Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Campus Campina Grande
Curso de Especialização em Ensino de Matemática

Maxwell Aires da Silva

Transformada de Laplace: conceitos e aplicações

Campina Grande - PB
junho/2022

Maxwell Aires da Silva

Transformada de Laplace: conceitos e aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Salomão Pereira de Almeida

Campina Grande - PB
junho/2022

S586t Silva, Maxwell Aires da.
Transformada de laplace: conceitos e aplicações/ Maxwell Aires da Silva. - Campina Grande, 2022.
57 f.:il.

Trabalho de Conclusão de Curso - Monografia (Curso de Especialização em Ensino de Matemática) - Instituto Federal da Paraíba,2022.
Orientador: Prof. Dr. Salomão Pereira de Almeida.

1.Matemática-Ensino. 2.Transformada de laplace. 3.Equações diferenciais. I. Título.

CDU 517.44

Maxwell Aires da Silva

TRANSFORMADA DE LAPLACE: CONCEITOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado na Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Salomão Pereira de Almeida (IFPB)

Aprovado em: 01 / 06 / 2022

BANCA EXAMINADORA

Salomão Pereira de Almeida

Prof. Dr. Salomão Pereira de Almeida (IFPB)

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes (UFCG)

Luciana R Freitas

Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas (UEPB)

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa Jéssica Millena Figueiredo Martins que desde sempre tem sido um sólido suporte para minha carreira e vida. Dedico também ao meu filho Enoque Martins Aires que dia após dia tem sido fonte de inspiração e de alegrias inenarráveis vividas até ao dia de hoje.

Agradecimentos

Agradeço do fundo do meu coração ao Criador de todas as coisas, o Altíssimo, o Soberano, o Senhor de toda terra, o reto e justo Juiz a quem haveremos de prestar contas um dia, pelo dom da vida, por ter chegado até aqui, pela Sua graça ter me alcançado, pelo presente inenarrável da salvação na pessoa de Cristo Jesus, o Rei do Universo, obrigado Senhor Deus por ter me guiado de maneira vitoriosa em todos os meus caminhos. Agradeço pelo bem que possa ter feito a qualquer pessoa, porque se fiz o bem é por que tua graça agiu sobre minha vida. Peço desculpas pelo mal que talvez tenha feito a qualquer pessoa, mas isso é devido às minhas limitações como ser humano imperfeito e limitado que sou.

Agradeço à minha esposa, Jéssica Millena Figueiredo Martins, por todos esses anos estar sempre ao meu lado, servindo de apoio, suporte, companheira, cúmplice, e apoiadora de toda a minha carreira. Só posso dizer por tudo isso que te amo profundamente.

Agradeço ao meu filho, Enoque Martins Aires, que tem sido um grande companheiro todos os dias e um filho extraordinariamente especial. Filho, saibas que papai te ama de todo o coração, e que todo esse esforço que papai faz é para que a sua vida seja um pouco menos difícil do que foi a de papai. Espero em Deus que você um dia tenha um encontro profundo com Cristo como papai e mamãe um dia teve, pois isso será um divisor de águas na sua vida, e em tudo quanto você fizer, terá o Pai Celestial ao seu lado te guiando, assim como também eu sempre estarei.

Agradeço à minha família, em especial a minha mãe, Josevânia Aires, ao meu pai, Manoel Marcone Dias da Silva, minha irmã, Sheilla Suely Aires da Silva, meu irmão, Matheus Gomes Dias, meu sogro, José Martins dos Santos e minha sogra, Mônica Maria Figueiredo Martins. Gostaria de dizer que o apoio e o carinho que vocês têm demonstrado por mim me dar forças para continuar firme no meu propósito. Obrigado por tudo.

Agradeço ao meu orientador e amigo pessoal, Salomão Pereira de Almeida por todo o apoio demonstrado durante todo esse tempo, pela paciência, pelas preciosas dicas, seja na área da pesquisa, seja no ensino, seja para provas de concursos, seja para assuntos da vida, seja para assuntos teológicos, quero lhe dizer, meu amigo, que sua amizade e sua vida são preciosas para mim. Muito obrigado mesmo.

Agradeço ao professor Arimatéia e a professora Luciana pela gentileza de aceitar compor a banca deste trabalho e pelas dicas pertinentes que certamente melhoraram como um todo o trabalho por nós iniciado.

Agradeço a professor Luis Halevange, coordenador do curso de Especialização, por durante todo esse tempo de curso ter feito seu trabalho com maestria, humildade e humanidade, sempre disponível e acessível nos momentos em que precisa dele. Muito obrigado professor.

Agradeço também aos demais professores do curso de Especialização em Ensino de Matemática por todas as aulas, discussões, leituras, e dicas. Saibam que tudo foi de muito proveito para minha formação como professor e pesquisador na área da matemática.

Agradeço ao Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba - IFPB, Campus Campina Grande pelo oferecimento do curso, pela excelente estrutura predial, pelo corpo docente qualificado e por fornecer ao estudante, principalmente paraibano, uma formação de qualidade.

Não poderia deixar de agradecer a todos os meus colegas de curso, que durante todo esse ano estiveram comigo em várias situações. Quero dizer que as experiências trocadas com todos vocês durante o curso estão guardadas em meu coração e que foram de grande serventia para mim como educador, como ser humano, como professor, enfim, foi útil em todos os sentidos.

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo principal o estudo das Equações Diferencias Ordinárias e seus métodos de resolução. Especialmente, pretendemos estudar o método denominado Transformada de Laplace, que toma um problema que é próprio das Equações Diferenciais e, por meio de uma integral imprópria, o transforma em uma equação algébrica, tornando assim em alguns casos a solução deste problema mais fácil de se fazer. Em seguida, vamos aplicar esse método de solução em outra área da ciência, especificamente, a medicina forense, ou seja, vamos entender como a Transformada pode ser útil para resolver uma cena criminal e com isso identificar possíveis culpados.

Palavras-chave: Equações Diferenciais. Transformada de Laplace. Aplicações.

Abstract

This work has as main objective the study of the Ordinary Differential Equations and their resolution methods. Especially, we intend to study the method called Laplace Transform, which takes a problem that is typical of differential equations and, by means of an improper integral, transforms it into an algebraic equation, thus making the solution of this problem easier to solve in some cases. Next, we will apply this solution method in another area of the science, specifically, in the forensic medicine, that is, we will understand how the Transform can be useful to solve a crime scene and with that to identify possible culprits.

Keywords: Differential Equations. Laplace Transform. Applications.

Sumário

Introdução

Uma **equação matemática** é uma relação que estabelece uma igualdade entre quantidades de mesma natureza. A noção de equação sempre esteve presente entre os povos antigos. Uma prova disso está em um dos documentos matemáticos mais antigos que possuímos, a saber, o **Papiro de Rhind**, um texto egípcio datado de 1650 a.C. contendo cerca de 85 problemas de Aritmética, Geometria, Progressões, Equações, Trigonometria, etc.

As equações matemáticas já são objeto de interesse de pesquisa de matemáticos desde os tempos da Grécia antiga e o grande nome da álgebra dessa época é, sem sombra de dúvidas, **Diofanto de Alexandria** (214? - 284?) considerado na comunidade matemática como *o pai da álgebra*. Sua obra-prima é o livro *Aritmética*, composta por 13 livros (capítulos) contendo diversos problemas que são resolvíveis por meio de equações, sendo as mais famosas delas, as que se propõem a determinar soluções inteiras, as chamadas **equações diofantinas**, bastante estudadas até os dias atuais.

Como as equações estabelecem igualdade entre expressões algébricas, a maneira como esta é denotada é importante para a compreensão do que a linguagem matemática quer nos informar na língua materna, no nosso caso, o português. Por exemplo, a equação $2x - 7 = 23$ estabelece uma igualdade "$=$" entre a expressão "$2x - 7$" e o número "23". Nos textos antigos, como não existia notações universais, isto é, um padrão de escrita matemática, cada autor escrevia da maneira como aprendeu com seus mestres ou desenvolviam seu próprio conjunto de notações.

Com o passar do tempo, é natural que algumas notações tornem-se bastante usuais e se consagrem como notação padrão. Com o sinal de igualdade não foi diferente, segundo DE MORAIS FILHO (2013, p. 22) "O símbolo de igualdade '$=$', usado hoje em dia, foi inventado pelo matemático inglês **Robert Recorde** (1510 - 1558)." Nas palavras do próprio Robert no seu livro *The Whetstone of Witte*, publicado em 1557 "*Porei, como muitas vezes emprego nesse trabalho, um par de paralelas, ou retas gêmeas de um mesmo comprimento, assim: =, porque duas coisas não podem ser mais iguais.*"

Nos séculos 17 e 18 surgiram figuras importantes cujas contribuições na Matemática alavancaram um grande avanço na mesma, com os trabalhos de **René Descartes** (1596 - 1650) e **Pierre de Fermat** (1601 - 1665) na França, a Álgebra e Geometria uniram-se num mesmo ambiente formando a Geometria Analítica, e com os trabalhos de **Isaac Newton** (1643 - 1727) e **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 - 1716) no Reino Unido e na Alemanha, respectivamente, surgiu o Cálculo Diferencial e Integral, cujo modelo permite o estudo das taxas de variações (derivadas), dentre outros fenômenos.

Nesse ambiente de alavancamento da Matemática surgiram as **Equações Diferenciais Ordinárias**, as chamadas EDO, que logo ocupou seu lugar de importância nas pesquisas matemáticas, pois estas modelam muito bem fenômenos da natureza e nos permitem entender não só o comportamento, mas também o funcionamento de vários fenômenos naturais, de modo que também é possível, pelos modelos, fazer previsões acerca do que acontecerá com este em tempos futuros ou até mesmo o que aconteceu em tempos passados, nos dando assim, valiosas informações.

Dentre os grandes matemáticos dessa época que usou Equações Diferenciais em suas pesquisas está o francês **Pierre-Simon, Marquês de Laplace** (1749 - 1847), autor de vários trabalhos importantes, sendo sua obra-prima o livro *Mécanique Céleste* (Mecânica Celeste) publicada em 5 volumes, que trata de um estudo feito via Cálculo Diferencial de como se movimentam os planetas ao redor de uma estrela assim como outros fenômenos vistos no Universo. A contribuição de Laplace foi tamanha para a ciência, que ele acabou ganhando a fama de "O Newton Francês".

No campo das Equações Diferenciais, Laplace deixou também suas contribuições, dentre elas, o tema de estudo do nosso trabalho, a chamada **Transformada de Laplace**. Existem EDO cuja solução por outros métodos (discutiremos três deles no decorrer do trabalho, a saber, variação dos parâmetros, resolução por séries e método numérico) seria bastante difícil, ou muito trabalhosa, de se obter. O método de Laplace consiste em tomar a tal EDO difícil de se resolver, transformá-la por meio de uma integral imprópria e uma mudança de variável, em uma equação algébrica, e depois que a equação algébrica é resolvida, reverte-se o processo com uma aplicação chamada transformada inversa de Laplace, e essa inversão produzirá a solução do problema inicial. Em outras palavras, a Transformada de Laplace converte um problema próprio das Equações Diferenciais em um problema algébrico.

Desde o tempo em que Laplace desenvolveu o seu método até os dias atuais, sua transformada tem se mostrado uma poderosa ferramenta na solução de Equações Diferenciais não só na Matemática, mas também em outros campos da ciência, como por exemplo, a Engenharia Elétrica. Visitamos um importante site dessa área, a saber, https://ieeexplore.ieee.org/ onde se encontram milhares de artigos publicados de relevância na área em questão, e digitando o termo *Laplace Transform* na aba de busca, encontramos pouco mais de 1.500 artigos em que os pesquisadores usaram a Transformada de Laplace em suas pesquisas, o que mostra a importância do método.

Desse modo, para que essa pesquisa possa ser feita conforme manda o método científico, traçamos os seguintes objetivos:

Objetivo Geral:

Estudar a Transformada de Laplace como um método de resolução de Equações Diferenciais e suas aplicações.

Objetivos Específicos:

(1) Elencar as principais obras de Laplace;

(2) Descrever alguns métodos para resolver Equações Diferenciais;

(3) Analisar as limitações de cada método;

(4) Estudar a Transformada de Laplace e suas aplicações.

Para que tais objetivos sejam alcançados, nosso trabalho foi dividido em quatro capítulos, sendo o primeiro dedicado à fundamentação teórica. Iniciamos tratando um pouco da obra de Laplace e suas principais contribuições para a ciência.

O segundo capítulo discute alguns métodos de solução de EDO, a saber, o da **Variação dos Parâmetros**, o método de **Resolução por Séries** e o **Método Numérico.**

O terceiro capítulo é dedicado ao estudo da Transformada de Laplace, apresentando sua definição e suas propriedades. Feita essa parte introdutória, discutimos algumas aplicações desse método tanto na Matemática, como em outras áreas da ciência. Para ser mais específico, estudamos como a Transformada de Laplace pode ser útil na resolução de um Problema de Valor Inicial (PVI), e será feita uma aplicação na área forense, ou seja, vamos estudar a utilidade desse método para resolver, ou desvendar, uma cena de crime.

Por fim, no quarto capítulo far-se-ão algumas considerações finais acerca da pesquisa como um todo e serão apresentadas sugestões para pesquisas futuras, uma vez que entendemos que este trabalho não é um fim em si mesmo, antes, pretende-se que este sirva como uma visão geral do método de Laplace, como ele pode ser aplicado, e como pesquisadores de outras áreas também podem usá-lo para suas pesquisas que no futuro virão a acontecer.

1 Um pouco sobre a obra de Laplace

O primeiro capítulo do presente trabalho é dedicado a apresentação de algumas contribuições que Laplace deixou para as gerações futuras de matemáticos e cientistas em geral, para que possamos entender a trajetória desse grande matemático desde seus primeiros anos na universidade até a publicação de sua obra-prima, *Traité de mécanique céleste*.

Pierre-Simon, Marquês de Laplace (1749 - 1827) nasceu na França em uma comuna chamada *Beaumont-en-Auge*. Os dados biográficos de Laplace são pouquíssimos, pois muitos desses registros foram destruídos devido a incidentes ocorridos.[1] Até os 16 anos frequentou uma escola religiosa e em seguida, foi para a Universidade de Caen a fim de estudar Teologia. Nesse interim, descobriu que tinha talento não para a Teologia, mas sim para a Matemática, e aos 19 anos foi para Paris onde conheceu e rapidamente impressionou **Jean D'alembert** (1717 - 1783) que cuidou de orientá-lo.

Figura 1 – Laplace

Figura 2 – D'alembert

Fonte: Wikipédia

Quando Laplace tinha 24 anos, ou seja, cinco anos após chegar em Paris, foi admitido na academia francesa de ciências e daí em diante, produziu uma grande e relevante quantidade de artigos científicos, fruto de suas constantes pesquisas. Dos 19 aos 77 anos (idade de sua morte), Laplace dedicou-se a pesquisar em importantes áreas da ciência tais como Física, Química, Astronomia, Matemática e Probabilidade, e em todas deixou resultados estabelecidos que até hoje são utilizados nos cursos de

[1] Dados coletados de https://www.youtube.com/watch?v=je3MelMOai4&t=91s Acesso em 25/11/2021.

graduação nas universidades mundo afora.

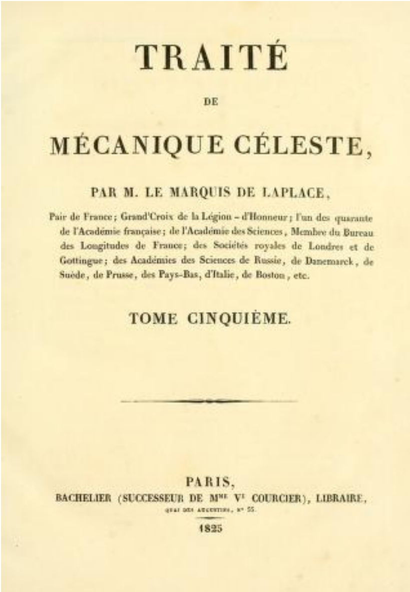
As principais obras de Laplace são *Exposition du système du monde* publicada em sua primeira edição no ano de 1796, e nessa obra discute-se acerca da **Hipótese Nebular**, inicialmente proposta em 1755 por **Immanuel Kant** (1724 - 1804). Essa teoria trata acerca da origem do sistema solar, e segundo ela, nosso sistema de planetas teria surgido a cerca de 4,6 bilhões de anos por meio de uma gigantesca nuvem de gás e poeira.

O diferencial do trabalho de Laplace na Hipótese Nebular está no fato de que ele foi o primeiro a trabalhar uma teorização quantitativa acerca da origem do nosso sistema de planetas usando a Física de Newton. Segundo PEREIRA (2020, p. 573) "O impacto e o sucesso da teoria monista de Laplace podem ser medidos por sua predominância durante todo o século XIX, coincidindo com a crescente profissionalização e institucionalização da ciência, além do galopante avanço técnico dos instrumentos de observação".

Hoje, com o avanço das pesquisas, especialmente na área da cosmologia, a teoria de Kant e Laplace não é mais considerada como uma possibilidade para a origem do sistema solar, isso porque o modelo previa que devido ao fato do sol ter cerca de $99,8\%$ da massa do sistema solar e pela lei de conservação do momento angular, a velocidade de rotação do sol deveria ser muito maior do que a observada que é de 1,997 km/s. A Hipótese Nebular foi substituída pela teoria chamada de **Hipótese Planetesimal**, proposta em 1905 por dois cientistas estadunidenses, o geólogo **Thomas Chamberlin** (1843 - 1928) e o astrônomo **Forest Moulton** (1872 - 1952).

Em 1798 Laplace daria início à escrita de sua obra-prima, *Traité de mécanique céleste* publicada em cinco tomos (volumes) de 1798 a 1825. Nesse trabalho, Laplace reuniu o trabalho de seus antecessores matemáticos e físicos dentre eles **Isaac Newton** (1643 - 1727) e, usando o Cálculo Diferencial e Integral apresentou um estudo da dinâmica do universo, o movimento dos planetas, a estabilidade do sistema solar, a Terra, a Lua, os satélites (luas) de Júpiter, Saturno e Urano, dentre outros estudos. A obra de Laplace exerceu uma influência tal na sua época, que guiou os estudos de astronomia desde sua publicação. Segundo GUIMARÃES (1814, p.52-53), após Laplace "a astronomia vem a ser um grande problema de mecânica".

Figura 3 – Folha de rosto do tomo cinco



TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR M. LE MARQUIS DE LAPLACE,

Pair de France; Grand'Croix de la Légion-d'Honneur; l'un des quarante de l'Académie française; de l'Académie des Sciences, Membre du Bureau des Longitudes de France; des Sociétés royales de Londres et de Gottingue; des Académies des Sciences de Russie, de Danemarck, de Suède, de Prusse, des Pays-Bas, d'Italie, de Boston, etc.

TOME CINQUIÈME.

PARIS,
BACHELIER (SUCCESSEUR DE Mme Ve COURCIER), LIBRAIRE,
QUAI DES AUGUSTINS, n° 55.

1825

Figura 4 – Obra completa

Fontes: https://www.archive.org e https://www.christies.com

No ano de 1812, Laplace publicou a obra *Théorie analytique des probabilités*, na qual apresentou e estabeleceu resultados e métodos fundamentais usados até os dias atuais em Probabilidade e Estatística, como por exemplo, a *função geradora de momentos*, o *método dos mínimos quadrados*, a *probabilidade indutiva* e os *testes de hipóteses*. Foi nessa obra que Laplace apresentou uma função que calculava a probabilidade de uma função possuir valores em um determinado intervalo, a chamada **Função Erro**. Uma dessas funções (existem várias delas) é definida[2] por:

$$erf(t) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

e trabalhar com essa função do ponto de vista do Cálculo Diferencial não é tarefa simples, pois integrar uma função desse tipo é impossível pelas técnicas elementares de integração de funções.

Para conseguir fazer sua análise de erro com essa função (e com outras também, pois existem várias funções erro), Laplace então desenvolveu uma técnica de solução de Equações Diferenciais que lhe permitia resolver problemas como esse, os quais pelas técnicas de integração não eram possíveis de se fazer. Laplace tomava a tal *função complicada* e, por meio de uma integral imprópria e uma mudança de variável, tornava a equação mais simples de se resolver, e esse método ficou posteriormente conhecido como **Transformada de Laplace**, do qual tratamos no terceiro capítulo desse trabalho.

[2] Dados coletados de https://matematicasimplificada.com/funcao-de-probabilidade-erro-de-gauss/ Acesso em 26/11/2021.

Uma importante contribuição de Laplace na Matemática propriamente dita foi a descoberta de um operador que hoje leva o seu nome, o **Operador Laplaciano**, denotado por ∇^2. (Algumas literaturas trazem a simbologia Δ para o operador laplaciano) Para entender o conceito desse operador, lembre que dada uma função de duas variáveis reais $f(x,y)$ diferenciável, existe um campo de vetores associado a f que aponta a direção em que taxa de aumento (derivada direcional) é máxima, e chamamos isso de **Campo Gradiente** de f, denotado por ∇f. Vamos entender melhor esse conceito: O **Operador Nabla** é definido por

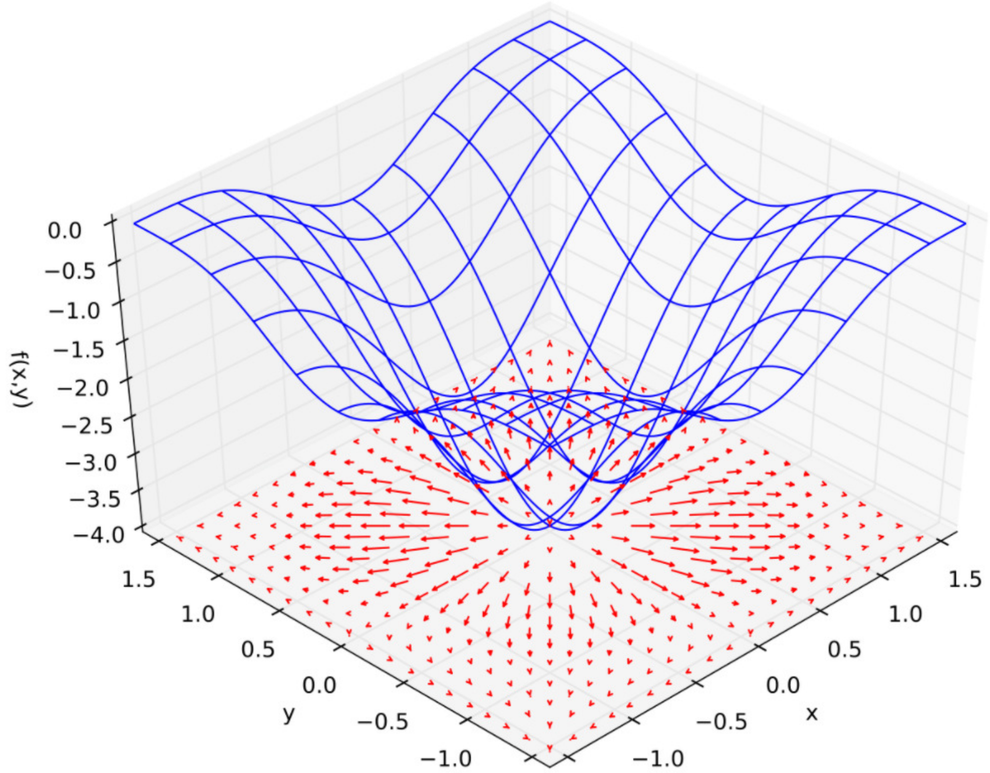
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j},$$

e quando aplicado à função f produz o **Vetor Gradiente** de f, definido por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}.$$

Associado a cada ponto do domínio da função, produz-se o **Campo Gradiente** de f, o qual determina, conforme mencionamos, a direção cuja taxa de crescimento é máxima. A figura a seguir mostra uma superfície e seu campo gradiente, e perceba que os vetores em vermelho estão se afastando do ponto de mínimo da função:

Figura 5 – Campo Gradiente



Fonte: Wikipédia

Um outro operador importante é o que chamamos de **Divergente** (ou **Divergência**), denotado por div F. Sendo $F(x,y) = f(x,y)\vec{i} + g(x,y)\vec{j}$ uma função vetorial diferenciável, define-se div F por

$$\text{div } F = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Segundo ANTON (2014, p. 1088) esse operador é usado no estudo do fluxo fluido e no caso a divergência refere-se à maneira como o fluido flui para um ponto ou afasta-se dele. No caso da ilustração anterior, perceba que os vetores (o fluxo fluido) afastam-se do ponto de mínimo, indicando que nesse ponto a divergência é positiva. Caso os vetores estivessem aproximando-se do ponto, seria um ponto de máximo e a divergência seria negativa. Agora, note o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{div } F &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot f + \frac{\partial}{\partial y} \cdot g \\ &= \nabla \cdot F, \end{aligned}$$

e isto nos diz que o operador divergência pode ser entendido como o produto escalar entre o operador nabla e a função F. Por fim, ao considerar o produto escalar do operador nabla com ele mesmo, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \nabla \cdot \nabla \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned}$$

e esse operador é chamado de **Operador Laplaciano**, e quando aplicado a uma função $\varphi(x,y)$, produz o Laplaciano de φ

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Para entender o que esse operador calcula, veja o seguinte:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= \text{div } (\nabla \varphi) \end{aligned}$$

e como a divergência é uma medida do afastamento (aproximação) dos vetores em relação a um ponto de mínimo (máximo) e o gradiente aponta a direção cuja taxa de aumento é máxima, o Laplaciano é uma medida de quão o campo está se afastando (aproximando) do ponto de mínimo (máximo), ou seja, é uma medida do quão a divergência é positiva (negativa) no campo. O Laplaciano é o equivalente ao estudo da concavidade para funções de uma variável real.

Um caso particular do estudo do Laplaciano de uma função é calcular quando este se anula no campo, ou seja, resolver a equação

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2\varphi=0,$$

e essa é conhecida como **Equação de Laplace**. Funções tais que $\nabla^2\varphi = 0$ são chamadas de **Funções Harmônicas**, e estas possuem a propriedade de que os valores na vizinhança de qualquer ponto são, na média, igual ao valor da função no ponto, um exemplo de função harmônica é $\varphi(x, y) = e^x \sin y$. Com efeito, note o seguinte:

$$\varphi(x,y)=e^x\sin y \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=e^x\sin y,$$

e

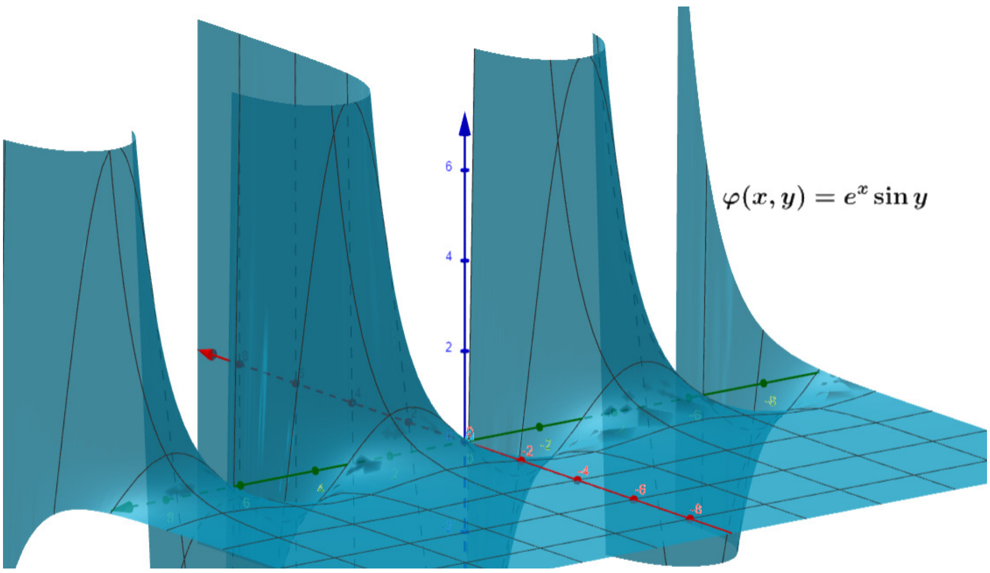
$$\varphi(x,y)=e^x\sin y \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-e^x\sin y,$$

e desse modo

$$\nabla^2\varphi=e^x\sin y-e^x\sin y=0,$$

e o gráfico de φ está esboçado a seguir:

Figura 6 – Função Harmônica



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

2 Métodos de resolução

Este capítulo é dedicado ao estudo das Equações Diferenciais e de alguns métodos de resolução. Antes de mais nada, é interessante definir matematicamente o que é uma EDO e, a partir disso, trabalhar a matemática presente nelas.

Definição 2.1 (Equação Diferencial Ordinária) *Uma Equação Diferencial Ordinária é uma equação que envolve uma função e suas derivadas, a qual é escrita da seguinte forma:*

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \tag{2.1}$$

em que x é a variável independente, y é a variável dependente de x, isto é, $y = y(x)$ e $\frac{d^k y}{dx^k}$ com $1 \leq k \leq n$ denota a derivada de ordem k de y em relação a x.

A importância dessas equações, pode-se dizer de maneira resumida, que está no fato de que inúmeros fenômenos físicos, químicos, econômicos, biológicos, administrativos, etc. são modelados em termos dessas equações, pois envolvem fenômenos que variam (derivada) com o passar do tempo.

Pode-se classificar essas equações basicamente pela ordem, classificação esta que consiste em reconhecer a ordem da mais alta derivada na equação, e esta será a ordem da equação; existe uma segunda classificação que as separa em **linear** e **não-linear**. Uma EDO linear tem a seguinte forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{2.2}$$

em outras palavras:

(1) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau;

(2) Cada coeficiente a_k com $1 \leq k \leq n$ depende apenas de x.

Para que uma equação seja não-linear basta que uma das condições anteriores não seja cumprida, por exemplo, a equação $\frac{d^3y}{dx^3} + 2e^x\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = g(x)$ é não-linear, pois envolve um produto de y com sua derivada y'. A equação $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \operatorname{sen} x\frac{dy}{dx} = g(x)$, também não é linear, pois o expoente de uma de suas derivadas é diferente de 1.

Desde o surgimento das Equações Diferencias, que se deu juntamente com o surgimento do Cálculo nos tempos de Newton e Leibniz, os matemáticos buscaram métodos para resolvê-las e quando isso é possível, a função que satisfaz a EDO é chamada de **solução** da equação (ou as funções são chamadas de soluções da equação), e isto motiva a seguinte definição:

Definição 2.2 (Solução de uma EDO) *Uma solução para* (2.1) *é qualquer função* f *definida em um intervalo* $\mathcal{I}$ *da reta tal que*

$$F\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)\right) = 0, \tag{2.3}$$

qualquer que seja $x \in \mathcal{I}$.

Não demorou muito para que se percebesse que no universo das Equações Diferenciais os métodos de resolução seriam muitos, e na verdade, a partir do final do século 19 e início do século 20 entendeu-se que buscar soluções explícitas não era viável, o que motivou o surgimento de um novo tratamento dessas equações, o que se chama de **teoria qualitativa**.

Essa nova abordagem consiste em saber se a EDO tem, ou não, solução, e em caso afirmativo, descobrir qualitativamente qual o comportamento da(s) solução(ões) sem conhecê-la(s) explicitamente, e o primeiro a tratá-las dessa forma foi o matemático francês **Henri Poincaré** (1854 - 1912).

Voltando ao contexto dos métodos de solução, conforme mencionamos anteriormente, os métodos são muitos, e todos eles possuem pontos fortes (ou vantagens) e pontos fracos (ou desvantagens), pois cada método foi desenvolvido para tipos específicos de EDO.

Pensando nesse espírito, vamos apresentar a seguir três métodos de solução para essas equações, a saber, o método da **Variação dos Parâmetros**, o método de **Resolução por Séries** e o **Método Numérico**. Ao passo em que o método for apresentado, será mostrado quais são as vantagens e as desvantagens de se trabalhar com cada um deles.

Claro que para discutir métodos de solução seria interessante verificar se tal equação possui ou não solução, mesmo que não se saiba a solução explicitamente. Além disso, sabendo que o problema tem solução, é interessante saber se tal solução é única. Essa técnica de verificação existe e é chamado de **Teorema de Existência e Unicidade** de soluções de EDO, o qual foi demonstrado por um matemático francês chamado **Charles Émile Picard** (1856 - 1941).

Teorema 2.1 (Teorema de Existência e Unicidade) *Considere o Problema de Valor Inicial* (*PVI*)

$$\begin{aligned} &y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \\ &y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \end{aligned}$$

*em que $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$ são funções contínuas em um intervalo aberto $\mathcal{I}$ da reta. Então, **existe uma única solução** para este problema em todo o intervalo $\mathcal{I}$.*

Note que o teorema de existência e unicidade nos diz três informações, a saber,

(1) Existe solução para o PVI;

(2) A solução do PVI é única;

(3) A solução está bem definida em todo o intervalo $\mathcal{I}$.

2.1 Variação dos Parâmetros

Inicialmente, considere uma EDO linear de segunda ordem

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \tag{2.4}$$

em que $p(x), q(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas. A **equação homogênea associada** a (2.4) é

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{2.5}$$

cuja solução é dada por $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, em que c_1, c_2 são constantes e $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes. Sendo $y_p(x)$ uma solução particular de (2.4), a solução geral desta equação é

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x). \tag{2.6}$$

O método da Variação dos Parâmetros consiste em substituir as constantes c_1 e c_2, por funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ de modo que

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{2.7}$$

seja solução de (2.4) ao invés de ser solução de (2.5). Para determinar $u_1(x)$ e $u_2(x)$ vamos derivar (2.7), obtendo:

$$y'(x) = u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x), \tag{2.8}$$

e como queremos determinar $u_1(x)$ e $u_2(x)$, vamos exigir que as expressões envolvendo $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$ sejam identicamente nulas, isto é, vamos impor a condição

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0, \tag{2.9}$$

a qual resulta em

$$y'(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x). \tag{2.10}$$

Efetuando derivação mais uma vez, obtém-se

$$y''(x) = u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x). \tag{2.11}$$

Agora, substituindo (2.7), (2.10) e (2.11) em (2.4), tem-se

$$\begin{aligned} & [u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x)] \\ + \;& p(x)[u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)] \\ + \;& q(x)[u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)] = g(x) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} & u_1(x)[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] \\ + \;& u_2(x)[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] \\ + \;& u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = g(x), \end{aligned}$$

e como cada expressão entre colchetes é solução de (2.5), todas essas expressões se anulam, sobrando apenas

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = g(x). \tag{2.12}$$

Agora, as equações (2.9) e (2.12) formam o sistema

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{2.13}$$
$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = g(x) \tag{2.14}$$

cujas soluções são:

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)g(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]} \quad \text{e} \quad u_2'(x) = \frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}, \tag{2.15}$$

em que $W[y_1(x), y_2(x)]$ é o **Wronskiano**[1] de $y_1(x)$ e $y_2(x)$, que é obtido pelo seguinte cálculo:

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Agora, integrando ambas as equações, vem

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)g(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}\, dx + C_1 \quad \text{e} \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}\, dx + C_2, \tag{2.16}$$

e estas funções são as que resolverão as equações com aquela estrutura. Toda essa construção sugere a apresentação do seguinte resultado:

[1] Após **Josef Maria Hoëné-Wronski** (1776 - 1853), matemático franco-polonês.

Teorema 2.2 *Seja*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x), \tag{2.17}$$

uma Equação Diferencial não homogênea de segunda ordem em que $p(x), q(x)$ *e* $g(x)$ *são funções contínuas em um intervalo* $\mathcal{I}$ *aberto da reta. Se* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \tag{2.18}$$

então uma solução particular de (2.17) *é*

$$Y(t) = -y_1(x)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(x)g(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}\, dx + y_2(x)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1(x), y_2(x)]}\, dx, \tag{2.19}$$

em que $t_0 \in \mathcal{I}$, *e a solução geral é dada por*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + Y(t). \tag{2.20}$$

Em outras palavras, o método da Variação dos Parâmetros diminui em um passo a obtenção da solução geral da EDO, pois sabendo quem é a solução da homogênea associada, conseguimos automaticamente, por (2.19), a solução da não homogênea. Vamos agora mostrar como esse método funciona para uma equação diferencial em particular.

Exemplo 2.1 *Determine a solução geral da equação diferencial*

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \operatorname{sen}(e^x) \tag{2.21}$$

pelo método da Variação dos Parâmetros.

Solução: Inicialmente, note que a equação homogênea associada a (2.21) é

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0 \tag{2.22}$$

e sua equação característica é dada por:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \tag{2.23}$$

cujas raízes são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$, e desse modo a solução de (2.22) é

$$y_h(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}, \tag{2.24}$$

em que $y_1(x) = e^{-2x}$ e $y_2(x) = e^{-x}$ e c_1, c_2 são constantes. Agora, precisamos calcular o Wronskiano $W[e^{-2x}, e^{-x}]$, que é dado por:

$$\begin{aligned} W[e^{-2x}, e^{-x}] &= \det\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \\ &= e^{-2x}\cdot(-e^{-x}) - e^{-x}\cdot(-2e^{-2x}) \\ &= -e^{-3x} + 2e^{-3x} \\ &= e^{-3x}. \end{aligned}$$

Desse modo, a solução particular de (2.21) tomando $t_0 = 0$ é dada por:

$$\begin{aligned}
Y(t) &= -y_1(x)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(x)g(x)}{W[y_1(x),y_2(x)]}\,dx + y_2(x)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(x)g(x)}{W[y_1(x),y_2(x)]}\,dx \\
&= -e^{-2x}\int_0^t \frac{e^{-x}\text{sen}\,(e^x)}{e^{-3x}}\,dx + e^{-x}\int_0^t \frac{e^{-2x}\text{sen}\,(e^x)}{e^{-3x}}\,dx \\
&= -e^{-2x}\int_0^t e^{2x}\text{sen}\,(e^x)\,dx + e^{-x}\int_0^t e^{x}\text{sen}\,(e^x)\,dx.
\end{aligned}$$

Chamando $u = e^x$ tem-se $du = e^x\,dx$, de modo que substituindo na igualdade anterior, obtém-se

$$Y(t) = -e^{-2x}\int_0^t u\cdot\text{sen}\,(u)\,du + e^{-x}\int_0^t \text{sen}\,(u)\,du.$$

Resolvendo a primeira integral por partes chamando $u_1 = u$ e $dv_1 = \text{sen}\,u$, vem

$$\begin{aligned}
Y(t) &= -e^{-2x}\left(-u\cdot\cos u + \int_0^t \cos u\,du\right) + e^{-x}\int_0^t \text{sen}\,(u)\,du \\
&= -e^{-2x}\left[-e^x\cdot\cos(e^x) + \text{sen}\,(e^x)\right]\Big|_0^t - e^{-x}\cos(e^x)\Big|_0^t \\
&= -e^{-2t}\left(-e^t\cdot\cos(e^t) + \text{sen}\,(e^t)\right) + \text{sen}\,1 - \cos 1 \\
&- e^{-t}\cos(e^t) + \cos 1 \\
&= \text{sen}\,1 - e^{-2t}\text{sen}\,(e^t).
\end{aligned}$$

Desse modo, a solução geral de (2.21) é:

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + \text{sen}\,1 - e^{-2t}\text{sen}\,(e^t), \tag{2.25}$$

e chamando $\text{sen}\,1 = C$, tem-se

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} - e^{-2t}\text{sen}\,(e^t) + C. \tag{2.26}$$

□

Em um curso de EDO a nível de graduação, antes de se estudar o método da Variação dos Parâmetros, estuda-se um método um pouco mais limitado denominado **método dos coeficientes indeterminados**. Para trabalhar com esse método, deve-se ter Equações Diferenciais Lineares não homogêneas, e a função $g(x)$ no lado direito da igualdade deve ser de um dos tipos a seguir:

(1) Constante;

(2) Polinomial;

(3) Exponencial;

(4) $\operatorname{sen} mx, \ \cos mx$;

(5) Somas ou produtos dessas funções.

Nesse sentido, as **vantagens** do método da Variação dos Parâmetros em relação a esse que o precede são que

(1) Ele é bem mais geral, pois **sempre** produz uma solução particular $y_p(x)$, desde que a equação homogênea associada tenha solução;

(2) A função $g(x)$ pode ser qualquer função, desde que seja contínua em $\mathcal{I}$;

(3) Seus coeficientes podem ser funções, denotadas no texto por $u_1(x)$ e $u_2(x)$.

É importante salientar que, como todo e qualquer método de resolver Equações Diferenciais, este também possui desvantagens em relação a outros, por exemplo,

(1) Se a EDO estiver nas condições de ser resolvida pelo método dos coeficientes indeterminados, então é mais interessante usá-lo ao invés da variação dos parâmetros, pois a solução do problema é encontrada mais facilmente.

(2) É necessário conhecer as duas soluções $y_1(x)$ e $y_1(x)$ da solução homogênea.

Para mais detalhes de como funciona o método dos coeficientes a determinar (ou coeficientes indeterminados), e do método da variação dos parâmetros indicamos ao leitor as referências [3], [8] e [10], onde o leitor encontrará um tratamento detalhado acerca desses e de outros métodos de solução, especialmente [3].

2.2 Resolução por Séries

O método de solução por séries consiste em tomar uma Equação Diferencial da forma (2.5), isto é, uma EDO linear homogênea de segunda ordem em que os coeficientes $p(x)$ e $q(x)$ não são necessariamente constantes e que além disso não se conhece nenhuma solução dela, e a partir da série de potências dos termos envolvidos na equação, determinar sua solução.

Contudo, para que a teoria possa ser aqui desenvolvida, vamos exigir que $p(x)$ e $q(x)$ tenham a propriedade de serem **analíticas** em um ponto x_0, ou seja, é possível escrevê-las em forma de série de potências centrada em um ponto x_0 :

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \;\text{ e }\; q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k,$$

em que $|x - x_0| < R_1,\ |x - x_0| < R_2$ e $R \geq \min\{R_1, R_2\}$ é o chamado **raio de convergência** da série.

O grande diferencial desse método é que ele torna possível resolver uma EDO em que as soluções não necessariamente são funções elementares, ou seja, funções do tipo exponencial, polinomial, logarítmica, trigonométrica, hiperbólica, etc.. Muitas vezes são encontradas soluções em forma de séries de potências sem que conheçamos qual é a função associada à série encontrada, pois a única hipótese que é exigida é a **analiticidade** das funções $p(x),\ q(x)$. Vamos então a um exemplo prático de como esse método funciona.

Exemplo 2.2 *Considere a Equação Diferencial linear de segunda ordem*

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0. \tag{2.27}$$

Determine uma solução pelo método de resolução por séries.

Solução: Inicialmente note que as funções $p(x)$ e $q(x)$ são:

$$p(x) = x \;\text{ e }\; q(x) = 1,$$

as quais são analíticas. Note também que estas funções são analíticas qualquer que seja x_0 em um intervalo aberto $\mathcal{I}$ da reta. Desse modo, por simplicidade, consideremos que $x_0 = 0$. Pelo método de resolução por séries, procuramos uma função $y(x)$ que seja escrita na forma:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - 0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Agora, perceba que na equação (2.27) temos $y(x),\ y'(x)$ e $y''(x)$, e para determiná-las, basta tomar a série de potências e calcular suas derivadas de primeira e segunda ordem, ou seja,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k; \tag{2.28}$$

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}; \tag{2.29}$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}. \tag{2.30}$$

Fazendo uma substituição de variável em (2.30), a saber, $k-2=j$ tem-se

$$y''(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}=\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)a_{j+2}x^j,$$

e como j é simplesmente um índice, pode-se chamar $j=k$ obtendo

$$y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k. \tag{2.31}$$

Substituindo (2.28) (2.29) e (2.31) em (2.27), tem-se

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k+x\cdot\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\\=&\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,\end{aligned}$$

e pondo x^k em evidência, pois é fator comum aos três somatórios, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2}+ka_k+a_k]\cdot x^k&=\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2}+(k+1)a_k]\cdot x^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)[(k+2)a_{k+2}+a_k]\cdot x^k,\end{aligned}$$

e desse modo, deve-se encontrar os valores de k para os quais $(k+1)[(k+2)a_{k+2}+a_k]=0$. Ora, como k é, no mínimo zero, segue que $k+1\geq 1$, e desse modo, devemos ter $(k+2)a_{k+2}+a_k=0$. Agora, temos uma relação de recorrência que nos permitirá resolver a série, desde que a recorrência seja resolvida. Como não foi dado um valor inicial para a Equação Diferencial em questão, segue que podemos impor alguns valores iniciais, e desse modo, pode-se resolver a recorrência e consequentemente resolver a equação. Façamos $a_0=1$ e $a_1=0$, e tem-se

$$\begin{aligned}&2a_2+a_0=0\Rightarrow a_2=-\frac{1}{2}\\&3a_3+a_1=0\Rightarrow a_3=0\\&4a_4+a_2=0\Rightarrow a_4=\frac{1}{2\cdot 4}\\&5a_5+a_3=0\Rightarrow a_5=0\\&6a_6+a_4=0\Rightarrow a_6=-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}\\&\qquad\vdots\\&2ka_{2k}+a_{2k-2}=0\Rightarrow a_{2k}=\frac{(-1)^k}{k!!}\\&(2k+1)a_{2k+1}+a_{2k-1}=0\Rightarrow a_{2k+1}=0\\&\qquad\vdots\end{aligned}$$

em que $k!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k$, e como todos os termos de índice ímpar são iguais a zero, a série de potência tem a forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k},$$

Agora, observe o seguinte:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{k!!} \\ &= \frac{(-1)^k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \\ &= \frac{(-1)^k}{2^k(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k)} \\ &= \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!}, \end{aligned}$$

e desse modo, obtém-se

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} \cdot x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/2)^k}{k!}, \end{aligned}$$

e com isso, a solução de (2.27) é uma série de potências na forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/2)^k}{k!}. \tag{2.32}$$

Agora, lembremos que a função e^x quando expandida em forma de **série de Maclaurin** é dada por

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \tag{2.33}$$

e desse modo, tem-se

$$e^{-x^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/2)^k}{k!} = y(x), \tag{2.34}$$

e esta é uma solução de (2.27).

□

Note que neste caso nós conseguimos uma forma explícita da solução, pois a série é de uma função bem conhecida, mas caso não seja possível fazer a identificação da série com uma função, a solução será a própria série, e esse é justamente o ponto forte do método, conseguir a solução mesmo sem conhecer explicitamente a função. Para mais detalhes acerca de séries bem como conceitos de cálculo, indicamos ao leitor as referências [1] e [2].

Novamente, o método de resolução por séries tem suas vantagens e desvantagens ao ser aplicado para resolver certas Equações Diferenciais. Uma das vantagens reside no fato de que a hipótese da analiticidade das funções $p(x)$ e $q(x)$ agrupa um número muito grande de funções, ou seja, existem muitas funções que têm essa propriedade.

As desvantagens estão no fato de que o método serve apenas para funções com a propriedade de ser analítica, e além do mais, existem séries de potências que não representam nenhuma função elementar, ou seja, existem soluções que para trabalharmos com ela, temos de nos contentar, por assim dizer, com a própria série de potências, uma vez que não é conhecida a função que representa aquela série.

Para ilustrar o que foi dito nos parágrafos anteriores, note que no **Exemplo 2.2** a série de potências que foi encontrada é representada pela função $e^{-x^2/2}$. No entanto, ao resolver a equação diferencial

$$y''(x) - xy(x) = 0, \tag{2.35}$$

conhecida como **Equação de Airy**,[2] encontra-se a solução

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0\left[1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \cdots + \frac{x^{3k}}{2\cdot 3\cdots(3k-1)(3k)}\right] \\ &+ a_1\left[x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots + \frac{x^{3k+1}}{2\cdot 3\cdots(3k)(3k+1)}\right], \end{aligned}$$

e para essas séries de potências entre colchetes não temos uma função elementar que as represente, e isso nos força a trabalhar com a própria série para entender o comportamento da solução. Para mais detalhes de como se resolve a **Equação de Airy** veja DIPRIMA (2020, p. 135-136).

2.3 Solução por Métodos Numéricos

Conforme mencionamos no início desse capítulo, o matemático **Henri Poincaré** logo entendeu que buscar soluções explícitas por métodos analíticos não era algo viável, e a partir disso, deu-se o pontapé inicial em uma nova abordagem para as Equações Diferenciais, chamada **Teoria Qualitativa**. Para ilustrar isso, vamos tomar a EDO que descreve o comportamento de um sistema massa mola, conhecido como **Lei de Hooke**[3], cujo modelo matemático nos dá a equação

$$x'(t) = -\frac{C}{m}x(t), \tag{2.36}$$

[2] Após **George Biddell Airy** (1801 - 1892), astrônomo e matemático inglês.
[3] Após **Robert Hooke** (1635 - 1703), cientista experimental inglês.

em que C é a constante de elasticidade da mola e m é a massa que está em uma das extremidades da mola. Note que trata-se de uma **EDO de primeira ordem, e além disso, é uma equação linear**. Agora, resolvendo (2.36) encontra-se

$$f(t) = \alpha \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{C}{m}}t\right) + \beta \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{C}{m}}t\right), \tag{2.37}$$

que são combinações lineares de senos e cossenos, ou seja, são **funções transcendentes**. Esse tipo de fenômeno não é incomum no universo dessas equações, e de certa forma, explica o porquê da dificuldade de se encontrar soluções explícitas.

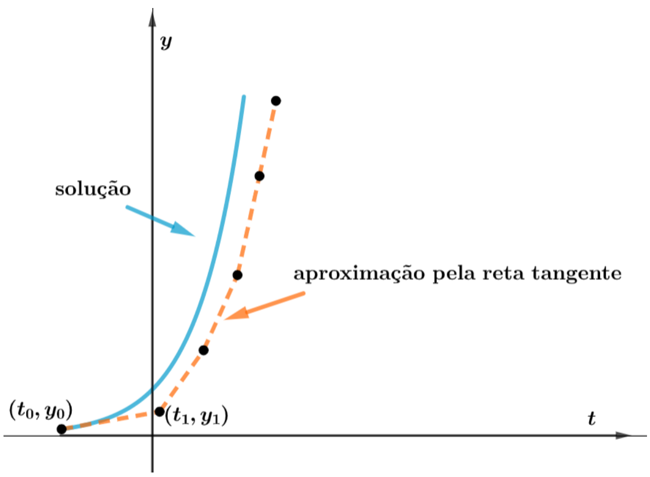
O matemático suíço **Leonhard Euler** (1707 - 1783) à sua época também percebeu esse fenômeno, e em vista dessa dificuldade desenvolveu um método que ficou conhecido posteriormente como **método de Euler**, que nos permite encontrar aproximações para a solução, desde que conheçamos um ponto contido na solução da equação $y(t_0) = y_0$, e a inclinação da reta tangente ao gráfico da solução nesse ponto $f(t_0, y_0)$.

$$y - y_0 = f(t_0, y_0)(t - t_0) \quad \text{ou} \quad y = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0), \tag{2.38}$$

em que y_0 é a ordenada do valor inicial, t_0 é a abcissa do valor inicial e $f(t_0, y_0)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto $y(t_0) = y_0$. Com isso, tem-se a equação de uma reta, que nos dá uma poligonal (de comprimento tão pequeno quanto se queira) que está na vizinhança da solução da EDO. A extremidade dessa linha poligonal nos dá o ponto (t_1, y_1) que está próximo ao gráfico da solução da equação $y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1)$. Esse processo pode ser repetido de maneira iterada para determinar aproximações da solução, a saber, encontrar pontos da forma $y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n)$, com $n = 0, 1, 2, \ldots$

A figura a seguir ilustra a aplicação desse método:

Figura 7 – Ilustração do Método de Euler



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Exemplo 2.3 *Considere o Problema de Valor Inicial (PVI) dado por*

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dt} = 4 - t + 2y\\&y(0) = 1.\end{aligned}$$

Usando o Método de Euler com intervalos de tamanho $0,1$ *u.c encontre valores aproximados da solução da equação no intervalo* $0 \leq t \leq 0,6$.

Solução: Inicialmente, note que a solução da equação passa pelo ponto $P_0 = (0,1)$, pois é o valor inicial dado no problema. Desse modo, tem-se $t_0 = 0,\ y_0 = 1,\ t_1 - t_0 = 0,1,\ t_1 = 0,1$ e $f(t_0, y_0) = 6$. Desse modo, podemos calcular um valor aproximado para o ponto de abcissa, por exemplo, $t = 1$. Vejamos:

$$\begin{aligned}y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0) \quad &\Rightarrow \quad y_1 = 1 + 6 \cdot 0,1\\&\Rightarrow \quad y_1 = 1,6,\end{aligned}$$

ou seja, a solução da equação passa aproximadamente pelo ponto

$$P_1 = (0,1; 1,6).$$

Com os valores $y_1 = 1,6$ e $t_1 = 0,1,\ t_2 = 0,2$ tem-se $f(0,1; 1,6) = 7,1$, e desse modo, tem-se

$$\begin{aligned}y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1) \quad &\Rightarrow \quad y_2 = 1,6 + 7,1 \cdot 0,1\\&\Rightarrow \quad y_2 = 2,31,\end{aligned}$$

e isto nos diz que a solução da equação passa aproximadamente pelo ponto

$$P_2 = (0,2; 2,31).$$

Com os valores $y_2 = 2,31$ e $t_2 = 0,2,\ t_3 = 0,3$ tem-se $f(0,2; 2,31) = 8,42$, e desse modo, tem-se

$$\begin{aligned}y_3 = y_2 + f(t_2, y_2)(t_3 - t_2) \quad &\Rightarrow \quad y_3 = 2,31 + 8,42 \cdot 0,1\\&\Rightarrow \quad y_3 = 3,152,\end{aligned}$$

e isto nos diz que a solução da equação passa aproximadamente pelo ponto

$$P_3 = (0,3; 3,152).$$

Com os valores $y_3 = 3,152$ e $t_3 = 0,3,\ t_4 = 0,4$ tem-se $f(0,3; 3,152) = 10,004$, e desse modo, tem-se

$$\begin{aligned}y_4 = y_3 + f(t_3, y_3)(t_4 - t_3) \quad &\Rightarrow \quad y_4 = 3,152 + 10,004 \cdot 0,1\\&\Rightarrow \quad y_4 = 4,1524,\end{aligned}$$

e isto nos diz que a solução da equação passa aproximadamente pelo ponto

$$P_4 = (0,4; 4,1524).$$

Com os valores $y_4 = 4,1524$ e $t_4 = 0,3,\ t_5 = 0,4$ tem-se $f(0,4; 4,1524) = 11,9048$, e desse modo, tem-se

$$\begin{aligned} y_5 = y_4 + f(t_4, y_4)(t_5 - t_4) \quad &\Rightarrow \quad y_5 = 4,1524 + 11,9048 \cdot 0,1 \\ &\Rightarrow \quad y_5 = 5,34288, \end{aligned}$$

e isto nos diz que a solução da equação passa aproximadamente pelo ponto

$$P_5 = (0,5; 5,34288).$$

Com os valores $y_5 = 5,34288$ e $t_5 = 0,5,\ t_6 = 0,6$ tem-se $f(0,5; 5,34288) = 14,18576$, e desse modo, tem-se

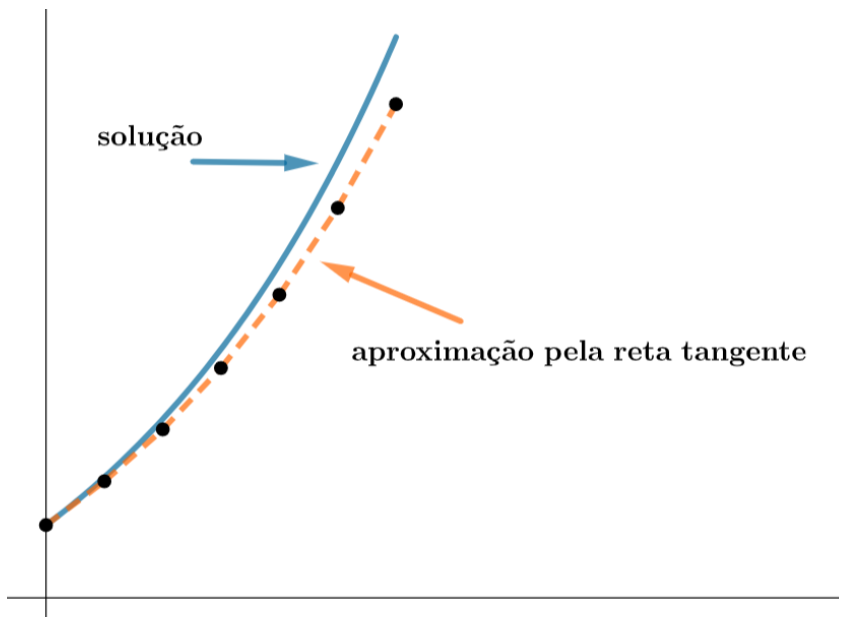
$$\begin{aligned} y_6 = y_5 + f(t_5, y_5)(t_6 - t_5) \quad &\Rightarrow \quad y_6 = 5,34288 + 14,18576 \cdot 0,1 \\ &\Rightarrow \quad y_6 = 6,761456, \end{aligned}$$

e isto nos diz que a solução da equação passa aproximadamente pelo ponto

$$P_6 = (0,6; 6,761456).$$

A figura a seguir mostra a solução e a aproximação pelo Método de Euler.

Figura 8 – comparação da solução com a aproximação (escala 8 : 1)



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Observação 2.1 *O PVI que propomos como aplicação desse método tem solução, e vale*

$$y(t) = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{11}{4}e^{2t}.$$

Escolhemos um PVI com solução explícita de maneira proposital para compará-la com os pontos encontrados anteriormente.

Novamente estamos diante de um método de solução que possui suas vantagens e desvantagens. Os pontos fortes residem no fato de que:

(1) É possível encontrar pontos que estão próximos da solução da EDO mesmo que não se saiba qual é a solução, ou até mesmo de uma EDO impossível de se resolver por métodos analíticos;

(2) Com a ajuda de *softwares* esses cálculos podem ser feitos de maneira muito mais rápida e precisa;

(3) Quanto menor for o comprimento do intervalo, mais próximos estarão os pontos da solução exata da equação.

Por outro lado, também conseguimos enxergar algumas desvantagens para esse método:

(1) As linhas poligonais que encontramos no método de Euler nunca será capaz de nos informar, com precisão, qual a solução da EDO;

(2) Como o processo é iterativo, a partir da segunda iteração, o erro cometido no primeiro é usado para encontrar a segunda aproximação, ou seja, a cada passo tem-se um erro acumulado obtido, e nesse caso, quanto maior for o número de iterações, maior será o erro cometido;

(3) Para se fazer cálculos rápidos e eficientes usando esse método, ficamos dependentes de computadores, pois fazer esses cálculos à mão ou até mesmo com uma calculadora torna o processo um tanto enfadonho, ou até mesmo inviável.

3 A Transformada de Laplace

3.1 Motivação

No capítulo anterior, mencionamos que encontrar a solução explícita de uma EDO por métodos analíticos é, em geral, algo difícil de se conseguir. Vimos também que dependendo do tipo de Equação Diferencial que estejamos trabalhando, alguns métodos se mostram eficientes e outros não, e isso depende das propriedades que a equação possui.

O objetivo desse capítulo é introduzir mais um método de solução, a chamada **Transformada de Laplace**, que em linhas gerais toma uma EDO cuja solução é difícil (senão impossível) de se resolver pelos métodos anteriormente apresentados, e a transforma por meio de uma integral imprópria em uma equação algébrica.

Mas antes de entrar de fato no tema, precisamos definir dois conceitos que nos serão úteis para entendermos esse método.

Definição 3.1 (Integral Imprópria) *Uma integral imprópria é uma integral em que pelo menos um dos limites de integração é ilimitado, ou seja,*

$$\int_0^\infty f(t)\ dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A f(t)\ dt.$$

Exemplo 3.1 *Calcule*

$$\int_0^\infty e^{-st}\ dt,$$

em que s é uma constante

Solução: Por definição,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}\ dt &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}\ dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sA}}{s} \right) \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{se^{sA}} \right) \\
&= \frac{1}{s}.
\end{aligned}$$

□

Para garantir a convergência da integral imprópria que pretende-se calcular, podemos usar o teste da comparação, que nos diz o seguinte:

Proposição 3.1 (Teste de Comparação para Integrais Impróprias) *Suponha que f, g sejam funções contínuas e que*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \ \forall \ x \leq 0.$$

São verdadeiras as informações a seguir:

(1) *Se* $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ *diverge, então* $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)\, dx$ *também diverge;*

(2) *Se* $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)\, dx$ *converge, então* $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ *também converge.*

Uma outra vantagem da Transformada de Laplace que citamos de imediato, mesmo antes de defini-la, é de que não se exige que a expressão no lado direito da igualdade tenha a propriedade de ser contínua em todo o intervalo, antes, basta ser contínua em subintervalos do intervalo a ser trabalho, e isso motiva a seguinte definição:

Definição 3.2 (Função Contínua por Partes) *Uma função f é dita **contínua por partes**, ou **seccionalmente contínua** no intervalo $[a, b]$ quando for possível dividir o intervalo $[a, b]$ por uma quantidade finita de pontos*

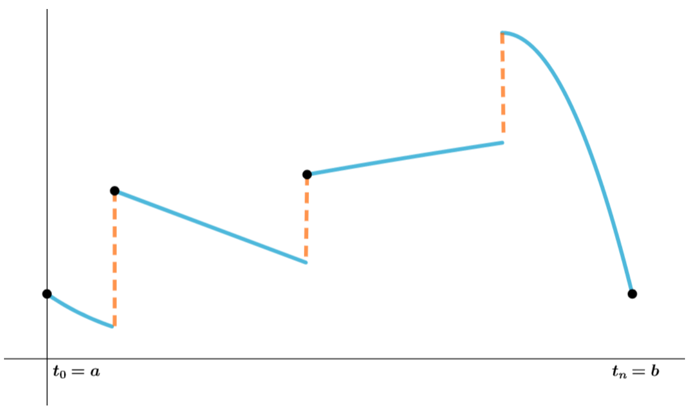
$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

de modo que
(1) *f seja contínua em cada um dos subintervalos (t_{i-1}, t_i) com $1 \leq i \leq n$;*

(2) *f tenda a um limite finito nos extremos de cada subintervalo por pontos no interior deste.*

A figura a seguir ilustra uma função contínua por partes:

Figura 9 – Função contínua por partes



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Nesse caso, considerando os três pontos de descontinuidade da função na figura anterior, chamando-os de t_1, t_2 e t_3, respectivamente, tem-se

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^{t_1} f(t)\ dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)\ dt + \int_{t_2}^{t_3} f(t)\ dt + \int_{t_3}^{b} f(t)\ dt.$$

3.2 A Transformada de Laplace: exemplos e propriedades

Definição 3.3 (Transformada de Laplace) *Seja f uma função definida para $t \geq 0$. Então, a* ***Transformada de Laplace*** *de f, denotada por $\mathcal{L}\{f(t)\}$, é dada pela seguinte integral:*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt,$$

desde que esta integral convirja.

Observação 3.1 *No Exemplo* 3.1*, vimos o seguinte:*

$$\int_0^\infty e^{-ct}\ dt = \frac{1}{c}.$$

Desse modo, considerando $f(t) = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^\infty e^{-st}\ dt \\ &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2 *Calcule $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} mt\}$, em que $m > 0$.*

Solução: Por definição, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\operatorname{sen} mt\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot \operatorname{sen} mt\ dt \\ &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \cdot \operatorname{sen} mt\ dt \end{aligned}$$

chamando $u = \operatorname{sen} mt$ e $dv = e^{-st}\ dt$, tem-se pelo método de integração por partes

$$\begin{aligned} &u = \operatorname{sen} mt \ \text{ e } \ du = m \cdot \cos mt\ dt \\ &dv = e^{-st}\ dt \ \text{ e } \ v = -\frac{e^{-st}}{s}. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \cdot \operatorname{sen} mt\ dt = \lim_{A\to\infty} \frac{m}{s} \int_0^A e^{-st} \cdot \cos mt\ dt - \left.\frac{e^{-st} \cdot \operatorname{sen} mt}{s}\right|_0^\infty. \tag{3.1}$$

Vamos analisar $\left.\dfrac{e^{-st} \cdot \operatorname{sen} mt}{s}\right|_0^\infty$: Perceba que $\operatorname{sen} mt \leq 1$ qualquer que seja $t \in [0, +\infty)$, ou seja, é uma função limitada, e e^{-st} converge para 0, desse modo, aplicando no limite superior a expressão anula-se. Além disso, aplicando em 0, a expressão igualmente se anula, pois $\operatorname{sen} m \cdot 0 = 0$ e portanto, $\left.\dfrac{e^{-st} \cdot \operatorname{sen} mt}{s}\right|_0^\infty = 0$. Com isso,

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \cdot \operatorname{sen} mt \; dt = \lim_{A\to\infty} \frac{m}{s} \int_0^A e^{-st} \cdot \cos mt \; dt. \tag{3.2}$$

Agora, vamos calcular $\dfrac{m}{s} \displaystyle\int_0^A e^{-st} \cdot \cos mt \; dt$: chamando $u_1 = \cos mt$ e $dv_1 = e^{-st} \, dt$, tem-se

$$\begin{aligned} u_1 = \cos mt \quad &\text{e} \quad du_1 = -m \cdot \operatorname{sen} mt \; dt \\ dv_1 = e^{-st} \; dt \quad &\text{e} \quad v_1 = -\frac{e^{-st}}{s}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\frac{m}{s} \int_0^A e^{-st} \cdot \cos mt \; dt = \frac{m}{s} \left(-\left.\frac{e^{-st} \cdot \cos mt}{s}\right|_0^A - \int_0^A \frac{e^{-st}}{s} m \cdot \operatorname{sen} mt \; dt \right). \tag{3.3}$$

Analisando $\left.\dfrac{e^{-st} \cdot \cos mt}{s}\right|_0^\infty$, note que $\cos mt \leq 1$ qualquer que seja $t \in [0, +\infty)$, ou seja, é uma função limitada, e e^{-st} converge para 0, desse modo, aplicando no limite superior a expressão anula-se. Além disso, aplicando em 0, a expressão converge para $\dfrac{1}{s}$, e com isso,

$$\frac{m}{s} \int_0^A e^{-st} \cdot \cos mt \; dt = \frac{m}{s} \left(\frac{1}{s} - \int_0^A \frac{e^{-st}}{s} m \cdot \operatorname{sen} mt \; dt \right). \tag{3.4}$$

Substituindo (3.4) em (3.2) tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \cdot \operatorname{sen} mt \; dt &= \lim_{A\to\infty} \frac{m}{s} \int_0^A e^{-st} \cdot \cos mt \; dt \\ &= \lim_{A\to\infty} \frac{m}{s} \left(\frac{1}{s} - \int_0^A \frac{e^{-st}}{s} m \cdot \operatorname{sen} mt \; dt \right) \\ &= \frac{m}{s^2} - \frac{m^2}{s^2} \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \cdot \operatorname{sen} mt \; dt \end{aligned}$$

e com isso,

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \cdot \operatorname{sen} mt \; dt + \frac{m^2}{s^2} \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \cdot \operatorname{sen} mt \; dt = \frac{m}{s^2},$$

ou ainda,

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \cdot \operatorname{sen} mt \; dt \left(\frac{m^2 + s^2}{s^2} \right) = \frac{m}{s^2},$$

e desse modo,

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \cdot \operatorname{sen} mt \; dt = \frac{m}{m^2 + s^2}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} mt\} = \frac{m}{m^2 + s^2}.$$

□

Observação 3.2 *Note que a função original depende da variável t, enquanto que sua Transformada depende da variável s, ou seja, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.*

Exemplo 3.3 *Calcule $\mathcal{L}\{\cos mt\}$, em que $m > 0$.*

Solução: Efetuando cálculos semelhantes aos do exemplo anterior, chega-se à seguinte conclusão:

$$\mathcal{L}\{\cos mt\} = \frac{s}{m^2 + s^2}.$$

$\square$

Usando essa mesma estratégia é possível calcular a Transformada de Laplace de muitas funções, umas menos trabalhosas, outras mais elaboradas. O quadro a seguir nos mostra algumas funções e suas respectivas Transformadas de Laplace:

Tabela 1 – Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
(1)	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, com $n \in \mathbb{N}$
(2)	$t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
(3)	e^{mt}	$\frac{1}{s-m}$
(4)	$\operatorname{senh} mt$	$\frac{m}{s^2 - m^2}$
(5)	$\cosh mt$	$\frac{s}{s^2 - m^2}$
(6)	te^t	$\frac{1}{(s-m)^2}$
(7)	$t\operatorname{sen} mt$	$\frac{2ms}{(s^2 + m^2)^2}$
(8)	$t \cos mt$	$\frac{s^2 - m^2}{(s^2 + m^2)^2}$
(9)	$\mathcal{U}(t-h)$	$\frac{e^{-sh}}{s}$
(10)	$\operatorname{sen} mt$	$\frac{m}{s^2 + m^2}$
(11)	$\cos mt$	$\frac{s}{s^2 + m^2}$

Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir vamos enunciar algumas propriedades da Transformada que nos auxiliam na resolução de vários problemas envolvendo-as.

Proposição 3.2 ($\mathcal{L}$ é linear) *Sejam f, g funções contínuas por partes em $[0, +\infty)$ e α, β constantes. Então,*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Demonstração: De fato, note o seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]\ dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]\ dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_0^A \alpha e^{-st} f(t)\ dt + \lim_{A\to\infty} \int_0^A \beta e^{-st} g(t)\ dt \\
&= \alpha \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\ dt + \beta \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} g(t)\ dt \\
&= \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}.
\end{aligned}$$

∎

Definição 3.4 (Ordem Exponencial) *Diz-se que uma função é de* ***ordem exponencial*** *quando existem constantes* $c, M > 0$ *e* $T > 0$ *tais que*

$$|f(t)| \leq Me^{ct},\ \forall\ t > T.$$

Teorema 3.1 (Condições Suficientes de Existência de $\mathcal{L}$) *Seja f uma função contínua por partes no intervalo $[0, +\infty)$ e de ordem exponencial para $t > T$. Então, sua Transformada de Laplace existe para todo $s > c$.*

Demonstração: De fato, perceba o seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt \\
&= \int_0^T e^{-st} f(t)\ dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\ dt.
\end{aligned}$$

Agora, note que $\int_0^T e^{-st} f(t)\ dt$ está bem definida, pois f é contínua por partes por hipótese. Para a segunda integral, como f é de ordem exponencial, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_T^\infty |e^{-st} f(t)|\ dt &\leq M \int_T^\infty e^{-st} e^{ct}\ dt \\
&= M \int_T^\infty e^{(c-s)t}\ dt \\
&= (-M) \frac{-e^{-(s-c)t}}{s-c}\Big|_T^\infty \\
&= M \frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\Big|_T^\infty, \text{ com } s > c,
\end{aligned}$$

e como $s > c$, esta integral é convergente. Logo, nessas condições $\mathcal{L}$ está bem definida.

∎

Conforme mencionamos no início desse capítulo, a Transformada de Laplace é mais um método de se resolver Equações Diferenciais, e para que se entenda como isso ocorre, é necessário que entendamos como a Transformada funciona não somente para uma função, como fez-se até agora, mas também como lidar com a Transformada da derivada de uma função. A fim de ver isso, vamos demonstrar o resultado a seguir:

Proposição 3.3 *Suponha que f é uma função contínua e que f' seja seccionalmente contínua (contínua por partes) em um intervalo da forma $[0, A]$. Além disso, considere que f é de ordem exponencial. Então, $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe para $s > A$ e vale*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

Demonstração: De fato, se for o caso de $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existir, então é uma integral da forma

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{A\to\infty} \int_0^A f'(t)e^{-st}\, dt.$$

Como f' é seccionalmente contínua em $[0, A]$, então existe uma quantidade finita de pontos de descontinuidade, por exemplo, $t_1, t_2, \ldots, t_k$ com

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = A,$$

e desse modo, a integral pode ser desmembrada ficando da forma que segue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A f'(t)e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(\int_0^{t_1} f'(t)e^{-st}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} f'(t)e^{-st}\, dt + \cdots + \int_{t_{k-1}}^{A} f'(t)e^{-st}\, dt \right)
\end{aligned}$$

e integrando cada uma dessas funções usando o método de integração por partes, obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \lim_{A\to\infty} \left(f(t)e^{-st}\Big|_0^{t_1} + f(t)e^{-st}\Big|_{t_1}^{t_2} + \cdots + f(t)e^{-st}\Big|_{t_{k-1}}^{A} \right) \\
&+ \lim_{A\to\infty} s \left(\int_0^{t_1} f(t)e^{-st}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-st}\, dt + \cdots + \int_{t_{k-1}}^{A} f(t)e^{-st}\, dt \right)
\end{aligned}$$

usando o Teorema Fundamental do Cálculo em cada uma das primitivas que estão dentro do primeiro parênteses no lado direito da igualdade, obtém-se como resultado $-f(0)$, (devido aos cancelamentos feitos). Além disso, a soma de todas as integrais que estão dentro do segundo parênteses no lado direito da igualdade podem ser transformadas em uma única integral, e dessa maneira, chega-se à seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\} &= -f(0) + \lim_{A\to\infty} s \int_0^A f(t)e^{-st}\, dt \\
&= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).
\end{aligned}$$

■

Pode-se também calcular Transformadas de Laplace para derivadas de mais alta ordem de funções, conforme Corolário a seguir:

Corolário 3.1 *Suponha que $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ sejam funções contínuas e que $f^{(n)}$ seja seccionalmente contínua em um intervalo da forma $[0, A]$. Além disso, considere que $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ são de ordem exponencial. Então, $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe para $s > a$ e vale*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Um último resultado que gostaríamos de destacar é o que segue:

Proposição 3.4 (Teorema da Translação) *Seja $a \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a).$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\ dt \\
&= \int_0^\infty e^{(a-s)t}f(t)\ dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\ dt \\
&= F(s-a).
\end{aligned}$$

■

O leitor deve estar se perguntando nesse momento: *se dada uma função $f(t)$ seccionalmente contínua e de ordem exponencial no intervalo $[0, +\infty)$ existe a sua Transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então dada uma função $F(s)$ com certas propriedades, deve existir uma maneira de reverter o processo, ou seja, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} =$* $f(t)$. Realmente existe uma maneira explícita de reverter esse processo, ou seja, calcular a **Transformada Inversa de Laplace**, que aqui denota-se por $\mathcal{L}^{-1}$. Contudo, para que se consiga efetuar esse cálculo, necessita-se trabalhar com variáveis complexas, pois a Transformada inversa é definida por:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} e^{st}F(s)\ ds,$$

em que $j = \sqrt{-1}$, é a unidade imaginária dos números complexos. Para que se entenda a construção dessa integral, o leitor interessado no assunto pode consultar TONIDANDEL [9], e lá encontrará um estudo desse caso com riqueza de detalhes.

Como estamos trabalhando aqui com variáveis reais, vamos lidar com a Transformada inversa à luz de Transformadas já conhecidas, ou seja, para determinar a Transformada inversa, vamos consultar um quadro de Transformadas para verificar qual a sua inversa.

Exemplo 3.4 *Pelo apresentado na Observação* 3.1*, tem-se* $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$*. Então,* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1.$

□

Exemplo 3.5 *Pelo apresentado na Exemplo* 3.2*, tem-se* $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} mt\} = \dfrac{m}{m^2+s^2}$*. Então,* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{m}{m^2+s^2}\right\} = \operatorname{sen} mt.$

□

Exemplo 3.6 *Pelo apresentado na Exemplo* 3.3*, tem-se* $\mathcal{L}\{\cos mt\} = \dfrac{s}{m^2+s^2}$*. Então,* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{m^2+s^2}\right\} = \cos mt.$

□

Tabela 2 – Transformadas Inversas de Laplace

	$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
(1)	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, com $n \in \mathbb{N}$	t^n
(2)	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$	$t^{-1/2}$
(3)	$\dfrac{1}{s-m}$	e^{mt}
(4)	$\dfrac{m}{s^2-m^2}$	$\operatorname{senh} mt$
(5)	$\dfrac{s}{s^2-m^2}$	$\cosh mt$
(6)	$\dfrac{1}{(s-m)^2}$	te^t
(7)	$\dfrac{2ms}{(s^2+m^2)^2}$	$t\operatorname{sen} mt$
(8)	$\dfrac{s^2-m^2}{(s^2+m^2)^2}$	$t\cos mt$
(9)	$\dfrac{e^{-sh}}{s}$	$\mathcal{U}(t-h)$
(10)	$\dfrac{m}{s^2+m^2}$	$\operatorname{sen} mt$
(11)	$\dfrac{s}{s^2+m^2}$	$\cos mt$

Fonte: Elaborada pelo autor

Uma importante propriedade da Transformada Inversa é a linearidade, que vamos mostrar em seguida.

Proposição 3.5 *Dadas $F(s), G(s)$ Transformadas de algumas funções f e g e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vale o seguinte:*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Demonstração: De fato, como $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, por hipótese, tem-se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(S)$, e com isso

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{f(t)\}\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}\} \end{aligned}$$

e como $\mathcal{L}^{-1}$ e $\mathcal{L}$ são operações inversas, obtém-se

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t).$$

Por fim, voltando às igualdades iniciais, a saber, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, tem-se finalmente

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

■

Exemplo 3.7 *Sendo $F(s) = \dfrac{1}{s^3 + 5s^2 + 2s - 8}$, calcule $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.*

Solução: Vamos inicialmente fatorar o polinômio no denominador da fração. Note que, como a soma dos coeficientes vale $1 + 5 + 2 - 8 = 0$, então $s_1 = 1$ é raiz desse polinômio. Dividindo-o por $s - 1$, encontra-se

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2 + 6s + 8)};$$

Para determinar as raízes do polinômio do segundo grau $s^2 + 6s + 8$ pode-se usar, por exemplo, relações de Girard, encontrando $s_2 = -2$ e $s_3 = -4$. Desse modo,

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}.$$

Para determinar $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, precisamos, de alguma maneira, desmembrar essas frações em uma soma de três outras, para que possamos usar a nosso favor a propriedade da linearidade anteriormente demonstrada. Com isso, vamos resolver esse problema usando o método de frações parciais, ou seja, queremos determinar constantes A, B e C tais que

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4};$$

Calculando a soma de frações no lado direito da igualdade, obtém-se

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s+4)},$$

e como os denominadores são iguais, os numeradores também devem ser, ou seja,

$$A(s+2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s+2)=1.$$

Agora, pondo $s=1$, em seguida pondo $s=-2$ e por fim, $s=-4$ na equação anterior, obtém-se as igualdades

$$\begin{aligned}
&15A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{15}\\
&-6B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{6}\\
&10C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} &= \frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+4}\\
&= \frac{1}{15(s-1)}-\frac{1}{6(s+2)}+\frac{1}{10(s+4)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{15(s-1)}-\frac{1}{6(s+2)}+\frac{1}{10(s+4)}\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{15(s-1)}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{6(s+2)}\right\}\\
&+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{10(s+4)}\right\}\\
&= \frac{1}{15}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}\\
&+ \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}
\end{aligned}$$

e pela Tabela 2, tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-m}\right\}=e^{mt},$$

em que $m \in \mathbb{R}$. Daí,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{15}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=\frac{1}{15}e^{t}\\
&\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=\frac{1}{6}e^{-2t}\\
&\frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}=\frac{1}{10}e^{-4t}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}=\frac{1}{15}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{10}e^{-4t}.$$

$\square$

3.3 Aplicações

Esta seção é dedicada a aplicações do conceito de Transformada da Laplace até aqui visto. Dividimos esta seção em duas outras, a saber, vamos aplicar a Transformada de Laplace na resolução de problemas de valor inicial (PVI) e em seguida, vamos resolver um problema envolvendo medicina forense, para ser mais preciso, vamos mostrar como resolver uma cena de crime usando essa técnica.

3.3.1 PVI via Transformada de Laplace

Resolver Equações Diferenciais usando a Transformada de Laplace pode ser uma ferramenta bastante útil em alguns casos. Por exemplo, suponha que você tenha uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay''(t) + by'(y) + cy(t) = f(t). \tag{3.5}$$

Suponha que (3.5) satisfaça as condições do **Corolário 3.1**, nesse caso, com $n = 2$, então aplicando a Transformada de Laplace em (3.5) tem-se

$$\mathcal{L}\{ay''(t) + by'(y) + cy(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

e pela linearidade, vem

$$a\mathcal{L}\{y''(t)\} + b\mathcal{L}\{y'(y)\} + c\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Agora, usando o **Corolário 3.1** obtém-se o seguinte:

$$a[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + b[sY(s) - y(0)] + cY(s) = F(s),$$

em que $Y(s)$ é obtida a partir da Transformada de Laplace no lado direito da igualdade e $F(s)$ é obtida resolvendo $\mathcal{L}\{f(t)\}$. Agora, note que a equação anterior ainda pode ser escrita na forma:

$$as^2Y(s) - asy(0) - ay'(0) + bsY(s) - by(0) + cY(s) = F(s),$$

pondo $Y(s)$ em evidência no primeiro membro e os demais no lado direito da igualdade, tem-se

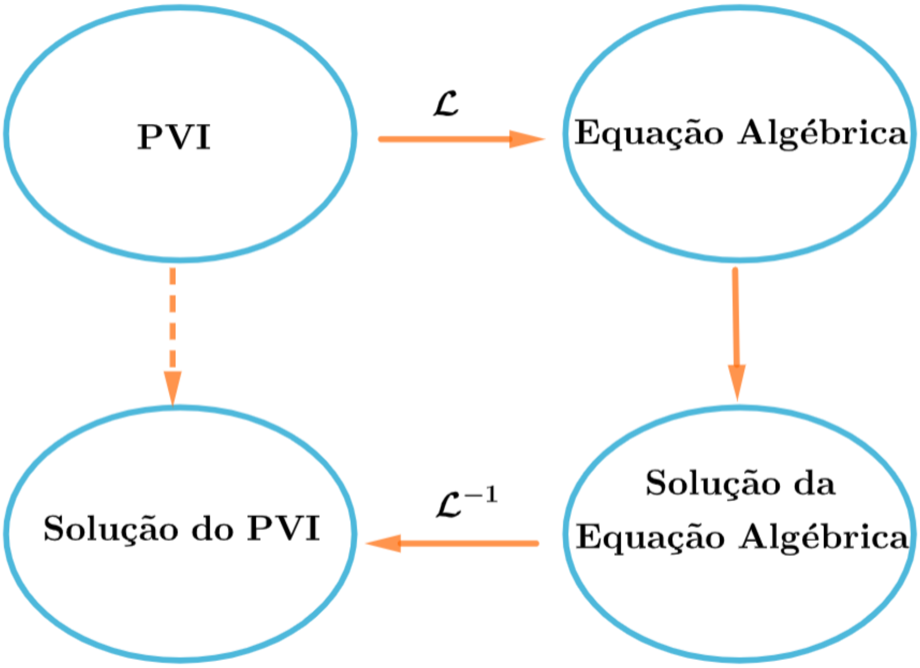
$$(as^2 + bs + c)Y(s) = (as + b)y(0) + ay'(0) + F(s),$$

ou ainda,

$$Y(s) = \frac{(as + b)y(0) + ay'(0)}{as^2 + bs + c} + \frac{F(s)}{as^2 + bs + c}. \tag{3.6}$$

Com isso, a solução de (3.5) reduz-se a resolver (3.6), em outras palavas, resolver uma EDO equivale, via Transformada de Laplace, a resolver uma equação algébrica. Além disso, conhecidos os valores de $y(0)$ e $y'(0)$ pode-se obter a solução de (3.6), e

Figura 10 – Esquema de Resolução de PVI via $\mathcal{L}\{f(t)\}$.



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

com isso resolver o PVI, bastando para isso aplicar o processo algébrico reverso, ou seja, determinar a Transformada Inversa de Laplace. Logo, para resolver um PVI via Transformada de Laplace, basta seguir o seguinte esquema:

Exemplo 3.8 *Resolva, usando o método da Transformada de Laplace o PVI*

$$y''(t) + y(t) = \operatorname{sen} 2t \tag{3.7}$$

$$y(0) = 2 \quad e \quad y'(0) = 1. \tag{3.8}$$

Solução: Inicialmente, suponhamos que o PVI está nas condições do **Corolário 3.1**, e agora calculemos a Transformada de Laplace da EDO, obtendo:

$$\mathcal{L}\{y''(t) + y(t)\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\} \Rightarrow \mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}.$$

Calculando cada Transformada, usando o **Corolário 3.1** e $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}$ presente na Tabela 1, obtém-se

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2+4}. \tag{3.9}$$

Substituindo os valores iniciais dados, resulta na equação algébrica

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)},$$

e usando o método de frações parciais, obtemos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)} \\ &= \frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4} \\ &= \frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}, \end{aligned}$$

e desse modo, efetuando as devidas operações no numerador da fração à direita da igualdade, vem

$$2s^3+s^2+8s+6=(A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+(4B+D),$$

e esta igualdade nos leva ao sistema

$$\begin{aligned} A+C&=2 \\ B+D&=1 \\ 4A+C&=8 \\ 4B+D&=6, \end{aligned}$$

cuja solução é $A=2,\ b=\frac{5}{3},\ C=0$ e $D=-\frac{2}{3}$. Com isso, tem-se

$$Y(s)=\frac{2s}{s^2+1}+\frac{5}{3(s^2+1)}-\frac{2}{3(s^2+4)}.$$

Agora que resolvemos a equação algébrica, para determinar a solução do PVI, basta aplicar a Transformada Inversa em ambos os membros, ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1}+\frac{5}{3(s^2+1)}-\frac{2}{3(s^2+4)}\right\},$$

e com isto,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{3(s^2+1)}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{3(s^2+4)}\right\} \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \\ &= 2\cos t+\frac{5}{3}\operatorname{sen} t-\frac{1}{3}\operatorname{sen} 2t, \end{aligned}$$

e eis a solução do PVI.

□

3.3.2 Como resolver um crime usando a Transformada de Laplace

A aplicação da Transformada de Laplace que vamos apresentar em seguida está dentro de um contexto forense, isto é, da solução de uma cena de crime, que nesse caso ocorreu em um restaurante. A história contada a seguir foi por nós traduzida, mas o texto original pode ser encontrado, em língua inglesa, em ZILL [11].

Inicialmente é contada a história do crime para que o leitor entenda o contexto em que está inserido o problema, e ao longo da mesma são apresentados dados e leis matemáticas que permitem à detetive responsável pelo caso montar Equações Diferenciais e com isso desvendar o crime.

Convido-lhe a entrar nessa história comigo e juntos bancarmos o **Sherlock Holmes** e, com a ajuda da detetive **Daphne**, das Equações Diferenciais que modelam o problema e da Transformada de Laplace, desvendar o que de fato aconteceu.

Assassinato no Restaurante *Mayfair*

Amanhecer no restaurante *Mayfair*. O brilho âmbar dos postes de luz misturado com o violento *flash* vermelho de viaturas policiais começa a desaparecer com o nascer de um sol alaranjado como uma fornalha. A detetive **Daphne Marlow** sai do restaurante segurando uma xícara fumegante de café quente em uma mão e um resumo das provas da cena do crime na outra. Ao sentar-se no para-choque de seu bronzeado LTD, a detetive Marlow começa a revisar as evidências.

Às 5:30, o corpo de um tal **Joe D. Wood** foi encontrado na entrada da geladeira no porão da lanchonete. Às 6:00, o legista chegou e determinou que a temperatura corpórea do cadáver era de 85 graus Fahrenheit (85°F). Trinta minutos depois, o legista novamente mediu a temperatura corporal e desta vez a leitura foi de 84 graus Fahrenheit (84°F). O termostato dentro da geladeira indica 50 graus Fahrenheit (50°F).

Daphne pega um bloco de notas amarelo desbotado e uma calculadora manchada de ketchup no banco da frente de sua viatura e começa a calcular. Ela sabe que a Lei de Newton do resfriamento diz que a taxa na qual um objeto esfria é proporcional à diferença entre a temperatura T do corpo no instante t e a temperatura T_m do ambiente ao redor do corpo. Ela anota a equação

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \text{ com } t > 0 \tag{3.10}$$

em que k é uma constante de proporcionalidade, T e T_m são medidos em graus Fahrenheit, e t é o tempo medido em horas. Uma vez que **Daphne** quer investigar o passado usando valores positivos de tempo, ela decide corresponder $t = 0$ com 6:00 da manhã, e assim, $t = 4$ corresponde a 2:00 da manhã. Depois de alguns rabiscos em seu bloco amarelo, **Daphne** percebe que com esta convenção de tempo a constante k em (3.10) será positiva. Ela anota um lembrete para si mesma que 6:30 é agora $t = -\frac{1}{2}$.

À medida que o amanhecer frio e tranquilo dá lugar à manhã fumegante do meio do verão, **Daphne** começa a suar e se pergunta em voz alta: “Mas e se o cadáver foi movido para a geladeira em uma débil tentativa de esconder o corpo? Como isso muda minha estimativa?” Ela volta a entrar no restaurante e encontra o termostato manchado de graxa acima da caixa registradora. Ela lê 70 graus Fahrenheit (70°F).

“Mas quando o corpo foi removido?” **Dafne** pergunta. Ela decide deixar esta pergunta sem resposta por enquanto, simplesmente deixando h denotar o número de horas em que o corpo esteve na geladeira antes das 6:00. Por exemplo, se $h = 6$, então o corpo foi movido à meia-noite.

Dafne vira uma página em seu bloco de notas e começa a calcular. Como o rápido resfriamento do café começa a fazer seu trabalho, ela percebe que a maneira de modelar a mudança de temperatura ambiental causada pelo movimento é conforme a função degrau unitário $\mathcal{U}(t)$. Ela escreve

$$T_m(t) = 50 + 20\mathcal{U}(t-h) \tag{3.11}$$

e logo abaixo dela a Equação Diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k[T - T_m(t)]. \tag{3.12}$$

A blusa de poliéster manchada de mostarda de **Daphne** começa a pingar de suor sob o sol quente do meio da manhã. Esgotada do calor e do exercício mental, ela liga sua viatura e dirige até o *Boodle's Café* para outra xícara de café e um prato cheio de *scrapple* e ovos fritos. Ela se acomoda na cabine de couro falso. O intenso ar condicionado conspira com sua blusa ensopada de suor para arrepiar seu corpo devido ao rápido resfriamento. O frio intenso serve como um lembrete horrível da tragédia que ocorreu mais cedo no *Mayfair*.

Enquanto **Daphne** espera pelo café da manhã, ela pega seu bloco de notas e rapidamente revisa seus cálculos. Ela então constrói cuidadosamente um quadro que relaciona o resfriamento com o tempo h até a hora da morte enquanto comia seu *scrapple* e seus ovos.

Empurrando o prato vazio, **Daphne** pega seu celular para checar com sua companheira Maria. “Algum suspeito?” **Daphne** pergunta.

“Sim”, ela responde, “nós temos três deles. A primeira é a ex-mulher do falecido **Sr. Wood**, uma dançarina com o nome de **Twinkles**. Ela foi vista no *Mayfair* entre 17:00 e 18:00 em uma séria briga com Wood.”

“Quando ela foi embora?”

“Uma testemunha disse que ela saiu às pressas um pouco depois das seis. O segundo suspeito é um apostador do sul da Filadélfia que atende pelo nome de **Slim**. **Slim** estava, cerca de 10 da noite passada, tendo uma conversa sussurrada com **Joe**. Ninguém ouviu a conversa, mas testemunhas dizem que houve muitos gestos de mão, como se **Slim** estivesse chateado ou algo assim."

"Alguém o viu sair?"

"Sim. Ele saiu silenciosamente por volta das 11. O terceiro suspeito é o cozinheiro."

"O cozinheiro?"

"Sim, o cozinheiro. Ele atende pelo nome de **Shorty**. O caixa diz que ouviu **Joe** e **Shorty** discutindo sobre a maneira correta de apresentar um prato de *scaloppine de vitela*. Ela disse que **Shorty** fez uma pausa extraordinariamente longa às 22:30. Ele explodiu em um acesso de raiva quando o restaurante fechou às 2:00 da manhã. Acho que isso explica por que o lugar estava uma bagunça.

"Ótimo trabalho, parceira. Acho que sei quem levar para interrogatório."

Problemas Relacionados

(1) Resolva a equação (3.10), que modela o cenário em que **Joe Wood** é morto na geladeira. Use esta solução para estimar a hora da morte [lembre-se de que a temperatura normal de um corpo vivo é de 98,6 graus Fahrenheit $(98,6°\text{F})$].

(2) Resolva a equação diferencial (3.12) usando a Transformada de Laplace. Sua solução $T(t)$ dependerá de t e h. (Use o valor de k encontrado no problema anterior.)

(3) Complete o **quadro de Daphne**.

h	hora em que o corpo foi movido	hora da morte
12	18:00	
11		
10		
9		
8		
7		
6		
5		
4		
3		
2		

(4) Quem **Daphne** quer interrogar e por quê?

Solução dos Problemas Relacionados

Solução de (1): A equação que modela o problema **(1)** é

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \text{ com } t > 0$$

em que k é uma constante de proporcionalidade, T é medido em graus Fahrenheit, $T_m = 50°\text{F}$ e t é o tempo medido em horas. Agora, note que essa equação pode ser resolvida pelo método de variáveis separáveis, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \quad &\Rightarrow \quad \frac{dT}{T-50} = kdt \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{T-50}dT = kdt \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{T-50}\, dT = \int k\ dt \\
&\Rightarrow \quad \ln|T-50| = kt + C_1 \\
&\Rightarrow \quad T - 50 = \pm e^{kt+C_1} \\
&\Rightarrow \quad T = 50 \pm Ce^{kt}, \text{ em que } C = e^{C_1}.
\end{aligned}$$

Continuando, como a detetive **Daphne** fez a correspondência $t = 0$ a 6:00, então tem-se os seguintes pontos que fazem parte da solução:

$$\begin{aligned}
P_1 &= (0, 85) \\
P_2 &= \left(-\frac{1}{2}, 84\right),
\end{aligned}$$

pois às 6:00 $(t = 0)$ o legista mediu a temperatura corpórea do **sr. Wood** e encontrou 85°F, e às 6:30 $\left(t = -\frac{1}{2}\right)$ mediu novamente e encontrou 84°F. Assim, substituindo esses pontos na solução geral, tem-se

$$\begin{aligned}
T = 50 \pm Ce^{kt} \quad &\Rightarrow \quad 85 = 50 \pm Ce^{k\cdot 0} \\
&\Rightarrow \quad 85 = 50 \pm C \\
&\Rightarrow \quad C = \pm 35.
\end{aligned}$$

Analogamente, substituindo as coordenadas de P_2, e $C = \pm 35$ tem-se

$$\begin{aligned}
T = 50 + Ce^{kt} \quad &\Rightarrow \quad 84 = 50 + 35e^{k\cdot(-1/2)} \\
&\Rightarrow \quad e^{k\cdot(-1/2)} = \frac{34}{35} \\
&\Rightarrow \quad -\frac{k}{2} = \ln\frac{34}{35} \\
&\Rightarrow \quad k = -2\ln\frac{34}{35} \\
&\Rightarrow \quad k \approx 0,058
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} T = 50 - Ce^{kt} &\Rightarrow 84 = 50 - 35e^{k\cdot(-1/2)} \\ &\Rightarrow e^{k\cdot(-1/2)} = -\frac{34}{35}, \end{aligned}$$

o que não pode ocorrer, pois $e^x > 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Com isso, $C = 35$ é o único valor satisfatório, e substituindo $k = -2\ln\frac{34}{35}$, $C = 35$ e $T = 98,6$°F (temperatura normal de um corpo vivo) na equação $T = 50 + Ce^{kt}$, encontra-se

$$\begin{aligned} T = 50 + Ce^{kt} &\Rightarrow 98,6 = 50 + 35e^{-2\ln(34/35)t} \\ &\Rightarrow \frac{48,6}{35} = e^{-2\ln(34/35)t} \\ &\Rightarrow \ln\frac{48,6}{35} = -2\ln\frac{34}{35}t \\ &\Rightarrow t = -\frac{\ln\frac{48,6}{35}}{2\ln\frac{34}{35}} \\ &\Rightarrow t \approx 5,66, \end{aligned}$$

e isso nos diz que o **sr. Wood** foi assassinado há 5,66 horas atrás, que convertido em horas e minutos nos dão aproximadamente 5 horas e 40 minutos. Ou seja, ele foi assassinado aproximadamente à meia noite e vinte (00:20).

Um pequeno adendo: Como estamos lidando com uma cena criminal, temos que analisar as possibilidades, e o problema anterior pressupõe que o **sr. Wood** foi morto em frente à geladeira. Contudo, é possível que o **sr. Wood** não tenha morrido nesse local, mas sim, foi morto em outro ambiente e, em seguida, transferido para lá, e a esperta detetive **Daphne** sabe disso, e então remodela a situação. Então, vamos remodelar o problema matematicamente afim de resolvê-lo pensando nessa possibilidade.

Solução de (2): As equações que modelam o problema proposto são dadas por

$$\begin{aligned} T_m(t) &= 50 + 20\mathcal{U}(t-h) \\ \frac{dT}{dt} &= k[T - T_m(t)] \end{aligned}$$

em que $T_m(t)$ modela a mudança de temperatura ambiental devido ao movimento e $\mathcal{U}(t-h)$ é a função degrau unitário, definida por

$$\mathcal{U}(t-h) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \le t < h, \\ 1, & \text{se} \quad t \ge h \end{cases}$$

e desse modo, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = k[T - T_m(t)] &\Rightarrow T'(t) - kT(t) + kT_m(t) = 0 \\ &\Rightarrow T'(t) - kT(t) + 50k + 20k\mathcal{U}(t-h) = 0 \end{aligned}$$

e para resolver essa Equação Diferencial vamos utilizar, conforme foi pedido, a Transformada de Laplace, ou seja,

$$\mathcal{L}\{T'(t) - kT(t) + 50k + 20k\mathcal{U}(t-h)\} = \mathcal{L}\{0\},$$

e pela linearidade de $\mathcal{L}$, vem

$$\mathcal{L}\{T'(t)\} - \mathcal{L}\{kT(t)\} + \mathcal{L}\{50k\} + \mathcal{L}\{20k\mathcal{U}(t-h)\} = \mathcal{L}\{0\},$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}\{T'(t)\} - k\mathcal{L}\{T(t)\} + 50k\mathcal{L}\{1\} + 20k\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-h)\} = \mathcal{L}\{0\}.$$

Agora, determinando cada Transformada pedida (explicitadas nesse trabalho via proposição ou tabela demonstrativa) obtém-se

$$s\mathcal{L}\{T(t)\} - T(0) - k\mathcal{L}\{T(t)\} + \frac{50k}{s} + \frac{20ke^{-hs}}{s} = 0.$$

Pondo $\mathcal{L}\{T(t)\}$ em evidência no lado esquerdo da igualdade e passando os demais membros para o lado direito, vem

$$\mathcal{L}\{T(t)\}(s-k) = T(0) - \frac{50k + 20ke^{-hs}}{s}$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}\{T(t)\} = \frac{sT(0) - 50k - 20ke^{-hs}}{s(s-k)}.$$

Substituindo $T(0) = 85$, temperatura medida no instante zero, ou seja, 6:00, vem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{T(t)\} &= \frac{85s - 50k - 20ke^{-hs}}{s(s-k)} \\
&= \frac{85}{s-k} - \frac{50k}{s(s-k)} - \frac{20ke^{-hs}}{s(s-k)} \\
&= \frac{85}{s-k} + \frac{50}{s} - \frac{50}{s-k} + \frac{20e^{-hs}}{s} - \frac{20e^{-hs}}{s-k},
\end{aligned}$$

e para determinar a solução $T(t)$ basta agora aplicar a Transformada Inversa em ambos os membros, o que nos dá

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{T(t)\}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{85}{s-k} + \frac{50}{s} - \frac{50}{s-k} + \frac{20e^{-hs}}{s} - \frac{20e^{-hs}}{s-k}\right\}$$

e desenvolvendo essa igualdade, usando a linearidade de $\mathcal{L}^{-1}$ obtém-se

$$\begin{aligned}
T(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{85}{s-k}+\frac{50}{s}-\frac{50}{s-k}+\frac{20e^{-hs}}{s}-\frac{20e^{-hs}}{s-k}\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{85}{s-k}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{50}{s}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{50}{s-k}\right\}\\
&+ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20e^{-hs}}{s}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20e^{-hs}}{s-k}\right\}\\
&= 85\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-k}\right\}+50\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-50\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-k}\right\}\\
&+ 20\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-hs}}{s}\right\}-20\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-hs}}{s-k}\right\}\\
&= 85e^{kt}+50-50e^{kt}+20\mathcal{U}(t-h)-20e^{k(t-h)}\mathcal{U}(t-h).
\end{aligned}$$

Agora pondo $k=-2\ln\dfrac{34}{35}$, valor obtido no problema anterior, esta equação relaciona a temperatura do corpo do **sr. Wood** com o número de horas, nesse caso, antes das 6:00 que foi o valor escolhido como instante zero pela detetive, e essa é a solução do problema:

$$T(t)=85e^{kt}+50-50e^{kt}+20\mathcal{U}(t-h)-20e^{k(t-h)}\mathcal{U}(t-h),\ \text{com } k=-2\ln\frac{34}{35}.$$

Solução de (3): Para completar o **quadro de Daphne**, basta substituir $k=-2\ln\dfrac{34}{35}$ e $T=98,5°\text{F}$, donde vem

$$85e^{kt}+50-50e^{kt}+20\mathcal{U}(t-h)-20e^{k(t-h)}\mathcal{U}(t-h)=98,6$$

ou equivalentemente,

$$85e^{kt}-50e^{kt}+20\mathcal{U}(t-h)-20e^{k(t-h)}\mathcal{U}(t-h)=48,6.$$

Ora, note que $t>h$, pois o **sr. Wood** foi assassinato antes que o seu corpo pudesse ser movido, e desse modo,

$$t>h\Rightarrow t-h>0\Rightarrow \mathcal{U}(t-h)=1.$$

Substituindo na equação, tem-se

$$\begin{aligned}
35e^{kt}-20e^{k(t-h)}=28,6 \quad &\Rightarrow \quad e^{kt}\left(35-\frac{20}{e^{kh}}\right)=28,6\\
&\Rightarrow \quad e^{kt}=\frac{28,6}{\left(35-\dfrac{20}{e^{kh}}\right)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad kt = \ln\left(\frac{28,6}{35 - \dfrac{20}{e^{kh}}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\ln\left(\dfrac{28,6}{35 - \dfrac{20}{e^{kh}}}\right)}{k}$$

Agora, calculando os valores dessa expressão para os valores de h no **quadro de Daphne** e tomando $k = -2\ln\dfrac{34}{35}$, obtemos os valores aproximados dados a seguir:

h	hora em que o corpo foi movido	hora da morte
12	18:00	3:42
11	19:00	3:17
10	20:00	2:50
9	21:00	2:20
8	22:00	1:48
7	23:00	1:13
6	0:00	00:34
5	1:00	23:52
4	2:00	23:04
3	3:00	22:12
2	4:00	21:13

e se assumirmos que o **sr. Wood** foi assassinado antes de ser transferido, os resultados só fazem sentido para $h < 6$, pois a hora da morte deve ser anterior ao momento em que o corpo foi levado à geladeira.

h	hora em que o corpo foi movido	hora da morte
5	1:00	23:52
4	2:00	23:04
3	3:00	22:12
2	4:00	21:13

Solução de (4): Por fim, e essa etapa é de certa forma subjetiva, mas entendemos que a detetive **Daphne** quer interrogar o cozinheiro **Shorty**, pois os possíveis horários para a morte do **sr. Wood** combinam com os horários que **Shorty** estava no restaurante. Além disso, os dois tiveram uma discussão nessa noite, e não nos esqueçamos da **longa pausa** que **Shorty** fez por volta de 22:30. Logo, em nossa opinião, a detetive o intimaria para o interrogatório.

4 Considerações Finais

Inicialmente, gostaríamos de destacar a importância das Equações Diferenciais não só na Matemática, mas na ciência de maneira geral. No nosso mundo, ou seja, a realidade à nossa volta é dinâmica, varia com o tempo, e desse modo essas equações mostram-se como uma indispensável ferramenta para modelar fenômenos os mais diversos.

É importante deixar claro que, embora tenhamos escolhido a Transformada de Laplace como objeto principal de estudo, os demais métodos são tão importantes quanto o de Laplace, pois cada um tem suas vantagens e desvantagens, ou seja, a depender da equação que se queira resolver, um ou outro método mostra-se mais apropriado. Contudo, foi possível notar (assim esperamos) como a Transformada de Laplace funciona muito bem para resolver Equações Diferenciais, uma vez que

(1) Não se exige a continuidade da função no lado direito da igualdade, apenas a continuidade por partes;

(2) A Transformada admite uma inversa e é linear;

(3) Transforma-se um problema de EDO em um problema algébrico e resolve-se PVIs;

(4) É aplicável não só na Matemática, mas também em outros ramos da ciência.

4.1 Sugestões para Pesquisas Futuras

Como temas para pesquisas futuras, podemos indicar aos leitores desse trabalho as referências [3], [10] e [11] para um aprofundamento no tema da Transformada do ponto de vista matemático. Por exemplo, não abordamos aqui o tema **Convolução**, que trata de problemas nos quais o comportamento de um sistema em um instante t não depende apenas do seu estado nesse tal instante, antes, é levado em conta o comportamento do sistema nesse instante e em instantes anteriores, ou seja, depende de toda a sua "história", por assim dizer.

Indicamos também as referências [6], [9] e [11] para aqueles que querem aplicar a Transformada de Laplace, ou até mesmo as Equações Diferenciais em outras áreas da ciência, como por exemplo a referência [6] que lida especialmente com problemas envolvendo **Circuitos Elétricos** e usa a Transformada de Laplace para resolver as equações que modelam estes problemas. A referência [11] lida com Equações Diferenciais nos mais variados temas tais como patologias, reino animal, cadeia alimentar, esportes radicais, medicina forense, construção civil, etc..

Estes, e vários outros, são temas que podem ser tratados como tema de pesquisa para uma iniciação científica, um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) de graduação, uma Monografia de Especialização, e a depender do programa ao qual o estudante esteja vinculado, um tema de Dissertação de Mestrado.

Referências

[1] ANTON, H. **Cálculo, volume** 1, 10 ed. Bookman, Porto Alegre, RS, 2014.

[2] ———— **Cálculo, volume** 2, 10 ed. Bookman, Porto Alegre, RS, 2014.

[3] BOYCE, W. DIPRIMA, R. MEADE, D. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 11 ed. LTC, Rio de Janeiro, RJ, 2020.

[4] DE MORAIS FILHO, D. C. **Um convite à Matemática**, 2 ed. SBM, Rio de Janeiro, RJ, 2013.

[5] GUIMARÃES, M. F. A. **Elementos de Astronomia para uso dos alunos da Academia Real Militar**. Rio de Janeiro: Impressão Régia, 1814. p. não numerada.

[6] KREYSZIG, E. **Matemática Superior para Engenharia**, 9 ed. LTC, 2008.

[7] PEREIRA, D. N. A **História das teorias de formação do sistema solar: progressos, continuidades e rupturas** Filosifía e Historia de la Ciencia en el cono sur, Ciudad Autónoma de Buenos Aires. p. 571-579, 24 de marzo de 2020. Disponível em: http://www.afhic.com/wp-content/uploads/2017/11/Seleccion-AFHIC-1.pdf

[8] SANTOS, R. **Tópicos de Equações Diferenciais**, 1 ed. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, BH, 2018.

[9] TONIDANDEL, D. A. V. **Entre o Real e o Complexo: Uma Visão Unificada do Conceito de Transformada**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, p. 129. 2011.

[10] ZILL, D. **Equações Diferenciais**, 3 ed. São Paulo, SP: Pearson Makron Books, 2001.

[11] ZILL, D. **A First Course in Differential Equations with Modeling applications**, 10 ed. Boston: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de Monografia

Assunto:	Entrega de Monografia
Assinado por:	Maxwell Silva
Tipo do Documento:	Requerimento
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples