INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ DE OLIVEIRA GOMES

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS: CONCEITOS E APLICAÇÕES

CAJAZEIRAS
2022

JOSÉ DE OLIVEIRA GOMES

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS: CONCEITOS E APLICAÇÕES

Monografia apresentada junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Orientador:

Prof. Me. José Doval Nunes Martins.

Cajazeiras

2022

JOSÉ DE OLIVEIRA GOMES

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS: CONCEITOS E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao programa de **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 29/09/2022

Banca Examinadora:

José Doval Nunes Martins

Prof. Me. José Doval Nunes Martins
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Patrício Luiz de Andrade

Prof. Me. Patrício Luiz de Andrade
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Geraldo H. L.

Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Suellen Conceição Ribeiro CRB-2218

G633i Gomes, José de Oliveira

Integrais impróprias: conceitos e aplicações / José de Oliveira Gomes. – Cajazeiras/PB: IFPB, 2022.

50f.:il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba-IFPB, Campus Cajazeiras. Cajazeiras, 2022.

Orientador(a): Prof. Me. José Doval Nunes Martins.

1. Cálculo. 2. Matemática. 3. Integrais impróprias. 3. Comportamento integral.

I. Gomes, José de Oliveira. II. Titulo

CDU: 517.3 G633i

Dedico este trabalho a minha esposa que sempre esteve presente na minha trajetória, e a minha família.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus, por me conceder o bem mais precioso a vida, muita sabedoria para sempre batalhar em busca dos meus sonhos, e sempre estar presente em minha vida, iluminando meus passos sempre com muito amor.

Agradeço de forma muito especial a minha esposa Vitoria Alves de Souza, por estar do meu lado em todos os momentos desde o início desta jornada acadêmica, com muito carinho e paciência, sempre dando força e coragem para seguir em frente na construção de um novo homem e profissional da educação.

Aos meus pais, José Marcos Batista Gomes e Damiana Alves de Oliveira Gomes, por todo apoio, e carinho, e por sempre estarem presentes em minha vida. Em especial a minha mãe que sempre me ensinou a lutar pelos meus sonhos com trabalho e coragem.

Agradeço aos meus colegas de curso que se tornaram irmãos feitos pela vida, Aldair, Diego, Felipe, Francisco Radineli, Luciene, Maria Beatriz, Matheus e Wellington, em que dividimos muitos momentos felizes e de muita superação ao longo do curso sempre com muitas risadas e cumplicidade.

Agradeço ao professor José Doval Nunes Martins, orientador deste trabalho de conclusão de curso, e pelo profissional que ele é, marcando minha jornada no curso por ser um professor exemplar nas suas aulas e pelo comprometimento nas suas tarefas, e ainda por ser uma pessoa humilde e companheira.

Finalizando, não posso esquecer de deixar meus votos de agradecimento a todo grupo gestor do IFPB- campus Cajazeiras por todos os ensinamentos, orientações e apoio nas dificuldades. E a todos que fazem parte de todo o corpo da instituição por proporcionar o pleno funcionamento das atividades.

“Não importa o que a vida fez de você, mas o que você faz com o que a vida fez de você.”

Jean Paul Sartre

RESUMO

As integrais impróprias, surgiram pela necessidade de expandir os conceitos da integral definida em intervalos contínuos. Embora tenha sido descoberta de forma natural pelo desenvolvimento das técnicas de integração, essa ferramenta é muito importante em várias áreas do conhecimento. Nesta perspectiva o presente trabalho buscou investigar a seguinte problemática: A integral imprópria estudada no cálculo integral é aplicada como ferramenta em outros ramos da matemática bem como em outras áreas do conhecimento? Para responder essa questão, o trabalho teve como objetivo principal compreender o desenvolvimento e o comportamento das integrais impróprias e algumas aplicações. Para o desenvolvimento do estudo, adotou-se como método uma abordagem qualitativa de caráter exploratório e natureza básica, realizou-se também uma pesquisa bibliográfica acerca do assunto. Na qual foi possível chegar à conclusão que sim, é possível encontrar aplicações das integrais impróprias em outras áreas do conhecimento bem como em matemática. Fundamentando-se em expor as definições das integrais impróprias de forma simples e prática, e apresentando cinco aplicações muito importantes nas suas respectivas áreas.

Palavras-chave: Integrais Impróprias; Aplicações; Ferramenta Matemática; Cálculo Integral.

ABSTRACT

Improper integrals arose from the need to expand the concepts of the definite integral in continuous intervals. Although it was discovered naturally by the development of integration techniques, this tool is very important in several areas of knowledge. In this perspective, the present work sought to investigate the following problem: Is the improper integral studied in integral calculus applied as a tool in other branches of mathematics as well as in other areas of knowledge? To answer this question, the main objective of this work was to understand the development and behavior of improper integrals and some applications. For the development of the study, a qualitative approach of exploratory nature and basic nature was adopted as a method, a bibliographic research was also carried out on the subject. In which it was possible to reach the conclusion that yes, it is possible to find applications of improper integrals in other areas of knowledge as well as in mathematics. Based on exposing the definitions of improper integrals in a simple and practical way, and presenting five very important applications in their respective areas.

Keywords: Improper integrals; Applications; Mathematical Tool; Calculation full

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo das integrais foi ao longo do tempo um tema relevante para os matemáticos, surgiu com a finalidade de formalização matemática dos problemas de áreas e problemas físicos. Por volta do século XVII deu-se início aos trabalhos desta ferramenta, que por sua vez gerou uma grande polêmica quanto a quem a descobriu. Os matemáticos Newton e Leibniz ocupam o lugar de autores deste ramo da matemática. Segundo Eves (2011, p. 462) o cálculo é sem sombra de dúvidas uma das áreas do conhecimento mais importantes, tendo em vista que suas contribuições vão além do imaginado na época. Com ela foi possível fazer cálculos de áreas delimitadas por curvas, volumes de sólidos de revolução entre outras funcionalidades desta importante área do conhecimento.

Poucos sabem que diferentemente da cronologia de como é apresentado nos livros didáticos, o cálculo integral surgiu primeiro e muito tempo depois surge o cálculo diferencial. O cálculo integral visa calcular certas áreas e volumes, enquanto o cálculo diferencial se preocupa em abordar a questão da reta tangente e problemas de máximos e mínimos (EVES, 2011, p. 417).

Inicialmente o cálculo trabalhava com funções consideravelmente simples, mas com os estudos de análise foi descoberto e demonstrado que toda função contínua num intervalo fechado é integrável, isto significa que funções deste tipo possuem primitivas Ávila (2003, p. 240). Com base nestas circunstâncias pode-se ressaltar que funções contínuas em intervalos abertos podem ter infinitos limites em um ou nos dois extremos do intervalo, é o caso das integrais impróprias que serão objeto de estudo deste trabalho.

As integrais impróprias, sem sombra de dúvidas, têm como objetivo ampliar os conceitos de integração definida para permitir intervalos infinitos de integração (ANTON *et al.*, 2014, p. 547). A descoberta deste tipo de integral deu-se de forma bem natural. As integrais impróprias surgem da generalização das técnicas desenvolvidas a princípio para conceitos mais básicos do cálculo de áreas, pode-se notar na fala de Amado onde ele traz que “A integral imprópria surge no ambiente matemático como uma generalização de resultados e os primeiros autores não expressavam surpresa pelos resultados obtidos” (AMADO, 2014, p. 3). Fazendo-se necessária dentro da evolução do cálculo o surgimento desta ferramenta.

Ao longo da trajetória dos conhecimentos matemáticos que temos nos dias de hoje, muitos autores deixaram as suas contribuições em vários ramos desta ciência exata. As integrais impróprias possuem peculiaridades bem interessantes, que podem ser aplicadas em diferentes contextos, buscando ampliar os conhecimentos. Dentro do vasto campo de atuação da matemática muitos conteúdos são utilizados para resolver problemas do homem em algumas de suas tarefas e descobertas, como por exemplo, a trombeta de Gabriel, que desafia os estudos sobre o infinito. Dessa forma, as integrais impróprias surgem com a necessidade de generalizar alguns conceitos, o que nos motivou a desenvolver este trabalho.

Geralmente os livros de cálculo abordam apenas o cálculo de áreas, e quando trazem algumas aplicações trazem apenas no final do capítulo por meio de alguns exercícios, assim acreditamos que com o desenvolvimento deste trabalho estaremos proporcionando ao leitor uma ampliação do seu conhecimento. Deseja-se difundir conhecimentos por meio da exposição da teoria, e como ela pode ser usada em problemas reais. Tendo em vista as suas contribuições, e a dificuldade de encontrar materiais de fácil entendimento com aplicações. Fomentados por essa perspectiva, fica clara a relevância das integrais impróprias.

Esse trabalho visa investigar a seguinte problemática: **A integral imprópria estudada no cálculo integral é aplicada como ferramenta em outros ramos da matemática bem como em outras áreas do conhecimento?** Sendo assim, para essa problemática buscamos algumas fontes de pesquisa e alguns autores que contribuíram nesta jornada das integrais imprópria, potencializando a discussão ao longo do trabalho visando evoluir nossos conceitos acerca do mesmo.

Nesta perspectiva o trabalho tem como objetivo geral, compreender o desenvolvimento e o comportamento das integrais impróprias e algumas aplicações. Visando este propósito tem-se como objetivos específicos, discutir um pouco sobre a utilidade da integral imprópria, compreender o seu comportamento e a sua convergência, buscar aplicações desta ferramenta, tanto na matemática como em outras áreas.

A metodologia busca ao longo do seu desenvolvimento estimular e facilitar o entendimento da ferramenta de trabalho, baseando-se em autores que trabalham a temática de forma clara e concisa. Para alcançar o objetivo, utilizaremos de uma pesquisa de caráter qualitativa, por se tratar de um trabalho que preza pela descrição detalhada dos fenômenos e elementos que envolvem todo o contexto (AUGUSTO *et al.*, 2013). Ela também se caracteriza como exploratória, pois busca uma familiaridade com os fenômenos envolvidos bem como o aprimoramento de ideias, possuindo um planejamento flexível, e busca estimular a compreensão por meio de exemplos (GIL, 2002).

Quanto a sua natureza pode-se classificar como básica e pura, haja vista que está dedicada unicamente ao ampliamento do conhecimento (GIL, 2002). Trata-se ainda de uma pesquisa bibliográfica, que se fundamenta primordialmente em materiais devidamente já publicados, com autores conceituados, livros, dissertação e artigos científicos (GIL, 2002).

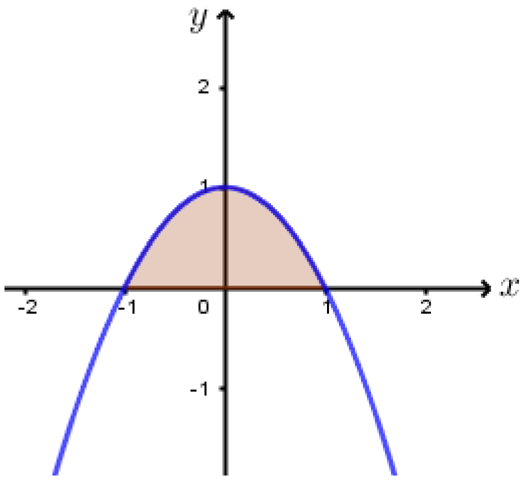
Desse modo, iniciamos o trabalho com uma familiarização das integrais impróprias, quanto às suas características e definições, na qual este capítulo abordou na primeira seção as integrais com limites de integração infinitos. Na segunda seção introduzimos as integrais com assíntotas verticais e finalizamos este capítulo estudando três testes de convergência, para as mesmas. No capítulo seguinte apresentaremos cinco importantes aplicações das integrais impróprias, em uma primeira seção trabalhamos com transformada de Laplace, na próxima com a função gama, dando sequência com a distribuição normal ou gaussiana, seguindo com a distribuição exponencial e finalizamos com um interessante problema nomeado de corneta de Gabriel.

2 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Neste capítulo estaremos desenvolvendo o trabalho baseado nos autores, (ANTON *et al.*, 2014), (JUNIOR, 2010), (STEWART, 2013), (THOMAS *et al.*, 2009) e (FLEMMING; GONÇALVES, 2007).

Através da integral definida é possível calcular a área de uma região plana delimitada por curvas, desde que as mesmas sejam contínuas e definidas em intervalos fechados e limitados. Por exemplo, a área da região S delimitada pela curva $f(x) = 1 - x^2$ e o eixo x (ver Figura 2.1) pode ser obtida através da integral definida $\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx$.

Figura 2.1 – Área da região S



Fonte: Elaborado pelo autor

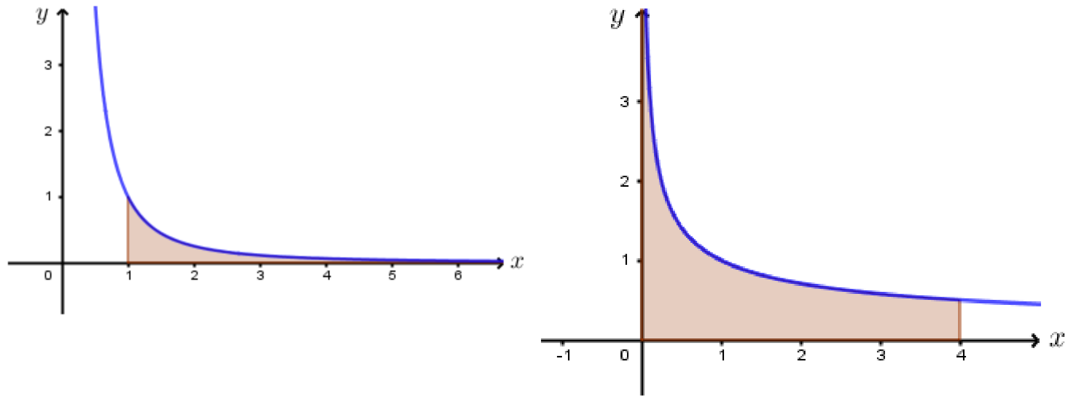
Entretanto, em diversas aplicações é necessário calcular a área de uma região que se estende indefinidamente para direita ou para a esquerda ao longo do eixo das abscisas, como também a área de uma região que se estende indefinidamente na direção do eixo das ordenadas.

Por exemplo, a integral que permite calcular a área sob a curva $y = \frac{1}{x^2}$ à direita de $x = 1$ é um caso em que o domínio da função é infinito (ver Figura 2.2a). Já a integral que determina a área abaixo da curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no intervalo de $]0, 4]$ é um caso em que a função integrando se torma infinita dentro do intervalo de integração (ver Figura 2.2b).

As integrais dos dois casos são chamadas de *integrais impróprias* e serão calculadas através de limites, como veremos mais adiante.

Figura 2.2 – Exemplos de integrais impróprias

(a) (b)



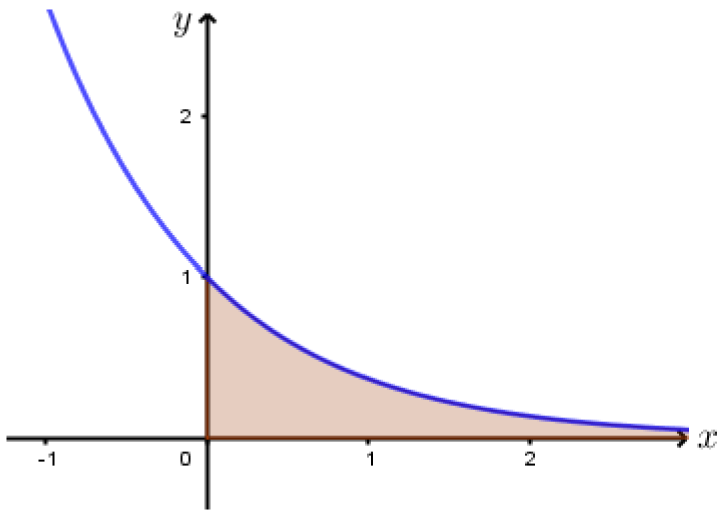
Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas subseções a seguir abordaremos as seguintes situações: integrais com limites de integração infinitos e integrais com integrandos infinitos.

2.1 INTEGRAIS COM LIMITE DE INTEGRAÇÃO INFINITOS

Suponhamos que estejamos interessados em obter o valor numérico da área sob a curva $y = e^{-x}$ no intervalo $[0, +\infty[$, cuja representação geométrica pode ser vista na Figura 2.3. Como a região delimitada pela curva se estende indefinidamente para a direita ao longo do eixo x, intuitivamente, temos a ideia de que a área da mesma seja infinita.

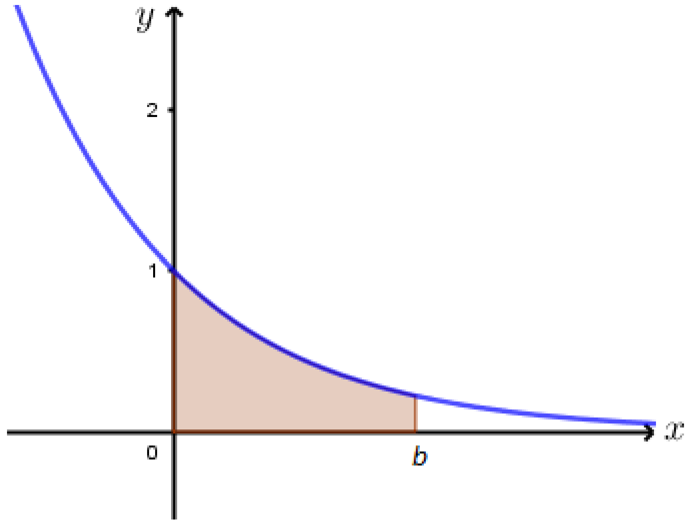
Figura 2.3 – Representação da curva $y = e^{-x}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Como ainda não sabemos calcular esta área por completo, vamos fazer uma análise mais detalhada. Inicialmente, vamos calcular a área da região sob a curva em questão no intervalo $[0,b]$, sendo b um número real qualquer tal que $b > 0$ (ver Figura 2.4).

Figura 2.4 – Representação da área no $[0,b]$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Seja $A(b)$ a área da região em questão no intervalo de $[0,b]$. Neste caso, temos que

$$A(b) = \int_0^b e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^b = 1 - \frac{1}{e^b}.$$

Observe que $A(b) < 1$ independentemente de quão grande seja o valor de b. Além disso, podemos notar que $A(b)$ tende a 1 quando b tende a $+\infty$, pois

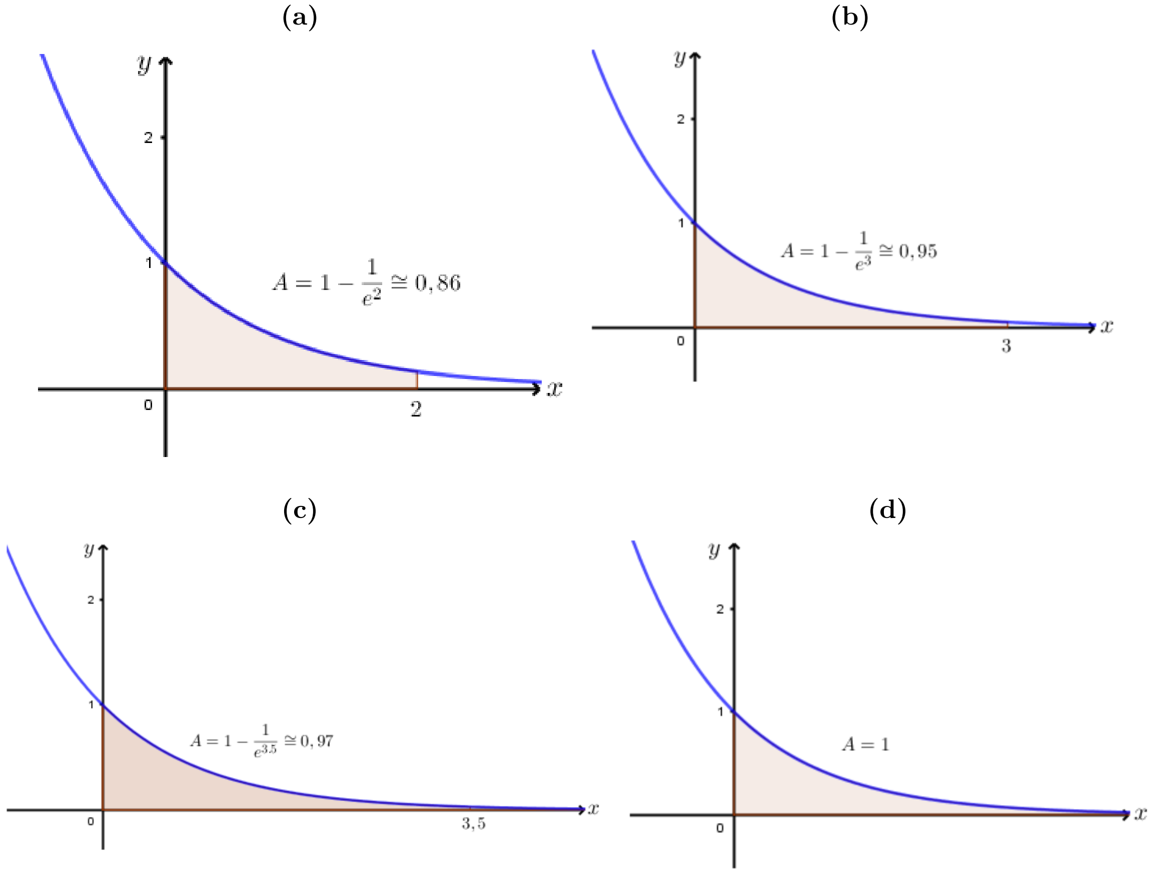
$$\lim_{b\to+\infty} A(b) = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{e^{-b}}\right) = 1.$$

Neste caso, dizemos que a área da região infinita é igual a 1 e escrevemos

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}dx = 1.$$

Na Figura 2.5, temos os valores de $A(b)$ para $b = 2$ (Figura 2.5a), $b = 3$ (Figura 2.5b), $b = 3,5$ (Figura 2.5c) e $b = +\infty$ (Figura 2.5d).

Figura 2.5 – Área sob a curva $f(x) = e^{-x}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Motivado pela situação acima, definiremos a seguir as integrais impróprias com limites de integração infinitos.

Definição 2.1.

(i) Se $f(x)$ é contínua em $[a, +\infty)$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

(ii) Se $f(x)$ é contínua em $(-\infty, b]$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

(iii) Se $f(x)$ é contínua em $(-\infty, +\infty)$, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

Onde c é um número real qualquer.

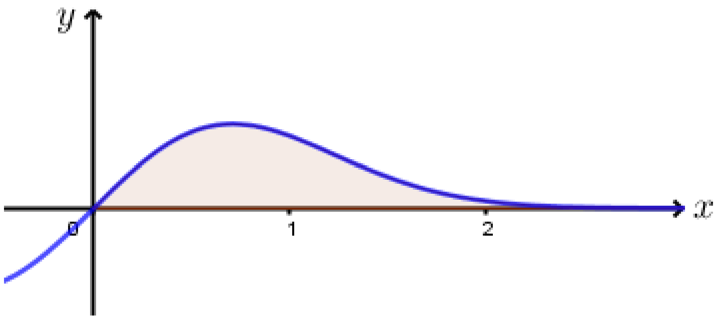
Em todos os casos se o limite existir dizemos que a integral imprópria **converge** para o valor do limite e que este representa o valor da integral. Caso o limite não exista, dizemos que a integral imprópria é **divergente**.

A seguir traremos alguns exemplos de integrais que podem ser calculados usando a definição 2.1.

Exemplo 2.1. Calcular a área sob a curva $y = xe^{-x^2}$ no primeiro quadrante.

A Figura 2.6 ilustra a área que desejamos calcular.

Figura 2.6 – Representação da curva $y = xe^{-x^2}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Aplicando o item (i) da definição 2.1, temos:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b xe^{-x^2} dx.$$

Calculando a integral indefinida $\int xe^{-x^2} dx$ pelo método da substituição, temos

$$u = -x^2 \quad \Longrightarrow \quad du = -2xdx \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2} du = xdx.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \int xe^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int e^u du \\ &= -\frac{1}{2} e^u + C \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C. \end{aligned}$$

Assim,

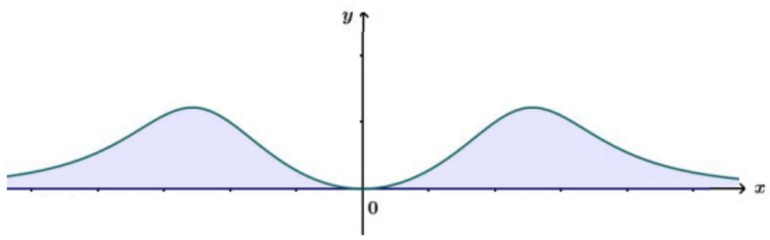
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx &= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Bigg|_0^b \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-b^2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{b\to+\infty} e^{-b^2}+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{b^2}}+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, a área da região em questão é $\frac{1}{2}$ unidades de área.

Exemplo 2.2. Calcular, se possível, a área compreendida pela curva $y = \dfrac{x^2}{9+x^6}$ em todo o plano.

A região em questão pode ser vista na Figura 2.7.

Figura 2.7 – Representação da curva $y = \dfrac{x^2}{9+x^6}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Aplicando o item (iii) da definição 2.1, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{9+x^6}dx = \int_{-\infty}^{c}\frac{x^2}{9+x^6}dx + \int_{c}^{\infty}\frac{x^2}{9+x^6}dx.$$

Tomando $c=0$, segue-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{9+x^6}dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{x^2}{9+x^6}dx + \int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{9+x^6}dx.$$

Aplicando o item (ii) e (i), respectivamente, da definição 2.1, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{9+x^6}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{x^2}{9+x^6}dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{x^2}{9+x^6}dx.$$

Calculando a integral indefinida $\int \frac{x^2}{9+x^6}\,dx$ pelo método da substituição, temos que

$$u = x^3 \quad \Longrightarrow \quad du = 3x^2 dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3}du = x^2 dx.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{9+x^6}dx &= \int \frac{x^2}{9+(x^3)^2}dx \\
&= \int \frac{1}{9+u^2} \cdot \frac{du}{3} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{9+u^2}du \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{9\left(1+\frac{u^2}{9}\right)}du \\
&= \frac{1}{27}\int \frac{1}{1+\left(\frac{u}{3}\right)^2}du.
\end{aligned}$$

Aplicando novamente o método da substituição, vem:

$$t = \frac{u}{3} \quad \Longrightarrow \quad dt = \frac{1}{3}\cdot du \quad \Longrightarrow \quad 3dt = du.$$

Assim, segue-se que:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{9+x^6}dx &= \frac{1}{27}\int \frac{1}{1+t^2}\cdot 3dt \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+t^2}dt \\
&= \frac{1}{9}\arctan(t)+C.
\end{aligned}$$

Retornado à variável u temos:

$$\int \frac{x^2}{9+x^6}dx = \frac{1}{9}\arctan(\frac{u}{3})+C.$$

Como $u = x^3$, temos que

$$\int \frac{x^2}{9+x^6}dx = \frac{1}{9}\arctan(\frac{x^3}{3})+C.$$

Assim,

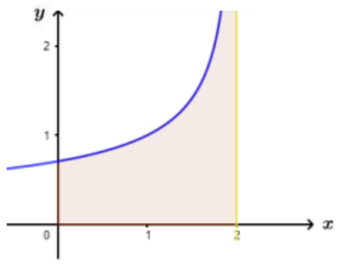
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6}dx &= \frac{1}{9}\left[\lim_{a\to -\infty} \arctan\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \arctan\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^b\right] \\
&= \frac{1}{9}\left\{\lim_{a\to -\infty}\left[\arctan(0) - \arctan\left(\frac{a^3}{3}\right)\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\arctan\left(\frac{b^3}{3}\right) - \arctan(0)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{9}\left[\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{9}.
\end{aligned}$$

Logo, a área da região em questão é $\dfrac{\pi}{9}$ unidades de área.

2.2 INTEGRAIS COM INTEGRANDOS INFINITOS

Na seção anterior definimos a integral imprópria para limites de integração envolvendo o infinito, ocasião na qual possibilitou efetuarmos o cálculo da área de algumas regiões ilimitadas. Nesta seção abordaremos um outro tipo de integral imprópria, que são aquelas em que a função integrando possui uma assíntota vertical em um limite de integração ou em algum ponto entre os limites de integração. As integrais deste tipo também possibilita efetuarmos o cálculo da área de outras regiões ilimitadas, como por exemplo, o cálculo da área da região abaixo da curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ no intervalo $[0,2)$, cuja representação gráfica pode ser vista na Figura 2.8.

Figura 2.8 – $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao tentarmos calcular a área da região citada acima, podemos notar que não é possível obtermos o seu valor aplicando a integral definida ou os tipos de integrais impróprias vistas até o momento, haja visto que a região compreendida pela curva y se estende indefinidamente em direção a descontinuidade da função no ponto $x = 2$.

Diante desta dificuldade, vamos inicialmente calcular a área da região em questão no intervalo $[0,k]$, sendo k um número real qualquer tal que $k \in (0,2)$.

Temos que,

$$\begin{aligned} A(k) &= \int_0^k \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx \\ &= -2\sqrt{2-x}\,\Big|_0^k \\ &= -2\sqrt{2-k} + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Em seguida, aplicando o limite com $k \to 2$ podemos cobrir toda a área compreendida no intervalo $[0,2)$. Assim, podemos concluir que a área A da região em questão é dada por

$$\begin{aligned} A &= \lim_{k\to 2} A(k) \\ &= \lim_{k\to 2}\Big(-2\sqrt{2-k}+2\sqrt{2}\Big) \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Agora, motivados por esta situação, vamos definir as integrais impróprias deste tipo.

Definição 2.2. (i) Se f é contínua em $[a,b[$ e $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$, então $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{s\to b^-}\int\limits_a^s f(x)\,dx$, se este limite existir.

(ii) Se f é contínua em $]a,b]$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, então $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{r\to a^+}\int\limits_r^b f(x)\,dx$, se este limite existir.

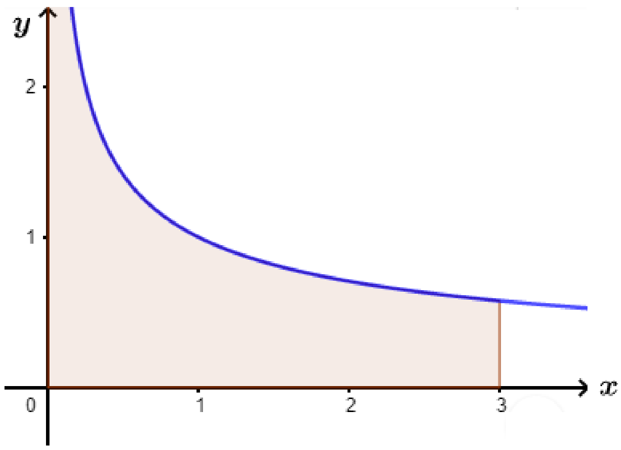
(iii) Se f é contínua em $[a,b[$, exceto em $x = c \in\,]a,b[$, então
$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{x\to c^-}\int\limits_a^s f(x)\,dx + \lim\limits_{x\to c^+}\int\limits_r^b f(x)\,dx$,
se ambos os limites existirem.

Em todos os casos se o limite existir dizemos que a integral imprópria **converge** para o valor do limite e que este representa o valor da integral. Caso o limite não exista, dizemos que a integral imprópria é **divergente**.

Exemplo 2.3. É possível encontrarmos um número finito que representa a área da região limitada pela curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ no intervalo de $]0,3]$?

A região em questão pode ser vista na Figura 2.9

Figura 2.9 – Gráfico de $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para responder esta pergunta, basta verificarmos se a integral imprópria $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge ou diverge. Observe que a função integrando possui uma descontinuidade no ponto $x = 0$, então aplicando o item (i) da definição 2.2, temos

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{r \to 0^+} \int_r^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

Resolvendo a integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. Segue-se que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx &= \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx \\ &= \int x^{-\frac{1}{2}}dx \\ &= 2\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Assim,

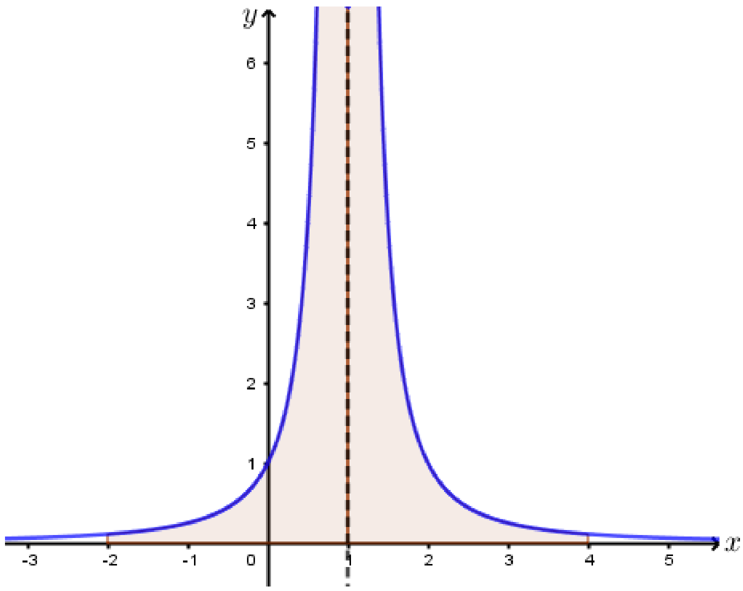
$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx &= \lim_{r \to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_r^3 \\ &= \lim_{r \to 0^+} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{r}) \\ &= 2\sqrt{3} - 0 \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Logo, a área correspondente é $2\sqrt{3}$ unidades de área.

Exemplo 2.4. É possível calcular a área limitada pela curva $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ no intervalo de $[-2, 4]$?

A região em questão pode ser vista na Figura 2.10. Como podemos observar na figura 2.10, temos uma assíntota vertical no ponto $x = 1$.

Figura 2.10 – Gráfico de $y = \frac{1}{(x-1)^2}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao observarmos a Figura 2.10 podemos notar que a curva possui uma assíntota vertical em $x = 1$. Então, aplicando o item (iii) da definição 2.2, temos que

$$\int_{-2}^{4} \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_{-2}^{c} \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int_{c}^{4} \frac{1}{(x-1)^2}dx.$$

Tomando seu ponto de descontinuidade $c = 1$ segue-se que,

$$\int_{-2}^{4} \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int_{-2}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int_{1}^{4} \frac{1}{(x-1)^2}dx.$$

Aplicando os itens (ii) e (i) da definição 2.2, respectivamente, temos que

$$\int_{-2}^{4} \frac{1}{(x-1)^2}dx = \lim_{s\to 1^-} \int_{-2}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}dx + \lim_{r\to 1^+} \int_{1}^{4} \frac{1}{(x-1)^2}dx.$$

Calculando a integral indefinida $\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$ pelo método da substituição, temos

$$u = x - 1 \implies du = dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-1)^2}dx &= \int \frac{1}{u^2}dx \\
&= \int_{-2}^{k} u^{-2}dx \\
&= -\frac{1}{u} + C \\
&= -\frac{1}{x-1} + C \\
&= \frac{1}{1-x} + C.
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{4} \frac{1}{(x-1)^2}dx &= \lim_{s\to 1^-} \frac{1}{1-x}\bigg|_{-2}^{s} + \lim_{r\to 1^+} \frac{1}{1-x}\bigg|_{r}^{4} \\
&= \lim_{s\to 1^-} \left(\frac{1}{1-s} - \frac{1}{3}\right) - \lim_{r\to 1^+} \left(\frac{1}{1-r} + \frac{1}{3}\right) \\
&= \left(\infty - \frac{1}{3}\right) - \left(-\infty - \frac{1}{3}\right) \\
&= \infty + \infty \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Como o limite é infinito, a integral $\int_{-2}^{4} \frac{1}{(x-1)^2}dx$ é divergente e, portanto, não podemos atribuir um valor numérico para a área da região em questão.

2.3 TESTE PARA CONVERGÊNCIA E DIVERGÊNCIA

Nesta seção iremos apresentar três testes para convergência e divergência de integrais impróprias. Tendo em vista que em alguns casos é impossível encontrar um valor exato para algumas integrais, ainda sim é importante saber se ela converge para um número ou se ela diverge, nesta perspectiva estudaremos um pouco a respeito dos mesmos.

Teorema 2.1.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p} \cdot dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p - 1} & se \;\; p > 1 \\ diverge \;\; se \;\; p \leq 1 \end{cases}$$

Demonstração 2.1. Para demonstrarmos este resultado precisamos analisar dois casos $p = 1$ e $p \neq 1$.
Aplicando a definição 2.1 item (i) em $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$, temos que

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^p} \cdot dx$$

1° caso: $p = 1$

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p} \cdot dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x} \cdot dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} ln\ x\Big|_{1}^{b} \\
&= \lim_{b\to+\infty} \Big(ln\ b \ - \ ln\ 1\Big) \\
&= \lim_{b\to+\infty} ln\ b \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Logo, para $p = 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \cdot dx$ é divergente.

2° caso: $p \neq 1$

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \cdot dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} \cdot dx \\
&= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b x^{-p} \cdot dx \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{x^{(1-p)}}{1-p} \right|_1^b \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{b^{(1-p)}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{b^{(1-p)}}{1-p} + \frac{1}{p-1} \right]
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{b^{(1-p)}}{1-p} + \frac{1}{p-1} \right].$$

Se $p < 1$, então $(1 - p) > 0$ e assim a integral diverge pois,

$$\lim_{b \to +\infty} \left[\frac{b^{(1-p)}}{1-p} + \frac{1}{p-1} \right] = +\infty.$$

Se $p > 1$, então $(1 - p) < 0$, assim $(1 - p)$ será um número negativo que pode ser descrito pela expressão $-(p - 1)$, segue-se que,

$$\begin{aligned}
\lim_{b \to +\infty} \left[\frac{b^{(1-p)}}{1-p} + \frac{1}{p-1} \right] &= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{b^{-(p-1)}}{-(p-1)} + \frac{1}{(p-1)} \right] \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{\frac{1}{b^{(p-1)}}}{-(p-1)} + \frac{1}{p-1} \right] \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{p-1} - \left(\frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{b^{(p-1)}} \right) \right] \\
&= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-1} \cdot \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{b^{(p-1)}} \\
&= \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-1} \cdot 0 \\
&= \frac{1}{p-1}.
\end{aligned}$$

Logo, para $p > 1$ a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ é convergente e seu valor é dado pela expressão $\frac{1}{p-1}$. ∎

Podemos notar no exemplo 2.5 que fica claro o que foi demonstrado em 2.1.

Exemplo 2.5. É possível encontrar a área delimitada pela curva $y = \dfrac{1}{x^4}$ com seu domínio no $[1, +\infty)$?

Aplicando a definição 2.1, temos

$$\begin{aligned} A(b) &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx \\ &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^4} dx \\ &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b x^{-4} dx \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{x^{-3}}{-3} \right|_1^b \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left. -\frac{1}{3x^3} \right|_1^b \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Calculando diretamente pela definição 2.1 obtivemos $\frac{1}{3}$ de unidades de área. Este resultado também poderia ser obtido aplicando diretamente o Teorema 2.1, já que para $p = 4$, temos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{4 - 1} = \frac{1}{3}.$$

Assim, fica evidente o quão útil este teorema é para as integrais impróprias, facilitando o processo de resolução de vários problemas como o apresentado anteriormente.

A seguir apresentaremos o teste da comparação, o nome desse teste é devido ao fato dele ser baseado na comparação de duas funções.

Teorema 2.2. Sejam f e g funções contínuas em $[a, +\infty)$, com $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para qualquer $x \geq a$.

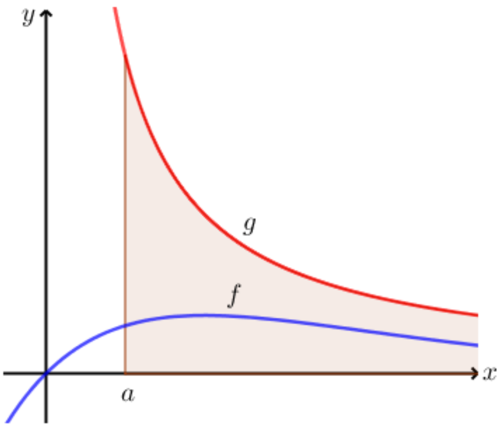
(i) Se $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\, dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ é convergente.

(ii) Se $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\, dx$ é divergente.

A interpretação geométrica do teorema 2.2 é bastante clara (ver Figura 2.11). Por exemplo, se a região delimitada pela curva $y = g(x)$ for finita, a região sob a curva

$y = f(x)$ obrigatoriamente também será, em outras palavras, se $g(x)$ converge, $f(x)$ também converge. Por outro lado, se a região compreendida pela $f(x)$ for infinita, consequentemente, a região compreendida pela $g(x)$ também será, ou seja, ambas serão divergentes.

Figura 2.11 – Teste de comparação



Fonte: Elaborado pelo autor

A seguir, faremos apenas a demonstração do item (i) do Teste da comparação.

Demonstração 2.2. A condição $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a, +\infty)$, garante que

$$0 \leq F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \leq G(t) = \int_a^t g(x)\,dx.$$

Portanto, $F(t)$ é uma função positiva e não decrescente. Além disso, como $\lim\limits_{t \to +\infty} G(t) = \int_a^{+\infty} g(x)\,dx = k$, para algum $k \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. ■

Agora veremos um exemplo de como podemos utilizar o teste da comparação.

Exemplo 2.6. Vamos verificar se a integral imprópria $\int_2^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge ou diverge.

A função $f(x) = e^{-x^2}$ é contínua e, portanto, admite primitivas. No entanto, não podemos calcular a integral diretamente porque a primitiva de $f(x) = e^{-x^2}$ não é uma função elementar[1]. Sendo assim, a análise da convergência da integral imprópria em questão não é viável pelo seu cálculo direto.

[1] Uma função é denominada de elementar quando pode ser obtida pela combinação através das quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) e composição das funções elementares básicas (Funções polinomiais, Funções racionais, Função exponencial, Função logarítmica, Funções trigonométricas, Funções trigonométricas inversas, Funções Hiperbólicas, Funções hiperbólicas inversas).

Para aplicarmos o teste da comparação, devemos eleger uma função que sirva como referência. Neste caso, podemos tomar a função $g(x) = e^{-x}$, cuja primitiva pode ser obtida pelo método da substituição simples.

Se $x \geq 1$, temos que $x^2 \geq x$ e, portanto, $-x^2 \leq -x$ e $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Então, $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \geq 1$.

Observe que,

$$
\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{t \to +\infty} \int_1^{+\infty} e^{-x} dx \\
&= \lim_{t \to +\infty} -e^{-x}\Big|_1^t \\
&= \lim_{t \to +\infty} \left(-e^{-t} + e^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{e}.
\end{aligned}
$$

Assim, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ é convergente. Como $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ é um número real, concluímos que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ é convergente.

Podemos notar o quanto estes teoremas são importantes para descobrir se a integral imprópria converge ou diverge, tendo em vista que em alguns casos é muito complicado resolver a integral pelos meios usuais. A seguir apresentamos outro teorema muito importante nesta mesma perspectiva do anterior, que é o teste de comparação no limite.

Teorema 2.3. Sejam as funções f *e* g contínuas em $[a, +\infty)$ com $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ e $x \geq a$, tais que,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < +\infty$$

então,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx \ \ e \ \ \int_a^{+\infty} g(x)\ dx$$

são ambas convergentes ou ambas divergentes.

Demonstração 2.3. Pela hipótese, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L\ > 0$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$, quando $x \geq N$, daí para $x \geq N$ temos,

$$L - \varepsilon \ \leq \ \frac{f(x)}{g(x)} \ \leq \ L + \varepsilon$$

ou ainda

$$(L-\varepsilon)\cdot g(x) \;\leq\; f(x) \;\leq\; (L+\varepsilon)\cdot g(x)$$

Assim, aplicando a integral temos que,

$$(L-\varepsilon)\cdot \int_N^b g(x)\;dx \;\leq\; \int_N^b f(x)\;dx \;\leq\; (L+\varepsilon)\cdot \int_N^b g(x)\;dx$$

Note que, pela nossa hipótese inicial não há perda de generalização em

$$0 \;<\; (L-\varepsilon)\cdot \int_N^b g(x)\;dx \;\leq\; \int_N^b f(x)\;dx \;\leq\; (L+\varepsilon)\cdot \int_N^b g(x)\;dx \tag{1}$$

Então, Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\;dx$ converge, então pela inequação da direita de (1)

$$\lim_{b\to+\infty} \int_N^b f(x)\;dx, \text{ existe, então } \int_a^{+\infty} f(x)\;dx \text{ converge.}$$

Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\;dx$ diverge, então pela inequação da direita de(1)

$$\lim_{b\to+\infty} \int_N^b f(x)\;dx \;=\; +\infty, \text{ então } \int_a^{+\infty} f(x)\;dx \text{ diverge.} \qquad \blacksquare.$$

O teste da comparação no limite é particularmente útil para os casos nos quais os integrandos são quocientes. No exemplo a seguir usaremos o teste para verificarmos a convergência de uma determinada integral imprópria.

Exemplo 2.7. Verificar a convergência da integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{2x^4+x^3-1}\;dx$.

Neste caso, tomaremos como referência a função $g(x) = \dfrac{1}{x^3} \;\geq\; 0$.

As funções $f(x) = \dfrac{x}{2x^4+x^3-1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^3} \;\geq\; 0$ são positivas e contínuas em $[1,+\infty)$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x}{2x^4+x^3-1}}{\dfrac{1}{x^3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{2x^4+x^3-1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^4\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}} \\
&= \frac{1}{2} \;>\; 0.
\end{aligned}$$

Como já sabemos que a integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ é convergente, concluímos, pelo teorema 2.3, que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{2x^4+x^3-1}\,dx$ também é convergente .

E assim finalizamos este capítulo com esses importantes testes de convergência e divergência das integrais impróprias. No próximo capítulo apresentaremos algumas das aplicações desta importante ferramenta para o cálculo integral.

3 APLICAÇÕES DAS INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Após todo esse embasamento teórico, será apresentado algumas aplicações das integrais impróprias. Tendo em vista, que esse tipo de integral tem muita atuação na resolução de uma vasta gama de problemas reais. Inicialmente apresentaremos as transformadas de Laplace, que por sua vez são definidas através da integral imprópria, como veremos mais adiante.

Na seção seguinte apresentaremos a função gama, muito conhecida como uma generalização da função fatorial, e que também é utilizada para uma distribuição de muita importância na estatística. Dando continuidade, abordamos um pouco sobre a distribuição normal, conhecida também como curva de gauss, que tem seu foco no estudo de casos que seguem um tipo de padrão nos seus acontecimentos. Dando sequência apresentaremos a distribuição exponencial, com uma atuação em levantamentos e estimativas de população, entre outros aspectos. E para finalizar apresentamos a famosa corneta de Gabriel.

3.1 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Nesta seção faremos uma breve introdução sobre a importância das Transformadas de Laplace e apresentaremos de que forma as integrais impróprias contribuem com a teoria das mesmas. Esta seção foi desenvolvida baseada nas referências (LUSTOSA, 2017) e (ZILL; CULLEN, 2001).

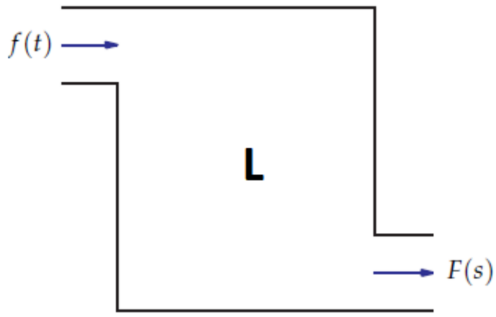
Uma transformada é uma fórmula que converte ou "transforma" uma função em outra é o que diz (ANTON *et al.*, 2014). O processo de derivação e integração, por exemplo, transformam a função $f(x) = 2x^2 + 2$ nas funções $f'(x) = 4x$ e $F(x) = \dfrac{2x^3}{3} + 2x + C$, respectivamente. Em símbolos, temos

$$\frac{d}{dx}\left(2x^2+2\right) = 4x \quad \text{e} \quad \int \left(2x^2+2\right) dx = \frac{2x^3}{3} + 2x + C.$$

As transformadas em geral são usadas em aplicações para converter um problema difícil em um mais fácil, cuja solução pode ser usada para resolver o problema original normalmente difícil. No caso das Transformadas de Laplace, ela transforma uma função $f(t)$ em uma função $F(s)$.

A transformada de Laplace pode ser entendida como a "caixa" da Figura 3.1. Do lado esquerdo entram as funções originais e do lado direito saem as funções transformadas pela transformada de Laplace.

Figura 3.1 – A Transformada de Laplace como uma "caixa"



Fonte: Elaborado pelo autor

Em alguns problemas matematicos e da engenharia é relativamente difícil de se trabalhar na variável t, mas torna-se mais fácil de se trabalhar na variável s, daí a importância das Transformadas de Laplace na resolução de problemas dessa natureza.

A maior parte dos problemas que envolvem o uso da Transformada de Laplace tem como variação principal o tempo t. A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ desempenha um papel importante no estudo das equações diferenciais, mais especificamente na resolução de problemas de valor inicial (PVI) e problemas de valor de contorno (PVC) relacionados aos temas: um corpo em queda livre, a lei de resfriamento de newton, circuitos em série, sistemas de controle, deflexão de vigas, entre outros.

A Transformada de Laplace pode ser usada, por exemplo, para resolver problemas de valor inicial (PVI)da forma:

$$a \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + b \cdot \frac{dy}{dt} + c \cdot y = f(t), y'(0) = y_0, y'(0) = y'_0,$$

com a, b, c constantes reais.

Para isso, a equação diferencial é inicialmente transformada pela transformada de Laplace numa equacão algébrica em s. Depois resolve-se a equação algébrica em s e finalmente transforma-se de volta, aplicando a transformada inversa de laplace, a solução da equação algébrica na solucão da equação diferencial inicial.

A seguir apresentaremos a definição da Transformada de Laplace, uma tabela com a transformada de Laplace das principais funções e aplicaremos a definição, para verificar alguns itens da tabela citada.

Definição 3.1. Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função. A Transformada de Laplace de f , denotada por $L\{f(t)\}$, é a função $F(s)$ definida por

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{2}$$

para todo $s > 0$ tal que a integral convirja.

Quando a integral imprópria (2) convergir, obteremos uma nova função em s, com $s \in \mathbb{R}$ ou $s \in \mathbb{C}$, dependendo da situação que envolve o problema estudado. A maioria dos autores utilizam letras minusculas para denotar a função que será transformada, e letras maiúsculas para a função transformada, como por exemplo $L\{f(t)\} = F(s)$.

Na tabela a seguir temos a transformada de Laplace de algumas funções básicas:

1. $L\{1\} = \frac{1}{s}$, $s > 0$;
2. $L\{t\} = \frac{1}{s^2}$, $s > 0$;
3. $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$;
4. $L\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}$, $s > a$;
5. $L\{\sin(kt)\} = \frac{k}{s^2+k^2}$, $s > k$;
6. $L\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2+k^2}$, $s > k$;
7. $L\{\sinh(kt)\} = \frac{k}{s^2-k^2}$, $s > k$;
8. $L\{\cosh(kt)\} = \frac{s}{s^2-k^2}$, $s > k$.

Na sequência aplicaremos a definição 3.1 para verificarmos os itens (4) e (5).

Seja $f(t) = e^{at}$, então segue da definição 3.1 que

$$\begin{aligned} L\left\{e^{at}\right\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot e^{at}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}\, dt. \end{aligned}$$

Calculando a integral imprópria, temos que

$$
\begin{aligned}
L\left\{e^{at}\right\} &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}\,dt.\\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right)\Bigg|_0^b\\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{(s-a)}\cdot e^{-(s-a)b} - \left(-\frac{1}{s-a}\cdot e^0\right)\right)\\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{(s-a)}\cdot e^{-(s-a)b} + \frac{1}{s-a}\cdot 1\right)\\
&= -\frac{1}{(s-a)}\cdot \lim_{b\to+\infty} e^{-(s-a)b} + \frac{1}{s-a}\cdot \lim_{b\to+\infty} 1\\
&= -\frac{1}{(s-a)}\cdot 0 + \frac{1}{s-a}\cdot 1\\
L\left\{e^{at}\right\} &= \frac{1}{s-a},\ s>a.
\end{aligned}
$$

Portanto, a transformada de Laplace da função $f(t) = e^{at}$ é a função $F(s) = \frac{1}{s-a},\ s > a.$

Seja $f(t) = \sin(kt)$, então segue da definição 3.1 que

$$L\{\sin(kt)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(kt)\,dt.$$

Calculando a integral imprópria acima, temos que

$$L\left\{e^{at}\right\} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(kt)\,dt.$$

Calculando a integral indefinida $\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(kt)\,dt$, obtemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot\sin(kt)\,dt = -\frac{k}{s^2+k^2}e^{-st}\cos(kt) - \frac{1}{s^2+k^2}se^{-st}\sin(kt) + C.$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned}
L\{\sin(kt)\} &= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{k}{s^2+k^2}e^{-st}\cos(kt)-\frac{1}{s^2+k^2}se^{-st}\sin(kt)\right)\Bigg|_0^b \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{k}{s^2+k^2}e^{-sb}\cos(kb)-\frac{1}{s^2+k^2}e^{-sb}\sin(kb)+\frac{k}{s^2+k^2}\right) \\
&= -\frac{k}{s^2+k^2}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-sb}\cos(kb)\right)-\frac{1}{s^2+k^2}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-sb}\sin(kb)\right)+\frac{k}{s^2+k^2}\cdot\lim_{b\to+\infty}1 \\
&= -\frac{k}{s^2+k^2}\cdot 0-\frac{1}{s^2+k^2}\cdot 0+\frac{k}{s^2+k^2}\cdot 1 \\
&= \frac{k}{s^2+k^2},\ s>k.
\end{aligned}$$

Portanto, a transformada de Laplace da função $f(t)=\sin(kt)$ é a função $F(s)=\dfrac{1}{s-a},\ s>a.$

Como a nossa intenção é apenas de trazer algumas utilidades das integrais impróprias, não iremos nos aprofundar no estudo das Transformadas de Laplace. Caso o leitor tenha interesse, pode consultar as referências (ZILL; CULLEN, 2001).

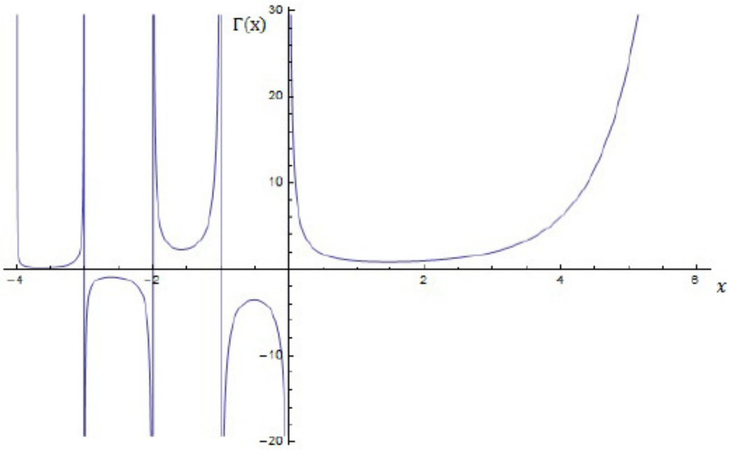
3.2 FUNÇÃO GAMA

No estudo das probabilidades é bem comum trabalhar com a função fatorial de um número n, com $n\in\mathbb{N}$, em problemas de arranjos, combinações e permutações. Esta função por sua vez é limitada apenas a um conjunto dos números naturais, fazendo-se assim necessário uma nova função que pudesse ampliar o campo de atuação da função fatorial.

Para o desenvolvimento desta seção estaremos levando em conta a leitura das obras (MEYER, 2017), (OTTONI, 2018) e (DEVORE, 2006).

A função Gama possui várias atuações não só no campo das probabilidades, mais também em várias áreas de domínios matemáticos e na física no estudo da vibração de uma membrana circular. Ela surge com o intuito de generalizar os resultados do fatorial para outros conjuntos além do conjunto dos números naturais. Contudo, ela não pode ser definida para o zero, e nem para os inteiros negativos, é o que podemos observar na Figura 3.2 que representa o gráfico da função gama.

Figura 3.2 – Função Gama



Fonte: (OTTONI, 2018)

A sua definição mais comum é vista pela integral definida de 0 á $+\infty$, como podemos ver na definição 3.2.

Definição 3.2. A Função Gama é definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \tag{3}$$

com $x > 0$.

Podemos perceber claramente pela definição 3.2 que a função gama pode ser calculada por meio de uma integral imprópria, que é o nosso principal objeto de trabalho.

A seguir apresentaremos as propriedades mais importantes da função gama.

Propriedade 3.1. Para qualquer $n > 0$, $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$.

Demonstração 3.1. Aplicando a definição 3.2, temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \int_0^{+\infty} t^{(n+1)-1} \cdot e^{-t}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt \\
&= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b t^n e^{-t}\,dt.
\end{aligned}$$

Calculando a integral indefinida $\int t^n e^{-t}\,dt$, pelo método de integração por partes, obtemos

$$\int t^n e^{-t}\,dt = -t^n e^{-t} + n\int t^{n-1}e^{-t}\,dt.$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \lim_{b\to+\infty}\left(-t^n e^{-t}\Big|_0^b + n\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\,dt\right)\\
&= \lim_{b\to+\infty}\left(-t^b e^{-b}\right) + n\lim_{b\to+\infty}\int_0^b t^{n-1}e^{-t}\,dt\\
&= 0 + n\Gamma(n)\\
&= n\Gamma(n).
\end{aligned}$$

Propriedade 3.2. Para qualquer inteiro positivo n, $\Gamma(n+1) = n!$.

Demonstração 3.2. Inicialmente calculando $\Gamma(1)$, segue-se que

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-t}dt\\
&= \lim_{b\to+\infty} -e^{-t}\Big|_0^b\\
&= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{e^x}\Big|_0^b\\
&= \lim_{b\to+\infty} 0+1\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por recorrência temos,

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\cdot\Gamma(1) = 1 = 1!\\
\Gamma(3) &= 2\cdot\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!\\
\Gamma(4) &= 3\cdot\Gamma(3) = 3\cdot 2\cdot 1 = 3!\\
\Gamma(5) &= 4\cdot\Gamma(4) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4!\\
\Gamma(n+1) &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!
\end{aligned}$$

■

Propriedade 3.3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Aplicando a definição 3.2, temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt.
\end{aligned}$$

Aplicando o método da substituição, temos

$$u = \sqrt{t} \quad \Rightarrow \quad u^2 = t \quad \Rightarrow \quad 2du = dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} \cdot 2 \cdot u \cdot du \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \qquad (4)
\end{aligned}$$

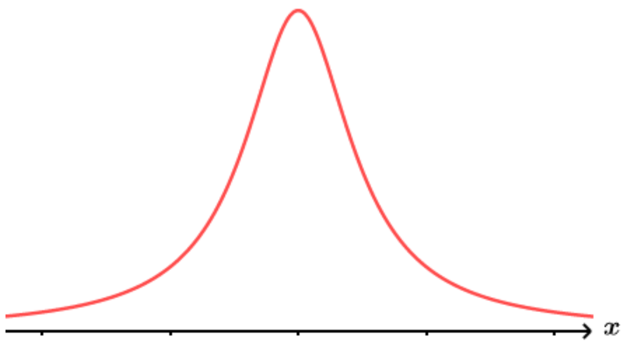
Existem diferentes maneiras de se provar a propriedade 3.3. Porém é necessário um cálculo mais avançado para tal, como o foco do nosso trabalho não é isso, iremos omitir a demonstração da integral (4), mas é possível encontrá-la no trabalho de Junior (2010) e Amado (2014), em livros de cálculo mais avançado, na qual essa integral é conhecida como integral de Gauss e o seu valor é $\sqrt{\pi}$. ■

3.3 DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Com o estudo da Probabilidade e Estatística é possível modelar e prever certos eventos em diferentes áreas de atuação. Podemos pensar, por exemplo, no caso em que uma pessoa lança uma moeda honesta para cima e observa a face. Intuitivamente, sabemos que a probabilidade de sair cara é igual a de sair coroa, mas se continuarmos este processo de lançar a moeda para cima, como ficará esta probabilidade? ela vai aumentar ou permanecer? questionamentos como este, são bem frequentes nesta área do conhecimento. Para o desenvolvimento desta seção estaremos tomando como referências os autores (BITTENCOURT; VIALI, 2006), (DEVORE, 2006) e (MEYER, 2017).

A distribuição normal ou curva de Gauss, recebe este nome devido ao formato do seu gráfico similar a um sino Bittencourt e Viali (2006, p. 4), como podemos observar na Figura 3.3. As funções que apresentam esse tipo de comportamento são chamadas de *funções Gaussianas*.

Figura 3.3 – Curva de gauss



Fonte: Elaborado pelo autor

A sua maior utilidade está presente nos estudos de Estatística e Probabilidade. A sua importância situa-se na investigação de variáveis aleatórias contínuas, com aplicações práticas em fenômenos que seguem comportamentos "considerados normais"(BITTENCOURT; VIALI, 2006). Podemos perceber isso na produção de um certo produto em uma empresa ao longo de uma semana nas mesmas condições, naturalmente espera-se que a produção seja basicamente igual.

É possível notar que o domínio desta função se estende em todo o plano, haja visto que podemos analisar diversas situações. A seguir traremos a definição da função distribuição normal.

Definição 3.3. Seja x uma variável aleatória contínua. A sua distribuição normal é definida pela função,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < X < +\infty,$$

onde (μ) é a média de distribuição e (σ) é o desvio-padrão da distribuição.

Como estamos trabalhando com Probabilidade e Estatística, podemos obter através da área abaixo da curva da $f(x)$. Para que f seja uma função densidade de probabilidade temos que, a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1$.

De fato:

Fazendo $t = \left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$, temos $dt = \dfrac{1}{\sigma}\ dx$. Assim, podemos escrever a integral como sendo,

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Elevando I^2, temos,

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dsdt. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares temos que,

$$s = r\cos(\alpha), \qquad t = r\sin(\alpha)$$

com isso $ds\ dt = r\ dr\ d\alpha$, e como s e t estão variando entre $-\infty$ e $+\infty$, r varia entre 0 e $+\infty$, enquanto α varia entre 0 e 2π.
Portanto,

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi}\int_0^{+\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}\ dr\ d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{+\infty} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} d\alpha \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo $I = 1$. ■.

A partir da definição acima, podemos observar que a função distribuição normal é definida por uma integral imprópria. Como o nosso objetivo não é ir a fundo nas peculiaridades desta distribuição, nos limitaremos apenas nestes conceitos apresentados anteriormente. Vamos agora ver um exemplo que envolve esse embasamento teórico.

Exemplo 3.1. Considerando as mesmas condições para as alturas, ou seja, $\mu = 178$, $\sigma = 1$, queremos calcular a probabilidade $P(175 < X < 180)$.

Como $\mu = 178$ e $\sigma = 1$, pela definição 3.3, temos que,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{175}^{180} e^{-\frac{(x-178)^2}{2}}\ dx \\ &= 0.976. \end{aligned}$$

Para facilitar os cálculos em probabilidade, é normal utilizarmos calculadoras científicas ou softwares, foi o que fizemos no exemplo anterior para facilitar o processo. Porém, existem métodos e propriedades da distribuição normal que possibilitam um cálculo mais prático, mas não estaremos adentrando nestes conceitos, haja vista que o foco do trabalho não é esse. A seguir apresentamos a nossa última seção referente a distribuição exponencial, buscando trazer a aplicação das integrais impróprias nas mesmas.

3.4 DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

A função exponencial $f(x) = e^x$, tem muitas utilidades no desenvolvimento de muitas áreas de conhecimento, tendo em vista, as suas peculiaridades. Ela sempre é vista como a função inversa da função logarítmica, onde $\log_a b = x$ e $a^x = b$, e que a função logarítmica é a inversa da exponencial. As suas aplicações estão relacionadas a casos de estimativas de crescimento populacional, juros compostos, na psicologia, em estudos como por exemplo da curva de esquecimento de um indivíduo, e a curva de aprendizagem entre outras tantas aplicações.

Dentro do campo estatístico, a função exponencial apresenta-se por meio de uma importante distribuição, conhecida como distribuição exponencial. Esta distribuição tem um importante papel na descrição de muitos fenômenos que envolvem o tempo em eventos sucessíveis. A escrita desta seção é baseada nos autores (MEYER, 2017), (DEVORE, 2006).

Definição 3.4. Diz-se que X tem uma distribuição exponencial com parâmetro $\alpha > 0$, se a função de distribuição de probabilidade for dada por,

$$f(x) \ = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0 \ , \quad x < 0. \end{cases}$$

Na Estatística o valor da soma de todas as probabilidades de um evento acontecer é igual a 1, é o que podemos ver na integral $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$. É possível notar que, na distribuição exponencial temos a presença da nossa ferramenta de trabalho, as integrais impróprias. Assim, podemos facilmente comprovar a afirmativa anterior sobre a $f(x)$.

Aplicando a definição 2.1, vem que,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \alpha e^{-\alpha x} \, dx \\
&= \alpha \cdot \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-\alpha x} \, dx \\
&= \alpha \cdot \lim_{b \to +\infty} -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\bigg|_0^b \\
&= \alpha \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{\alpha \cdot e^{\alpha b}} + \frac{1}{\alpha}\right) \\
&= \alpha \cdot \left(0 + \frac{1}{\alpha}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$.

Como o nosso foco não é ir a fundo na distribuição exponencial, não iremos nos aprofundar muito nas suas peculiaridades. Uma importante propriedade presente na distribuição exponencial é dada a seguir.

Propriedade 3.4.

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Demonstração 3.3. Fazendo o tempo t variar até um certo ponto x, segue-se pela definição 2.2 que

$$\begin{aligned} \int_0^x \alpha e^{-\alpha x}\, dx &= \lim_{t \to x^-} \int_0^t \alpha e^{-\alpha x}\, dx \\ &= \alpha \cdot \lim_{t \to x^-} \int_0^t e^{-\alpha x}\, dx \\ &= \alpha \cdot \lim_{t \to x^-} -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\Bigg|_0^t \\ &= \alpha \cdot \lim_{t \to x^-} \left(-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= \alpha \cdot \left(-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= 1 - e^{-\alpha x}. \end{aligned}$$

■.

A seguir vejamos um exemplo que possa expor o que abordamos nesta seção.

Exemplo 3.2. (TRT 7°R) A duração de uma lâmpada é uma variável aleatória T, com função de densidade de probabilidade (exponencial) dada por,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1000} e^{-\frac{t}{1000}}, & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Qual a probabilidade de uma lâmpada durar menos do que 1.200 horas?

Para solucionar este problema poderíamos aplicar a definição 3.4, mas é mais prático aplicarmos a propriedade 3.4. Neste caso, identificamos $\alpha = \frac{1}{1000}$, então

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= 1 - e^{-\alpha t} \\ P(T \leq 1200) &= 1 - e^{-\frac{1}{1000} \cdot 1200} \\ &= 1 - e^{-1,2} \\ &\cong 0,7. \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de uma lâmpada durar menos do que 1.200 horas, neste caso, é de aproximadamente 70%.

Poderíamos ter resolvido este problema pela integral, mas como a propriedade 3.4 é mais prática utilizamos ela. Assim podemos notar o quanto as integrais impróprias estão presentes em diferentes situações e com aplicações em problemas reais. Para a próxima seção estaremos apresentando uma curiosidade muito interessante que envolve as integrais impróprias.

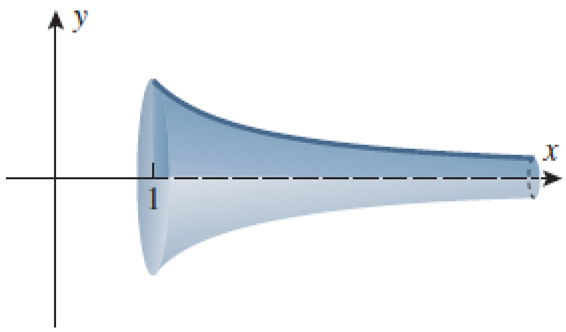
3.5 A TROMBETA DE GABRIEL

Ao longo de todo desenvolvimento da história da matemática, os pesquisadores e escritores sempre estiveram em confronto com os mistérios que envolvem a ideia de infinito, proporcionando inúmeros questionamentos. Este que por sua vez, intuitivamente podemos associá-lo a algo ilimitado é o que diz Silva (2016).

No estudo dos conjuntos numéricos está presente uma grande dúvida, entre os alunos que iniciam o estudo acerca dos mesmos, em seus primeiros contatos que seria o seguinte questionamento, "*Existe infinito maior que outro?*". Essa dúvida se baseia no fato de que os números naturais possuem infinitos elementos, bem como é o caso do conjunto dos reais, mas o conjunto dos naturais é um subconjunto dos reais, ou seja os naturais estão contidos nos reais. Criando-se assim, essa dúvida matemática que confronta muitos pesquisadores e estudantes desta área.

De acordo com Eves (2011), em 1641, Torricelli observou um problema que desafiaria a intuição de todos os matemáticos da época. Na qual ao tomar uma região R a direita do eixo x, com $x = 1$ e limitada pela rotação da curva $y = \dfrac{1}{x}$ em torno do eixo x, como podemos ver na Figura (3.4), tem-se um sólido que possui área infinita, porém o seu volume é finito.

Figura 3.4 – Trombeta de Gabriel



Fonte: (ANTON *et al.*, 2014)

Esse problema ficou conhecido como a Trombeta de Gabriel, que ganhou esse nome devido a um fato bíblico, referente a corneta supostamente tocada pelo anjo Gabriel, na hora do arrebatamento das almas para o julgamento final, durante o apocalipse, é o que afirma Silva (2016) em sua obra. Criando-se assim, o famoso *paradoxo do pintor e a corneta de Gabriel*. De maneira simples ele é descrito pela seguinte situação: *é possível enchê-la com uma quantidade finita de tinta, mas a tinta do mundo inteiro não seria suficiente para pintar sua superfície.*

Empolgados, com esse impressionante *paradoxo*, e baseados nas definições apresentadas pelos autores (ANTON *et al.*, 2014) e (SILVA, 2016), iremos apresentar a definição tanto para a área de uma figura formada a partir da rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo x, em um intervalo fechado $[a,b]$, bem como o seu volume.

Definição 3.5. Seja C uma curva de equação $y = f(x)$, onde f e f' são funções contínuas em $[a,b]$ e $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$. A área da superfície de revolução S, gerada pela rotação de C em torno do eixo x, é definida por

$$A \;=\; 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx. \tag{5}$$

Como podemos perceber no *paradoxo*, a Corneta de Gabriel se estende indefinidamente ao longo do eixo x no primeiro quadrante a partir de $x = 1$, é notório que estamos diante de uma integral imprópria.

Para verificarmos se, de fato, a área da superfície da corneta de Gabriel é infinita, vamos aplicar a definição (3.5).

Neste caso temos $f(x) = \dfrac{1}{x}$, então $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Assim,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \cdot \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^4}} dx. \end{aligned} \tag{6}$$

Seja g a função definida por $g(x) = \dfrac{1}{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}$. É fácil ver que $g(x) \geq f(x) \geq 0$, $\forall x > 1$, então pelo Teorema 2.1 a integral (6) é divergente. Logo, podemos concluir que a área da superficie da corneta de Gabriel é realmente infinita.

Definição 3.6. Seja $y = f(x)$ uma função contínua não negativa em $[a,b]$. Seja R a região sob o gráfico de f de a até b. O volume do sólido T, gerado pela revolução de R em torno dos eixo x, é definido por

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx.$$

Novamente, estamos diante de uma integral imprópria, que podemos solucioná la de forma análoga a anterior, temos que

$$\begin{aligned} V &= \pi \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx \\ &= \pi \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \qquad (7) \end{aligned}$$

Assim, a integral (7), é convergente, pois $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ pelo teorema 2.1 é convergente com $p = 2$, e seu valor pode ser obtido através da fração $\frac{1}{p-1} = 1$. Logo, o volume da corneta de Gabriel é $\pi \cdot 1$, ou seja π.

Podemos perceber que as integrais impróprias, podem estar relacionadas a diferentes tipos de problemas como foi discutido ao longo deste capítulo. A corneta de Gabriel é um exemplo disso, pois ela é um interessante problema que foge de todos os contextos habituais, criando um belo *paradoxo* na matemática. Com isso finalizamos este capítulo com essa curiosidade proporcionada pela beleza desse problema.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos o nosso trabalho com o seguinte questionamento: a integral imprópria estudada no cálculo integral é aplicada como ferramenta em outros ramos da matemática bem como em outras áreas do conhecimento? Com a finalização de toda pesquisa podemos afirmar sem sombra de dúvidas que sim, pois como podemos ver ao longo do trabalho, elas estão presentes na matemática, na física, na estatística e entre outras áreas de conhecimento. Vale ressaltar que o nosso trabalho se limitou em apenas cinco aplicações dentre tantas.

Em todo trabalho ficou evidente que as integrais impróprias estão ligadas diretamente em cada uma das aplicações apresentadas, pois, elas estão presentes no processo de construção de cada uma das suas definições proporcionando uma ampliação sobre a área de atuação de cada uma delas. Vale ressaltar que sem essa ferramenta, muitos problemas como os presentes neste trabalho teriam que buscar outras alternativas para que fossem solucionados, porém, poderiam não ser tão facilmente compreendidas como as integrais impróprias.

Sendo assim, é possível notar que atingimos o nosso objetivo principal, onde foi feito todo embasamento para compreender como as integrais impróprias se comportam e como elas são aplicadas. Foi apresentado inicialmente as suas definições com auxílio de exemplos para facilitar a assimilação do conteúdo, apresentamos algumas aplicações, porém não adentramos muito nas suas peculiaridades, haja vista que o foco do trabalho não era esse.

Ao longo da produção do nosso trabalho tivemos várias dificuldades, como achar aplicações em outras áreas de conhecimento das integrais impróprias, devido à escassez de trabalhos nesta perspectiva, porém com muita persistência e com as várias reuniões com orientador, foi possível superar essas barreiras. Podemos ainda destacar, que a metodologia usada, foi fundamental na construção do nosso trabalho e para que pudéssemos atingir o nosso objetivo.

As experiências adquiridas neste trabalho ficam evidentes na minha construção como pessoa e como profissional. Conhecimentos que eram superficiais como a escrita em LATEX, foram aprimorados e construídos ao longo do trabalho. Foi possível estudar e compreender as integrais impróprias de uma forma muito mais elaborada, com aplicações práticas que contribuíram em todo processo de evolução no que diz respeito a essa importante ferramenta. Desta forma, o nosso trabalho pode ser de grande ajuda para aqueles pesquisadores que buscam por matérias com uma escrita simples de fácil compreensão e com aplicações.

Assim, acreditamos que o nosso trabalho possa servir como motivação para novos estudantes e pesquisadores a explorar muito mais sobre as integrais impróprias e suas aplicações em outras áreas tão importantes no mundo acadêmico e social, tendo em vista que temos pouco material disponível com essa finalidade. Esse material ainda pode ser utilizado pelos professores que estejam trabalhando essa ferramenta, para motivá-los a expor um pouco mais sobre as aplicações das integrais impróprias, e ainda pelos alunos que buscam ampliar os seus conhecimentos. Além disso, deixamos aqui como sugestões para trabalhos futuros, as aplicações das integrais impróprias em áreas como a função Beta, Integrais de Dirichlet, distribuição Delta de Dirac e a transformada de Fourier.

REFERÊNCIAS

AMADO, A. T. F. Integrais impróprias, funções de euler e ressonâncias duais. Researchgate, 2014.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. [S.l.]: Bookman Editora, 2014.

AUGUSTO, C. A.; SOUZA, J. P. d.; DELLAGNELO, E. H. L.; CARIO, S. A. F. Pesquisa qualitativa: rigor metodológico no tratamento da teoria dos custos de transação em artigos apresentados nos congressos da sober (2007-2011). **Revista de Economia e Sociologia Rural**, SciELO Brasil, v. 51, p. 745–764, 2013.

ÁVILA, G. S. S. **Cálculo das funções de uma variável**. [S.l.]: LTC, Rio de Janeiro, 2003. v. 1.

BITTENCOURT, H. R.; VIALI, L. Contribuições para o ensino da distribuição normal ou curva de gauss em cursos de graduação. **III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 2006.

DEVORE, J. L. **Probabilidade e estatística: para engenharia e ciências**. [S.l.]: Cengage Learning, São Paulo, 2006.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A.** [S.l.: s.n.], 2007.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

JUNIOR, O. B. Integral imprópria e funções eulerianas. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2010.

LUSTOSA, J. I. S. L. A transformada de laplace e algumas aplicações. Universidade Federal da Paraíba, 2017.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos Rio de Janeiro, 2017.

OTTONI, J. E. Introdução ao cálculo fracionário com aplicações. **Revista de Matemática**, v. 5, n. 1, p. 50–77, 2018.

SILVA, I. N. L. d. A trombeta de gabriel. Universidades Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

STEWART, J. **cálculo**. [S.l.]: Cengage Learning, São Paulo, 2013. v. 1.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J.; GIORDANO, F. R. **Cálculo**. [S.l.]: Addison Wesley, São Paulo, 2009. v. 1.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. [S.l.]: Pearson Makron Books, São Paulo, 2001. v. 1.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de TCC

Assunto: Entrega de TCC
Assinado por: Jose Oliveira
Tipo do Documento: Anexo
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:
- **José de Oliveira Gomes**, **ALUNO (201722020037) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 06/10/2022 18:46:39.

Este documento foi armazenado no SUAP em 06/10/2022. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 644012
Código de Autenticação: 05449bc6f5