INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus
Campina Grande

O DIÁLOGO DAS MATEMÁTICAS DA EDUCAÇÃO BÁSICA E DO ENSINO SUPERIOR NO ESTUDO DE ÁREAS E VOLUMES

LEONARDO DOS SANTOS ALVES

CAMPINA GRANDE, SETEMBRO DE 2022

LEONARDO DOS SANTOS ALVES

O DIÁLOGO DAS MATEMÁTICAS DA EDUCAÇÃO BÁSICA E DO ENSINO SUPERIOR NO ESTUDO DE ÁREAS E VOLUMES

CAMPINA GRANDE, 2022

LEONARDO DOS SANTOS ALVES

O DIÁLOGO DAS MATEMÁTICAS DA EDUCAÇÃO BÁSICA E DO ENSINO SUPERIOR NO ESTUDO DE ÁREAS E VOLUMES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), Campus Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Orientador: Profº. Dr. Luís Havelange Soares

Campina Grande, 2022

LEONARDO DOS SANTOS ALVES

O DIÁLOGO DAS MATEMÁTICAS DA EDUCAÇÃO BÁSICA E DO ENSINO SUPERIOR NO ESTUDO DE ÁREAS E VOLUMES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Comissão Examinadora do Curso de Especialização no Ensino de Matemática do Instituto Federal da Paraíba, campus Campina Grande como requisito parcial para obtenção do título de Especialista no Ensino de Matemática.

Orientador: Profº. Dr. Luís Havelange Soares

Aprovado em: 09/09/2022

COMISSÃO EXAMINADORA

Luis Havelange Soares

____

Profº. Dr. Luís Havelange Soares (Orientador)

Orlando Batista de Almeida

____

Profº. Dr. Orlando Batista Almeida (Examinador)

Cicero da Silva Pereira

____

Profº. Me. Cícero da Silva Pereira (Examinador)

A474d Alves, Leonardo dos Santos.
O diálogo das matemáticas da educação básica e o do ensino superior no estudo de áreas e volumes / Leonardo dos Santos Alves. - Campina Grande, 2022.
72 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Especialização em Ensino de Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2022.
Orientador: Prof. Dr. Luís Havelange Soares.

1. Áreas e volumes 2. Matemática- educação básica 3. Matemática- licenciatura 4. Cálculo de volumes 5.Integral I. Título.

CDU 51

Dedicatória

Dou sempre graças a Deus, por tudo o que Ele tem feito por mim, sem ele na minha vida não seria nada. Agradeço a minha esposa, meu filho que foi um presente do Pai Eterno na minha existência, a minha família, amigos, professores e colegas que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

A **Deus,** força maior da minha existência, pois sem a sua vontade em nossas vidas não estaríamos aqui.

Aos meus pais, que desde o dia do meu nascimento são as pessoas mais presentes na minha vida, por terem me proporcionado uma vida simples e me ensinarem sobre contentamento e gratidão, também me podaram alguns sentimentos e assim contribuíram muito para o meu caráter, talvez as palavras não consigam expressar o tamanho do meu amor, que Deus os abençoe sempre.

A minha esposa Ana Lígia, que desde o início do nosso relacionamento está ao meu lado, me incentivando, auxiliando, enfrentando junto comigo, toas as situações encontradas nesta vida, mas sempre ao meu lado. E agora, um presente de Deus para nós, Kaleo. Que o Senhor nosso Deus os guarde, e ilumine todos os seus dias.

Aos meus familiares, pessoas maravilhosas que Deus colocou em minha vida, para ajudar quando necessário.

Ao meu orientador Luís Havelange Soares, um obrigado muito especial que nos últimos meses muito contribuiu nessa etapa da minha formação, ajudando na minha caminhada, no desenvolvimento deste projeto. Agradeço imensamente, por você ter ocupado seu tempo comigo. Que Deus te fortaleça sempre, abençoe e guarde, e a sua família também. Meu muito obrigado.

A todos os professores que contribuíram na minha formação, que Deus dê força sempre a eles, pois, foram muito importantes na minha vida.

A meus amigos que nas horas necessárias, sempre me ajudaram. Que Deus os ajude sempre a caminhar.

A todos vocês,
Meus sinceros agradecimentos.

“Grandes coisas fez o Senhor por nós, pelas
quais estamos alegres.” Salmos 126:3

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo principal analisar as concepções que geram inquietações, no estudo de áreas e volumes, desde a matemática aplicada na educação básica, como também fazer uma interligação com a matemática desenvolvida no ensino superior. Como base para o estudo, adotamos como principais teóricos, Smole e Diniz (2010), Paiva (2013), Dante (2010), Santana (2022), Soares (2015) entre outros. A pesquisa foi desenvolvida através das análises das literaturas já publicadas. Nos fundamentos e explanações descritos acima, o presente trabalho é classificado como pesquisa bibliográfica, pois foi elaborado a partir de materiais já publicados e envolve uma revisão das literaturas relativas ao tema em estudo. No caso desse trabalho, o objetivo estudado é demonstrar e aplicar através das noções e nas práticas de solução de situações problema, onde mostraremos com figuras e desenvolveremos os cálculos para o desenvolvimento da temática abordada, com base nos referenciais teóricos já descritos nas literaturas. A pesquisa também evidenciou muitas dificuldades por parte das revisões das literaturas, pois será preciso mostrar a interligação da matemática abordada e construída no ensino básico, onde a mesma servirá de todo o suporte para envidenciar as aplicações no ensino superior.

Palavras – Chave: Área; Geometria; Integral; Ensino.

ABSTRACT

The present research had as main objective to analyze the conceptions that generate concerns, in the study of areas and volumes, from applied mathematics in basic education, as well as to make an interconnection with the mathematics developed in higher education. As a basis for the study, we adopted as main theorists, Smole and Diniz (2010), Paiva (2013), Dante (2010), Santana (2022), Soares (2015) among others. The research was developed through the analysis of published literature. On the grounds and explanations described above, the present work is classified as bibliographic research, as it was prepared from previously published materials and involves a review of the literature related to the topic under study. In the case of this work, the objective studied is to demonstrate and apply through the notions and practices of solving problem situations, where we will show with figures and develop the calculations for the development of the theme addressed, based on the theoretical references already described in the literature. The research also showed many difficulties on the part of literature reviews, as it will be necessary to show the interconnection of mathematics addressed and built in basic education, where it will serve as all the support to provide applications in higher education.

LISTAS DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Nos estudos sobre a Geometria Plana e a Geometria Espacial, precisamos compreender a junção entre as superfícies planas e as superfícies no espaço, para podermos aplicar os mais variados conceitos que proporcionem a interligação das mesmas. Além disso, compreendemos que é necessária uma reflexão maior por parte dos professores no que se refere aos processos de cálculo de áreas e volumes, que possibilite aos mesmos um maior domínio desses temas, entendendo desde as justificativas mais simples até as mais profundas sobre áreas e volumes.

Sendo assim, as ideias primeiras dessa pesquisa surgiram por conta de um olhar um pouco deixado de lado, nos estudos do ensino básico, sobre áreas e volumes, devido a abordagens superficiais sobre esses conceitos, os quais servirão de ponte, para possíveis aplicações, tanto na educação básica quanto no ensino superior. Devido a essas inquietações, podemos inferir como concepções primárias desse projeto, o estudo de áreas de figuras planas e volumes de sólidos geométricos. Para isso, fazemos um aprofundamento sobre o significado de área de um polígono e sobre os processos de cálculo da área de uma superfície. Da mesma forma, fazemos para o estudo de volumes. Tendo em vista a necessidade do Princípio de Cavalieri, fazermos uma reflexão sobre este princípio destacando sua importância para o estudo de volumes. Segundo Pontes, podemos observar pouca abordagem das regiões planas e dos volumes dos sólidos geométricos nas práticas de ensino, enfatizando o ensino básico, que faz aplicações das fórmulas para calcular volume, sem ao menos mostrar a ideia introdutória de como calcular as áreas das regiões planas.

Nesse projeto partimos da hipótese que há pouco entendimento das ideias gerais desses temas, áreas e volumes, uma vez que são deixadas de lado as demonstrações privilegiando-se apenas o uso de algoritmos de cálculo e assim, não havendo um favorecimento do desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos sobre o processo de construção das expressões matemáticas.

Os livros didáticos, em sua maioria[1] não trazem as demonstrações relativas aos processos de cálculo de áreas, e os que trazem são pouco explorados pelos

[1] SMOLE e DINIZ (2010); PAIVA (2013); DANTE (2010.)

professores. Diante disso, ousamos dizer que a construção dos conceitos por parte dos alunos fica comprometida, resultando quase sempre no cálculo numérico solto de significação conceitual.

Com base nos fundamentos e explanações descritos acima, o presente trabalho é classificado como pesquisa bibliográfica, pois foi elaborado a partir de materiais já publicados e envolve uma revisão das literaturas relativas ao tema em estudo.

No caso desse trabalho, o objetivo estudado é demonstrar e aplicar através das noções e nas práticas de solução de situações problema, onde mostraremos com figuras e desenvolveremos os cálculos para o desenvolvimento da temática abordada, com base nos referenciais teóricos já descritos nas literaturas.

1.1. Objetivo geral

Estudar as relações entre matemática da educação básica e a matemática da Licenciatura no contexto do estudo de áreas e volumes.

1.2 Objetivos específicos

- Refletir sobre os conceitos de área e de volume;
- Apresentar demonstrações para os processos de cálculo de área das principais figuras planas a partir dos conhecimentos da educação básica;
- Apresentar demonstrações para os processos de cálculo de volumes dos principais sólidos geométricos a partir dos conhecimentos da educação básica;
- Mostrar os algoritmos de cálculo de área e de volume a partir do estudo de integral;
- Analisar as contribuições matemáticas de Francesco Bonaventura Cavalieri para o cálculo de volumes de sólidos.

A pesquisa está organizada em cinco capítulos. No capítulo primeiro consta a introdução do trabalho, momento em que fazemos a justificativa e apresentamos a relevância da investigação.

No segundo intitulado de “Matemática da educação básica e Matemática da Licenciatura: uma aproximação necessária” abordamos aspectos importantes entre os conhecimentos de matemática no ensino básico e a interligação com o ensino superior.

No terceiro chamado de “Ideia intuitiva de área de uma região plana” desenvolvemos os conceitos sobre as medidas de superfície, explanando algumas áreas de figuras planas, aplicadas desde o ensino básico, que servirão de fundamentos para o ensino superior.

No quarto nomeado de “O cálculo de volume na educação básica”, abordamos os conceitos primitivos dos volumes de alguns sólidos, mostrando como eles se apresentam na matemática do ensino básico.

E por fim, o quinto capítulo intitulado de “A integral definida no cálculo de áreas e de volumes”, abordamos neste ponto, as aplicações da integral definida, no cálculo das medidas de superfícies e de volumes, mostrando a ligação da matemática desenvolvida com os fundamentos do ensino básico, com o paralelo que servirão de suporte no ensino superior.

2. MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA E MATEMÁTICA DA LICENCIATURA: UMA APROXIMAÇÃO NECESSÁRIA

Quando iniciamos nossa vida escolar desde o ensino infantil, que nos levam a trilhar ao caminho das descobertas, fazendo ligações de conhecimentos necessários para podermos aprender a ler, escrever, como também de fazer associações numéricas. Nessa etapa começamos a sermos moldados para desafios futuros. No que diz respeito à disciplina de Matemática, precisamos sempre refletir de como lecionar com objetividade e clareza os conteúdos, essenciais para termos uma aproximação necessária, com as múltiplas aplicações desde o ensino básico até a Matemática da Licenciatura. É com esse diálogo que a Matemática discutida, aplicada e desenvolvida no ensino escolar se interligará com a Matemática empregada no ensino superior, é lógico que com os objetivos bem definidos e as execuções intervencionais necessárias.

Durante os cursos de formação de professores de Matemática, uma das particularidades inferidas, surgem das inquietações comumente expostas nas rodas de conversações entre os discentes, ou entre discentes e docentes, no que abrange ao quantitativo elevado de temas de matemática avançada, abordados nos componentes curriculares que, segundo os discentes, não guardam relação com a futura profissão docente no nível da educação básica, onde na maioria das vezes, a correlação entre os conteúdos abordados no ensino da Matemática na educação básica, não fazem a ponte com as aplicações desenvolvidas da Matemática do ensino superior. Ou seja, os alunos não veem uma conexão que aproximem os conceitos matemáticos elementares trabalhados no ensino básico, com aqueles do ensino na licenciatura em Matemática.

Para Soares (2015) a indagação sobre quais conhecimentos matemáticos o futuro professor de matemática deve estudar no curso de formação não é tema apenas dos bastidores dos diálogos dos alunos.

> Pesquisadores da área têm se debruçado nessa reflexão tentando dar respostas consistentes para a pergunta que pode ser analisada a partir de diferentes matizes: Que domínio matemático deve possuir o professor de matemática da educação básica? Que Matemática o professor de matemática precisa saber para desempenhar sua atividade docente? Qual o lugar dos saberes matemáticos da formação nas práticas de ensino de matemática na educação básica? (SOARES, 2015, p. 1).

Nas reflexões em muitas vezes discutidas nos cursos de formação de professores, existem diversos questionamentos e por vezes, critica-se a dissociação entre os conhecimentos matemáticos inseridos nas disciplinas específicas e à matemática da educação básica, gerando as indagações: a matemática abordada no ensino básico está fazendo as devidas inferências para a formação dos jovens que irão buscar os cursos de licenciatura em Matemática?

Concordamos com Soares (2015) ao enfatizar que é bastante razoável a defesa de que os saberes matemáticos necessários para o estudante que pleiteia a carreira de pesquisador em matemática ultrapassam as exigências, em termos de saberes matemáticos, esperadas para um professor de matemática na educação básica. Esse fato não é um indicativo de que defendemos uma matemática mais simples para o futuro professor, de que o conjunto de componentes curriculares da formação do licenciando seja reduzido a aqueles que exploram apenas os conceitos explorados no ensino básico. Parece-nos pertinente o entendimento de que o curso de formação inicial deve possibilitar para o futuro docente um conhecimento mais profundo da Matemática. Esse conhecimento mais profundo levará o professor a ressignificar, inclusive, os conhecimentos da Matemática da educação básica que ele já possui.

Um ponto fundamental dessa reflexão é um fato já estabelecido em estudos relativos aos saberes do professor durante a sua atividade de ensino. O conjunto de saberes que norteiam a sua prática são oriundos de diversas matizes. Parece-nos bastante pertinente esse entendimento para uma reflexão sobre a matemática estudada no curso de formação e o conhecimento matemático que o professor leciona na educação básica. Fazendo uma analogia com as ideias de Kosik (1985), o aprofundamento teórico que se faz a partir dos saberes disciplinares na Licenciatura deve possuir uma relação dialética com os saberes matemáticos que são lecionados na educação básica. Ou seja, os saberes da matemática superior são fundamentais para que compreendamos com mais relevância a matemática básica.

Para dar significado ao nosso posicionamento, afirmando a importância de uma aprendizagem da Matemática na formação inicial com real significado para o futuro professor, vejamos algumas situações que podem ocorrer no contexto da prática de ensino da educação básica – algumas delas das quais formos testemunhas e outras nas quais ressignificamos conceitos a partir de formações continuadas.

Um exemplo de uma fragilidade no processo de aprendizagem na Licenciatura é o caso em que o professor não relaciona muitos estudos realizados nas disciplinas de Cálculo (I, II, III e IV) com os conteúdos que ele leciona sobre funções. Recordamos um fato, ocorrido numa palestra, em que o ministrante perguntou para uma plateia de professores da Matemática da educação básica como eles explicariam o significado do ponto de vértice de uma parábola e como determinavam as coordenadas desse ponto. Majoritariamente os participantes recorreram aos saberes inseridos no âmbito da educação básica. O significado foi o de mudança de sentido da parábola, ou ponto extremo. Sobre a justificação do algoritmo, alguns disseram ser o ponto médio do segmento que tem como extremos as raízes da função quadrática e outros, sugeriram a utilização da forma canônica da função; alguns, simplesmente, disseram não lembrar como justificar. Nota-se em situações como esta que o conhecimento sobre máximos, mínimos e variação de função, estudados na disciplina de Cálculo, parece não ter tido significado importante para a compreensão do professor do elo entre Matemática básica e Matemática da Licenciatura.

Da mesma forma nota-se uma discretude entre saberes da geometria, explorados na educação básica, e conhecimentos matemáticos do curso de formação na Licenciatura. Por exemplo, pouco se relaciona explorações da geometria plana com estudos de geometria analítica. No que se refere aos conceitos de área e de volume parecem até desconexos de temas como integral definida, seja de uma ou de duas variáveis.

Centrados nesses pressupostos e na concepção crítica de que a matemática se constitui como uma construção social da humanidade – e que, por isso devemos olhar a matemática em todas as dimensões, ou falar de “matemáticas”, compreendemos que as interfaces entre a matemática superior e a matemática básica são muitas, e vão desde os aspectos formais internos da matemática já estruturada, organizada, hierarquizada, até os fatores históricos, epistemológicos e sociais da construção desse conhecimento em qualquer nível de ensino.

Sendo essa aproximação das matemáticas cada vez mais necessária, entendemos que, sempre, enquanto docentes, precisamos refletir de como fazer uma interface da matemática aplicada na educação básica, que dará o suporte na interligação com a matemática do ensino superior. Reiteramos que essa defesa não tem como foco central o uso dos saberes (nos mesmos termos) da Matemática da Licenciatura nas práticas de ensino da educação básica, mas, sim na contribuição que o entendimento dessa ligação poderá possibilitar para o professor de Matemática ressignificar seu modo de agir, de argumentar, de justificar os conteúdos.

Com isso, nesse presente projeto, fazemos um estudo, buscando essa conexão a partir dos conceitos de áreas das regiões planas elementares, desde seu processo estudado no ensino básico, com as demonstrações concernentes a cada uma das regiões aplicadas, com aplicações da matemática discutida e desenvolvida no ensino superior, e também, aplicaremos essas mesmas inferências citadas para as superfícies planas, no desenvolvimento dos volumes de alguns sólidos.

3. IDEIA INTUITIVA DE ÁREA DE UMA REGIÃO PLANA

Um dos temas fundamentais no estudo da Geometria na educação básica é o conceito de área ou superfície de uma região plana. Assim, pensamos ser pertinente fazer um aprofundamento teórico buscando apresentar esse conceito e algumas possibilidades de exploração na educação básica, para depois apresentarmos a conexão entre esse tema e o estudo de Cálculo, especialmente o conceito de integral definida de uma função.

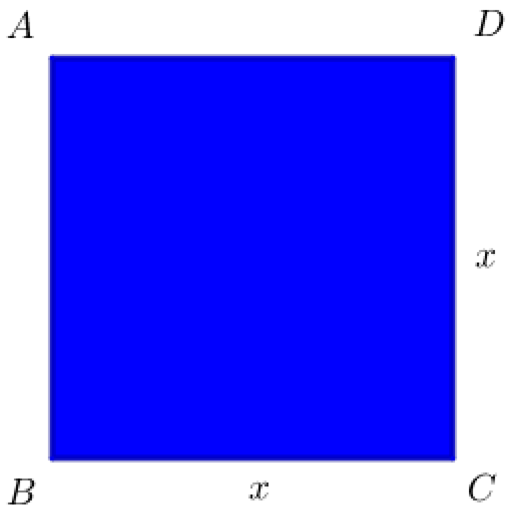
A noção intuitiva de áreas de regiões poligonais planas parte sempre de comparações entre outras regiões planas (superfícies), através das unidades pré-estabelecidas, as quais são denominadas de unidades de área. Isso quer dizer que calcular uma área de uma determinada região significa, sempre, comparar a região em análise com outra região. Esse fato, no nosso entendimento, representa um obstáculo epistemológico no ensino de áreas de superfícies planas, pois, muitas vezes o processo de ensino se resume à aplicação de técnicas de cálculo, ao uso de algoritmos, desconectados da construção conceitual.

Sendo o cálculo de área uma comparação de superfícies, definem-se assim as unidades de medidas de área, tendo como parâmetro as superfícies quadradas, que possuem em cada lado uma mesma medida de comprimento. Desse modo, a partir do Sistema Internacional de Medidas (SI), definimos o metro quadrado (m^2) e, partindo daí, os seus múltiplos, quilômetros quadrados (km^2), hectômetros quadrados (hm^2) e o decâmetro quadrado (dam^2), como também seus submúltiplos, decímetro quadrado (dm^2), centímetro quadrado (cm^2) e o milímetro quadrado (mm^2).

Esse entendimento inicial da construção do conceito de área nos dá condições para aprofundamentos maiores sobre os procedimentos de cálculo das principais regiões planas que estudamos na educação básica, a saber: área do retângulo, área do paralelogramo, área do triângulo e área do trapézio.

Para isso, vamos partir de um resultado, demonstrado por Lima (2011), que é a expressão que determina a área de um quadrado $ABCD$, conforme a Figura 1.

Figura 1: Quadrado de lado com medidas $\boldsymbol{x}$



Fonte: Autoria própria

A área S de um quadrado é igual ao produto da medida do comprimento do seu lado x, pela medida do comprimento do seu outro lado x, resultando em:

$$S = x^2 \quad \text{(Eq. 1)}$$

Notemos que a medida x é dada numa unidade de comprimento. E assim, se x representar uma medida em metros, a área será dada em m^2, se x for dada em centímetros a área será dada em cm^2, e assim por diante. O que Lima (2011) provou é que, independente da unidade de comprimento adotada, sendo x um número real, a área do quadrado será dada pela Equação 1.

3.1. Área do retângulo

O retângulo é um dos polígonos convexos[2] de maior relevância no estudo de Matemática nos níveis de ensino fundamental e médio. Podemos demarcar sua significância pelo conjunto de temas da Matemática básica nos quais ele é utilizado direto ou indiretamente: no estudo de áreas, no estudo da trigonometria, no estudo de produtos notáveis, dentre outros.

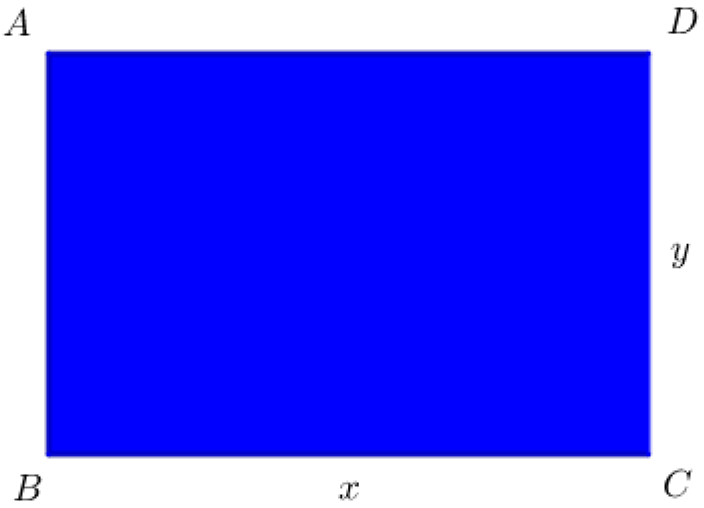
[2] Polígono Convexo é todo polígono que possui todos pontos de um segmento de reta com as extremidades no interior do polígono também dentro dele.

Um retângulo é um quadrilátero convexo, possuindo quatro vértices, quatro lados, quatro ângulos internos congruentes, quatro ângulos externos congruentes e duas diagonais. É, classificado no grupo dos paralelogramos, por ser uma figura geométrica plana composta por dois pares de lados paralelos. Os lados paralelos possuem medidas iguais.

Tomemos um retângulo $ABCD$ cuja medida de um dos lados, numa unidade de medida, mede x e a outra medida, mede y. Vamos mostrar que a área S, é dada pelo produto dessas medidas, ou seja:

$$S = x \, . \, y \quad \text{(Eq. 2)}$$

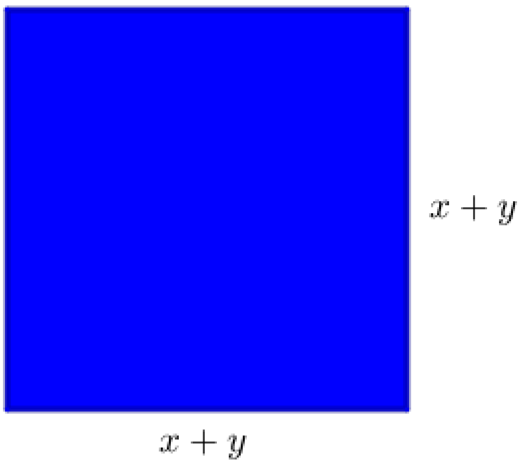
Figura 2: Retângulo de lados com medidas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$



Fonte: Autoria própria

Agora, consideremos um quadrado de lado $(x + y)$, onde x e y são dados na mesma unidade de medida de comprimento. Sabemos que a área A desse quadrado é dada por: $S = (x + y)^2$.

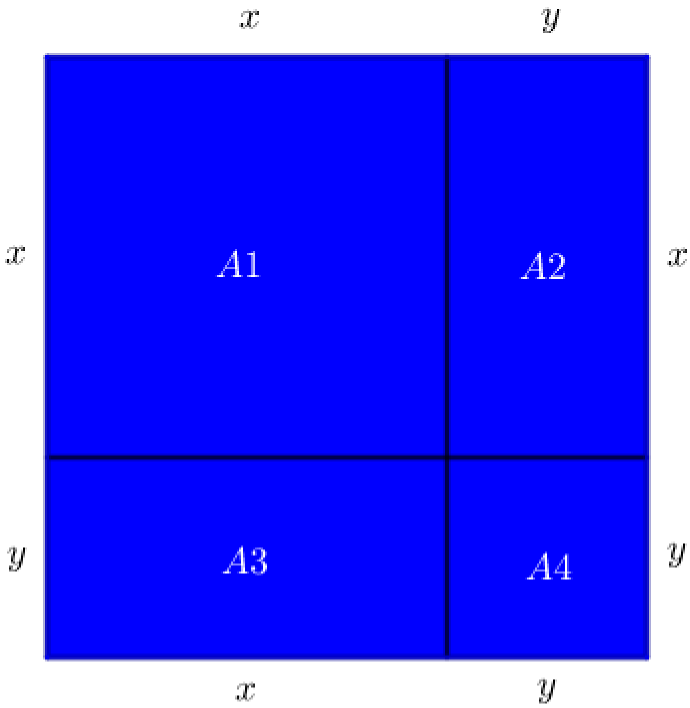
Figura 3: Quadrado de lados com medidas $\boldsymbol{x + y}$



Fonte: Autoria própria

Dividindo esse quadrado em quatro regiões, conforme mostra a Figura 4, teremos dois quadrados, um de lado medindo x e o outro de lado medindo y, e dois retângulos congruentes de lados medindo x e y.

Figura 4: Dois quadrados (A1 e A4) e dois retângulos (A2 e A3)



Fonte: Autoria própria

- A região plana representada por $A1$ é um quadrado cuja medidas dos seus lados mede x, portanto sua área é igual a x^2;
- A região $A2$ e $A3$ são representadas por um lado, medindo y e o outro lado medindo x, por serem regiões planas congruentes, apresentam a mesma área;
- A região plana representada por $A4$ é um quadrado cuja medida do lado é y, portanto sua área é igual a y^2.

Com isso, temos: $A1 = x^2$; $A2 = A3 = S$ e $A4 = y^2$.

Também sabemos que:

$$
\begin{gathered}
(x + y)^2 = x^2 + A2 + A3 + y^2 \leftrightarrow \\
(x + y).(x + y) = x^2 + S + S + y^2 \leftrightarrow \\
x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2S + y^2 \leftrightarrow \\
x^2 + 2.x.y + y^2 = x^2 + 2S + y^2 \leftrightarrow \\
x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 2S \leftrightarrow \\
\frac{2xy}{2} = \frac{2S}{2} \leftrightarrow \\
x\,.\,y = S \quad \text{Eq. 3}
\end{gathered}
$$

Portanto, mostramos que a área S de um retângulo de lados medindo x e y, é dada pelo produto de x por y.

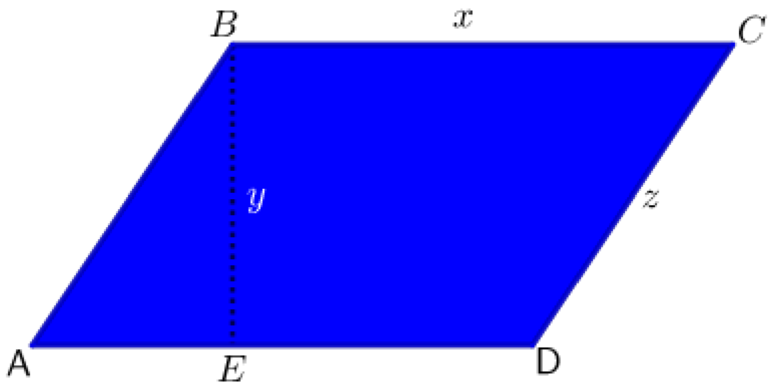
3.2. Área do paralelogramo

Os paralelogramos representam um grupo de quadriláteros convexos que têm como característica principal possuírem dois pares de lados paralelos. Essa especificidade traz para esse grupo de polígonos uma abrangência conceitual que engloba diversas outras regiões planas, tais como os quadrados, os retângulos e os losangos, e portanto, sendo de bastante relevância no estudo de Matemática nos níveis de ensino fundamental e médio. Podemos também enfatizar sua significância nas aplicações de algumas demonstrações de algumas regiões poligonais.

Seja agora um paralelogramo $ABCD$ cuja medida dos lados paralelos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, medem x, as medidas dos outros dois lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, medem z e y é a medida do segmento $\overline{BE}$, a qual chamaremos de altura aos lados lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Vamos mostrar que a área desse polígono é dada, pelo produto dessas medidas x e y, ou seja, $S = x \,.\, y$.

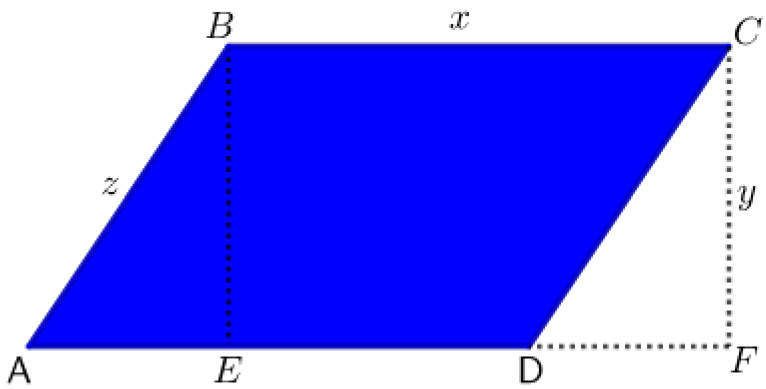
Figura 5: Paralelogramo de lados medindo $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$, altura $\boldsymbol{y}$



Fonte: Autoria própria

Sejam A, B, C e D, os vértices do paralelogramo, $\overline{BE}$ um segmento de reta que é a altura do paralelogramo e tem medida y. A partir de C traçemos um segmento $\overline{CF}$, paralelo ao segmento $\overline{BE}$, até encontrar a reta suporte do lado $\overline{AD}$. A partir de D traçamos o segmento $\overline{DF}$.

Figura 6: Paralelogramo de lados medindo x e z, altura y



Fonte: Autoria própria

Consideremos agora o retângulo $BCFE$ e um paralelogramo $ABCD$, representados na figura 6, onde aplicaremos a comparação desses polígonos, com o fim de demonstrarmos a área da superfíce plana do paralelogramo. No entanto, precisamos justificar que os triângulos AEB e DFC são congruentes.

Notemos primeiramente que os ângulos $\hat{E}$ e $\hat{F}$, apresentam medidas de 90°, ou seja, os ângulos são classificados como retos, são congruentes, pois apresentam a mesma medida.

Além disso, os ângulos BAE e CDF são congruentes, uma vez que $\overline{AB} // \overline{DC}$ e $\overline{BE} \approx$[3] $\overline{CF}$, por serem alturas relativas tanto do retângulo, quanto do paralelogramo. Esses dois fatos garantem que os triângulos BAE e CDF são congruentes.

Portanto, analisemos que pelo fato dos triângulos BAE e CDF, serem congruentes, ou seja, ambos apresentam a mesma área, com isso, podemos afirmar que o retângulo $BCFE$ e o paralelogramo $ABCD$, terão a mesma área, sendo

Como a área S do retângulo é dada pelo produto de x por y, ou seja, $x.\ y$, então concluímos que a área S do paralelogramo é dada por $S = x.y$.

3.3. Área do triângulo

O triângulo é um dos polígonos convexos de maior relevância, sendo possível, a partir dele, construir novas regiões poligonais, sendo bastante aplicado no estudo de Matemática nos níveis da Educação Básica. Podemos também enfatizar sua importância pelo conjunto de temas de sua aplicabilidade, tais como: nas demonstrações de outras regiões planas, nas construções civis, na aplicação da trigonometria entre outras situações.

Triângulo é um polígono convexo formado por três vértices, três lados, três ângulos internos e três ângulos externos.

Dada à importância do triângulo, há classificações distintas para esse polígono, dependendo das medidas dos ângulos e das medidas dos lados. Quanto aos lados um triângulo pode ser: escaleno (medidas distintas de lados), isósceles (medidas de dois lados iguais) ou equiláteros (medidas dos três lados iguais). Quanto aos ângulos, um triângulo pode ser acutângulo (três ângulos internos com medidas maiores que 0° e menores que 90°), retângulo (um ângulo interno com

[3] Esse símbolo tem o significado de congruência, ou seja, representam uma mesma medida.

medida de 90°) ou obtusângulo (um ângulo interno com medida maior que 90° e menor que 180°).

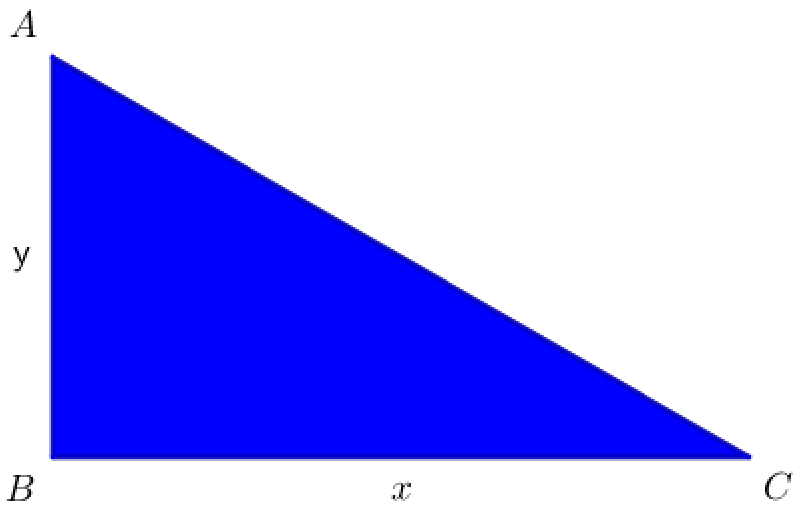
No que se refere aos processos de cálculo da área de um triângulo há, também, formas distintas de se calcular a área desse polígono. Embora, possamos demonstrar algoritmos gerais, que servem para qualquer tipo de triângulo, há expressões mais simples (ou resumidas) a depender do tipo de triângulo em estudo.

Assim, vamos mostrar a dedução da área do triângulo tomando como base as três classificações referentes às medidas dos ângulos internos. Uma vez provando-se o procedimento de cálculo da área para cada um desses tipos estaremos provando para qualquer triângulo.

3.3.1 Área do triângulo retângulo

Consideremos uma região triangular ABC, cuja medida do lado $\overline{AB}$, mede y e a medida do lado $\overline{BC}$, mede x, e a medida do ângulo interno formado na interseção entre esses lados, é 90° ou seja, esses lados são perpendiculares. Todo triângulo que possui tal característica é classificado como triângulo retângulo. Vamos mostrar que a área dessa região será a metade do produto das medida desses lados, sendo assim: $S = \frac{x \cdot y}{2}$.

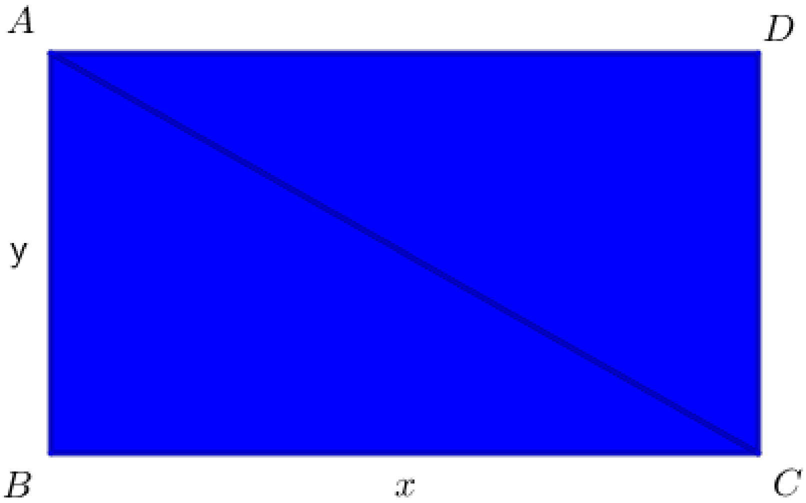
Figura 7: Triângulo de lado com medidas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$



Fonte: Autoria própria

Agora comparemos um retângulo $ABCD$, cuja medida da base $\overline{BC}$ mede x e a medida da altura $\overline{AB}$, mede y, conforme mostrado na figura abaixo:

Figura 8: Retângulo de lado com medidas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$



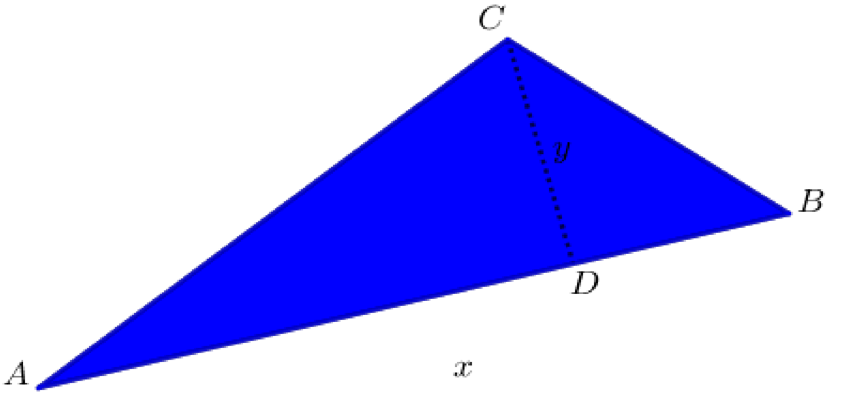
Fonte: Autoria própria

Observemos a seguinte situação: o segmento $\overline{AC}$, que é lado do triângulo ABC é também diagonal, do retângulo $ABCD$. São congruentes os triângulos ABC e ADC, com ângulos retos em $\hat{B}$ e $\hat{D}$ Logo, podemos afirmar que ambas as regiões triangulares tem a mesma área. Portanto, podemos deduzir que a área de um triângulo ABC é metade da área do retângulo $ABCD$. Logo, a área S do triângulo ABC é dada por: $S = \frac{x \cdot y}{2}$.

3.4. Área de um triângulo acutângulo

Consideremos um triângulo ABC de modo que cada ângulo interno tenha medida maior que 0° e menor que 90°.

Figura 9: Triângulo acutângulo $\boldsymbol{ABC}$

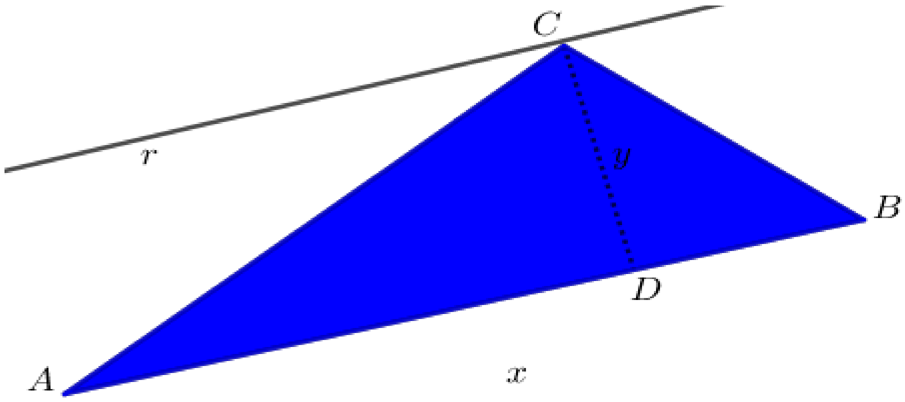


Fonte: Autoria própria

Seja x a medida do lado $\overline{AB}$ e seja y, medida do segmento $\overline{CD}$, a altura do triângulo em relação ao lado $\overline{AB}$. Vamos mostrar que a área desse triângulo é dada pela metade do produto de x por y.

Sabemos, com base num postulado[4] da Geometria que, dada uma reta qualquer no "espaço" e um ponto fora dela, existe uma, e somente uma, reta paralela a reta dada que passa nesse ponto. Assim, existe uma reta que passa no ponto C e é paralela ao à reta suporte do lado $\overline{AB}$ do triângulo. Seja r essa reta.

Figura 10: Triângulo $\boldsymbol{ABC}$ com reta $\boldsymbol{r}$ paralela ao lado $\overline{\boldsymbol{AB}}$

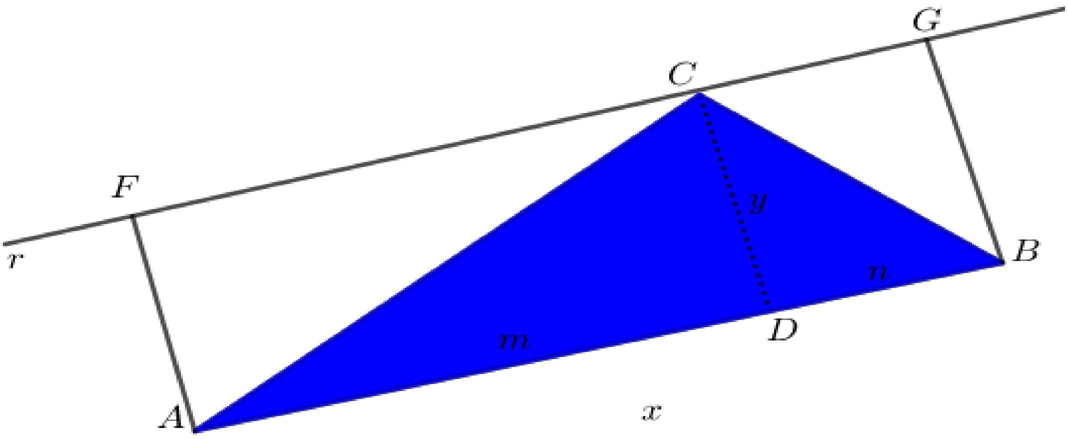


Fonte: Autoria própria

Agora, podemos construir, a partir dos vértices A e B, dois segmentos de reta, paralelos ao segmento $\overline{CD}$, com as outras extremidades na reta r.

[4] Postulado é uma afirmação ou fato admitido sem necessidade de demonstração.

Figura 11: Triângulo $\boldsymbol{ABC}$ com reta $\boldsymbol{r}$ paralela ao lado $\overline{\boldsymbol{AB}}$ e segmentos $\overline{\boldsymbol{AF}}$ e $\overline{\boldsymbol{BG}}$ paralelos a $\overline{\boldsymbol{CD}}$



Fonte: Autoria própria

Sejam $\overline{AF}$ e $\overline{BG}$ segmentos paralelos ao segmento $\overline{CD}$, como $\overline{CD}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, o ângulo $\hat{D}$ é reto, sendo assim os segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{BG}$ serão perpendiculares à reta r.

Há duas maneiras de mostrarmos que a área de um triângulo ABC é dada pela metade do produto x por y. Uma é fazendo a soma das áreas dos triângulos ADC e BDC, uma vez que ambos são triângulos retângulos e nós já provamos a área para esse tipo de triângulo. Outra é observando a figura geral, ou seja, o retângulo $ABGF$.

As medidas $\overline{AD}$ representada por m e $\overline{DB}$ por n, são chamadas de projeções, onde m é a projeção de $\overline{AC}$ e n é a de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AB}$

Os triângulos ADC e BDC são triângulos retângulos pois a altura $\overline{CD}$ é perpendicular ao lado $\overline{AB}$. Sendo assim, a área do triângulo ADC é dada por: $S1 = \frac{m\,.\,y}{2}$ e a área do triângulo BDC é dada por: $S2 = \frac{n\,.\,y}{2}$. Logo, a área S do triângulo ABC é a soma das áreas dos triângulos ADC a qual chamamos de $S1$ e BDC chamada de $S2$.

$$S = S1 + S2 \leftrightarrow$$

$$S = \frac{m\,.\,y}{2} + \frac{n\,.\,y}{2} \leftrightarrow$$

$$S = \frac{m\,.\,y + n\,.\,y}{2} \leftrightarrow$$

$$S = \frac{y\,.\,(m+n)}{2} \leftrightarrow$$
$$S = \frac{y\,.\,x}{2}.$$

Outra forma de mostrar esse resultado é analisando o retângulo $ABGF$. Notemos que essa região retangular é composta por quatro triângulos: AFC, ADC, BDC e BGC. Também se observa que os triângulos AFC e ADC são congruentes, pois possuem lados com a mesma medida. Da mesma forma, os triângulos BDC e BGC. Assim, a área do triângulo ABC representa a metade da área do retângulo $ABGF$, que tem área igual ao produto de x por y. Daí, sendo S a área do triângulo ABC, temos $S = \frac{x\,.\,y}{2}$.

3.4.1 Área do triângulo equilátero ou equiângulo

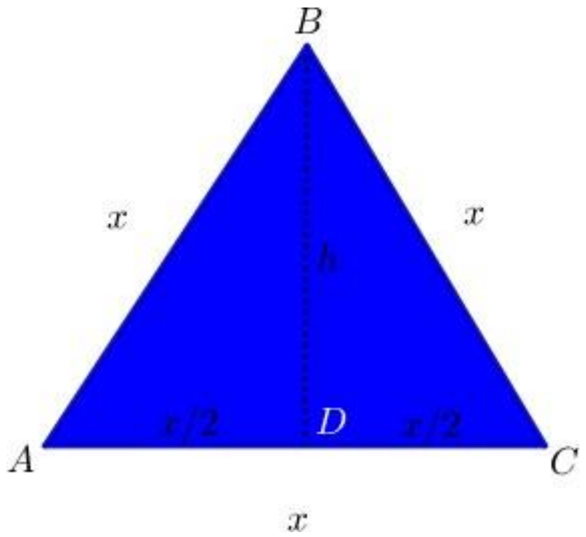
O triângulo equilátero ou equiângulo é um polígono convexo que apresenta, três vértices, três lados de medidas iguais, três ângulos internos agudos e congruentes, ou seja, esse triângulo com relação às medidas dos seus ângulos podem ser classificado de acutângulo e os ângulos externos de medidas congruentes. Sendo assim, ele pode ser classificado também como polígono regular[5].

A partir da expressão para a área demonstrada para os triângulos acutângulos podemos deduzir uma expressão para a área dos triângulos equiláteros que só depende da medida do seu lado.

Consideremos a triângulo equilátero ABC de lados medindo $x,$ representado na figura que segue abaixo:

[5] Um polígono convexo é chamado de regular quando possui os lados congruentes e os ângulos internos também congruentes.

Figura 12: Triângulo equilátero com lados de medidas $\boldsymbol{x}$



Fonte: Autoria própria

Para deduzirmos a fórmula que encontra a área de um triângulo equilátero, temos que primeiramente encontrar a medida da altura h, representada no segmento $\overline{BD}$

As medidas $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ serão congruentes, pois o lado $\overline{AC}$ representado por x, foi divido no seu ponto médio D, através da medida da altura h, gerando com isso, $x/2$. Para isso, precisamos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo ADB (ou em CDB), que nos permite calcular essa altura em função da medida do lado do triângulo ABC. Temos:

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \leftrightarrow$$

$$x^2 = h^2 + \frac{x^2}{4} \leftrightarrow$$

$$x^2 - \frac{x^2}{4} = h^2 \leftrightarrow$$

$$\frac{4x^2 - x^2}{4} = h^2 \leftrightarrow$$

$$\frac{3x^2}{4} = h^2 \leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{3x^2}{4}} = |h| \leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3x^2}}{\sqrt{4}} = |h| \leftrightarrow$$

$$\frac{x\,.\,\sqrt{3}}{2} = |h| \leftrightarrow$$

$$\frac{x\,.\,\sqrt{3}}{2} = h.$$

Sendo assim, encontramos a medida da altura. Portanto, para demonstrarmos a fórmula da área S do triângulo equilátero, precisamos calcular a metade do produto da altura h pela medida de um dos seus x,

$$S = \frac{x\ .\ h}{2} \leftrightarrow$$

$$S = \frac{x\,.\,\frac{x\,.\,\sqrt{3}}{2}}{2} \leftrightarrow$$

$$S = \frac{\frac{x^2\,.\,\sqrt{3}}{2}}{2} \leftrightarrow$$

$$S = \frac{x^2.\ \sqrt{3}}{2}\,.\,\frac{1}{2} \leftrightarrow$$

$$S = \frac{x^2.\ \sqrt{3}}{4}.$$

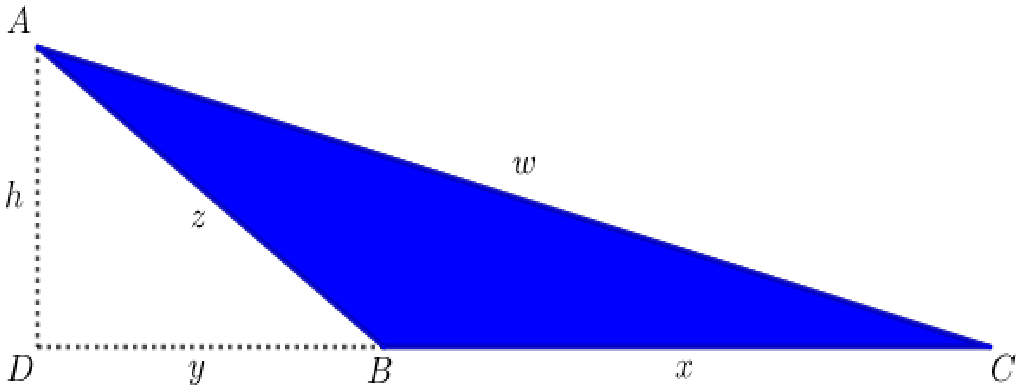
3.5. Área do triângulo obtusângulo

O triângulo obtusângulo é o triângulo que possui um ângulo interno obtuso, ou seja, um ângulo interno que tem medida maior que 90° e menor que 180°.

Vamos mostrar que a área de um triângulo obtusângulo também é dada pela metade do produto entre a medida de um lado e a altura relativa a ele.

Seja o triângulo ABC, de lados com medidas x, y e $z,$ com o ângulo $\hat{B}$ obtuso. O segmento $\overline{AD}$ é a altura relativa do lado $\overline{BC}$, através da projeção ortogonal do vértice A, que encontrará o prologamento do lado $\overline{BC}$, o ângulo $\hat{D}$ é reto, pois $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares.

Figura 13: Triângulo escaleno com lados de medidas $\boldsymbol{x, z\ e\ w}$



Fonte: Autoria própria

Sendo assim, tomemos os triângulos ADC que o chamaremos de região $S1$ e o triângulo ADB, que o chamaremos de região $S2$.

Então, $S1 = \frac{(y+x)\,.\,h}{2}$ e $S2 = \frac{y\,.\,h}{2}$, por já termos demonstrado a área do triângulo retângulo.

Portanto, para a área S, do triângulo ABC, teremos:

$$S = S1 - S2 \leftrightarrow$$

$$S = \frac{(y + x)\,.\,h}{2} - \frac{y\,.\,h}{2} \leftrightarrow$$

$$S = \frac{(y + x - y)\,.\,h}{2} \leftrightarrow$$

$$S = \frac{x\,.\,h}{2}.$$

3.6. Área do trapézio

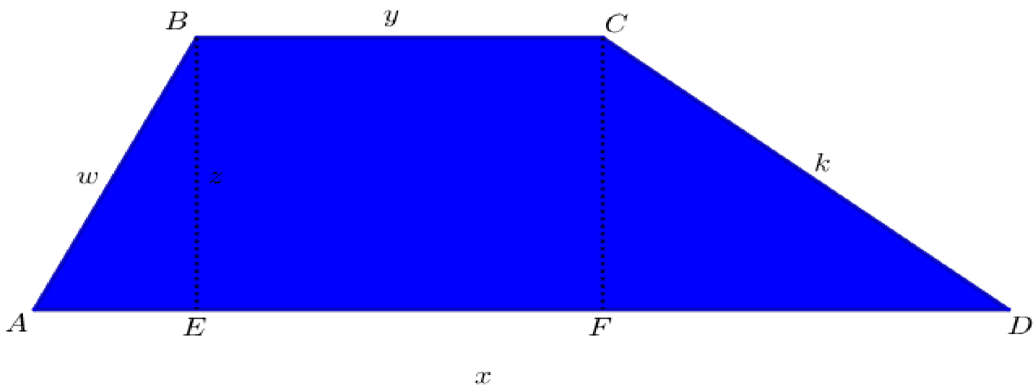
O trapézio é um polígono do grupo dos quadriláteros, sendo também um polígono convexo de bastante relevância no estudo de Matemática nos níveis de ensino fundamental e médio. Podemos também enfatizar sua significância pelo conjunto de temas da Matemática básica nos quais ele é utilizado direto ou indiretamente: nas aplicações da construção civil, na medicina, nos espetáculos circenses, nas academias e na trigonometria.

Um trapézio é um quadrilátero que possui um par de lados paralelos. A partir da definição nota-se que os quadriláteros que possuem lados opostos paralelos também são trapézios, ou seja, retângulos, paralelogramos, e losangos também são trapézios.

Vamos mostrar que a área de uma região plana trapezoidal é dada pela metade, do produto entre a soma das medidas dos comprimentos dos lados paralelos e a medida da distância entre eles (altura).

Consideremos um trapézio de lados paralelos com medidas x, y.

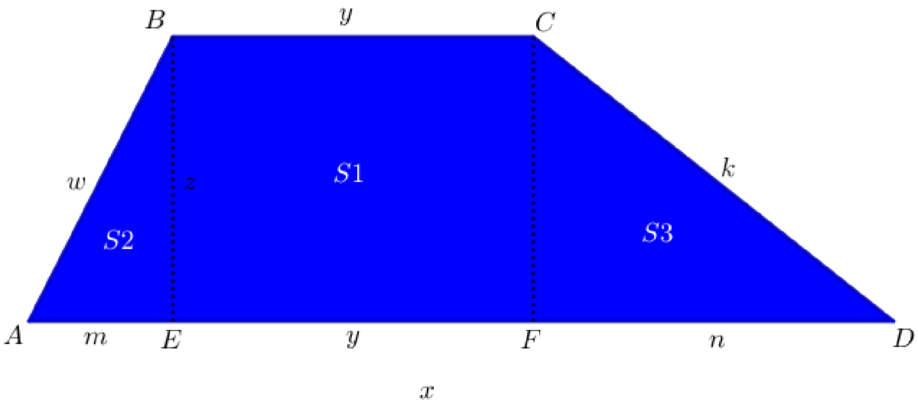
Figura 14: Trapézio com lados paralelos medindo x e y e os lados não paralelos de medidas w e k



Fonte: Autoria própria

Comparemos agora um trapézio $ABCD$ qualquer, formado por duas regiões triangulares AEB e CDF, retos em E e F e outra região retangular $BCFE$, conforme a figura abaixo:

Figura 15 : Trapézio com lados paralelos medindo x e y e os lados não paralelos de medidas w e k, o trapézio com áreas $S1, S2$ e $S3$



Fonte: Autoria própria

Comecemos as comparações com o lado paralelo maior $x = m + y + n$ e $x - y = m + n$ onde m e n são as medidas dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{FD}$, respectivamente, sendo eles apresentados nos triângulos AEB e DFC.

Consideremos a área do retângulo $S1 = y\,.z$ e as áreas do triângulos $S2 = \frac{m\,.\,z}{2}$ e $S3 = \frac{n\,.\,z}{2}$.

Agora, podemos deduzir a área do trapézio S da seguinte forma:

$$S = S2 + S3 + S1 \leftrightarrow$$

$$S = \frac{m\,.\,z}{2} + \frac{n\,.\,z}{2} + y.z \leftrightarrow$$

$$S = \frac{[(m+n).z\ +\ 2.y.z]}{2} \leftrightarrow$$

$$S = \frac{(m+n+2y).z}{2} \leftrightarrow$$

$$S = \frac{(m+n+y+y).z}{2} \leftrightarrow$$

$$Como\; m + n + y = x, temos:$$

$$S = \frac{(x+\ y)\,.\ z}{2}$$

4. O CÁLCULO DE VOLUME NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Nessa seção faremos uma breve discussão sobre a forma que se calcula o volume de sólidos geométricos na educação básica. Refletimos sobre as ideias intuitivas que dão base para as conjecturas utilizadas sobre volumes dos sólidos tentando encontrar elementos que se aproximam das ideias gerais sobre volumes exploradas no estudo do cálculo.

A definição de volume na educação básica é apresentada como uma grandeza que representa o espaço que um determinado sólido geométrico ocupa. As medidas de volume mais comuns são as unidades cúbicas, como os metros cúbicos m^3, os seus múltiplos: km^3, hm^3 e dam^3 e os seus submúltiplos: dm^3, cm^3 e mm^3. As principais figuras espaciais são os prismas, as pirâmides, o cone, o cilindro e a esfera, e cada um deles possui fórmulas específicas para o cálculo do volume. O estudo do volume desses sólidos é feito na educação básica.

Precisamos, antes de falar do volume dos sólidos, destacar uma ideia importante que é a base para o alcance de muitos resultados sobre volumes: O princípio de Cavalieri.

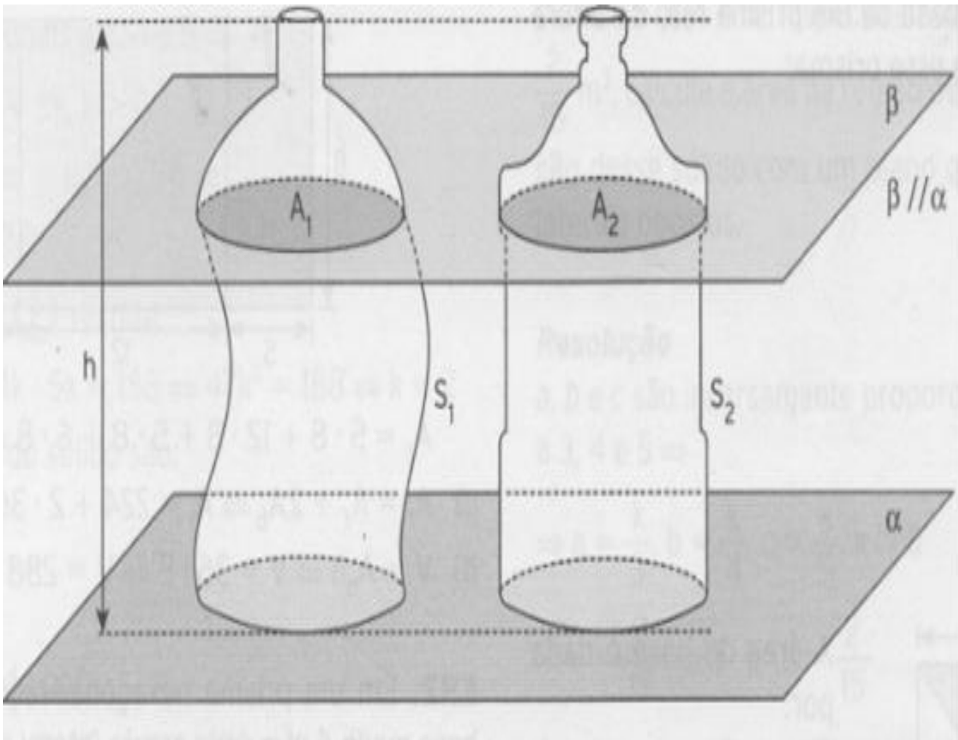
4.1. O Princípio de Cavalieri

Para apresentar o Princípio de Cavalieri decidimos tomar como ponto de partida o que está exposto em três livros didáticos de Matemática da Educação Básica.

1. Matemática Ensino Médio, volume 2, Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, 2010;
2. Matemática contexto e aplicações, Luiz Roberto Dante, 2010;
3. Matemática Paiva, Manoel Paiva, 2013).

Smole e Diniz (2010), pág. 279, apresenta o princípio da seguinte forma: “Dois sólidos, S1 e S2, de mesma altura h, apoiados em um plano α e contidos em um mesmo semiespaço de origem α, terão o mesmo volume se qualquer plano paralelo a α determinar em S1 e S2 secções com áreas iguais”.

Figura 16: Ilustração do Princípio de Cavalieri



Fonte: Smole e Diniz, 2010.

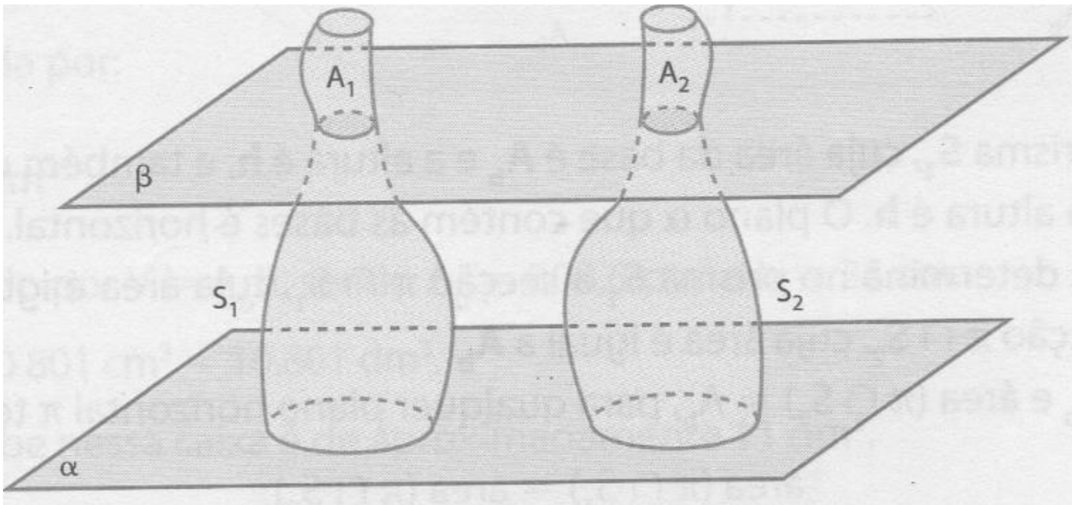
Para ter uma imagem dessa relação, imagine os dois sólidos sendo enchidos com água simultaneamente à mesma vazão. Como as áreas das secções são iguais, a altura a cada momento seria a mesma.

Nessa compreensão há que se considerar que duas figuras planas de mesma área são denominadas superfícies equivalentes e dois sólidos de mesmo volume são denominados sólidos equivalentes.

Dante (2010, pág. 223), mostra essa mesma ideia da seguinte forma:

> Vamos considerar os sólidos S1 e S2 apoiados em um plano horizontal α. Consideremos também o plano β, paralelo a α, que, ao seccionar S1, também secciona S2, determinando duas regiões planas de áreas A1 e A2. Nessas condições, podemos afirmar que, se para todo plano β temos A1 = A2, então: Volume S1 = volume S2.

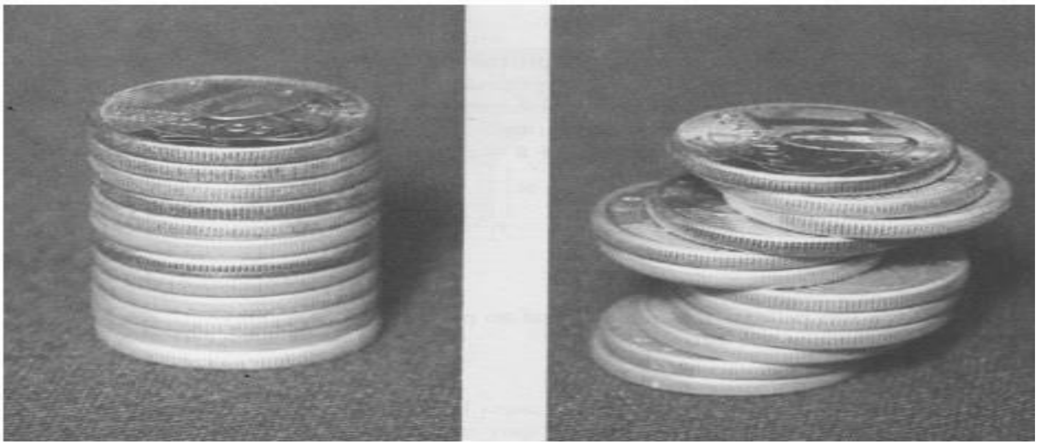
Figura 17: Figura utilizada para ilustrar o princípio de Cavalieri



Fonte: Dante, 2010

Por último, Paiva (2013, pág: 239 e 240): “Sejam dois sólidos geométricos P1 e P2 e um plano α. Se qualquer plano β, paralelo a α, que intercepta um dos sólidos também intercepta o outro e determina nesses sólidos secções de mesma área, então os sólidos P1 e P2 têm volumes iguais”.

Figura 18: Figura utilizada para ilustrar o princípio de Cavalieri



Fonte: Matemática Paiva, 2013

Como dissemos o princípio de Cavalieri é ideia principal que dá sustentação a muitos resultados sobre volumes de sólidos, inclusive na determinação de expressões para o cálculo de volume de prismas, cilindros, dentre outros.

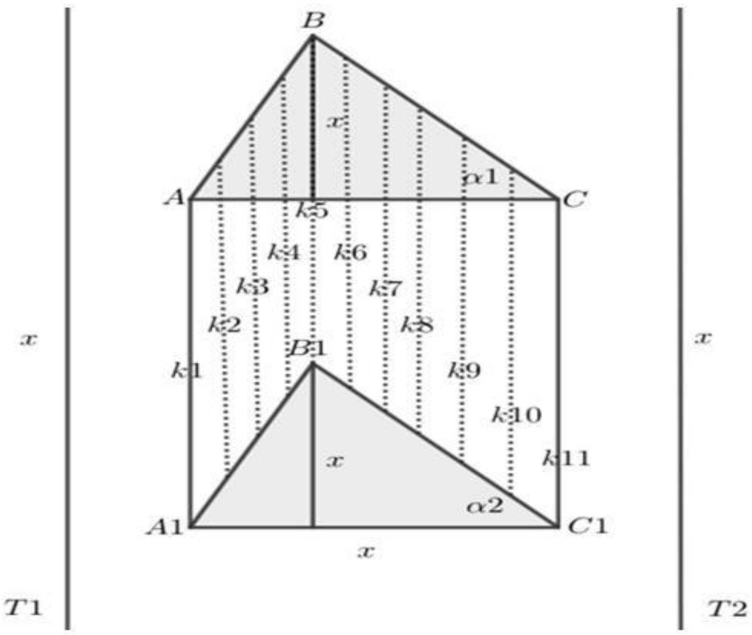
Agora, analisemos as demonstrações do Princípio de Cavalieri, de modo formal, sob os pontos de vista da Geometria Plana e da Geometria Espacial.

- **Princípio de Cavalieri – Enunciado para geometria plana**

> Dadas duas regiões planas incluídas entre um par de retas paralelas, se toda reta paralela ao par de retas e que intersecta as regiões o faz em segmentos cujos comprimentos estão sempre na mesma razão, então as áreas das regiões também estão nessa mesma razão.

Uma demonstração:

Figura 19: Prisma triangular Prisma triangular



Fonte: autoria própria.

Sejam $\alpha 1$ e $\alpha 2$ regiões planas entre as retas $p1$ e $p2$, sendo $p1$ paralela a $p2$, então existem infinitas retas $r1, r2, r3, \ldots, rn$, paralelas a $p1$ e $p2$ intersectando $\alpha 1$ e $\alpha 2$ e mantendo a mesma razão, ou seja: $\frac{r1}{p1} = \frac{r2}{p2} = \frac{r3}{p3} = \frac{rn}{pn}$, fazendo com isso que $\frac{\alpha 1}{\alpha 2}$.

Vejamos algumas aplicações práticas, a primeira contendo duas regiões planas triangulares paralelas. Então:

Sejam A, B e C vértices da região $\alpha 1$ e $A1$, $B1$ e $C1$ vértices da região $\alpha 2$; $\overline{AB1}$ e $\overline{C1}$ segmentos de retas que unem os planos $\alpha 1$ e $\alpha 2$, as retas paralelas $T1$ e $T2$ com medidas iguais x, agora sejam: $K1, K2, K3, K4, K5, K6, k7, k8, k9, k10, k11, \ldots, Kn$ são paralelas a $T1$ e $T2$, com suas respectivas medidas iguais a x, fazendo com que estejam na mesma razão e intersectando as regiões planas, temos que: $\frac{K1}{T1} = \frac{k2}{T2} = \frac{K3}{T3} = \frac{K4}{T4} = \frac{K5}{T5} = \frac{K6}{T6} = \frac{K7}{T7} = \frac{K8}{T8} = \frac{K9}{T9} = \frac{K10}{T10} = \frac{K11}{T11} = \frac{Kn}{Tn}$, logo se um dos lados dessas regiões forem iguais a x e as alturas relativas a esse lado, em cada região plana também forem congruentes a x, admitiremos a seguinte razão: $\frac{\alpha 1}{\alpha 2}$, onde observaremos a unicidade dessas razões, mostrando assim a definição do Princípio de Cavalieri ‘para a geometria plana, mostrada na figura 19.

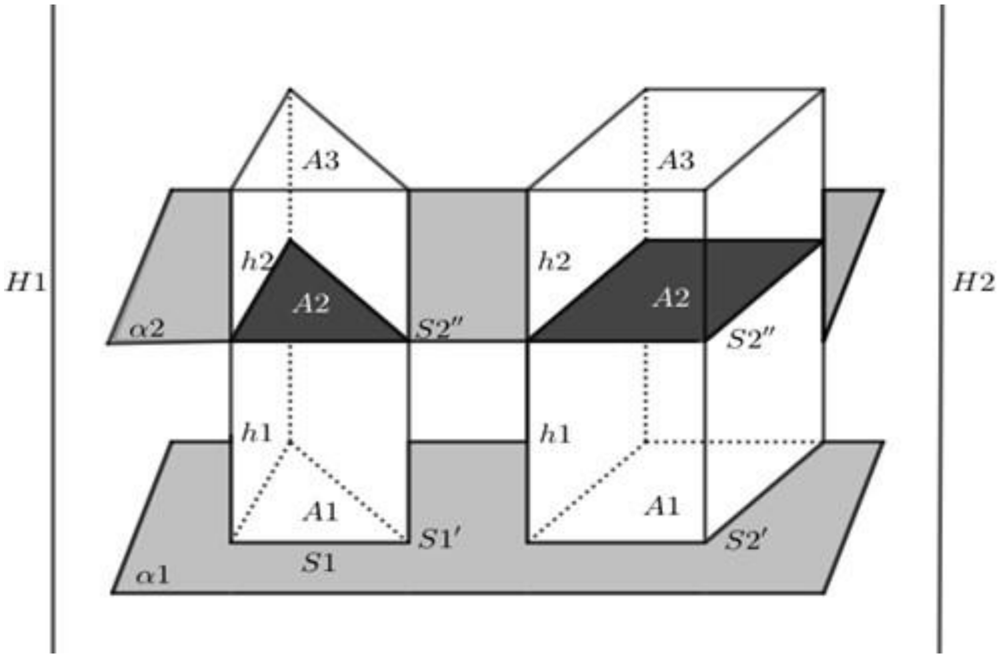
- **Princípio de Cavalieri – Enunciado para geometria espacial**

> Dados dois sólidos incluídos entre um par de planos paralelos, se todo plano paralelo ao par de planos e que intersecta os sólidos os faz em seções cujas áreas estão sempre na mesma razão, então os volumes dos sólidos também estão na nessa mesma razão.

Uma demonstração:

Tomemos $S1$ e $S2$ como sólidos entre os planos $\alpha 1$ e $\alpha 2$, sendo $\alpha 1$ paralelo a $\alpha 2$. Então existem infinitos planos $\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha n$, paralelos, intersectando $S1$ e $S2$, mostrando que essas secções fazem, as regiões planas $A1, A2, A3, \ldots, An$ em áreas com a mesma razão, ou seja: $\frac{A1}{A2} = \frac{A2}{A3} = \frac{A3}{A4} = \frac{An}{An}$, fazendo com isso que os volumes desses sólidos estejam também na mesma razão, onde precisamos observar as alturas relativas em cada sólido, como também se quisermos fracioná-los. Assim temos: os volumes de $S1 = A1 \;.\; H1$; $S1' = A1 \;.\; h1$; $S1'' = A2 \;.\; h2$; logo podemos concluir que $Sn = An \,.\, Hn$, conforme a figura 20.

Figura 20: Prisma triangular e prisma quadrangular

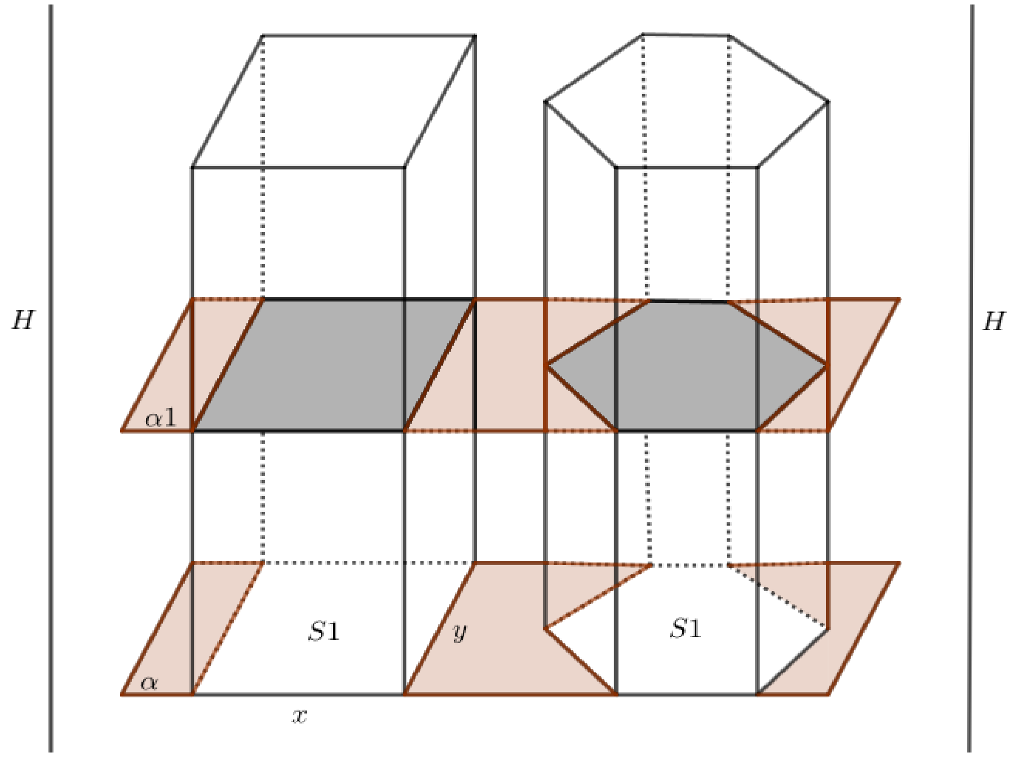


Fonte: autoria própria.

Vejamos o seguinte exemplo: Seja em um plano α, um prisma quadrangular e outro prisma hexagonal de mesma altura, a qual denominaremos de H, cuja uma de suas bases estão contidadas no plano α, e ambas regiões planas $S1$, respectivamente contendo a mesma área. Notemos também o plano $\alpha1$, que secciona um dos primas também interceptará o outro, por ser paralelo a α. Sendo assim, qualquer secção transversal de um desses prismas será congruente às suas bases, como também qualquer plano $\alpha1,\ \alpha2,\ \alpha3,\ .\ .\ .\ ,\ \alpha n$, nas condições descritas anteriormente, determina nesses prismas secções de mesma área. Portanto, o princípio de Cavalieri nos permitirá observar que os prismas terão volumes iguais.

Tomemos um dos lados da região plana do prisma quadrangular, ao qual sua medida será x e o outro lado denotaremos por y, onde sua superfície plana $Área =$ $S1$ é dada por: $S1 = x\ .\ y$. Logo, o seu volume V será aplicado por $V =$ $Área\ da\ superfície\ .\ Altura$, ou seja, $V = x\ .\ y\ .\ H$, que também é volume do outro prisma. Com isso, podemos concluir que o volume de qualquer que seja o prisma é igual ao produto da área de sua base pela medida de sua altura, conforme ilustra a figura 21.

Figura 21: Prisma quadrangular e prisma hexagonal



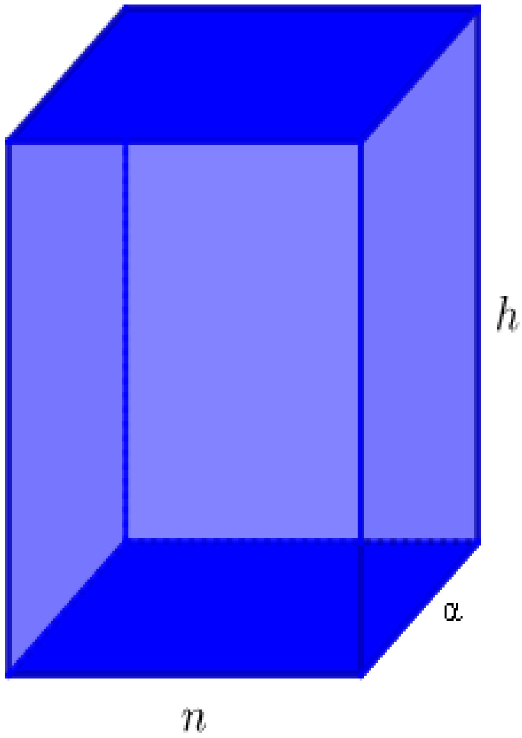
Fonte: autoria própria.

Notemos assim, que no cálculo do volume de um prisma é inevitável o uso do Princípio de Cavalieri. Com isso é necessário conhecer a área das superfícies planas que são paralelas uma da outra, que pode ser formada por qualquer polígono. É chamado um prisma reto, todo prisma que possui bases perpendiculares superfícies laterais.

O volume de uma prisma, no contexto da educação básica, é calculado de forma intuitiva a partir da ideia que tem como suporte o Princípio de Cavalieri, chegando-se ao resultado que é produto entre a área da superfície plana que representa a base As e a altura do prisma h. Ou seja, $V = As\,.h$.

A ideia intuitiva que há por trás desse processo é que o prisma representa a união de infinitas regiões planas de espessura α $(com\ \alpha\ tendendo\ a\ zero)$, cada uma com área congruente à área da base, de modo que, $n.\ \alpha\ =\ h$. Aí, aplicando-se o princípio de Cavalieri, temos o produto da área da base pela medida da altura. .

Figura 22: Prisma quadrangular, com n e α sendo as medidas da base e h altura relativa às bases

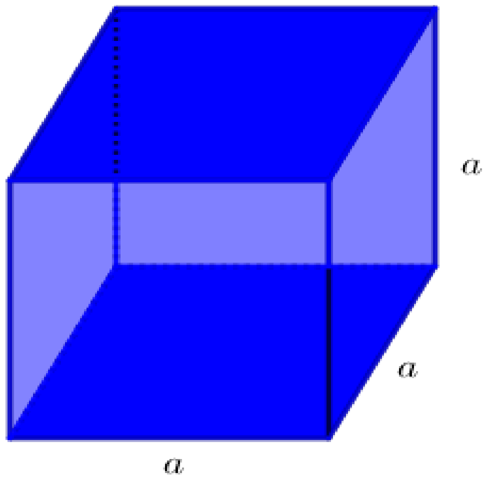


Fonte: Autoria própria

O cubo possui todas as arestas[6] congruentes e equidistantes. Então, para calcular o volume do cubo, precisamos da área da superfície do quadrado, que é igual ao quadrado da aresta. Para calcular o volume, multiplicamos pela altura, que, no caso do cubo, também é igual à medida da aresta. Assim, o volume do cubo de aresta a é dado por: $V = a^3$.

Figura 23: Cubo, com a sendo as medidas da base e a altura relativa às bases

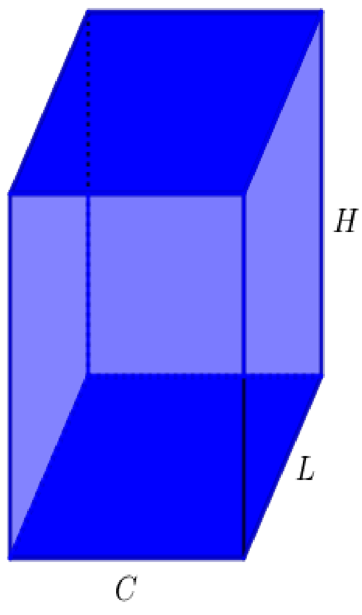
[6] Uma aresta é um segmento de reta que une dois pontos conhecidos como vértices.



Fonte: Autoria própria

De modo análogo, o volume do paralelepípedo retângulo[7] pode ser encontrado quando multiplicamos as suas três dimensões: a medida referente ao comprimento C, largura L e altura $H,$ ou seja, $V = C\,.\,L\,.\,H$.

Figura 24: Paralelepípedo retângulo, com C e L sendo as medidas da base e $\boldsymbol{H}$ altura relativa as bases



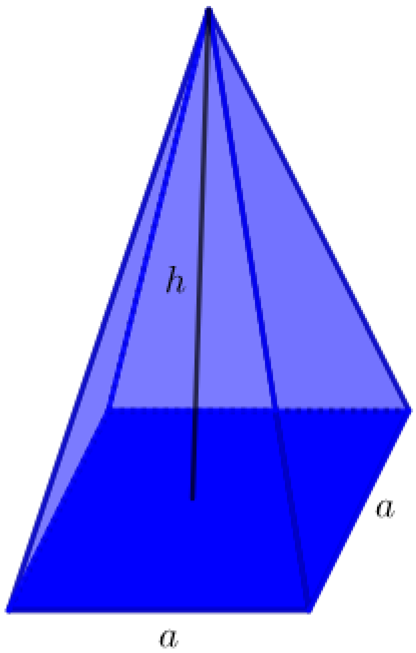
Fonte: Autoria própria.

A pirâmide é o sólido geométrico que possui apenas uma base, que é uma superfície plana, e as faces laterais são triângulos, ligando os vértices da base a um

[7] Paralelepípedo retângulo é um sólido geométrico, formado por regiões (faces) planas retangulares .

ponto fora da base conhecido como vértice da pirâmide. Assim como o prisma, a pirâmide também pode possuir diferentes formas de regiões planas, nas superfícies que a compõem. Para calcular o volume de uma pirâmide, nos utilizamos do fato de que todo prisma pode ser dividido em exatamente três pirâmides congruentes, de mesma base e altura do prisma.

Figura 25: Pirâmide quadrangular, com a sendo as medidas da base e $\boldsymbol{h}$ altura relativa à base



Fonte: Autoria própria.

Assim, o volume de uma pirâmide é dado por um terço do volume de um prisma que possui mesma base e altura da pirâmide. $V = \frac{As\ .\ h}{3}$.

O cilindro é o sólido geométrico inserido na categoria do que costumamos chamar de “corpos redondos”, uma vez que a sua base e a sua lateral não são polígonos. Ele possui duas bases circulares e paralelas de mesmo raio. Para calcular o volume de um cilindro, precisamos apenas da medida do seu raio R elevado ao quadrado, de π e da sua altura H:" Portanto,

$$V = As\,.H \leftrightarrow V = \pi\,.R^2\,.H.$$

O cone possui uma superfície plana formada por um círculo e um ponto fora desse plano chamado de vértice. O cálculo do volume do cone é necessário conhecer a sua altura H e o raio R e π de sua superfície plana, para aplicar o produto entre eles:" Logo, $V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3}$.

A esfera é também comum no dia a dia, como as bolas que utilizamos para praticar certos esportes, além de ser um formato comum na natureza. Para calcular o volume da esfera, é necessário conhecer somente o seu raio R: Ou seja:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3.$$

O cálculo do volume desses sólidos estudados na educação básica é justificado de forma intuitiva, e isso é algo significativo quando pensamos na compreensão do aluno, quando pensamos nas questões didático-metodológicas inerentes à essa etapa da educação.

No entanto, compreendemos ser fundamental para o professor de Matemática ter uma compreensão mais profunda desses processos, conhecer justificativas mais consistentes desses resultados. Isso o fará interpretar os objetos de estudo muito além da trivialidade com que são expostos nos livros didáticos. É nessa perspectiva que faremos um aprofundamento desses temas usando para isso conhecimentos de Matemática estudados no curso de Licenciatura.

5. A INTEGRAL DEFINIDA NO CÁLCULO DE ÁREAS E DE VOLUMES

Para começarmos a explanar um pouco sobre o conceito de integral definida e o cálculo de áreas, precisamos relatar sobre as inquietações que nos deparamos ao adentrarmos em algum curso superior de exatas, sejam de Matemática, Engenharias, Física, Química, Biologia entre outros, os quais precisamos desenvolver as disciplinas dos Cálculos, mais precisamente no que diz respeito a Limites, Derivadas e Integrais. Essas reflexões nos levam a pensar o motivo de aprendermos essas coisas, o quanto isso contribuirá para nossa formação acadêmica e o quando saber aplicar essas ferramentas matemáticas.

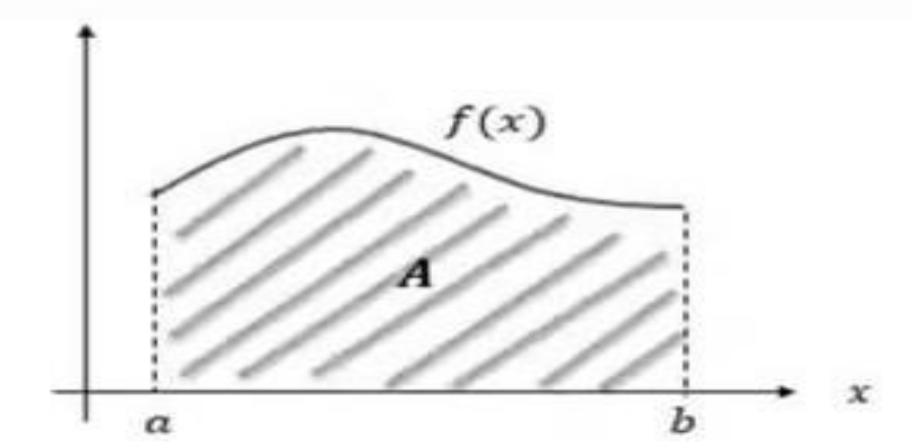
No estudo de Matemática há um conjunto de temas que se tornaram essenciais para a interpretação de muitos eventos da realidade. Por exemplo, o conceito de derivada que é usado para descrever o comportamento de uma função à medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor possui uma diversidade de aplicações em várias ciências. Dentro do âmbito matemático, as derivadas são usadas no cálculo diferencial e integral e em outros ramos da análise matemática para definir derivadas, continuidade de funções, soma infinitas , integrais definidas e integrais impróprias.

Outros exemplos temáticos importantes são o conceito de limite e suas aplicações, a álgebra linear, as equações diferenciais, as geometrias euclidiana, espacial e analítica, dentre outros. Fazendo uso do estudo de funções, dos limites e das derivadas está o conceito de Integral, que é substancial para diversos aprofundamentos matemáticos, para aplicações, para comprovação de resultados. É a partir desse conceito que faremos uma releitura dos temas área e volume, mostrando como comprovar resultados considerados no contexto da educação básica com bases mais profundas da matemática. O conceito da integral surgiu a partir da necessidade de se calcular a área de uma região curva não simétrica e em alguns cálculos envolvendo volumes, daí a definição de Integral é dada por ser a operação inversa, das que são realizadas pela derivação que busca a identificação da função que a origina.

5.1 Conceito de integral no cálculo de áreas e no cálculo de volumes

Segundo Soares 2022, aplicação mais direta das integrais é o cálculo de áreas sobre curvas**.** A própria definição de integral nos trás essa aplicação, quando fazemos a integral de uma função contínua $f(x)$ do ponto a ao ponto b estamos calculando a área sobre a curva $f(x)$ de entre esses pontos.

Figura 26: Integral como o cálculo de área sobre a curva de $\boldsymbol{a}$ até $\boldsymbol{b}$

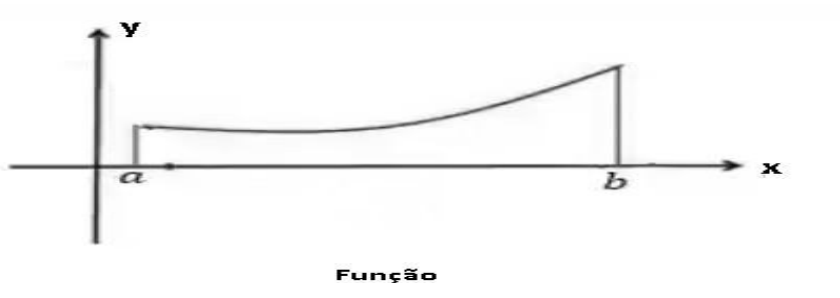


Fonte: Disponível em: <https://www.respondeai.com.br>.

$$A = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Segundo Soares 2022, a integral também pode ser utilizada como ferramenta para o cálculo de volumes. Imaginemos que temos uma função contínua qualquer $f(x)$, definida no intervalo $[a, b]$, como mostra abaixo:

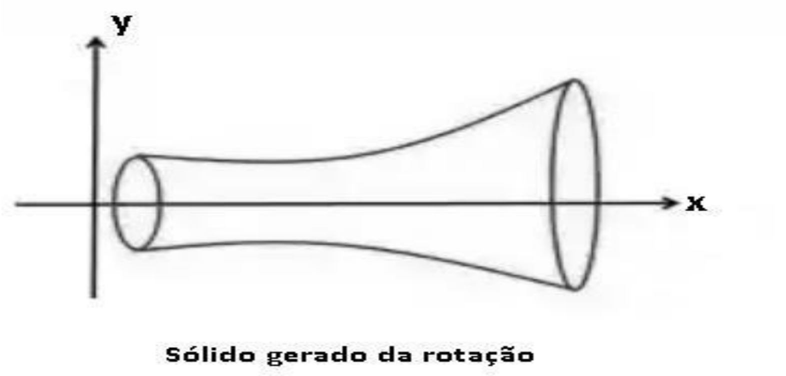
Figura 27: Sólido que será gerado antes da rotação no eixo x



Fonte: Disponível em: <https://www.respondeai.com.br>.

Se pegarmos essa região mostrada à cima e rotacionarmos ela em torno do eixo x nós vamos obter um sólido, como podemos ver abaixo.

Figura 28: Sólido gerado depois da rotação no eixo x



Fonte: Disponível em: <https://www.respondeai.com.br>.

A gente consegue calcular o volume desse sólido calculando a seguinte integral:

$$V = \int_a^b \pi \, [f(x)]^2 dx$$

5.1.2. O que é uma integral definida?

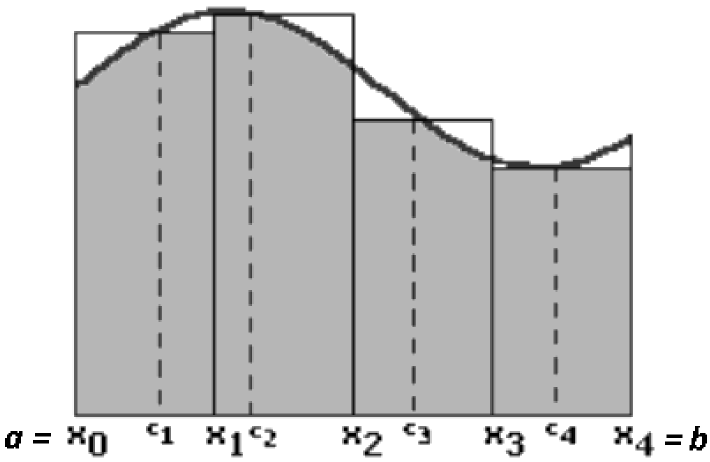
Quando a função integrável f é não negativa a integral definida de f em um intervalo fechado [a, b] é a área abaixo do gráfico de f acima do intervalo [a, b] no eixo x. A integral definida é definida formalmente como o limite das somas de f do Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), que foi um matemático alemão, com contribuições fundamentais para a análise e a geometria diferencial. Em intervalo quando a norma da partição vai para zero.

Essa soma é dada pela divisão da região a ser calculada em forma (retângulos, trapézios, parábolas ou cubos) que juntos formam uma região que é similar àquela a ser medida, então calcula-se a área de cada uma das formas e finalmente soma-se todas essas áreas. Com isso, as somas de Riemann nos ajudam a aproximar integrais definidas, mas também nos ajudam a definí-las formalmente.

Uma partição de um intervalo [a, b], geralmente é denotada pela letra P, na reta real é uma sequência finita e estritamente crescente $(x_0,\ x_1,\ x_3,\ .\ .\ .\ ,\ x_k)$ de números reais tal que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_4 < \ldots < x_k = b$$

Figura 29: Área de uma partição do intervalo de [a, b].



Fonte: Disponível em: <http://www.uel.br/>

Convém destacar neste ponto o que, para alguns, pode parecer um paradoxo. Se dissermos que com o cálculo da integral definida demonstra-se de modo cabal o algoritmo de cálculo de um retângulo, por exemplo, como justificar a ideia da integral a partir da área de retângulos?

Uma análise sem profundidade dessa situação pode levar a uma falsa interpretação do uso da integral como recurso suficiente para o calculo de áreas de figuras planas. Ou seja, seria uma interpretação de que a integral dependeria da aceitação do algoritmo de cálculo da área do retângulo.

No entanto, essa dúvida se desfaz com a teoria dos infinitesimais e sua aplicação no particionamento que é feito no cálculo de uma integral definida. Ou seja, quando dizemos que uma região é dividida em retângulos e a largura de cada um desses retângulos tende a zero, estamos, na verdade, dizendo que a região está sendo dividida em infinitos retângulos e, portanto, cada um desses retângulos se aproxima de um segmento de reta. A integral definida é, portanto, a soma de todos esses “segmentos”. Dessa forma, há uma fragilidade em falarmos área de retângulo, quando o intervalo $[a,\ b]$ é particionado em infinitos intervalos: $[a,\ x_1]$, $[x_1,\ x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$ $[x_4, x_5]$, ..., $[x_n, x_{n+1}]$, $[x_{n+1}, b]$, com n tendendo ao infinito. Com isso, supera-se qualquer inadequação no argumento de que uma das provas definitivas do cálculo da área de uma superfície é feita a partir da integral definida.

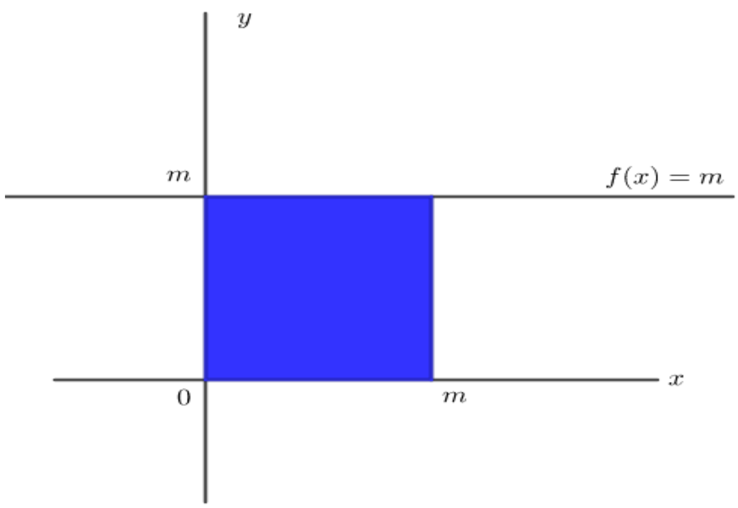
5.2 A relação Geometria e Álgebra no estudo de áreas: aplicações da integral definida

Com as diversas aplicabilidades da Geometria com o auxílio da Álgebra, tais como calcular áreas de diversas regiões poligonais e regiões circulares. Essas aplicações podem ser utilizadas para o cálculo de áreas de regiões que possam ser divididas em um número finito de regiões poligonais ou até de setores circulares. A região não podendo ser decomposta deste modo o procedimento não consegue ser adotado para o cálculo de sua área. A partir dessa não decomposição o cálculo da área de certas regiões para as quais os recursos da Geometria se mostram ineficazes, partindo para o uso da integral definida. Vamos mostrar algumas aplicações da integral para provar os resultados utilizados no cálculo da área das principais figuras planas.

5.2.1 Área do quadrado

Aplicando a integral definida deduza que a área de um quadrado de lado m é igual a m^2. Analisemos a imagem a seguir, para aplicarmos a integral.

Figura 30: Quadrado com lados de medidas m



Fonte: autoria própria.

Seja $f(x) = m$ uma função constante qualquer, com isso, aplicando as regras de integração temos, para mostrar a área S.

$$S = \int_0^m f(x)d(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_0^m md(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = m\left(\int_0^m 1d(x)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = m.x\ \Big]_0^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = m.(m-0) \Rightarrow$$

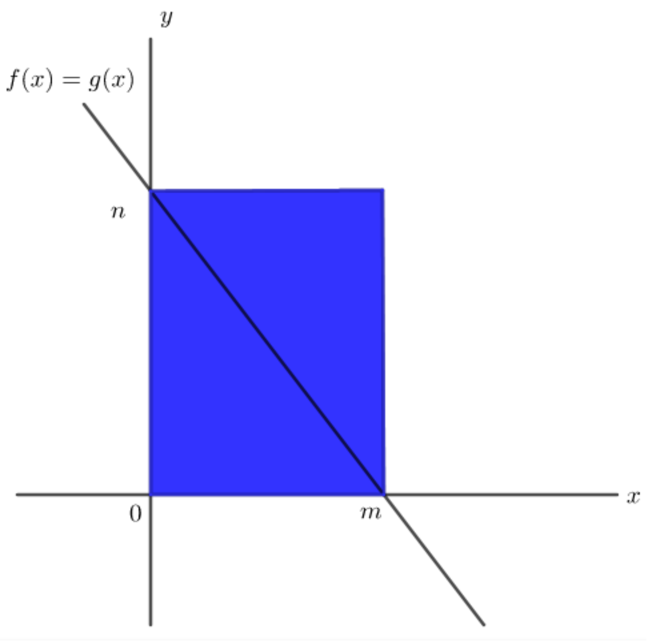
$$\Rightarrow S = m.m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = m^2.$$

5.2.2. Área do retângulo

Desenvolvendo a integral definida para dedução da área de um retângulo, com lados medindo m e n, para que seja igual ao produto de $m.n$. Através da figura a seguir analisaremos a aplicabilidade dessa integral.

Figura 31: Retângulo com lados de medidas $\boldsymbol{m\ e\ n}$



Fonte: autoria própria.

Seja o triângulo retângulo de lados medindo m e n, temos que, a aplicação de uma função afim $f(x) = ax + b, com\, f(0) = a.0 + b \leftrightarrow b = n\ e\ f(m) = a.m + b \leftrightarrow am + n = 0 \leftrightarrow am = -n \leftrightarrow a = -\frac{n}{m}$. Logo, a $f(x) = -\frac{n}{m}.x + n$.

Agora, aplicando a integral definida, para encontrarmos a área S desse triângulo retângulo, temos:

$$S = \int_0^m f(x)d(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_0^m \left(-\frac{n}{m}.x + n\right) d(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \left(-\frac{n}{m}.\frac{x^2}{2} + n.x\right)\Big]_0^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = -\frac{n}{m}.\frac{m^2}{2} + n.m - \left(-\frac{n}{m}.\frac{0^2}{2} + n.0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = -\frac{m^2n}{2m} + nm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = -\frac{m^2n + 2m^2n}{2m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{m^2n}{2m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{mn}{2}.$$

Logo, deduzimos a área do triângulo retângulo, como precisamos mostrar a área do retângulo (SR), sendo $f(x) = g(x)$, temos a seguinte situação:

$$SR = 2.\frac{mn}{2} \Rightarrow$$

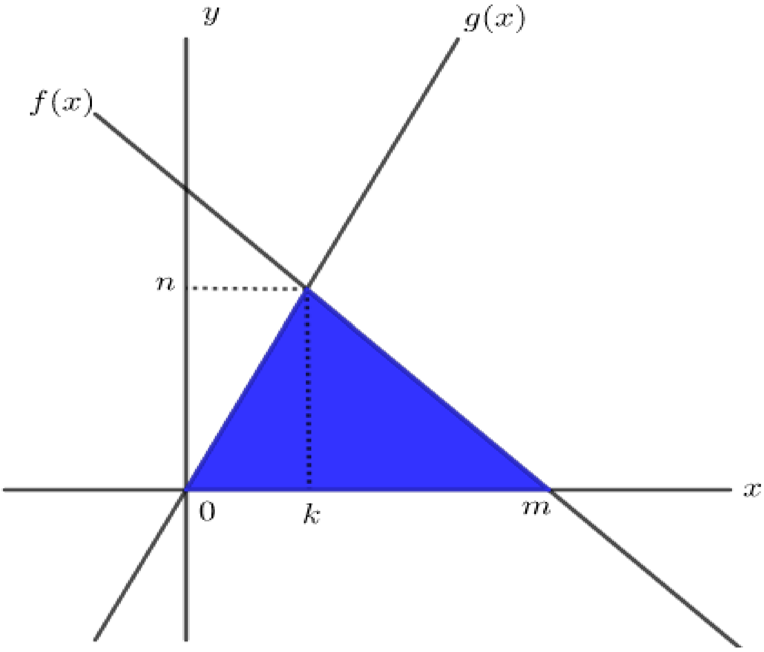
$$\Rightarrow SR = \frac{2mn}{2} \Rightarrow$$

$$SR = mn.$$

5.2.3 Área do triângulo

Aplicando a integral definida deduza que a área de um triângulo de lado m e a altura retativa a esse lado m, a qual adotaremos por n, é igual a $\frac{m\,.\,n}{2}$. Analisemos a ilustração abaixo, para aplicarmos a integral.

Figura 32: Triângulo com lado $\boldsymbol{m}$ e altura relativa $\boldsymbol{n}$



Fonte: autoria própria.

Seja a função afim na sua forma genérica, denotada por $g(x) = ax + b$, onde temos que: $g(k) = a.k + b \leftrightarrow ak + b = n\ e\ g(0) = a.0 + b \leftrightarrow a.0 + b = 0 \leftrightarrow b = 0$.

$$\begin{cases} a.k + b = n \\ b = 0 \end{cases}$$

Aplicando o método da substituição de sistemas lineares 2x2, substituiremos $b = 0$, em $a.k + 0 = n \leftrightarrow a.k = n \leftrightarrow a = \frac{n}{k}$. Sendo assim, a função afim $g(x) = \frac{n}{k}.x$

Agora seja, a função afim a qual denotaremos por $f(x) = cx + d$, com isso, temos: $f(k) = c.k + d \leftrightarrow c.k + d = n\ e\ f(m) = c.m + d \leftrightarrow c.m + d = 0$, sendo assim aplicamos o seguinte sistema.

$$\{c.k + d = n\ c.m + d = 0$$

Pelo método da adição de sistema lineares 2x2, teremos:

$$\{c.k + d = n\ c.m + d = 0\ (-1)$$

$$\{c.k + d = n - \ c.m - d = 0$$

Portanto, ficamos com $c.k - c.m = n \leftrightarrow c.(k - m) = n \leftrightarrow c = \frac{n}{k-m}$. Agora aplicando o valor de c em $c.m + d = 0$, temos:

$$\frac{n}{k-m}.m + d = 0 \leftrightarrow d = -\frac{n}{k-m}.m.$$

Logo, a função $f(x) = \frac{n}{k-m}.x - \frac{nm}{k-m}$.

Aplicaremos a partir de agora, uma das regras da integral definida, para tentarmos deduzir a fórmula da área S do triângulo.

$$S = \int_0^k g(x)dx + \int_k^m f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_0^k \frac{n}{k}.x\ d(x) + \int_k^m \frac{n}{k-m}.x - \frac{nm}{k-m}\ d(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{n}{k}.\frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^k + \left(\frac{n}{k-m}.\frac{x^2}{2} - \frac{nmx}{k-m}\right)\Big]_k^m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{n.k^2}{2k} - \frac{n.0^2}{2k} + \frac{n,m^2}{2(k-m)} - \frac{nm.m}{k-m} - \left(\frac{n.\ k^2}{2(k-m)} - \frac{nmk}{k-m}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{nk^2.\ (k-m) + nm^2.\ k - nm^2.\ 2k - nk^2.\ k + nmk.\ 2k}{2k(k-m)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{nk^3 - nmk^2 + nm^2k - 2nm^2k - nk^3 + 2nmk^2}{2k(k-m)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{nmk^2 - nm^2k}{2k(k-m)} \Rightarrow$$

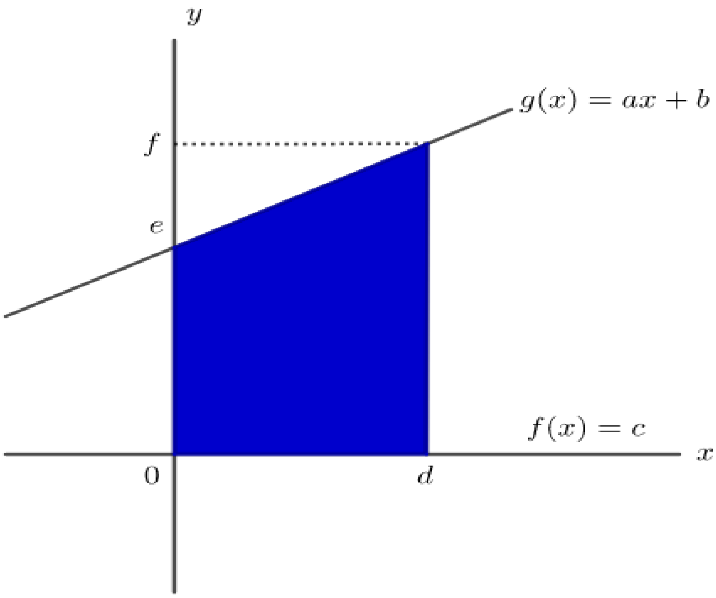
$$\Rightarrow S = \frac{nmk(k-m)}{2k(k-m)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{n.m}{2}.$$

5.2.4 Área do trapézio

Aplicando a integral definida na dedução que a área de um trapézio de lado maior f, lado menor e a altura relativa a esse lado maior, a qual adotaremos por d, é igual a $\left(\frac{(f+e)\,.\,d}{2}\right)$. Analisemos a figura apresentada abaixo, para aplicarmos a integral.

Figura 33: Trapézio de lado maior $\boldsymbol{f}$, lado menor $\boldsymbol{e}$ e a altura relativa medindo $\boldsymbol{d}$



Fonte: autoria própria.

Seja as funções, $g(x) = ax + b$, uma função afim e $f(x) = c$ uma função constante, tal que utilizaremos as mesmas na dedução da fórmula da área A do trapézio.

Tomemos a função afim:

$$g(0) = a.0 + b \leftrightarrow 0 + b = e \leftrightarrow b = e;$$

$$g(d) = a.d + b \leftrightarrow ad + b = f \leftrightarrow ad + e = f \leftrightarrow ad = f - e \;\; a = \frac{f-e}{d}.$$

Então: $g(x) = \frac{f-e}{d}.x + e$. E agora, a função constante: $f(x) = 0$. Partindo dessas situações temos e aplicando uma das regras de integração, temos:

$$S = \int_0^d g(x)dx - \int_0^d f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_0^d \left(\frac{f-e}{d} \, . x + e\right) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_0^d \frac{f-e}{d} \, . \, x \, dx + \int_0^d e \, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{f-e}{d} \, . \frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^d + (e \, . \, x)\Big]_0^d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{(f-e)}{d} \, . \frac{d^2}{2} - \frac{(f-e)}{d} \, . \frac{0^2}{2} + e \, . \, d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{(f-e)d^2}{2d} + ed \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{(f-e)d}{2} + ed \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{(f-e)d + 2ed}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{fd - ed + 2ed}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{fd + ed}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{d(f+e)}{2}.$$

Como mostramos, todas as expressões utilizadas para o cálculo de área das principais figuras planas podem ser estabelecidas a partir da integral definida. Evidentemente, o estudante da educação básica não vai estudar Cálculo, com derivadas e integrais. No entanto, defendemos uma reflexão sobre tais aplicações considerando dois fatores. O primeiro é que o conhecimento dessas relações, por parte do professor de matemática da educação básica, o levará a dar maior significação a esses temas, seja na compreensão da aplicação da matemática superior, seja no fortalecimento dos conteúdos básicos que ele leciona.

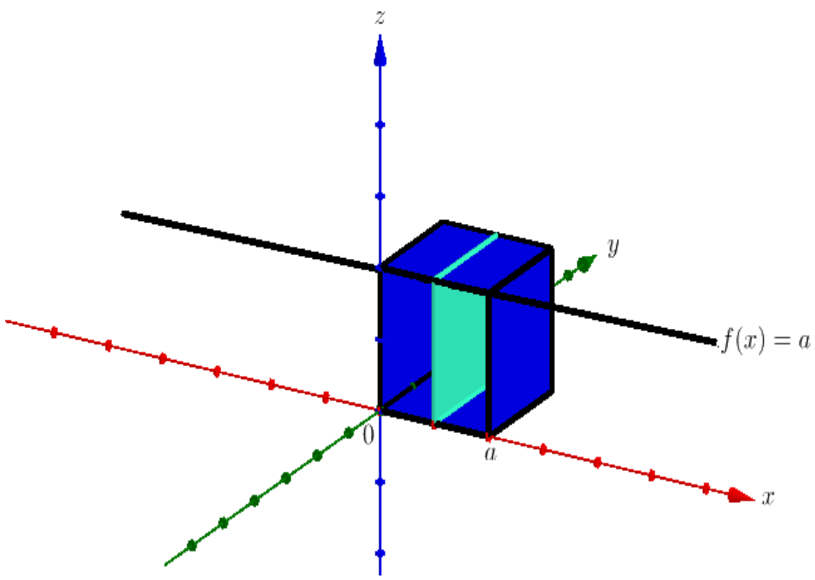
Um segundo fator, não menos importante, é que, indiretamente, esse estudo mostra a importância da observância dessa relação durante o estudo das disciplinas de cálculo no curso de licenciatura. Pensamos que lecionar o cálculo com integral contemplando essa perspectiva tornará o estudo desse tema, para os futuros professores muito mais relevante, pois se estará mostrando uma relação direta com a Matemática do curso de formação e a matemática que ele irá lecionar.

5.3 A relação Geometria e Álgebra no estudo de volumes: aplicações da integral definida

5.3.1 Volume do cubo

Aplicando a integral definida deduza que o volume de um cubo de arestas medindo a é igual a a^3**.** Analisemos a figura espacial a seguir, para aplicarmos a integral.

Figura 34: Volume do cubo, com arestas medindo $\boldsymbol{a}$.



Fonte: autoria própria.

Sejam as regiões planas das faces do cubo, onde as mesmas formam superfícies quadradas, sendo as áreas das mesmas iguais a $S(x) = a^2$.

$$V = \int_0^a S(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \int_0^a a^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = (a^2.x)\,\Big]_0^a \Rightarrow$$

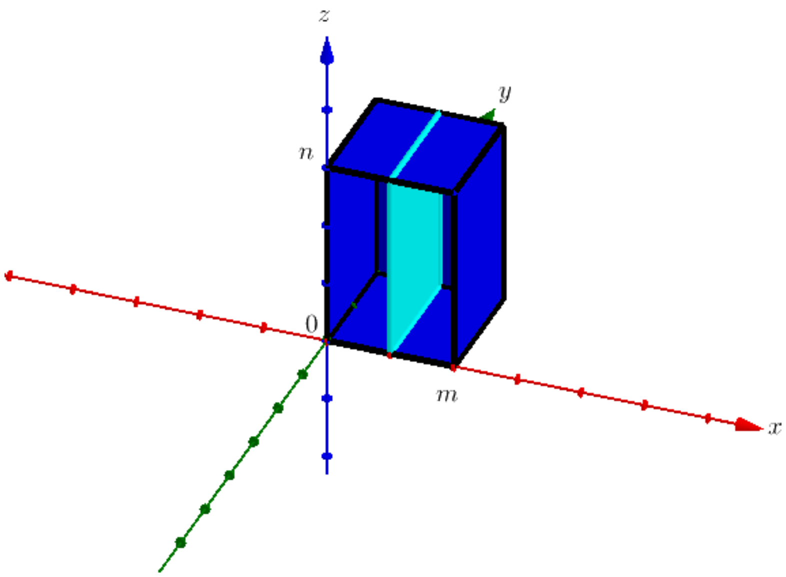
$$\Rightarrow V = a^2.a - a^2.0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = a^3.$$

5.3.2 Volume do prisma reto (Paralelepípedo)

Usando a aplicabilidade da integral definida, para deduzirmos o volume do prisma reto, que é igual a $m^2.n$.

Figura 35: Volume do prisma quadrangular, com arestas medindo $\boldsymbol{m}$



Fonte: autoria própria.

Tomemos as regiões planas quadrangulares das faces do prisma reto, onde duas delas formam superfícies quadradas e quatro retangulares, sendo as áreas das regiões quadradas iguais a $S(x) = m^2$. Partindo das áreas dessas superfícies, aplicamos a seguinte integral definida, para encontramos o volume deste sólido.

$$V = \int_0^n S(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \int_0^n m^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = (m^2 . x)\Big]_0^n \Rightarrow$$

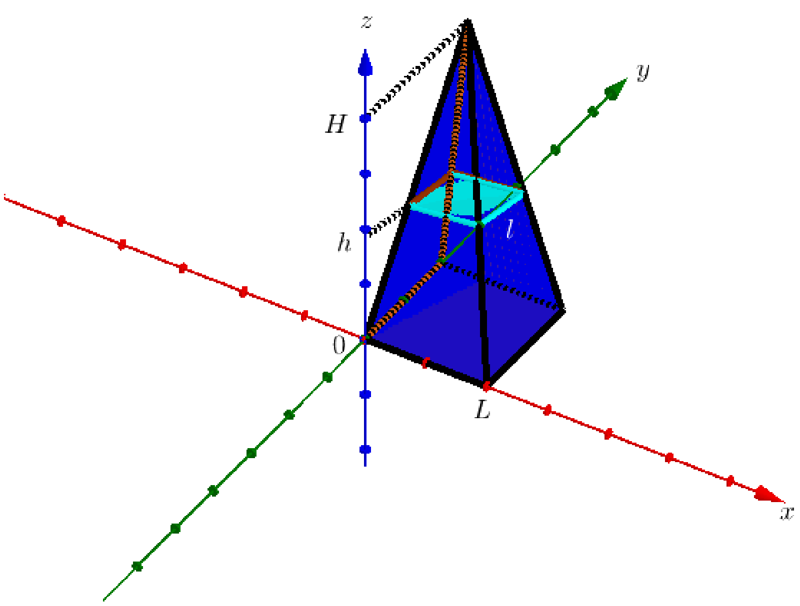
$$\Rightarrow V = m^2 . n - m^2 . 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = m^2 n.$$

5.3.3 Volume da pirâmide

Usemos a integral definida, para deduzirmos o volume de uma pirâmide, que é dada pela seguinte sentença: $V = \frac{1}{3} L^2 . H$.

Figura 36: Volume da pirâmide quadrangular, com a aresta medindo L e altura relativa a L, com medida H



Fonte: autoria própria.

Primeiramente, precisamos aplicar os conceitos da semelhança de triângulos, tendo em vista, a obtenção da medida do lado l, da região que proporcionará a função área $S(x)$, com o fim de deduzirmos através da integral definida o volume dessa pirâmide.

Seja, $\frac{l}{L} = \frac{h}{H} \leftrightarrow \ l \ = \ \frac{h \, . \, L}{H}$, com isso, encontramos o lado da região da função área, por essa superfície ser quadrada, aplicamos:

$$S(h) \ = \ l^2 \ \leftrightarrow \ S(h) \ = \ (\frac{h \, . \, L}{H})^2 \ \leftrightarrow S(h) \ = \ \frac{h^2 . \ L^2}{H^2}.$$

Então, o volume se dará da seguinte aplicação:

$$V = \int_0^H S(h)dh \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \int_0^H \frac{h^2 . \ L^2}{H^2} dh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{L^2}{H^2} \int_0^H h^2 dh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = (\frac{L^2}{H^2} . \frac{h^3}{3})]_0^H \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{L^2}{H^2} (\frac{H^3}{3} - \frac{0^3}{3}) \Rightarrow$$

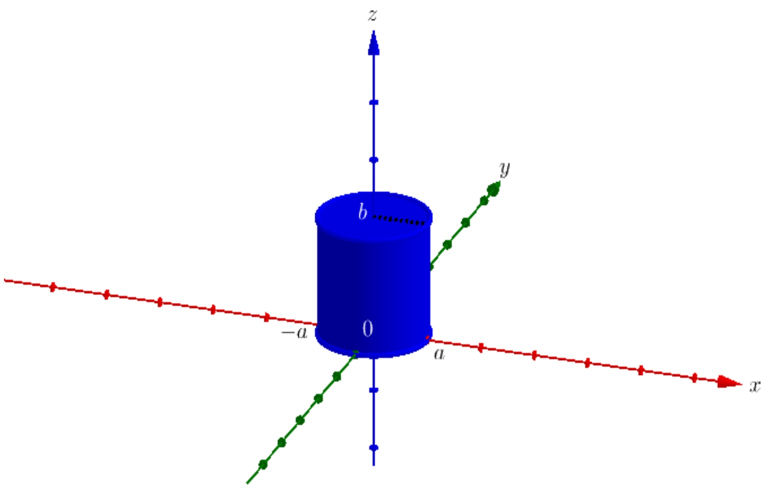
$$\Rightarrow V = \frac{L^2}{H^2} . \frac{H^3}{3} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} . L^2 . H.$$

5.3.4 Volume do cilindro

Na aplicação da integral definida, para dedução do volume do cilindro que é aplicado da seguinte forma: $V = \pi . a^2 . b$.

Figura 37: Volume do cilindro, com a medida do raio $\boldsymbol{a}$ e altura $\boldsymbol{b}$



Fonte: autoria própria.

No desenvolvimento para encontrarmos a função área, aplicamos a área do círculo, que é dada por: $S(x) = \pi . a^2$. Agora com uso da integral definida, temos o volume da seguinte maneira.

$$V = \int_0^b S(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \int_0^b \pi . a^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = (\pi . a^2 . x)\Big]_0^b \Rightarrow$$

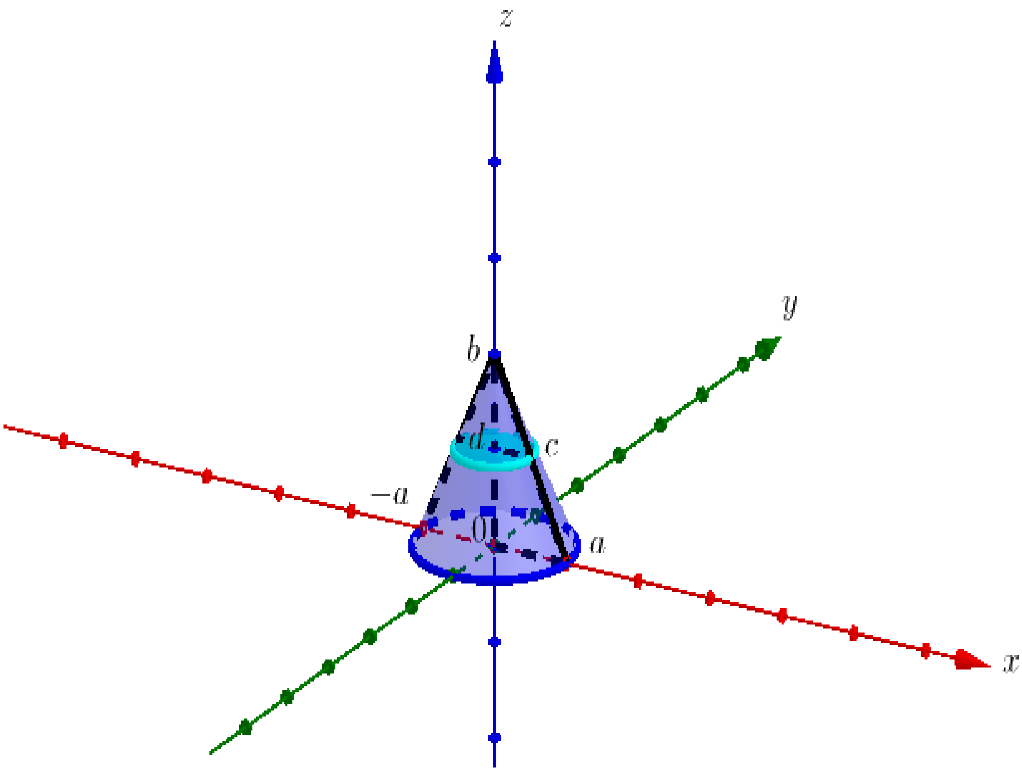
$$\Rightarrow V = \pi . (a^2 . b - a^2 . 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \pi . a^2 . b.$$

5.3.5 Volume do cone

Aplicando a integral definida deduza que o volume de um cone com raio de medida a é igual a $V = \frac{1\pi a^2 . b}{3}$. Analisemos a figura espacial representada abaixo, para aplicarmos a integral nessa dedução.

Figura 38: Volume do cone, com a medida do raio a e altura b



Fonte: autoria própria.

Apliquemos a semelhança de triângulos, que é um conteúdo elementar do ensino básico da geometria plana, tendo em vista encontrarmos a medida do raio que gerará a função área. Com isso, temos o seguinte raio c:

$$\frac{c}{a} = \frac{b-d}{b} \leftrightarrow c = \frac{a.(b-d)}{b}$$

Apartir do descobrimento do raio, usamos a área da superfície circular para usarmos a função área que é dada por,

$$S(x) = \pi . c^2 \leftrightarrow S(x) = \pi . [a.(\frac{b-d}{b})^2] \leftrightarrow S(x) = \pi . \frac{a^2.(b-d)^2}{b^2}.$$

Agora, tomemos a integral definida para acharmos o volume do cone:

$$V = \int_0^b S(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \int_0^b \pi . \frac{a^2.(b-d)^2}{b^2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \pi . \frac{a^2}{b^2} \int_0^b (b-d)^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = (\pi . \frac{a^2}{b^2} . \frac{(b-d)^3}{3})\Big]_0^b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \pi . \frac{a^2}{b^2} . [\frac{(b-0)^3}{3} - \frac{(b-b)^3}{3}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \pi . \frac{a^2}{b^2} . [\frac{b^3}{3} - \frac{0^3}{3}] \Rightarrow$$

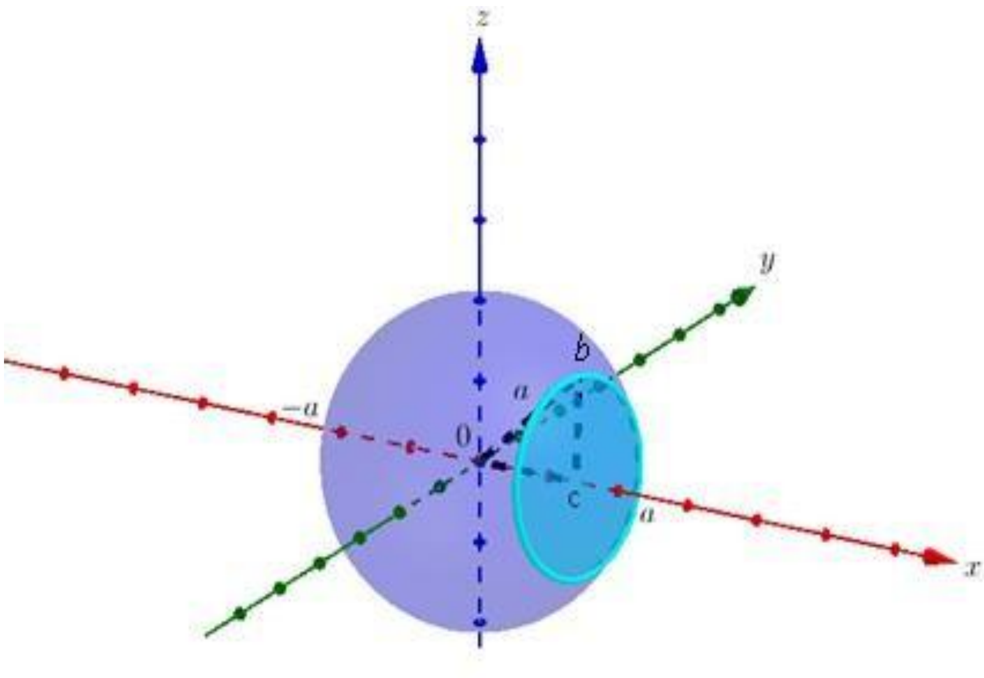
$$\Rightarrow V = \pi . \frac{a^2}{b^2} . \frac{b^3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1. \pi . a^2. b}{3}.$$

5.3.6 Volume da esfera

Usando a aplicabilidade da integral definida, para deduzirmos o volume da esfera, que é dada por: $\frac{4}{3}.\pi.a^3$.

Figura 39: Volume da esfera, com a medida do raio $\boldsymbol{a}$



Fonte: autoria própria.

Precisamos aplicar primeiramente dois conteúdos do ensino básico, o Teorema de Pitágoras e a área da superfície circular.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, encontramos o raio da secção transversal que é dado por: $a^2 = b^2 + c^2 \leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2 \leftrightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Em seguida, aplicamos a área de um círculo que é encontrada por:

$$S(x) = \pi.b^2 \leftrightarrow S(x) = \pi.(\sqrt{a^2 - c^2})^2 \leftrightarrow S(x) = \pi.\sqrt{a^2 - c^2}.$$

Agora aplicaremos a integral definida, para dedução da fórmula do volume, onde a função área $S(x)$ é multiplicada por 2, por conta da distância de $-a$ até a origem.

$$V = \int_0^a 2\,.S(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2.\int_0^a \pi.\left(a^2 - c^2\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2.\pi\int_0^a \left(a^2 - c^2\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2.\pi.\left(a^2x - \frac{c^3}{3}\right)\Big]_0^a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2.\pi.\left[\left(a^2.a - \frac{a^3}{3}\right) - \left(a^2.0 - \frac{0^3}{3}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2.\pi.\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2.\pi.\left(\frac{3a^3 - a^3}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2.\pi.\left(\frac{2a^3}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{4}{3}.\pi.a^3.$$

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A nossa experiência no percurso como aluno de Matemática na licenciatura e o diálogo com outros colegas professores da disciplina na educação básica nos levam a um entendimento de que nem na formação inicial nem nas práticas de ensino são consideradas as relações entre os saberes matemáticos da formação, em especial as disciplinas de cálculo, e aqueles inseridos no contexto do ensino fundamental ou ensino médio. Assim, esses dois espaços parecem mundos distintos, que não dialogam. Faz-se exceção a essa regra às relações que se nutrem a partir dos componentes de Prática de Ensino e Estágio Superviosionado. No entanto, quando se analisa disciplinas de cunho especificamente matemático, parece não haver um elo direto com a educação básica.

Isso nos leva a seguinte reflexão, que durante todo o processo de ensino aprendizagem na educação básica, houveram alguns fatores que contribuíram para as inquietações e dificuldades que vão sendo acrescidas durante todo o percurso, no que se refere ao diálogo entre as matemáticas. Ouseja, os conceitos matemáticos não absorvidos na fase correta de ensino, gerarão obstáculos. Esses conceitos quando bem defindos, servem de ponte para podermos aplicar com clareza e objetividade na matematica enfatizada na licenciatura.

O caminho trilhado durante essa investigação nos possibilitou compreender, de modo mais nítido, a relação que existe entre a Matemática do curso de formação docente (a licenciatura) e a Matemática ensinada no nível da educação básica. Ousamos dizer que essa interligação se dá em todos os conteúdos estudados no ensino fundamental ou no ensino médio. Nas temáticas por nós escolhidas, que foram a área e o volume, concluímos essa pesquisa convictos do estreitamento que há entre os conteúdos básicos e o cálculo integral.

No sentido individual da pesquisa, o aprofundamento teórico nos levou a uma maior reflexão sobre os conceitos de área e de volume. Pudemos compreender as diferentes perspectivas de demonstrações para o cálculo de área e de volume, ao construir tais processos demonstrativos tanto no âmbito das geometrias planas e espacial, como ao fazer uso do conhecimento de integral definida.

Para dar maior significado ao estudo de volumes na educação básica sem os recursos do cálculo integral, evidenciamos a importância do princípio de Cavalieri, que dá sustentação para os algoritmos algébricos explorados nesse nível educacional, mostrando diretamente a relação entre esse princípio e as deduções das fórmulas do cálculo de volume de um prisma e de um cilindro.

Como deve ser pertinente em qualquer trabalho investigativo, concluímos essa pesquisa vislumbrando algumas outras possibilidades de continuação desse trabalho, através de questões que emergiram no percurso. Como explorar construções geométricas nas aulas de matemática sobre o cálculo de áreas de superfícies no ensino fundamental? É possível inserir ideias de integração para o cálculo de volumes de sólidos no ensino médio? Como os estudos de Cálculo integral, no curso de Licenciatura em matemática poderiam dar maior significação para a relação entre Matemática superior e Matemática básica?

Compreendemos, a partir dessa investigação, que é fundamental o entendimento dessa ponte entre essas “matemáticas”, seja no contexto da educação básica ou do curso de formação. Assim, estaremos contribuindo para o processo de ensino e aprendizagem de matemática, tanto para quem ensina como para o estudante que busca compreendê-lo. Onde só assim, podemos ter um diálogo entre as matemáticas aplicadas no ensino básico como também no superior.

7. REFERÊNCIAS

FRAZÃO, Dilva. Euclides Matemático de Alexandria. Ebiografia.com, 2021. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/euclides/>. Acesso em: 26, maio de 2022.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. A matemática do ensino médio. 7. Ed. volume 2. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

Santana, Guilherme. Integrais. Todo Estudo. Disponível em: https://www.todoestudo.com.br/matematica/integrais. Acesso em: 13 de Julho de 2022.

DOMINGUES, Hygino H. Introducao a historia da matematica / Howard Eves; traducao Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 20 11.

SMOLE, Kátia Cristina; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. Matemática: ensino médio. 6ª. ed, volume 2. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOARES, Luís Havelange. A dialética entre o concreto e o abstrato na construção do conhecimento matemático. Tese (Doutorado) – UFPB/CE. João Pessoa, 2015.

Dante, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

PAIVA, Manoel. Matemática: Paiva. 2. ed, São Paulo: Moderna, 2013.

SOARES, Matheus dos Santos. Respondeaí. Disponível em: https://www.respondeai.com.br/. Acesso em: 13 de Julho de 2022.

PONTES, Nicodemos Albuquerque. O Princípio de Cavalieri e suas aplicações para cálculo de volumes. Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo. 2014. 52 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "Volume de sólidos geométricos"; *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/volume-de-solidos-geometricos.htm. Acesso em 10 de agosto de 2022.

RODRIGUES, Rosimeire dos Santos. SABIÃO, Roseline Martins. A história da matemática e a importância da geometria. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 04, Ed. 06, Vol. 01. pp. 96-110 Junho de 2019. ISSN: 2448-0959.

LIMA, Wescley Fernandes: O Princípio de Cavalieri como método de demostração e fundamentação para o cálculo de áreas e volumes / Wescley Fernandes Lima. – 2015. 46 f. : il., enc.; 31 cm.