com exceção da tampa. Antes de ser armazenado na caixinha, o brigadeiro é colocado em uma forminha de formato cilíndrico, de modo que metade do doce, de formato esférico, fique para fora da forminha.

Forme pequenos grupos com seus colegas e, juntos, respondam às questões a seguir. Para todas as situações necessárias, considerem $\pi = 3,14$.
Utilizem a calculadora para auxiliá-los nos cálculos.

a) Qual é o volume, aproximado, de cada brigadeiro? aproximadamente 33,49 cm³

b) Qual é a capacidade aproximada das forminhas de formato cilíndrico? 25,12 cm³

c) Sabendo que cada folha de papel-cartão tem 50 × 70 centímetros, quantas caixinhas de aresta igual a 4 cm poderão ser confeccionadas?
36 caixinhas.

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 133).

Para a resolução desta questão, são utilizadas as apreensões, perceptiva das formas da figura geométrica para reconhecimento dos sólidos envolvidos e discursiva, pois é necessário identificar os elementos dos sólidos no suporte e relacioná-los com as informações do enunciado e dos comandos. Além disso, são abordados três objetos matemáticos, o volume da esfera, o volume do cilindro e a área do cubo.

Assim, é necessário realizar três conversões. No primeiro comando, é preciso fazer a conversão do registro figural para o registro simbólico algébrico do volume da esfera. No segundo comando, fazer a conversão do registro figural para o registro simbólico algébrico do volume do cilindro. No terceiro comando, fazer a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico da área do cubo. Após isso, fazer dois tratamentos no registro simbólico numérico, um multiplicando as medidas dadas para encontrar a área do papel cartão, e outro dividindo esta área encontrada pela área do cubo, dessa forma, encontrando a quantidade de caixinhas, como solicitado.

Vale ressaltar que o enunciado da questão afirma que as forminhas possuem formato cilíndrico, mas no suporte apresentado no registro figural, dá a entender que se trata de um tronco de cone, neste caso, isto pode confundir o aluno, pois o enunciado da questão não condiz com o que é apresentado no suporte.

A Questão 44, apresentada na Figura 21, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna e indica a área de uma superfície esférica. No comando pede para que se calcule o raio da esfera. Essa questão não apresenta um suporte.

Figura 21 – Questão 44

44. Sabendo que a área de uma superfície esférica é 8π cm², calcule o raio da esfera. $\sqrt{2}$ cm

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 136).

Para a resolução dessa questão é utilizada a apreensão discursiva, pois é necessário compreender os elementos da figura geométrica abordada a partir do registro discursivo apresentado. Dessa maneira, essa questão aborda a área da superfície esférica. Assim, é preciso realizar a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica. Após isso, realizar um tratamento no registro simbólico algébrico substituindo o valor dado no enunciado, para encontrar o raio da esfera. Esta questão difere das demais por exigir um maior custo cognitivo do aluno, ao realizar o tratamento no registro simbólico algébrico da área da superfície esférica, como o raio r da esfera não está isolado, em algum momento será preciso isolá-lo para que se encontre seu valor.

A Questão 45, apresentada na Figura 22, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, indica que um plano α secciona uma esfera e explicita o raio da esfera e a distância entre o plano e o centro da esfera. O comando pede para que seja calculado a área da secção obtida. Esta questão não traz um suporte.

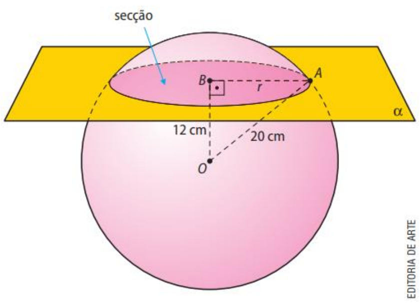
Figura 22 – Questão 45

45. Um plano α secciona uma esfera de raio 20 cm. A distância do centro da esfera ao plano α é 12 cm. Calcule a área da secção obtida. 256π cm²

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 136).

Para a resolução dessa questão são utilizadas as apreensões operatória e discursiva. Assim, é necessário ter conhecimento de que a secção da esfera é um círculo e que é possível encontrar o raio da secção utilizando o registro simbólico algébrico do Teorema de Pitágoras, como apresentado na Figura 23 abaixo.

Figura 23 – Secção da esfera.

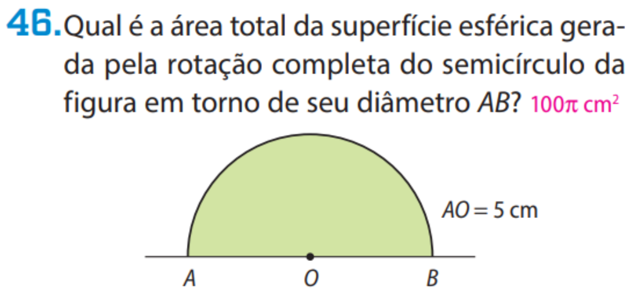


Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 267).

Dessa forma, para conseguir visualizar o que é exposto por meio do registro discursivo em língua materna no enunciado e no comando, é preciso realizar a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro figural geométrico da secção da esfera, tal como na Figura 23. Após isso, é preciso fazer um tratamento no registro simbólico algébrico para encontrar o raio da secção. Como também, realizar um tratamento no registro simbólico algébrico substituindo o valor do raio encontrado na área do círculo, dessa forma, encontrando a área da secção.

A Questão 46, apresentada na Figura 24, não apresenta um enunciado, traz o comando na representação discursiva em língua materna e questiona qual a área da superfície esférica gerada por uma volta completa de um semicírculo em torno do seu diâmetro AB. O suporte apresenta a representação figural geométrica de um semicírculo e indica seu centro, o raio e o diâmetro.

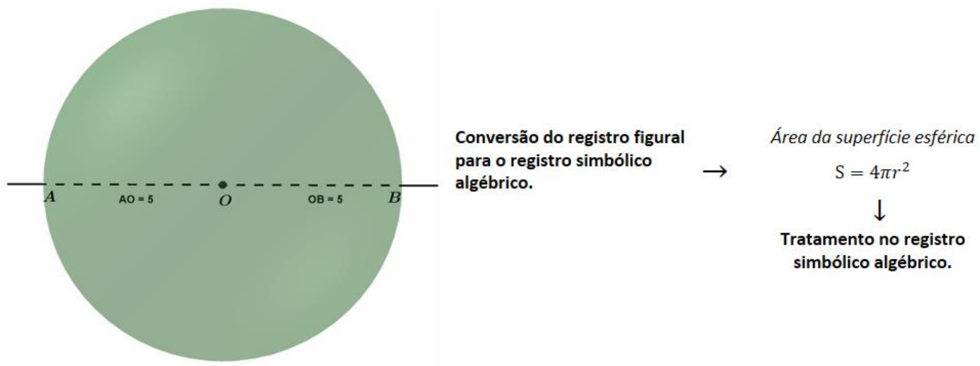
Figura 24 – Questão 46


46. Qual é a área total da superfície esférica gerada pela rotação completa do semicírculo da figura em torno de seu diâmetro AB? 100π cm²

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 136).

Para a resolução desta questão, são utilizadas as apreensões perceptiva e discursiva, pois deve ser identificado as informações da representação geométrica em conformidade com o que é descrito no comando. Dessa forma, o aluno deve perceber que, visto que o seguimento AB é o diâmetro do semicírculo, AO indicado na figura e o seguimento OB tratam-se dos raios do semicírculo. Da mesma forma como visto na questão 42 (Ver Figura 19), a apreensão operatória é necessária, pois é preciso fazer a rotação do semicírculo em torno do segmento AB, ao menos de forma mental, para que se consiga visualizar a esfera gerada . Desse modo, é preciso fazer a conversão do registro figural para o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica, como mostra o esquema da Figura 25.

Figura 25 – Esquema 5



Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Em seguida, repetir o tratamento realizado na Questão 44 (Ver Figura 21), o tratamento no registro simbólico algébrico substituindo o valor do raio e encontrando a área da superfície esférica como solicitado no comando.

A Questão 47, apresentada na Figura 26, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, em que considera o planeta Terra uma esfera perfeita e apresenta o raio da Terra, mais abaixo, sugere o uso da calculadora para auxiliar nos cálculos. A questão traz dois comandos, o primeiro pede a área da superfície da Terra e indica o valor de π, o segundo apresenta a área do continente americano e questiona qual é o percentual em relação a superfície total da Terra. A questão não traz um suporte, que neste caso, poderia facilitar a compreensão do que é descrito em língua materna.

Figura 26 – Questão 47

47. Supondo que a Terra seja uma esfera perfeita, e sabendo que seu raio é de aproximadamente 6400 km, determine:

a) a área total da superfície terrestre (use $\pi = 3$); 491 520 000 km^2

b) o valor percentual que ocupa o continente americano, cuja área é de 42 215 000 km^2, em relação à superfície total da Terra.

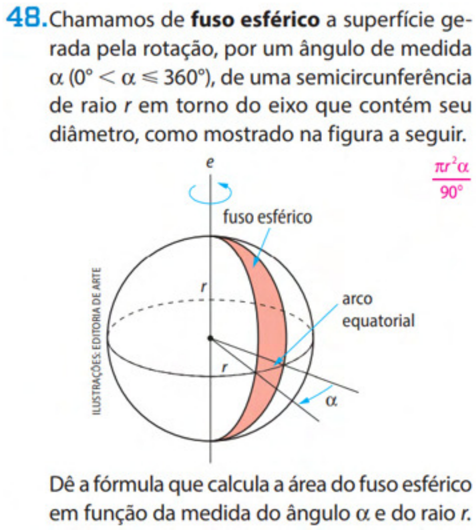
Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos. aproximadamente 8,59%

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 136).

Para a resolução dessa questão é utilizada a apreensão discursiva. No primeiro comando, deve-se fazer uma conversão do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica. No segundo comando, o aluno deve ter conhecimento de como calcular um valor percentual, e dessa maneira, realizar um tratamento no registro simbólico numérico dividindo a área do continente americano pela área total da superfície da Terra, e após isso, multiplicar o valor encontrado por 100. Logo, encontrando o que foi solicitado.

A Questão 48, apresentada na Figura 27, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, o qual descreve a definição de fuso esférico. O comando pede para que se encontre a fórmula que calcula a área do fuso esférico em função do ângulo α e do raio r. O suporte traz a definição do fuso esférico por meio do registro figural, indicando o ângulo α, o raio r e o arco equatorial. Vale ressaltar que o LD analisado, não aborda o conteúdo de fuso esférico dentro do tópico Esfera, traz este conteúdo apenas nesta questão.

Figura 27 – Questão 48


48. Chamamos de **fuso esférico** a superfície gerada pela rotação, por um ângulo de medida α ($0° < \alpha \leqslant 360°$), de uma semicircunferência de raio *r* em torno do eixo que contém seu diâmetro, como mostrado na figura a seguir.

Dê a fórmula que calcula a área do fuso esférico em função da medida do ângulo α e do raio *r*.

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 136).

Para a resolução dessa questão, são utilizadas as apreensões perceptiva e discursiva, para conseguir resolver o aluno deve identificar os elementos no suporte e no registro discursivo em língua materna. Diferentemente das outras questões, esta não pede para que seja calculado o volume da esfera, nem a área da superfície esférica, mas que se chegue a uma relação da área do fuso esférico em função do ângulo e do raio.

Assim, é necessário fazer uma conversão do registro figural para o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica que se relaciona com o ângulo de $360°$, como mostra o esquema 6 na Figura 28.

Figura 28– Esquema 6

Conversão do registro figural para o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica → $4\pi r^2$

Tratamento no registro simbólico algébrico

↓

Área do fuso		**Medida do ângulo (em grau)**
$4\pi r^2$	–––––––––	$360°$
$A_{Fuso\ esférico}$	–––––––––	α

$$A_{Fuso\ esférico} = \frac{4\pi r^2 \cdot \alpha}{360°} = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{90°}$$

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Para isto, é imprescindível identificar que a área de um fuso esférico é proporcional à medida do ângulo α rotacionado, dessa forma, deve-se realizar um tratamento no registro simbólico algébrico utilizando uma regra de três simples para calcular a área do fuso esférico em função da medida do ângulo α e do raio r.

A Questão 49, apresentada na Figura 29, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, indica que os sólidos abordados são uma esfera e um cone reto e a área da superfície esférica e do cone são iguais. O comando pede para que seja determinado o raio da esfera, levando em consideração o raio da base e o volume do cone dados. Esta questão não traz um suporte, o qual poderia facilitar para um melhor entendimento do que é descrito no enunciado e no comando.

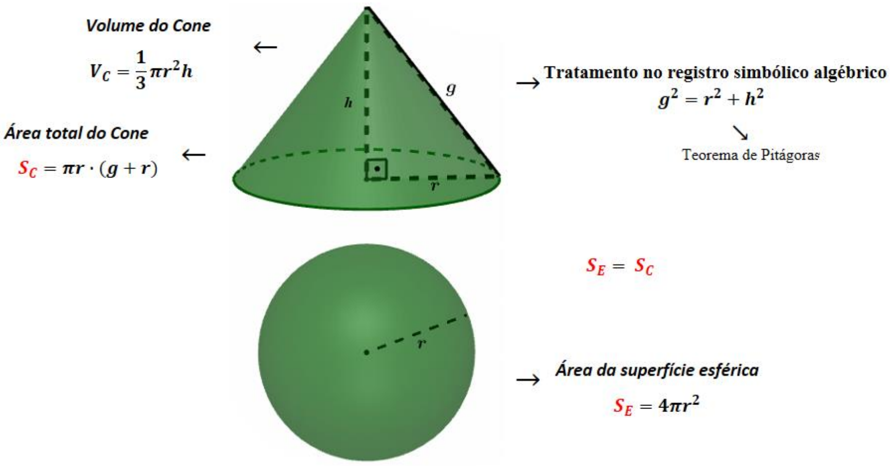
Figura 29 – Questão 49

49. (Faap-SP) A área da superfície de uma esfera e a área total de um cone reto são iguais. Determine o raio da esfera, sabendo que o volume do cone é 12π dm³ e o raio da base é 3 dm.
$\sqrt{6}$ dm

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 136).

Para a resolução dessa questão é utilizada a apreensão discursiva e a apreensão operatória, pois é necessário que o aluno visualize, ao menos mentalmente, o que é exposto no enunciado e comando. A questão aborda três objetos matemáticos o volume do cone, a área total do cone e a área da superfície esférica. Como mostra o esquema da Figura 30.

Figura 30 – Esquema 7



Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Desse modo, é necessário realizar três conversões, uma do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico do volume do cone, para que se encontre a altura h. Outra, do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico da área total do cone, neste caso, para encontrar a geratriz g do cone reto, é necessário fazer um tratamento no registro simbólico algébrico estabelecendo uma relação pitagórica entre o raio r, a altura h e a geratriz g. E a terceira conversão do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica. Após isso, realizar um tratamento no registro simbólico algébrico igualando a área da superfície esférica e área total do cone, para assim encontrar o valor do raio da esfera.

A Questão 50, apresentada na Figura 31, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, indica que um plano α secciona uma esfera e explicita a distância entre o plano α e o centro da esfera e o raio da secção obtida. O comando pede para que seja calculado o volume da esfera. Esta questão não traz um suporte e se assemelha com a questão 45 (Ver Figura 22), pois também aborda a secção de uma esfera e são utilizados os mesmos procedimentos para resolvê-la, com exceção do que é solicitado no comando.

Figura 31 – Questão 50

50. Uma esfera é seccionada por um plano α distante 12 cm do centro da esfera. O raio da secção obtida é 9 cm. Calcule o volume da esfera.
$4\,500\pi\ cm^3$

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 136).

Para a resolução dessa questão é utilizada a apreensão discursiva e a apreensão operatória, além de identificar os elementos presentes no registro discursivo é preciso que se faça, ao menos mentalmente, a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro figural geométrico da secção da esfera. Desse modo, como na questão 45 (Ver Figura 22), é necessário ter conhecimento de que a secção da esfera é um círculo, e que é possível encontrar o raio da esfera utilizando o Teorema de Pitágoras, dessa maneira, a complexidade desta questão aumenta o custo cognitivo para conseguir resolvê-la. Assim, é preciso fazer um tratamento no registro simbólico algébrico na relação do Teorema de Pitágoras para encontrar o raio da esfera. Como também, fazer uma conversão do registro discursivo em língua natural para o registro simbólico algébrico do volume da esfera, e um tratamento no registro simbólico algébrico substituindo o valor do raio encontrado no volume da esfera.

A Questão 51, apresentada na Figura 32, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, descreve a estrutura de uma igreja que possui uma cúpula abobadada com formato externo de uma semiesfera, é dado seu diâmetro e explicado que será aplicada uma manta asfáltica na parte externa dessa abóbada, também relata o valor que será cobrado por cada metro quadrado para instalação da manta, além de sugerir o uso da calculadora na resolução e o valor de π. O comando questiona o valor cobrado para a instalação da manta na abóbada. O suporte apresenta a imagem da parte da igreja que possui formato de uma semiesfera e a descrição na representação discursiva em língua materna.

Figura 32 – Questão 51

51. Uma igreja possui uma cúpula abobadada com formato externo de uma semiesfera de diâmetro medindo 12 metros.

OPIS ZAGREB/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Diversos templos religiosos possuem abóbadas (ou domos) no formato semiesférico. Um dos mais famosos é o da Basílica de São Pedro, no Vaticano. Fotografia de 2019.

Para evitar vazamentos será aplicado externamente uma manta asfáltica apenas na região da abóbada. A empresa que instala a manta asfáltica cobra R$ 120,00 por metro quadrado para a instalação da manta. Qual será o valor da instalação da manta asfáltica nessa abóbada? Considere $\pi = 3{,}14$. R$ 27.129,60

Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos.

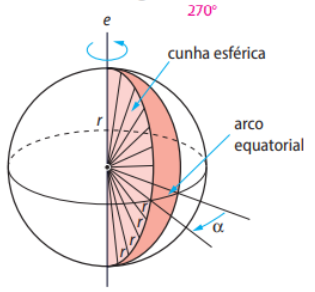
Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 136).

Para a resolução dessa questão são utilizadas as apreensões perceptiva e discursiva. Dessa maneira, deve-se realizar a conversão do registro em língua materna para o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica. Após isso, fazer um tratamento no registro simbólico algébrico da superfície da esfera, dividindo por dois, para encontrar a área da superfície da semiesfera. Como também, fazer um tratamento na representação simbólica numérica de forma escrita ou ao menos mental, para que se encontre o raio da semiesfera e esse raio seja substituído na área da semiesfera. Por fim, deve-se realizar um tratamento na representação numérica multiplicando a área encontrada pelo valor dado de cada metro quadrado, e assim, encontrar o valor procurado.

A Questão 52, apresentada na Figura 33, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, o qual descreve a definição de cunha esférica. O comando pede para que se encontre a fórmula que calcula o volume da cunha esférica em função do ângulo α e do raio r. O suporte traz a definição da cunha esférica por meio do registro figural, indicando o ângulo α, o raio r e o arco equatorial. Vale ressaltar que assim como acontece na questão 48 (Ver Figura 27) sobre fuso esférico, o LD analisado, não aborda o conteúdo de cunha esférica dentro do tópico Esfera, traz este conteúdo apenas nesta questão. A resolução desta questão se assemelha com a resolução da questão 48 apesar de serem conteúdos distintos, são utilizados os mesmos procedimentos.

Figura 33 – Questão 52

52. Chamamos de **cunha esférica** o sólido gerado pela rotação, por um ângulo de medida α ($0° < \alpha \leq 360°$), de um semicírculo de raio r em torno do eixo que contém seu diâmetro, como mostrado a seguir. $\frac{\pi r^3 \alpha}{270°}$



Escreva a fórmula que calcula o volume de uma cunha esférica, em função da medida do ângulo α e do raio r.

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 136).

Para a resolução dessa questão, são utilizadas as apreensões perceptiva e discursiva, para conseguir resolver o aluno deve identificar os elementos (raio e ângulo, por exemplo) no suporte e no registro discursivo em língua materna. Assim, é necessário fazer uma conversão do registro figural para o registro simbólico algébrico do volume da esfera que se relaciona com o ângulo de $360°$, como é mostrado no esquema da Figura 34.

Figura 34 – Esquema 8

Conversão do registro figural para o registro simbólico algébrico do volume da esfera $\rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi r^3}$

Tratamento no registro simbólico algébrico

$\downarrow$

Volume da Cunha **Medida do ângulo (em grau)**

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \text{ --------- } 360^\circ$$

$$V_{cunha\ esférica} \text{ ---------- } \alpha$$

$$V_{cunha\ esférica} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi r^3 \cdot \alpha}{270^\circ}$$

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Também é preciso identificar que o volume da cunha esférica é proporcional à medida do ângulo α rotacionado. Dessa forma, deve-se realizar um tratamento no registro simbólico algébrico utilizando uma regra de três simples para calcular o volume da cunha esférica em função da medida do ângulo α e do raio r.

A Questão 12, apresentada na Figura 35, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, indica uma situação onde a medida do raio da base, da altura e da geratriz de um cone reto, está em progressão aritmética de razão igual a 1, nessa ordem descrita. Também é dado o resultado da soma destas medidas e afirmado que a área total da superfície do cone é igual a área da superfície de uma esfera, com base nisto, no comando é solicitado o raio desta esfera. Esta questão não apresenta um suporte.

Figura 35 – Questão 12

12. (AFA-SP) Num cone reto, a medida do raio da base, da altura e da geratriz estão, nessa ordem, em progressão aritmética de razão igual a 1. Sabendo-se que a soma dessas medidas é 12 dm e que a área total da superfície deste cone é igual à área da superfície de uma esfera, a medida do raio da esfera, em dm, é

a) $\sqrt{6}$

b) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

c) $\sqrt{5}$

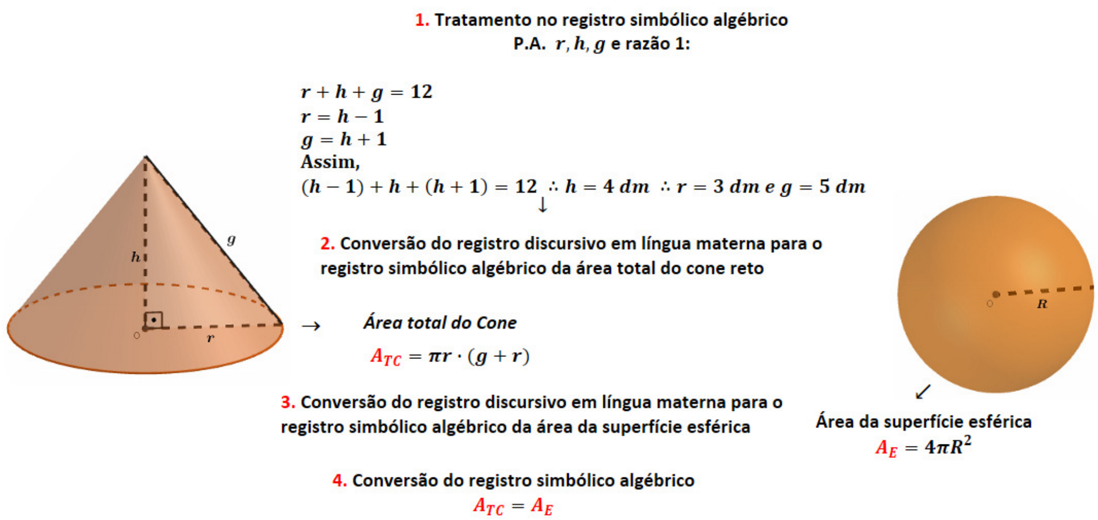
d) 2

alternativa **a**

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 149).

Para a resolução dessa questão é utilizada a apreensão discursiva. É imprescindível que o estudante saiba como se forma uma progressão aritmética de 3 termos e razão 1, pois isso possibilita encontrar as medidas do raio r, da altura h e da geratriz g do cone. Dessa forma, é preciso fazer um tratamento no registro simbólico algébrico para encontrar essas medidas, como pode ser observado no esquema da Figura 36.

Figura 36 – Esquema 9



Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

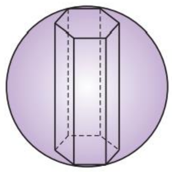
Após isso, realizar duas conversões, uma do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico da área total do cone reto, e outra, do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica.

Posteriormente, fazer um tratamento no registro simbólico algébrico da área total do cone e da área da superfície esférica, igualando as duas áreas e assim, encontrar a medida do raio da esfera.

A Questão 13, apresentada na Figura 37, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, indica que um prisma hexagonal regular está inscrito em uma esfera, é dado as medidas da altura e do lado da base do prisma. O comando pergunta qual a área da superfície dessa esfera. O suporte traz a representação figural geométrica dos sólidos.

Figura 37 – Questão 13

13. (Uespi-PI) Um prisma hexagonal regular, com lado da base medindo 3 cm e altura 8 cm, está inscrito em uma esfera, como ilustrado a seguir. Qual a área da superfície da esfera? alternativa **e**



a) 92π cm²
b) 94π cm²
c) 96π cm²
d) 98π cm²
e) 100π cm²

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 149).

Para a resolução dessa questão, são utilizadas as apreensões perceptiva e discursiva. É necessário compreender os elementos da esfera e do prisma abordados a partir do registro discursivo, sendo preciso a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica. Para encontrar a medida do diâmetro e, consequentemente, do raio da esfera, pode-se fazer a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro figural por meio das informações do enunciado, e assim, utilizar a apreensão operatória para construir um triângulo retângulo como o apresentado na Figura 38.

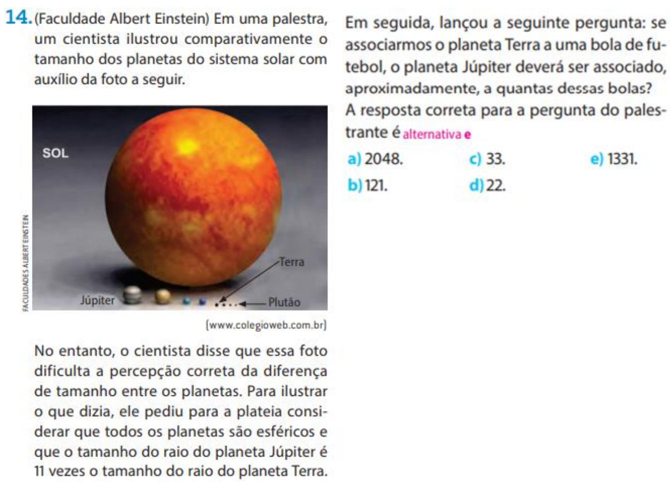
Figura 38 – Triângulo retângulo

Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Neste caso, 6 cm equivale à medida da maior diagonal do hexágono da base e 8 cm, à altura do prisma hexagonal. Assim, é necessário fazer dois tratamentos no registro simbólico numérico, um utilizando o Teorema de Pitágoras para encontrar o diâmetro da esfera, e outro, de forma escrita ou ao menos mental, para encontrar o raio da esfera. Após isso, realizar um tratamento na representação algébrica da área da superfície esférica, encontrando o que é solicitado no comando.

A Questão 14, apresentada na Figura 39, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, e descreve uma situação ocorrida numa palestra, onde um cientista comparou o tamanho dos planetas do sistema solar, pediu para a plateia considerar que todos estes planetas são esféricos e que o a medida do raio do planeta Júpiter é 11 vezes a medida do raio do planeta Terra. O comando da questão, questiona que ao associar o planeta Terra a uma bola de futebol, o planeta Júpiter deverá ser associado a quantas destas bolas. O suporte traz a representação figural geométrica dos planetas e do Sol, descrito pelo cientista.

Figura 39 – Questão 14



14. (Faculdade Albert Einstein) Em uma palestra, um cientista ilustrou comparativamente o tamanho dos planetas do sistema solar com auxílio da foto a seguir.

[www.colegioweb.com.br]

No entanto, o cientista disse que essa foto dificulta a percepção correta da diferença de tamanho entre os planetas. Para ilustrar o que dizia, ele pediu para a plateia considerar que todos os planetas são esféricos e que o tamanho do raio do planeta Júpiter é 11 vezes o tamanho do raio do planeta Terra.

Em seguida, lançou a seguinte pergunta: se associarmos o planeta Terra a uma bola de futebol, o planeta Júpiter deverá ser associado, aproximadamente, a quantas dessas bolas?

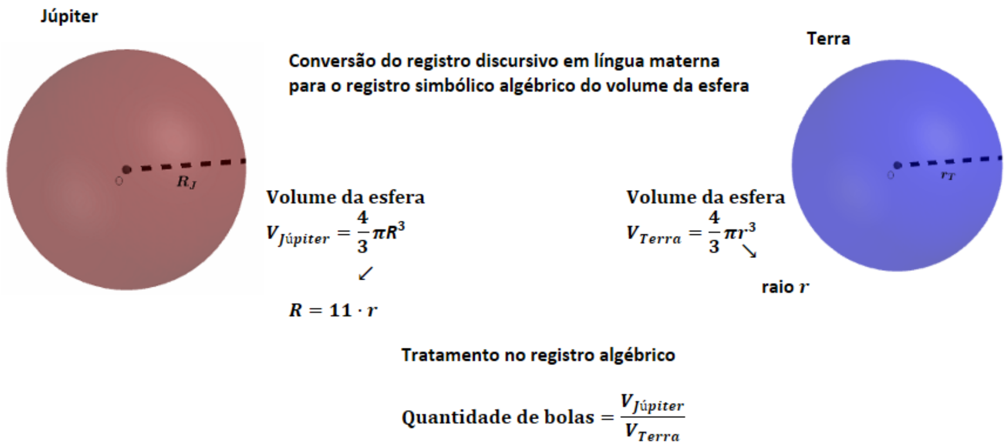
A resposta correta para a pergunta do palestrante é alternativa e

a) 2048. b) 121. c) 33. d) 22. e) 1331.

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 150).

Para a resolução dessa questão, são utilizadas as apreensões perceptiva e discursiva, pois é necessário compreender os elementos da esfera descritos na representação discursiva em língua materna, como também, na representação geométrica. Nesta questão, tem que se fazer a relação entre o raio e o volume da esfera, como mostra o esquema da Figura 40.

Figura 40 – Esquema 10



Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Sendo assim, deve-se realizar a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico do volume da esfera, por duas vezes, uma para o volume da esfera considerada como o planeta Terra, e outra, para o volume da esfera considerada como o planeta Júpiter. Dessa forma, realizar dois tratamentos no registro algébrico da esfera, um considerando o raio da Terra r e o raio de Júpiter 11 vezes r, e outro, dividindo os dois volumes, da Terra e de Júpiter, para encontrar o que é solicitado no comando.

A Questão 15, apresentada na Figura 41, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, descreve cápsulas que possuem formato cilíndrico e extremidades hemisféricas e contêm medicamento em microesferas de 1,0 mm de diâmetro, são dados o comprimento total de cada cápsula e o diâmetro de cada hemiesfera. O comando pede o número máximo de microesferas que cabem no interior de cada cápsula, desprezando o espaço entre elas. A questão não apresenta suporte.

Figura 41 – Questão 15

15. (Uneb-BA) Considere-se que

- cápsulas, de formato cilíndrico e extremidades hemisféricas, contêm determinado medicamento em microesferas de 1,0 mm de diâmetro;
- o comprimento total de cada cápsula mede 15 mm, e o diâmetro de cada hemisfera mede 6 mm.

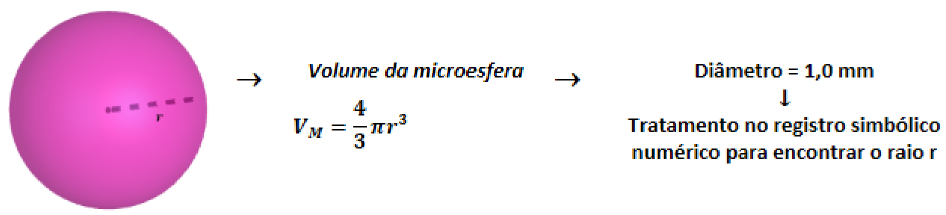
É correto afirmar que o número máximo de microesferas que cabem no interior de cada cápsula, admitindo-se desprezíveis os espaços entre elas, é alternativa **03**

01) 500 **03)** 702 **05)** 804
02) 681 **04)** 765

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 150).

Para a resolução dessa questão, é utilizada a apreensão discursiva. É necessário fazer a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro do volume da esfera (microesfera) e fazer um tratamento no registro simbólico numérico ou ao menos mental, para encontrar o raio da microesfera, como apresenta o esquema da Figura 42.

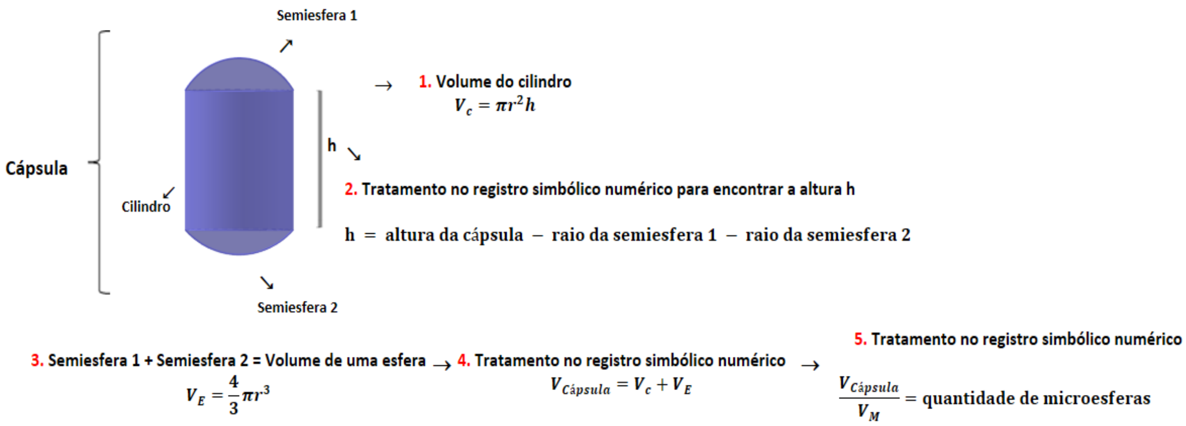
Figura 42 – Esquema 11



Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Sabendo que as cápsulas possuem formato cilíndrico e extremidades com formato de semiesfera, é necessário fazer a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro do volume do cilindro e fazer um tratamento no registro simbólico numérico para encontrar a altura h do cilindro, neste caso, o volume do cilindro e a altura do cilindro são considerados dois objetos matemáticos. Também é necessário fazer a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico do volume da esfera, como são duas semiesferas, não é preciso dividir o volume da esfera por dois. O esquema da Figura 43 apresenta o que foi descrito.

Figura 43– Esquema 12



Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Por fim, deve-se realizar dois tratamentos no registro simbólico numérico, um para somar os dois volumes, o do cilindro e o da esfera formando o volume da cápsula. E outro, dividindo o volume da cápsula pelo volume das microesferas, dessa forma encontrando a quantidade máxima de microesferas que cabem no interior de cada cápsula.

A Questão 17, apresentada na Figura 44, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, descreve que são fundidas três esferas idênticas e maciças, dado a medida de seus diâmetros, no comando é questionado o raio da esfera obtida após a fundição dessas três esferas. A questão não traz um suporte.

Figura 44 – Questão 17

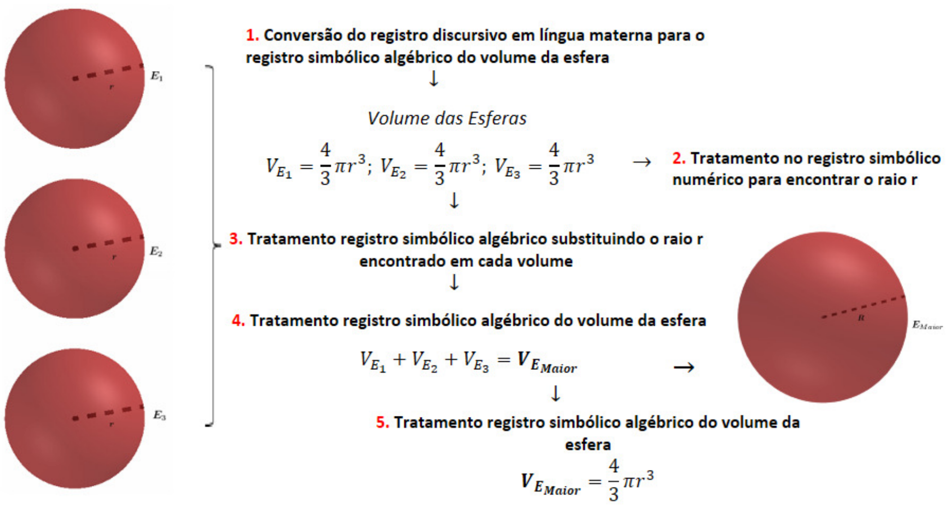
17. (UFRGS-RS) Fundindo três esferas idênticas e maciças de diâmetros 2 cm, obtém-se uma única esfera maciça de raio alternativa **a**

a) $\sqrt[3]{3}$.   c) $\sqrt[2]{6}$.   e) 6.
b) $\sqrt[2]{4}$.   d) 3.

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 150).

Para a resolução desta questão é utilizada a apreensão discursiva. Deve-se fazer a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico geométrico do volume das três esferas, como mostra o esquema da Figura 45.

Figura 45 – Esquema 12

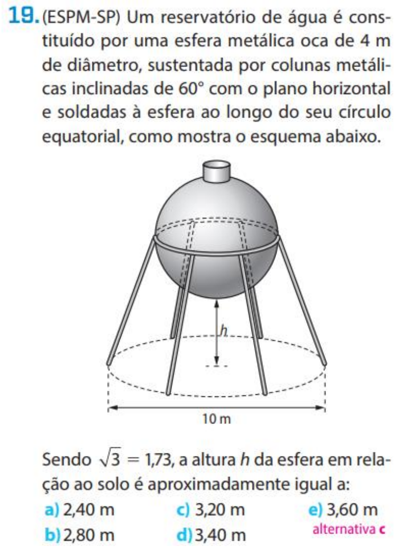


Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Realizar dois tratamentos no registro simbólico algébrico do volume da esfera, um de forma escrita ou mental, para encontrar os raios das esferas, e outro, substituindo o valor do raio encontrado no volume de cada esfera. Em seguida, realizar um novo tratamento no registro simbólico algébrico somando os volumes das três esferas. Após isso, fazer mais um tratamento no registro simbólico algébrico do volume da esfera, substituindo o volume somado das três esferas, e dessa maneira, encontrar o raio da esfera obtida.

A Questão 19, apresentada na Figura 46, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, apresenta um reservatório de água constituído por uma esfera metálica e que é sustentada por colunas metálicas inclinadas de 60° com o plano horizontal e soldadas à esfera ao longo do seu círculo equatorial, também é dada a medida do diâmetro da esfera. No comando é questionada qual a medida aproximadamente da altura h da esfera em relação ao solo. O suporte apresenta a representação figural geométrica da esfera sobre as colunas metálicas, bem como indica a altura h no centro da esfera e do círculo equatorial e a medida do diâmetro do círculo equatorial.

Figura 46 – Questão 19


19. (ESPM-SP) Um reservatório de água é constituído por uma esfera metálica oca de 4 m de diâmetro, sustentada por colunas metálicas inclinadas de 60° com o plano horizontal e soldadas à esfera ao longo do seu círculo equatorial, como mostra o esquema abaixo.

Sendo $\sqrt{3} = 1{,}73$, a altura h da esfera em relação ao solo é aproximadamente igual a:

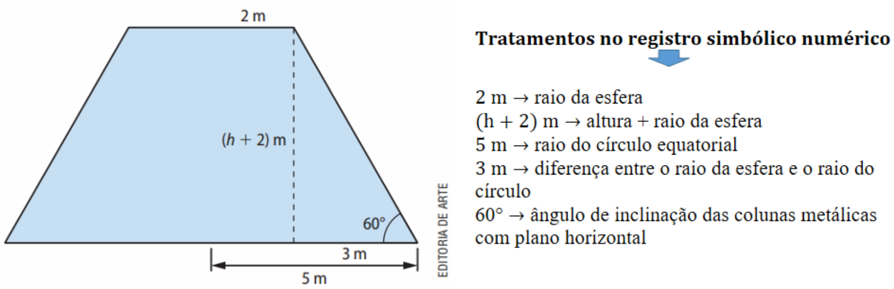
a) 2,40 m c) 3,20 m e) 3,60 m
b) 2,80 m d) 3,40 m

alternativa c

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 151).

Para a resolução dessa questão, são utilizadas as apreensões perceptiva, discursiva e operatória. Para que facilite o entendimento e a resolução desta questão, é importante que a partir das informações apresentadas no enunciado, comando e suporte, seja construída a figura geométrica do esquema apresentado na Figura 47, além de ser possível realizar vários tratamentos no registro simbólico numérico, como mostrado abaixo.

Figura 47 – Esquema 13

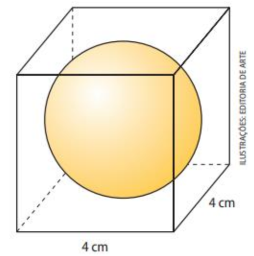


Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 271) adaptado pela autora, 2022.

A figura geométrica mostrada na Figura 47, foi construída utilizando como referência as colunas que sustentam o reservatório. Vale ressaltar que para resolver esta questão, não são suficientes os conteúdos abordados no tópico Esfera, é fundamental o conhecimento de relações trigonométricas. Sendo assim, sabendo que o triângulo retângulo no trapézio da Figura 47, possui as medidas dos seus catetos, é preciso realizar um tratamento no registro simbólico algébrico para o cálculo da tangente do ângulo 60°. Após isso, fazer dois tratamentos no registro simbólico numérico, um para substituir o valor da raiz de 3 dada na questão, e outro retirando a medida do raio da esfera. Dessa forma, encontrando o valor da altura h.

A Questão 20, apresentada na Figura 48, traz o enunciado na representação discursiva em língua materna, indica uma esfera inscrita num cubo, o qual é dado a medida de suas arestas e é afirmado que o plano de cada face do cubo é tangente à esfera. O comando pede para que seja calculado a área da superfície esférica. O suporte traz a representação figural geométrica da esfera inscrita no cubo e as medidas das arestas.

Figura 48 – Questão 20



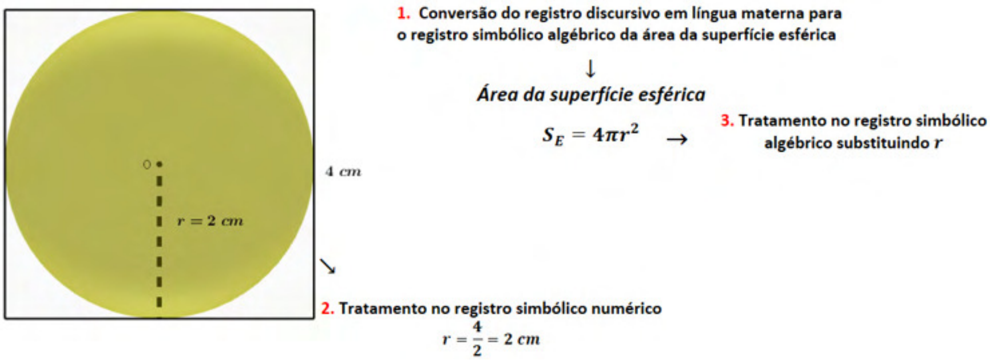
20. A figura mostra uma esfera inscrita em um cubo de aresta 4 cm (note que o plano de cada face do cubo é tangente à esfera). Calcule a área total da superfície esférica. alternativa c

a) 4π cm^2
b) 8π cm^2
c) 16π cm^2
d) 32π cm^2
e) π cm^2

Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA. 2020, p. 151).

Para a resolução desta questão são utilizadas as apreensões perceptiva e discursiva, pois é necessário identificar os elementos da esfera e do cubo no registro figural e relacioná-los com o que traz o registro discursivo em língua materna. Além disso, é utilizada também a apreensão operatória porque é preciso fazer um tratamento no registro figural, ao menos mentalmente, para que se consiga visualizar estes elementos. São abordados dois objetos matemáticos, a esfera e o cubo. Assim, é preciso realizar a conversão do registro discursivo em língua materna para o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica, como apresenta o esquema da Figura 49.

Figura 49 – Esquema 14



Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

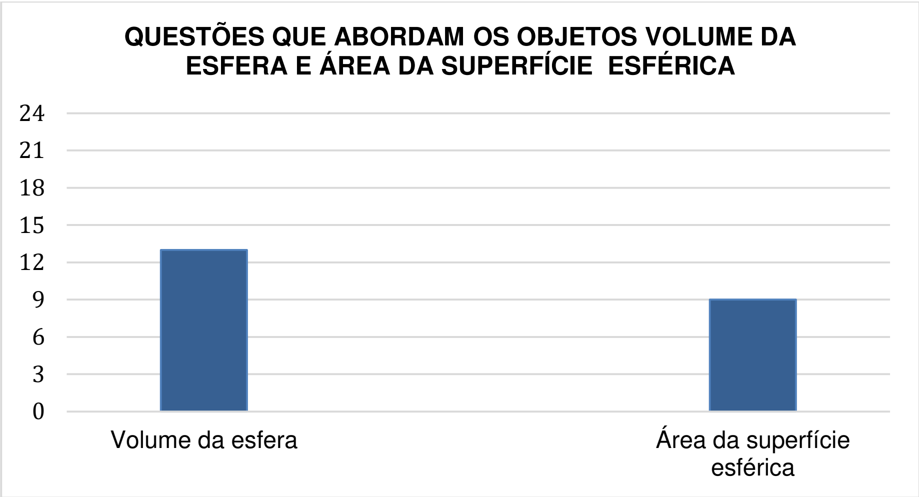
Após isso, é importante o aluno fazer uma interpretação operatória para seccionar a esfera no seu diâmetro e constatar que o diâmetro corresponde a aresta do cubo, sendo assim, deve-se realizar um tratamento no registro simbólico numérico de forma escrita ou ao menos mental, para encontrar o raio da esfera. E dessa maneira, fazer um tratamento no registro simbólico algébrico substituindo o raio e encontrando a área da superfície da esfera.

5.2 Síntese da Análise das Questões

No decorrer do tópico Esfera, verificamos que o LD apresenta os objetos matemáticos por meio dos registros de representações em língua natural, simbólico algébrico e figural. Quanto ao volume da esfera, o livro aborda utilizando o Princípio de Cavalieri em consonância com a Proposta Curricular da Paraíba, enquanto que a área da superfície esférica é apresentada através de um processo de decomposição da esfera em sólidos com formatos de pirâmides e alturas equivalentes à medida do raio da esfera.

No Gráfico 1 são apresentados o quantitativo de questões que trabalham os objetos matemáticos volume da esfera e área da superfície esférica.

Gráfico 1– Questões que abordam os objetos matemáticos volume da esfera e área da superfície esférica

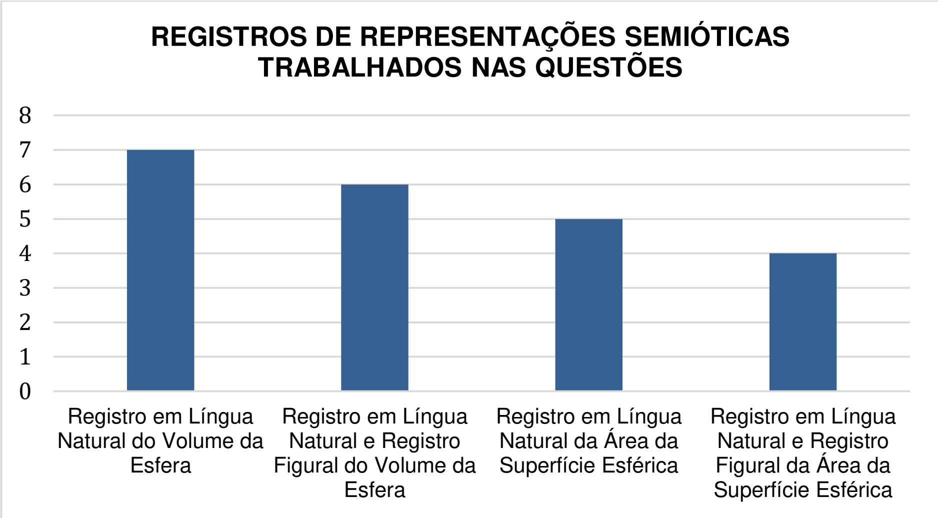


Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Das 24 questões analisadas, 54% trabalham o objeto volume da esfera, enquanto que 38% trabalham o objeto área da superfície esférica. Destas questões, a questão 19 e a questão 45, o que equivale a 8%, não trabalham os objetos volume da esfera e área da superfície esférica. A questão 19 (Ver Figura 46) trabalha por meio de tratamentos, o raio da esfera e as relações trigonométricas para encontrar uma determinada altura h de uma esfera, sustentada por colunas metálicas, em relação ao solo. Já a questão 45 (Ver Figura 22) trabalha a área da secção da esfera.

No Gráfico 2, são apresentados os registros de representações semióticas do volume da esfera e da área da superfície esférica que são trabalhados nas questões.

Gráfico 2– Registros de Representações Semióticas abordados nas questões



Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

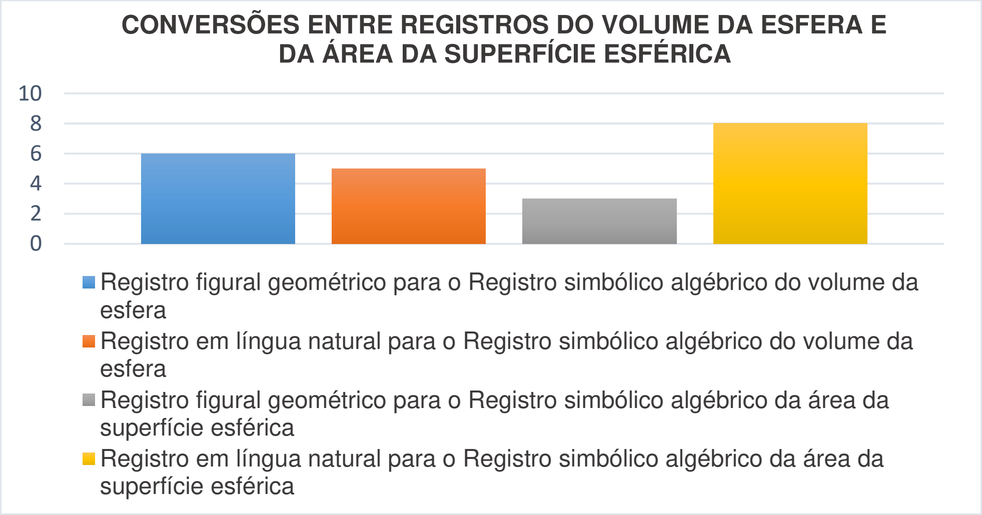
Como podemos observar no gráfico, dentre as 24 questões analisadas, 29% trabalham apenas o registro de representação em língua natural do volume da esfera, enquanto que 25% trabalham os registros em língua natural e figural do volume da esfera, simultaneamente. Já 21% das questões trabalham somente o registro em língua natural da área da superfície esférica, enquanto que 17% trabalham os registros em língua natural e figural da área da superfície esférica, ao mesmo tempo. Duas destas questões, as quais equivalem a 8%, não trabalham os registros supracitados, são elas, a questão 45 (Ver Figura 22) que aborda o registro em língua natural da área da secção de uma esfera, e a questão 19 (Ver Figura 46) que aborda o registro em língua natural e o figural de relações trigonométricas.

Quanto aos tipos de apreensões geométricas abordadas nas questões, encontramos as apreensões perceptiva e discursiva presentes em 58% e 100% delas, respectivamente. Estas apreensões são utilizadas quando é preciso identificar os elementos dos sólidos na representação geométrica e relacioná-los com o que é exposto na representação na linguagem natural, como também, quando é necessário identificar os elementos e propriedades dos sólidos trabalhados, por meio da representação discursiva em língua materna. Outra apreensão trabalhada, é a apreensão operatória, a qual aparece em apenas 8 questões, o que equivale a 33% das questões analisadas. Esta apreensão exige um maior custo cognitivo do aluno, pois requer um tratamento figural que auxilia na descoberta da resolução do problema, mediante as operações realizadas sobre as figuras.

Na análise das questões, encontramos outros sólidos geométricos que são trabalhados juntamente com a esfera, dessa maneira, sólidos como o cone, o cilindro, o cubo e o prisma são abordados em 38% das questões analisadas.

No Gráfico 3, são apresentadas as principais conversões entre os registros trabalhadas nas questões analisadas. Dentre as 24 questões, apenas a questão 19 não trabalha a conversão, assim foram consideradas 23 questões quanto às conversões entre os registros de representações semióticas.

Gráfico 3– Conversões entre registros do volume da esfera e da área da superfície esférica trabalhadas nas questões



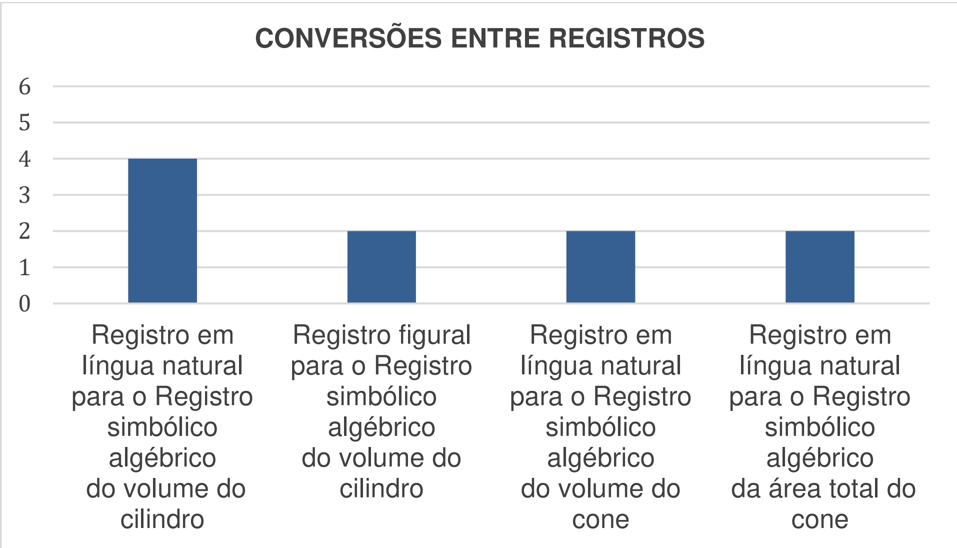
Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

De acordo com o gráfico acima, a conversão mais trabalhada nas questões foi a que tem como registro de partida o registro em língua natural e o de chegada o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica, com 35%. A conversão que tem como registro de partida o registro figural geométrico e o de chegada o registro simbólico algébrico do volume da esfera, equivale a 26%. A conversão que tem como registro de partida o registro em língua natural e o de chegada o registro simbólico algébrico do volume da esfera, equivale a 22%, e a conversão que tem como registro de partida o registro figural geométrico e o de chegada o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica, equivale a 13% das questões.

Vale ressaltar que as conversões em que o registro de partida é o registro em língua natural e o de chegada o simbólico algébrico, foram priorizadas, aparecendo com mais frequência que as demais. Já a conversões em que o registro de partida é o registro figural e o de chegada o simbólico algébrico aparecem em segundo lugar como as mais trabalhadas. Nas duas situações, não foram encontradas conversões de volta.

Podemos observar na análise das questões, que foram trabalhadas conversões entre registros de objetos matemáticos distintos do volume da esfera e da área da superfície esférica. Assim, no Gráfico 4 são apresentadas estas conversões.

Gráfico 4 – Conversões entre os registros do volume do cilindro, do volume do cone e da área total do cone



Fonte: Elaborado pela autora, 2022.

Podemos observar no gráfico acima, que a conversão que tem como registro de partida o registro em língua natural e o de chegada o registro simbólico algébrico do volume do cilindro, equivale a 17% das questões, já a conversão em que o registro de partida é o registro figural e o de chegada o registro simbólico algébrico do cilindro, equivale a 9%, todas as questões que abordaram o volume do cilindro, também trabalharam o volume da esfera. As conversões que tem como registro de partida o registro em língua natural e o de chegada o registro simbólico algébrico do volume do cone, e a que tem como registro de partida o registro em língua natural e o de chegada o registro simbólico algébrico da área total do cone, equivalem a 9% das questões. Também foram abordadas conversões entre registros dos objetos matemáticos: área do cubo, apenas na questão 43 e triângulo retângulo e teorema de Pitágoras, nas questões 13, 45, 49 e 50.

Dessa forma, finalizamos a síntese das questões analisadas neste trabalho, tendo identificado os registros de representações e as conversões trabalhados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, tivemos como embasamento a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, que aborda o modelo de funcionamento cognitivo do pensamento e analisa as dificuldades encontradas na aprendizagem da Matemática considerando a forma de acesso aos objetos matemáticos, os quais não possuem existência física e só é possível ter acesso a estes objetos, por meio de suas representações semióticas.

Com relação ao ensino da Esfera, buscamos responder as indagações: como os livros didáticos abordam o objeto matemático esfera, quanto às suas representações? Estas abordagens podem levar os alunos a uma compreensão desse objeto matemático? Para responder estes questionamentos, tivemos como objetivo geral analisar um livro didático do Ensino Médio aprovado no PNLD de 2021, quanto ao conhecimento de Esfera à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas. Para alcançar tal objetivo, analisamos as abordagens do tópico Esfera, presente no quarto capítulo do livro, no que concerne aos registros de representações e as conversões entre os registros do volume da esfera e da área da superfície esférica, trabalhadas nas questões propostas.

O LD analisado traz o volume da esfera, por meio do Princípio de Cavalieri, e a área da superfície esférica por aproximação utilizando sólidos com formatos de pirâmides e alturas equivalentes à medida do raio da esfera. Medeiros (2014) mediante sua pesquisa, afirma que muitas vezes as demonstrações e justificativas das fórmulas são deixadas de lado e ressalta a importância da utilização do Princípio de Cavalieri por se tratar de um resultado importante e bastante utilizado para explicar de forma intuitiva, clara e simples, as fórmulas das áreas e volumes. Da mesma forma, Tavares (2019) reforça ser mais enriquecedor propor alternativas para justificar ou deduzir a relação do cálculo do volume da esfera, como acontece no Princípio de Cavalieri.

Desse modo, verificamos quanto aos registros do volume da esfera que 25% trabalham os registros em língua natural e figural, simultaneamente, enquanto que 29% trabalham apenas o registro de representação em língua natural do volume da esfera. Quanto aos registros da área da superfície esférica, 17% das questões trabalham os registros em língua natural e figural da área da superfície esférica, ao mesmo tempo, já 21% das questões trabalham somente o registro em língua natural da área da superfície esférica, o que na visão de Duval (2004), não favorece na compreensão dos objetos, pois os tratamentos discursivos e figurais devem ser feitos de forma simultânea.

Quanto às conversões, a mais trabalhada nas questões, foram as que têm como registro de partida o registro em língua natural e o de chegada o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica, com 35%. Enquanto que a conversão que tem como registro de partida o registro figural geométrico e o de chegada o registro simbólico algébrico da área da superfície esférica, equivale a 13%.

A conversões mais trabalhadas entre o volume da esfera foram as que têm como registro de partida o registro figural geométrico e o de chegada o registro simbólico algébrico do volume da esfera, equivalendo a 26%. E a conversão que tem como registro de partida o registro em língua natural e o de chegada o registro simbólico algébrico do volume da esfera, equivalendo a 22%.

Em todas as questões analisadas não foram encontradas conversões em que o registro de partida fosse o registro na língua natural e o de chegada o registro figural do volume da esfera e/ou da área da superfície esférica. Sendo assim, apontamos que o livro prioriza algumas conversões entre registros de representações semióticas do volume da esfera e da área da superfície esférica em detrimento de outras. Duval (2012a) afirma ser fundamental que as atividades propostas aos alunos, envolvam conversões de ida e volta entre os registros de representações do objeto matemático estudado, visto que são processos diferentes e necessários para que se consiga transitar espontaneamente entre os registros de representações e dessa forma, compreender o objeto matemático.

Da mesma maneira, na pesquisa de Kluppel (2012) foram encontradas conversões em que o registro de partida é o da língua natural para um enunciado em língua natural ou uma ou várias representações figurais. Esse tipo de conversão negligencia tratamentos discursivos, uma vez que não considera que na conversão inversa, entre o registro figural e em língua natural, é exigido uma explicação que leva à expansão discursiva e as distintas formas de funcionamento cognitivo do raciocínio.

Desse modo, evidenciamos que no processo de ensino-aprendizagem de matemática o professor não deve limitar-se apenas ao livro didático, pois utilizar apenas este recurso não garante a compreensão dos objetos matemáticos. Assim, como afirma Kluppel (2012) o LD tem papel importante na prática docente e no processo de aprendizagem, pois auxilia no planejamento e gestão das aulas. Destarte, é necessário que o docente tenha um olhar crítico para o LD e analise as abordagens dos objetos matemáticos trabalhados, buscando complementar o ensino para conseguir uma melhor compreensão dos discentes.

Ressaltamos que há muito o que pesquisar e investigar sobre o tema proposto dessa pesquisa, a análise do livro didático é sempre muito importante na busca de uma melhor abordagem dos objetos matemáticos. Com isso, indicamos novos estudos que contribuam ainda mais com o ensino da matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Registros de representação semióticas e compreensão de conceitos geométricos. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 125-147.

BONJORNO, J. R. P.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. **Prisma Matemática:** geometria: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BULLMANN, C. L. **Aprendizagem de conceitos de Geometria Espacial por estudantes do ensino médio:** entendimentos produzidos a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 2018. Dissertação (mestrado) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2018. Disponível em: <https://bibliodigital.unijui.edu.br:8443/xmlui/bitstream/handle/123456789/6138/C%c3%a1tia%20Luana%20Bullmann.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 10 jan. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (1º e 2º ciclos do ensino fundamental).** v. 3. Brasília: MEC, 1997.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DUVAL, R. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 11-33.

______. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução Myriam Veja Restrepo. Santiago de Cali: Ed. Peter Lang, 2004.

______. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** (Trad. Méricles T. Moretti). REVEMAT, Florianópolis, Santa Catarina, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012a.

______. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência**. (Trad. Méricles T. Moretti). REVEMAT, Florianópolis, Santa Catarina, v.7, n.1, p. 118-138, 2012b.

______. **Como Analisar A Questão Crucial Da Compreensão Em Matemática?** REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática. (Trad. Méricles T. Moretti). Florianópolis, Santa Catarina, v. 13, n. 2, p. 1-27, 2018.

FERREIRA, N. S. de A. As pesquisas denominadas "estado da arte". **Educação & Sociedade**, São Paulo, ano 23, n. 79, p. 257-272, ago. 2002. Disponível em:

<https://www.scielo.br/j/es/a/vPsyhSBW4xJT48FfrdCtqfp/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 19 jan. 2022.

GERHART, T. E. A construção da pesquisa. In: GERHART, T. E.; SILVEIRA, D. T (Orgs.). **Métodos de pesquisa.** Porto Alegre, RS: Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, 2009. 120 p.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. Ed. São Paulo: Atlas 2008.

INSTITUTO BRASILEIRO DE INFORMAÇÃO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA. **Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)**. Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/>. Acesso em: 08 jan. 2022.

KLUPPEL, G. T. **Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à luz da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval**. 2012. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2012. Disponível em: <https://tede2.uepg.br/jspui/bitstream/prefix/1325/1/GABRIELA%20TEIXEIRA%20KLUPPEL.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2022.

MEDEIROS, L. A. **Área e volume da esfera**. 2014. 53 f. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/18667/1/LeonardoAM_DISSERT.pdf>. Acesso em: 09 jan. 2022.

PARAÍBA. Secretaria de Estado da Educação e da Ciência e Tecnologia da Paraíba, **Proposta Curricular do Estado da Paraíba – Ensino Médio**, 2020. Disponível: <https://drive.google.com/file/d/1q7hNWJL7ScfzW26dAjqXai9oUVpLs4Zf/view>. Acesso em: 20 fev. 2022.

PILATI, G. C. **O Princípio de Cavalieri e o volume da esfera**. 2015. 67 f. Dissertação (mestre em matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015. Disponível em: <http://repositorio.uem.br:8080/jspui/bitstream/1/5550/1/000227459.pdf>. Acesso em: 09 jan. 2022.

SAVIANI, D. **Educação: do senso-comum à consciência filosófica**. 17 ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

TAVARES, M. C. F. P. **Superfícies e sólidos esféricos**. 2019. 128 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT), Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2019. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/4697/2/CT_PROFMAT_M_Tavares%2c%20Maria%20Carla%20Ferreira%20Pereira_2019.pdf>. Acesso em: 09 jan. 2022.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Restrito

Entrega de Trabalho de Conclusão de Curso TCC

Assunto:	Entrega de Trabalho de Conclusão de Curso TCC
Assinado por:	Jessica Santos
Tipo do Documento:	Relatório
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Restrito
Hipótese Legal:	Informação Pessoal (Art. 31 da Lei no 12.527/2011)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples