



**INSTITUTO
FEDERAL**
Paraíba

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CAMPUS CAJAZEIRAS
ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

GUILHERME PEREIRA DE SOUZA

**CÔNICAS PARA O ENSINO MÉDIO:
PROPRIEDADES E APLICAÇÕES**

CAJAZEIRAS
2022

CÔNICAS PARA O ENSINO MÉDIO: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S729s Souza, Guilherme Pereira de.
Cônicas para o ensino médio : propriedades e aplicações /
Guilherme Pereira de Souza. – 2022.
65f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática)
- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba,
Cajazeiras, 2022.

Orientador(a): Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza.

1. Geometria analítica. 2. Matemática - Ensino médio. 3. Ensino
de matemática. 4. Crônicas. I. Instituto Federal de Educação, Ciência
e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

GUILHERME PEREIRA DE SOUZA

CÔNICAS PARA O ENSINO MÉDIO: PROPRIEDADES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Especialização em Matemática do Instituto Federal da Paraíba - Campus Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Aprovado em: 31 de agosto de 2022.

BANCA EXAMINADORA

João Paulo de Araújo Souza.

Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza
Instituto Federal da Paraíba - (IFPB)

Diego Dias Felix

Prof. Dr. Diego Dias Felix
Instituto Federal da Paraíba - (IFPB)

Cristina Alves Bezerra

Profª. Ma. Cristina Alves Bezerra
Instituto Federal do Ceará - (IFCE)

Stanley Borges de Oliveira

Prof. Me. Stanley Borges de Oliveira
Instituto Federal da Paraíba - (IFPB)

CAJAZEIRAS

2022

Este trabalho é dedicado ao meu sobrinho Abel de Souza da Silva, que renovou minha determinação para acreditar no futuro.

Agradecimentos

O desenvolvimento deste trabalho só foi possível com a presença de algumas pessoas, dentre elas a minha irmã Gracema Pereira de Souza da Silva e o meu cunhado, Rafael Gomes da Silva, que durante a viagem que fiz para São Paulo me deram todas as condições para que eu usasse parte do tempo que tinha para escrever, além do ótimo café que o Rafael fez. Meus agradecimentos também ao meu sobrinho Abel de Souza da Silva, que será o melhor membro da família.

Agradeço também a minha melhor amiga e ouvinte Gilderlânia Félix Agostinho, que me acompanhou durante esses últimos anos, bem como neste trabalho. Ao meu orientador e amigo João Paulo de Araújo Souza, que esteve presente comigo desde o início da graduação.

Ao meu amigo Daniel Juvenal da Silva que me ajudou com meus afazeres quando eu não dispunha de tempo. À minha amiga de trabalho Mariana Pérez Chaves Paes Barreto, pois nós sempre ouvíamos aos anseios um do outro desde que começamos a trabalhar na mesma escola. Por fim, à Beatriz de Lima Oliveira que nas semanas finais da escrita deste trabalho me incentivou com seu pensamento positivo e me deu esperança com sua luz.

Eu só estava analisando
Números e figuras
Desfazendo os enigmas
Questões da ciência, ciência e progresso
Não falam tão alto
Quanto meu coração.
(Will Champion/Jon Buckland/Guy Berry-
man/ Chris Martin)

Resumo

A Geometria Analítica é uma disciplina que discute conteúdos da Matemática que são muito relevantes para o Ensino Médio, tratando-se tanto aplicações quanto de algebrismo, isto é, a parte prática e teórica, tornando sua exclusão do Ensino Médio uma perda para os estudantes. Este trabalho tem por finalidade, a partir de uma pesquisa bibliográfica, discutir a importância da Geometria Analítica no Ensino Médio, com foco em cônicas, apresentando parte do seu desenvolvimento histórico, grandes representantes da matemática, uma breve discussão didática, aplicações e demonstrações de algumas das propriedades. O trabalho foi escrito de forma a ser compreensível e que possibilitasse ser discutido no Ensino Médio. Há diversas figuras e manipulações algébricas, junto às definições e demonstrações, que podem ser apresentadas no Ensino Médio sem precisar de muitas adequações. Com este trabalho, é esperado que haja um maior destaque para a disciplina de Geometria Analítica, destacando sua importância para o Ensino Médio, além disso, também é uma possível forma de discussão do professor com os próprios educandos ou mesmo um material de apoio para professores.

Palavras-Chave: Geometria Analítica; Ensino Médio; Cônicas; Aplicações.

Abstract

Analytical Geometry is a discipline that discusses mathematics contents that are very relevant to High School, dealing with both applications and algebraism, that is, the practical and theoretical part, making its exclusion from High School a loss for the students. This work aims, from a bibliographical research, to discuss the importance of Analytical Geometry in High School, focusing on conics, mentioning its historical development, great representatives of mathematics, a brief didactic discussion, applications and demonstrations of some of the properties . The work was written in a way that was understandable and that it could be discussed in high school. There are several figures and algebraic manipulations, along with definitions and demonstrations, that can be presented in high school without needing many adjustments. With this work, it is expected that there will be a greater emphasis on the discipline of Analytical Geometry, highlighting its importance for High School. In addition, it is configured as a possible way of discussing the teacher with the students themselves or even a support material for teachers.

KeyWords: Analytical Geometry; High School; Conics; Applications.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	METODOLOGIA	15
3	SURGIMENTO E IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA ANALÍTICA	17
3.1	UM POUCO DE HISTÓRIA	17
3.2	A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA ANALÍTICA	20
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	22
4.1	PLANO CARTESIANO	22
4.1.1	O eixo Ox	22
4.1.2	Distância algébrica entre dois pontos no eixo Ox	23
4.1.3	Translação de sistema	25
4.1.4	Distância entre dois pontos	26
4.1.5	Reta	27
4.1.6	Equação da reta	30
4.2	CIRCUNFERÊNCIA E ESFERA	32
4.2.1	Circunferência	32
4.2.2	Interseção entre duas circunferências	32
4.2.3	Esfera	35
4.2.4	Interseção de esferas	36
4.3	CÔNICAS	38
4.3.1	Parábola	38
4.3.2	Propriedade reflexiva da parábola	39
4.3.3	Elipse	41
4.3.4	Propriedade reflexiva da elipse	43
4.3.5	Hipérbole	45
4.3.6	Propriedade reflexiva da hipérbole	47
5	APLICAÇÕES	50
5.1	CIRCUNFERÊNCIA	50
5.2	ELIPSE	55

5.3	HIPÉRBOLE	58
5.4	PARÁBOLA	59
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	62

Lista de Figuras

Figura 3.1 – Correlação entre a reta no plano e equação, segundo Fermat	19
Figura 4.1 – Representação do <i>eixo Ox</i>	22
Figura 4.2 – Representação de pontos sobre o <i>eixo Ox</i>	23
Figura 4.3 – Representação dos pontos $A_x(3)$ e $B_x(8)$	23
Figura 4.4 – Ponto P no Plano Cartesiano	24
Figura 4.5 – Divisão dos quadrantes no Plano Cartesiano	25
Figura 4.6 – Translação de Sistema	25
Figura 4.7 – Distância entre dois pontos	26
Figura 4.8 – Distância entre dois pontos: casos específicos	26
Figura 4.9 – Distância entre dois pontos pelo Teorema de Pitágoras	27
Figura 4.10 – Alinhamento de três pontos	28
Figura 4.11 – Primeiro e segundo caso de colinearidade	28
Figura 4.12 – Alinhamento geral de três pontos	29
Figura 4.13 – Semelhança de triângulos	29
Figura 4.14 – O ângulo α	31
Figura 4.15 – Posição relativa entre duas circunferências	33
Figura 4.16 – Posições relativas entre duas esferas	36
Figura 4.17 – Caso onde a interseção é uma circunferência	37
Figura 4.18 – Representação de uma parábola e sua diretriz	38
Figura 4.19 – Representação de uma parábola no plano cartesiano	39
Figura 4.20 – Representação de um ponto P e da reta t	40
Figura 4.21 – A mediatriz t , do triângulo DPF	40
Figura 4.22 – Ângulo de incidência e reflexão de um feixe de luz FP	41
Figura 4.23 – Elementos da Elipse	42
Figura 4.24 – Representação de uma Elipse e um ponto P pertencente a ela	43
Figura 4.25 – Ponto F' , colinear a F_1 e P	44
Figura 4.26 – Representação da bissetriz t , do ângulo F_2PF'	44
Figura 4.27 – Representação do triângulo F_2PF'	45
Figura 4.28 – Mediatriz t , do triângulo F_2PF'	45
Figura 4.29 – Representação da Hipérbole e seus elementos	46
Figura 4.30 – Representação de um Hipérbole e de um ponto P pertencente a ela	47

Figura 4.31 – Representação da bissetriz do triângulo F_1PF_2	47
Figura 4.32 – Representação do triângulo $F'PF_2$	48
Figura 4.33 – Representação de um ponto P' , pertencente a t diferente de P	48
Figura 4.34 – Reflexão da Hiperbole	49
Figura 5.1 – Representação da distância do posto até a embarcação	51
Figura 5.2 – Representação da distância do posto 1 e do posto 2 até a embarcação	51
Figura 5.3 – Representação da distância do posto 1, posto 2 e posto 3 até a embarcação	52
Figura 5.4 – Representação dos postos e embarcação em um plano cartesiano	53
Figura 5.5 – Representação de $S1$	54
Figura 5.6 – Representação da interseção de $S1$ e $S2$	54
Figura 5.7 – Representação da interseção de $S1$, $S2$ e $S3$	55
Figura 5.8 – Representação da trajetória elíptica da Terra em torno do Sol	56
Figura 5.9 – Representação da trajetória elíptica de um cometa em torno do Sol	57
Figura 5.10 – Representação da propriedade reflexiva da elipse	57
Figura 5.11 – Bilhar Elíptico	58
Figura 5.12 – Posição da embarcação a partir de duas estações	59
Figura 5.13 – Posição da embarcação a partir de três estações	59
Figura 5.14 – Parábola e Foco	60
Figura 5.15 – Propriedade reflexiva da parábola	60
Figura 5.16 – Parábola e Paraboloide vistos com auxílio do Geogebra	61

1 INTRODUÇÃO

O Ensino Médio está sofrendo um processo muito forte de mudanças. A proposta do Novo Ensino Médio¹ (NEM) está entrando em vigor e, segundo Brasil (2021), tem como objetivo adaptar o Ensino Médio às atuais transformações dos jovens do ponto de vista social e emocional. Os livros de matemática adotados no Ensino Médio também sofreram algumas mudanças, alguns deles não discutem (ou discutem de forma superficial) uma parte muito significativa da matemática, a Geometria Analítica.

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que é responsável por disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outras obras com cunho educacional, em 2021 disponibilizou para a seleção das escolas de Ensino Médio (entre outras), as coleções de livros didáticos: Multiversos Matemática, Prisma Matemática (Ambas da editora FTD), Conexões – Matemática e suas Tecnologias (Editora Moderna) e Matemática em Contexto (Editora Ática), todas disponíveis nos sites de suas editoras.

Ao realizar uma análise referente aos conteúdos, foi notado que nenhuma das coleções aqui mencionadas contemplavam alguns conteúdos ligados diretamente à Geometria Analítica como, por exemplo, as cônicas. A coleção Conexões – Matemática e suas Tecnologias, das quatro coleções citadas, é a única na qual é possível encontrar conteúdo diretamente ligado à Geometria Analítica onde é discutido Reta e Circunferência, além de Transformações Geométricas, dando destaque para o conteúdo de Isometrias.

Pensando na relevância de tal disciplina, este trabalho tem como objetivo principal destacar a importância do estudo da Geometria Analítica no Ensino Médio. Para isso, realizamos uma pesquisa do tipo bibliográfica, onde foi destacado o contexto histórico de seu surgimento, a base matemática de algumas propriedades, apresentadas com definições e demonstrações, além de algumas das aplicações. O conteúdo deste trabalho foi escrito com o intuito de possibilitar, sempre que possível, um entendimento integral, por parte dos alunos do Ensino Médio, tornando possível discussões sobre o tema, renovando o interesse por essa disciplina que é tão importante e com tantas aplicações no dia a dia, dando destaque às aplicações físicas (práticas) e matemáticas (teóricas).

Quanto ao que foi apresentado no trabalho, o Capítulo 2 trata de definir o tipo de pesquisa bem como ela foi feita, fazendo uma breve menção de algumas das principais obras estudadas, classificando-as de acordo com os capítulos que foram mencionadas. Em

¹De acordo com a Lei nº 13.415, de 2017 o Ensino Médio sofrerá mudanças. Com relação a carga horária, será ampliada gradativamente até 2022, para no mínimo, mil horas anuais e seu currículo será composto pela Base Nacional Comum Curricular e pelos Itinerários Formativos, que podem ser organizados baseados em componentes curriculares distintos (linguagens e suas tecnologias, matemática e suas tecnologias, ciências da natureza e suas tecnologias e ciências humanas e sociais aplicadas), além de formação técnica e profissional, de acordo com as necessidades locais.

seguida, o Capítulo 3 apresenta o surgimento da Geometria Analítica em um contexto histórico, dando destaque para os principais matemáticos que a desenvolveram: René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). No mesmo capítulo, é tratada a importância da Geometria Analítica fazendo uma breve menção a algumas das aplicações que serão apresentadas no Capítulo 5 e uma discussão do ponto de vista didático.

O Capítulo 4 foi destinado a discutir a fundamentação teórica da Geometria Analítica, tratando-a inicialmente pela definição de ponto e reta, seguido da definição de plano cartesiano, equações algébricas de reta, circunferência, esfera e por fim, as cônicas. No Capítulo 5 é mencionado algumas das aplicações de Cônicas.

Durante todo o trabalho, como um suporte extra e facilitador do desenvolvimento apresentado, há representações gráficas das definições, aplicações e demonstrações, com o objetivo de torná-las mais compreensíveis para o leitor.

2 METODOLOGIA

Este trabalho, segundo Prodanov (2013), pode ser classificado como uma pesquisa básica, pois objetiva, a partir de pesquisas fundamentadas, trazer discussões e informações que podem ser utilizadas para futuras pesquisas e estudos, além da possível aplicação dos temas abordados para a didática em sala de aula, visando discutir novos, ou trabalhar de forma alternativa, antigos saberes relacionados com o tema central. Com relação aos objetivos, a pesquisa é descritiva, pois é baseada em assuntos teóricos e busca estabelecer relação entre a importância do ensino da Geometria Analítica e a forma como ela é abordada atualmente. Para Gil (2002, p. 42), “as pesquisas descritivas têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis.”

O procedimento utilizado foi a pesquisa bibliográfica, uma vez que foi embasado principalmente em livros, artigos científicos e trabalhos de conclusão de curso, visando defender a argumentação apresentada. Segundo Severino (2017, p. 145):

A pesquisa bibliográfica é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos.

A partir do método hipotético-dedutivo, foi realizada uma análise, antes do NEM entrar em vigor, objetivando ressaltar algumas lacunas na educação básica referente ao ensino da Geometria Analítica. Reafirmando, assim, a importância do estudo da disciplina. Nesse sentido, a pesquisa foi, em parte, baseada em livros didáticos do ensino médio, onde houve menções destes no decorrer do trabalho, com a finalidade de discutir pontos relevantes como as aplicações na matemática e na física, além de mencionar a relevância da disciplina no Ensino Médio do ponto de vista didático.

Os capítulos que foram voltados para a pesquisa a partir do método hipotético-dedutivo foram os capítulos 3, 4 e 5. No capítulo Capítulo 3, que envolve o surgimento e a importância da Geometria Analítica, foi realizada uma pesquisa objetivando o levantamento histórico dos principais acontecimentos iniciais que envolveram a disciplina. Fundamentado majoritariamente em três livros que fazem menções relevantes sobre o início da Geometria Analítica. Vale destacar, o volume 7 da coleção de livros Fundamentos da Matemática Elementar agornaziada pelo Gelson Iezzi, que apesar de ser um livro voltado para a teoria matemática do conteúdo da própria disciplina, tem trechos históricos

muito relevantes em cada um dos capítulos, e o livro *História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*, de Tatiana Roque, onde há menção de muitos dos matemáticos que tiveram contribuições relevantes para a área.

O Capítulo 4, sendo a fundamentação teórica, foi fortemente embasado em livros didáticos de matemática do Ensino Médio e Superior, como, por exemplo, os livros de Luiz Roberto Dante (*Matemática: contexto & aplicações: ensino médio*) e o livro de Cálculo de James Stewart, além de livros voltados para a formação de professores de matemática, como é o caso do livro *Números e Funções Reais* do Elon Lages Lima, da coleção do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).

No Capítulo 5, foram apresentadas algumas das aplicações das seções cônicas que foram baseadas em aplicações mencionados em trabalhos diversos, tanto em livros do Ensino Médio, quanto em livros diversos ou artigos voltados diretamente para a aplicação, como o caso do livro *Understanding GPS: principles and applications*, dos autores Elliott Kapla e Christopher Hegarty, que traz uma aplicação bem didática e muito importante da Geometria Analítica. O livro *#Contato Matemática - 3º ano*, destaca aplicações das cônicas em seus capítulos trazendo-as de forma didática e com figuras muito bem elaboradas. Já o artigo intitulado *Propriedade Reflexiva do Biliar Elíptico*, dos autores Natham Cândido de Oliveira, Judcely Nytyeska de Macedo Oliveira Silva e Laedson Luan dos Santos Silva, tem foco em uma aplicação que pode ser aplicada em sala de aula e os resultados desse artigo são muito interessantes para o tema abordado neste trabalho.

O presente trabalho tem como essência uma natureza qualitativa. Pois, de acordo com Gil (2002), a análise qualitativa por ser menos formal e tem caráter, embora embasado, mais interpretativo, onde são evidenciados os valores qualitativos das pesquisas realizadas. Busca-se destacar a importância do estudo da Geometria Analítica, com foco em seções cônicas, abordando o contexto histórico e a base matemática, com ênfase em definições, propriedades e algumas de suas aplicações reforçando a sua relevância no cenário atual.

3 SURGIMENTO E IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Neste capítulo, destacaremos o início da Geometria Analítica, os principais matemáticos e estudos que foram imprescindíveis para a forma como vemos a disciplina atualmente. Também será destacado a importância de seu estudo, mencionando algumas aplicações na física, no cotidiano e na própria matemática, além de discutir a relevância da Geometria Analítica do ponto de vista didático.

3.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Os estudos iniciais sobre a Geometria Analítica, segundo Filho e Cruz (2020), surgiram por volta do século XVII, com o famoso filósofo e matemático René Descartes e Pierre de Fermat, que foi considerado por muito como o maior matemático de sua época.

Descartes, foi muito reconhecido por seus estudos em filosofia (a ele é atribuída a tão conhecida frase “Penso, logo existo”), pois boa parte de sua vida foi dedicada a tais estudos. Durante o período conhecido como Renascimento, Descartes começou a criticar os antigos ensinamentos sobre a filosofia de Platão (428 a.C – 347 a.C) e Aristóteles (384 a.C. — 322 a.C), por acreditar que tais ensinamentos eram antiquados e já não se aplicavam àquela época. Publicou alguns de seus trabalhos na época, um deles intitulado de *Le monde* (O Mundo), escrito entre 1629 e 1633. Que apresenta

Uma descrição física em que o Universo não passa de matéria em movimento contínuo e os fenômenos naturais são explicáveis pela sua mobilidade. Nessa obra, desenvolveu a chamada Teoria dos Vórtices, que explica o movimento dos planetas em torno do Sol e expunha sua interpretação sobre a Biologia, a Física e a Cosmologia. (FILHO; CRUZ, 2020, p. 34).

Segundo Roque (2015), Descartes acreditava que existiam dois tipos de ideias: a escura e confusa e a clara e distinta. A segunda só poderia ser alcançada através da matemática, da medição, da atribuição de significado a partir de valores quantitativos onde sentidos e percepções seriam descartados em prol do método algébrico da matemática. Assim os saberes antigos da filosofia natural, que eram baseados principalmente em observações e suposições, não teriam mais significado para Descartes, pois geravam dúvidas em seus resultados, era necessário ter a certeza e Descartes acreditava que essa certeza seria alcançada através da álgebra que trabalha com o quantitativo, com a exatidão.

Após escrever *Le monde*, Descartes escreveu um trabalho intitulado *La Géométrie* (A Geometria), que, embora tenha uma leitura difícil (o que é bem contraditório, já

que o autor, dessa maneira, estaria escrevendo uma obra escura e confusa) foi a base para a Geometria Analítica que temos atualmente, acredita-se que a falta de didática era simplesmente por Descartes não ter a intenção de criar um novo ramo da matemática ou até mesmo deixar o leitor com o prazer da descoberta a partir de reflexões dos vagos enunciados e proposições.

O trabalho *La Géométrie* não mencionava sistema de coordenadas como conhecemos hoje, não só este, mas nenhum trabalho de Descartes mencionava coordenadas cartesianas. Argumentos, demonstrações e construções geométricas eram baseados em equações algébricas, lidando principalmente com variáveis e incógnitas. O que foi feito nesse trabalho foi uma ponte entre a Álgebra e a Geometria.

Uma ideia fortemente utilizada na Geometria Plana e Analítica e naturalmente utilizada por (Descartes e Fermat) é a de Lugar Geométrico.

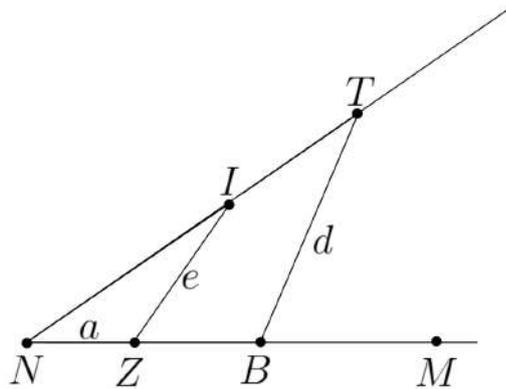
Lugar geométrico é um conjunto de pontos caracterizado por uma propriedade. Como todo conjunto definido por uma propriedade de seus elementos, uma figura é um lugar geométrico se:

- a) **todos os seus pontos** têm essa propriedade (todo elemento do conjunto satisfaz a propriedade);
 - b) **só os seus pontos têm essa propriedade** (todo elemento que tem a propriedade pertence ao conjunto).
- (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 10).

Descartes e Fermat, segundo Roque (2015), estudaram e obtiveram resultados semelhantes quase que simultaneamente durante os anos de 1636 e 1637, embora tenham trabalhado de forma independente. Os trabalhos de Fermat e Decartes intitulados, *Introdução aos Lugares Geométricos* e *A Geometria*, respectivamente, relacionavam expressões algébricas (equações indeterminadas em duas variáveis) a figuras geométricas planas. Algumas dessas equações foram estudadas anteriormente pelo matemático conhecido como Diofanto¹, que desenvolveu estudos sobre equações de duas variáveis, cuja as soluções eram valores inteiros, tanto Descartes quanto Fermat relacionavam as soluções das equações a problemas de lugares geométricos. O exemplo a seguir, descreve como Fermat associava a ideia de lugar geométrico a equações.

¹Não se sabe exatamente quando Diofanto nasceu e morreu, estima-se que nasceu entre 201 e 214 e faleceu entre 284 e 298.

Figura 3.1: Correlação entre a reta no plano e equação, segundo Fermat



Fonte: imagem do autor

Sejam os pontos T, M e N como na Figura 3.1. Ou seja, tem-se $Z, B \in \overleftrightarrow{NM}$ e $I \in \overleftrightarrow{NT}$, tais que $NZ = a$, $ZI = e$ (valores que não são pré-fixado), $NB = b$ e $BT = d$ (valores pré-fixados). Se $d \times a = b \times e$, o ponto I , descreve a reta \overleftrightarrow{NT} . Para chegar a essa conclusão, basta observar que $d \times a = b \times e$ implica $b : d = a : e$, como a razão $b : d$ é conhecida (envolve quantidades conhecidas), a razão $a : e$ (com valores desconhecidos) também será determinada, assim os triângulo $\triangle NZI$ e $\triangle NBT$ são semelhantes por terem dois pares de lados proporcionais e uma ângulo em comum, logo \overleftrightarrow{NI} , variando o ponto I , descreve a reta \overleftrightarrow{NT} . É possível observar que Fermat, nesse exemplo, utiliza apenas um eixo coordenado \overleftrightarrow{NM} e a própria reta \overleftrightarrow{NI} . Além disso, as soluções da equação $d \times a = b \times e$ são as coordenadas \overline{NZ} e \overline{ZI} .

O legado de Fermat é composto por contribuições inestimáveis nas mais diversas áreas da matemática: cálculo geométrico e infinitesimal; teoria dos números (ramo da matemática que estuda as propriedades dos números); e, juntamente com Blaise Pascal (1623-1662), foi um dos fundadores da Teoria da Probabilidade. Fermat obtinha, com seus cálculos, as áreas de seções de parábolas e hipérbolas, determinava o centro de massa de vários corpos, etc. O próprio Isaac Newton (1643-1727) disse em uma nota que seu cálculo, antes tido como uma invenção independente, fora baseado no *método de monsieur Fermat* para estabelecer tangentes. (SANTOS; FERREIRA, 2009, p. xviii).

Apesar de Descartes ser considerado o pai da Geometria Analítica, suas motivações para tais estudos foram a partir de contextos filosóficos. Por sua vez, Fermat teve fundamental importância nesses mesmos estudos. A motivação de Fermat foi majoritariamente por puro e simples apreciação e curiosidade pela matemática, pois era formado em direito e trabalhou como advogado e posteriormente como conselheiro.

Fermat durante séculos causou inquietação a vários matemáticos em muitos lugares do mundo com o que ficou conhecido como Último Teorema de Fermat, que foi um teorema motivado pelos estudos dos escritos de Diofanto. Após o enunciado de tal teorema, Fermat escreveu: “Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição, mas esta margem (de folha de papel) é muito estreita para contê-la”. O teorema dizia o seguinte: “Não há soluções inteiras não-nulas para x, y e z que atendam, n inteiro e maior que 2 para a equação: $x^n + y^n = z^n$.” A demonstração definitiva para esse teorema foi publicada somente no ano de 1995, pelo matemático britânico Andrew Wiles.

3.2 A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA ANALÍTICA

A Geometria Analítica tem sua importância evidenciada por suas diversas aplicações, na própria matemática, para o desenvolvimento de determinadas áreas, como o Cálculo Diferencial e Integral desenvolvido principalmente pelo matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) e pelo matemático inglês Isaac Newton (1642-1727). Na Física, a representação algébrica de curvas, sejam retas, parábolas, circunferências, elipse ou hipérbolas, por exemplo, são utilizadas para descrever a trajetória de projéteis, corpos celestes, a variação de alguma grandeza em função de outra, além de proporcionar previsões através de modelos matemáticos, ou seja, equações algébricas que, com auxílio da Geometria Analítica, podem ser representados graficamente tornando a informação mais compreensível. De acordo com Stewart (2022, p.22):

Um modelo matemático é a descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real, como o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo da redução de poluentes. O propósito desses modelos é entender o fenômeno e talvez fazer previsões sobre seu comportamento futuro (...) Usamos nosso conhecimento da situação física e nossos recursos matemáticos para obter equações que relacionem as variáveis. Em situações em que não existe uma lei física para nos guiar, pode ser necessário coletar dados (de uma biblioteca, da Internet ou conduzindo nossas próprias experiências) e examiná-los na forma de uma tabela, a fim de perceber os padrões. Dessa representação numérica de uma função podemos obter sua representação gráfica marcando os dados. Esse gráfico pode até sugerir a fórmula algébrica apropriada, em alguns casos.

Atualmente, a Geometria Analítica está presente no dia a dia de forma discreta, o sistema de GPS (Global Positioning System - Sistema de Posicionamento Global), por exemplo,

é uma das aplicações mais fortes e mais interessantes que temos desse ramo da matemática, utiliza o conceito geométrico e algébrico de esferas para determinar com precisão a localização de objetos ou indivíduos, desde que haja um receptor no campo visível de pelo menos três satélites GPS. Podemos destacar também as aplicações em torno das propriedades reflexivas das superfícies cônicas como a parábola, presente nos faróis de veículos, nas antenas de recepção e transmissão e nos satélites em órbitas, a elipse que descrevem a trajetória de corpos celestes. Segundo Newton (1729), os planetas se movem de acordo com a trajetória de elipses, todas com o sol como um dos focos. As hipérbolas são fortemente empregadas na confecção de telescópios com espelhos e lentes hiperbólicas, além de ser aplicadas em sistemas de localização em alto-mar, de modo similar ao GPS. Algumas das aplicações das cônicas serão descritas com mais detalhes no Capítulo 5.

Pensando no viés didático, a Geometria Analítica tem forte papel no desenvolvimento do educando, algumas das habilidades do Ensino Médio que constam na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) vinculadas ao estudo da disciplina estão diretamente ligadas, segundo BRASIL (2018), a resolução de problemas em diversos contextos através da representação diversificada de problemas práticos utilizando a matemática. Especificamente, na Geometria Analítica, pode-se mencionar a representação algébrica e a representação gráfica de uma situação-problema que envolve a interpretação, ou mesmo a adaptação para um modelo matemático, escolhendo a melhor forma de representá-lo de acordo com a situação, visando facilitar sua análise, compreensão e resolução.

É importante destacar que na Geometria Analítica há uma variedade de conteúdos da matemática que são abordados, isto é, pode-se exercitar, revisar e aprofundar, outros tópicos. Justamente por isso o educando amplia suas ferramentas na resolução e elaboração de problemas, sejam eles práticos, do cotidiano, ou puramente matemáticos, segundo Santos (2008, p.11):

A Geometria Analítica alcança outros objetivos da Matemática no Ensino Médio para geração de aprendizado significativo como: compreensão de conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicação de conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades contemporâneas. Este último objetivo aliado à habilidade de interpretar ou aplicar modelos analíticos, envolvendo equações algébricas, inequações ou sistemas lineares, favorece a compreensão de fenômenos naturais ou processos de produção tecnológica.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste Capítulo apresentaremos as definições e propriedades básicas referentes à Geometria Analítica, bem como demonstrações que darão significado aos resultados do Capítulo 5, que está destinado a apresentar diversas aplicações.

Agora apresentaremos uma descrição do sistema de eixos cartesianos, seguido de definições e demonstrações que envolvem pontos, retas e as cônicas: circunferência, elipse, hipérbole e parábola. Toda esta seção será baseada nas afirmações dos livros Geometria Analítica de Santos e Ferreira (2009), Diálogo Matemática e suas tecnologias de Moderna (2020) e Matemática Contexto e Aplicações de Dante (2016).

4.1 PLANO CARTESIANO

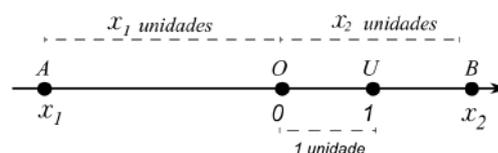
Como foi discutido anteriormente, a Geometria Analítica é a ponte entre a Geometria Plana e a Álgebra. Iniciaremos essa associação apresentando, nesta seção, algumas noções que servirão como base para as propriedades que aparecerão no restante do trabalho.

4.1.1 O eixo Ox

Dada a ordenação e a completude dos números reais, pode-se provar que, ao fixar um ponto (que chamaremos de origem) em uma reta qualquer, um sentido e uma unidade de medida, há uma bijeção entre tal reta e o conjunto dos números reais. Dessa forma, podemos ver cada ponto de uma reta dada como um número real.

Considere uma reta com um ponto O , denominado de *origem*, e outros dois pontos, diferentes da desse, A e B , (cujas distâncias à origem sejam x_1 e x_2 respectivamente) além de um ponto U que iremos considerar com comprimento unitário, ou unidade simplesmente (isto é, o ponto U está a uma unidade de comprimento distante da origem). Chamaremos essa reta de reta real e representaremos por *eixo Ox* ou simplesmente por Ox . Como apresentado na Figura 4.1.

Figura 4.1: Representação do eixo Ox



Fonte: imagem do autor

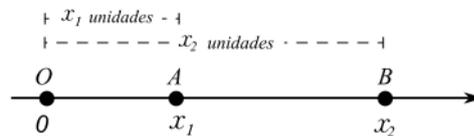
Todos os pontos à direita da origem serão tomados como positivos e os valores

à esquerda da origem, negativos. Diremos que x_1 é um número real negativo e x_2 um número real positivo, em notação $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$. Para definir bem a coordenada de cada ponto em Ox , que está a uma distância $a \in \mathbb{R}$ da origem, usaremos a notação $P_x(a)$, por exemplo: considerando os pontos $A_x(x_1)$ e $B_x(x_2)$, estamos nos referindo aos pontos A e B , onde os segmentos \overline{OA} e \overline{OB} têm comprimento x_1 e x_2 respectivamente.

4.1.2 Distância algébrica entre dois pontos no eixo Ox

Tomemos dois pontos quaisquer, A e B , tais que $\overline{OA} = x_1$ e $\overline{OB} = x_2$ no eixo Ox , como indicado na Figura 4.2.

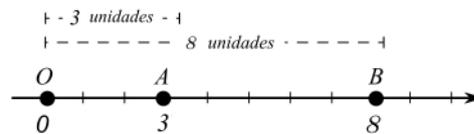
Figura 4.2: Representação de pontos sobre o eixo Ox



Fonte: imagem do autor

A distância entre A e B é o comprimento do segmento \overline{AB} . Como A tem coordenada x_1 e B tem coordenada x_2 , o segmento \overline{AB} tem comprimento $AB = |x_2 - x_1|$. Vejamos um exemplo. Tomando os pontos $A_x(3)$ e $B_x(8)$, $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$ temos: $AB = |x_2 - x_1| = |8 - 3| = |5| = 5$

Figura 4.3: Representação dos pontos $A_x(3)$ e $B_x(8)$



Fonte: imagem do autor

Antes de apresentar o plano cartesiano, faz-se necessário entender o conceito de Produto Cartesiano, para isso apresentaremos a definição e um exemplo numérico.

Definição 4.1 (Produto Cartesiano). Dados dois conjuntos numéricos não vazios A e B . O produto cartesiano, denotado por $A \times B$, é o conjunto dos pares ordenados (x, y) , tais que $x \in A$ e $y \in B$.

Exemplo 4.2. Pondo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$, assim $A \times B$ (lê-se “A cartesiano B”) como o conjunto de pares ordenados é dado por

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}.$$

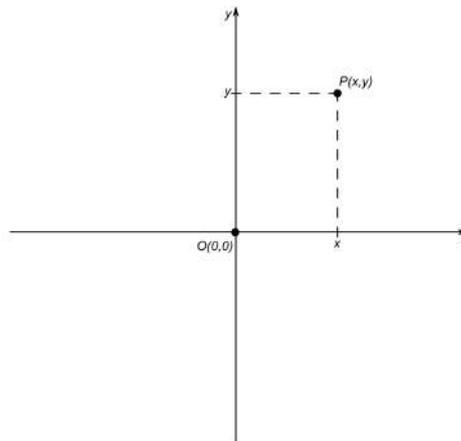
Repare que, como $A \neq B$, temos $A \times B \neq B \times A$, pois

$$B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (6, 2), (7, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}$$

Definição 4.3 (Plano Cartesiano). O *plano cartesiano* é um sistema de referências formado por duas retas numéricas, uma horizontal e outra vertical que se cruzam em um determinado ponto. A reta horizontal é chamada de eixo das abscissas (o Ox que já definimos) ou eixo x e a reta vertical, como eixo das ordenadas ou eixo y (por vezes, chamada de Oy), e o ponto de interseção é chamado de origem do plano.

Análogo ao que acontece com o eixo Ox , o plano cartesiano pode ser representado como o conjunto dos pontos P do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ou simplesmente \mathbb{R}^2). Quando for necessário falar de ponto no eixo das ordenadas, escreveremos $P_y(a)$ para indicar o ponto que está a uma distância $a \in \mathbb{R}$ da origem da reta Oy . Assim, o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pode representar todos os pontos do Plano Cartesiano (ou plano xOy) com $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por simplicidade, escrevemos $P(a, b)$ para indicar que as coordenadas (abscissa e ordenada nessa ordem) do ponto P são $P_x(a)$ e $P_y(b)$. Em outras palavras, escrever $P(x, y)$ é equivalente a dizer que P pode ser visto como o ponto (x, y) do \mathbb{R}^2 . Uma representação geométrica é dada na Figura 4.4.

Figura 4.4: Ponto P no Plano Cartesiano

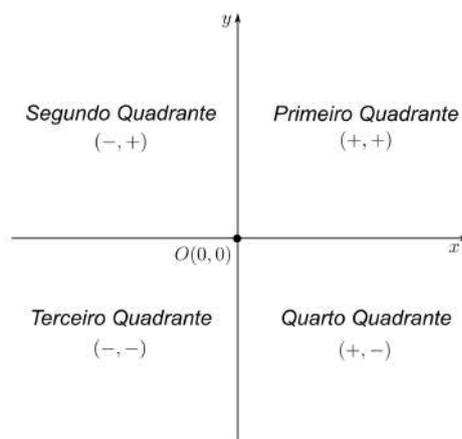


Fonte: imagem do autor

As coordenadas x e y do ponto P , são projeções ortogonais sobre os eixos Ox e Oy , respectivamente, e essa é a forma mais convencional de representar qualquer ponto no plano em função desses valores reais.

Podemos notar que os dois eixos perpendiculares geram quatro regiões que chamaremos de quadrantes. Em cada quadrante é possível observar que os valores das coordenadas dos pontos $P(x, y)$, assumem valores positivos ou negativos, de acordo com o quadrante em que P se localiza. Como mostra a Figura 4.5.

Figura 4.5: Divisão dos quadrantes no Plano Cartesiano



Fonte: imagem do autor

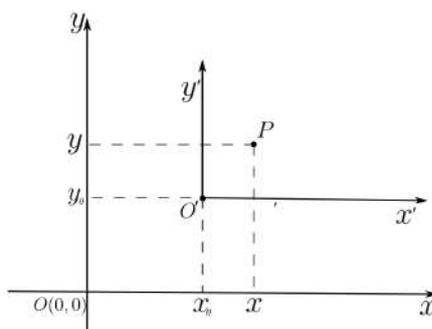
4.1.3 Translação de sistema

A translação de um sistema para um outro é um recurso que facilita algumas operações, sem perda das propriedades presentes no sistema anterior. Segundo Campolino (2014), a translação é uma transformação que preserva distâncias. Em outras palavras, se transladarmos uma curva, essa não sofrerá qualquer deformação.

Definição 4.4 (Translação de eixos). Sejam os pontos $P(x, y)$ e $O'(x_0, y_0)$ de um sistema de eixos xOy . Se $x'O'y'$ é um sistema de eixos, de modo que, $O'x'$ e $O'y'$ sejam paralelos a Ox e Oy , respectivamente, e com o mesmo sentido positivo do sistema xOy , então $x'O'y'$ é uma translação do eixo xOy . O ponto P terá coordenadas (x, y) em xOy e coordenadas (x', y') em $x'O'y'$. Dessa maneira, teremos a igualdade $P(x', y') = P(x - x_0, y - y_0)$. Ou seja,

$$x = x' + x_0 \text{ e } y = y' + y_0 \quad (4.1)$$

Figura 4.6: Translação de Sistema

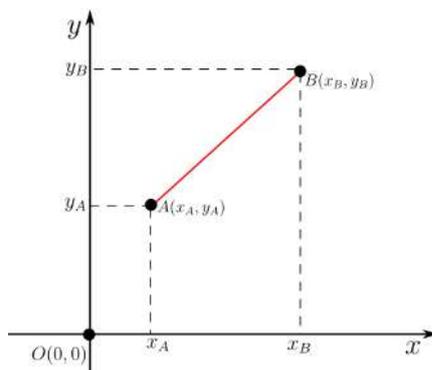


Fonte: imagem do autor

4.1.4 Distância entre dois pontos

Dados dois pontos quaisquer, A e B no plano cartesiano, a distância entre eles é o comprimento do segmento com uma extremidade em A e outra em B , isto é, o comprimento do segmento \overline{AB} .

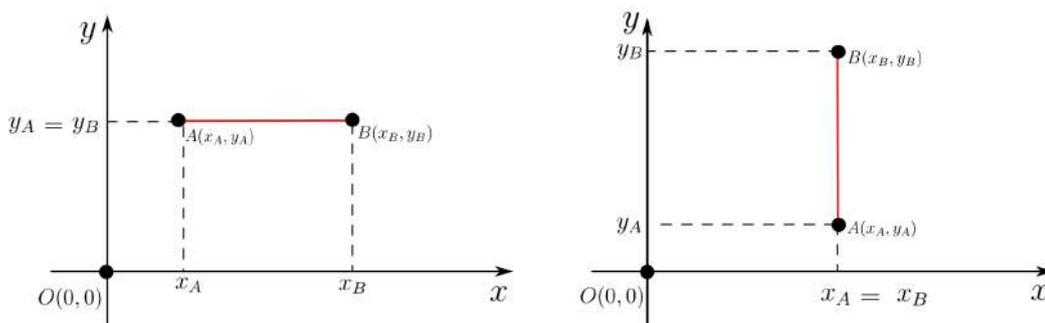
Figura 4.7: Distância entre dois pontos



Fonte: imagem do autor

Inicialmente é interessante destacar dois casos em especial, em um deles \overleftrightarrow{AB} é paralelo ao eixo Ox e em outro paralelo ao eixo Oy . Vejamos tais casos na Figura 4.8.

Figura 4.8: Distância entre dois pontos: casos específicos



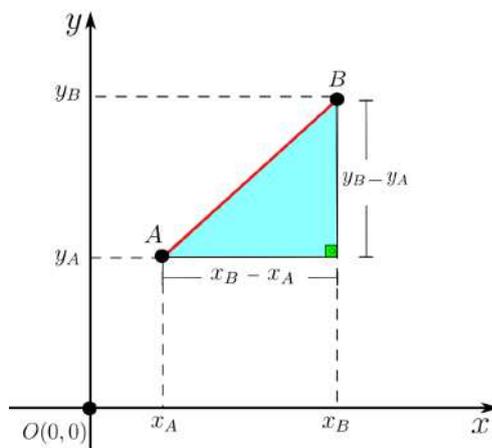
Fonte: imagem do autor

No primeiro caso (esquerda da Figura 4.8), a condição para que \overleftrightarrow{AB} seja paralelo a Ox , é $y_B = y_A$. Já no segundo caso (direita da Figura 4.8), para que \overleftrightarrow{AB} seja paralelo a Oy é necessário e suficiente que $x_B = x_A$. A distância entre A e B será $AB = |x_B - x_A|$ no primeiro caso e $AB = |y_B - y_A|$ no segundo caso. Repare que, quando $x_B = x_A$ e $y_B = y_A$, simultaneamente, $A = B$ e a distância entre A e B será igual a zero.

Para encontrar o tamanho do segmento \overline{AB} , de forma geral, considerando $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, utilizaremos o Teorema de Pitágoras para determinar a hipotenusa de me-

distância AB , partindo dos catetos de medidas $|x_B - x_A|$ e $|y_B - y_A|$, como podemos observar na Figura 4.9.

Figura 4.9: Distância entre dois pontos pelo Teorema de Pitágoras



Fonte: imagem do autor

Dessa forma, temos que a distância entre A e B , é dada por:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Outros assuntos como: coordenadas de ponto médio de um segmento e coordenadas do baricentro de um triângulo são assuntos interessantes, que fogem da proposta desse trabalho, e podem ser encontrados, por exemplo, no volume 3 do livro *Matemática: contexto aplicações*, de Luiz Roberto Dante.

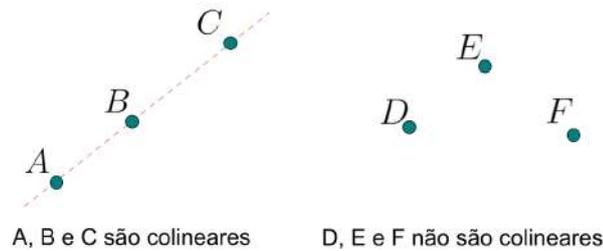
4.1.5 Reta

A reta é uma das formas geométricas mais básicas, na Geometria, uma reta pode ser determinada por apenas dois pontos, na Geometria Analítica ela pode ser representada algebricamente por uma equação polinomial de grau um. Tal objeto é uma das primeiras coisas estudadas na Geometria Analítica no Ensino Médio, a partir dela o estudante compreende a principal ideia da disciplina: representar algebricamente (através de equações) um lugar geométrico.

Ao iniciar o estudo de retas no plano cartesiano é verificada uma condição para que três pontos sejam colineares. É interessante destacar que posteriormente somente dois desses pontos são fixos, que são os pontos que definem a reta. Para que um outro ponto (variável nas coordenadas x e y) esteja alinhado com os esses dois, é necessário que satisfaça a condição de alinhamento, que será discutida posteriormente neste trabalho. Assim a reta é definida como um lugar geométrico, formado pelo conjunto de todos os pontos (um conjunto infinito), que são colineares a outros dois pontos previamente fixados.

Definição 4.5 (Condição de alinhamento de três pontos). Dizemos que três pontos estão alinhados (são colineares) se, e somente se, existir uma reta que passe pelos três, quando não for possível construir essa reta, não estarão.

Figura 4.10: Alinhamento de três pontos

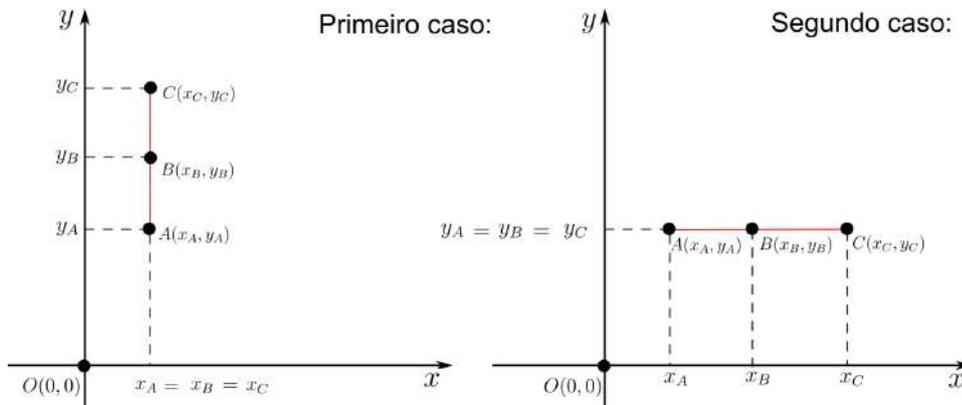


Fonte: imagem do autor

Vamos verificar uma condição (no plano cartesiano) para que três pontos distintos, A, B e C , com coordenadas (x_A, y_A) , (x_B, y_B) e (x_C, y_C) , respectivamente, sejam colineares. Inicialmente, vamos verificar os casos mais simples, onde os pontos são colineares e a reta que passa pelos três, no primeiro caso é paralela ao eixo Oy no segundo caso paralela ao eixo Ox .

Se as abscissas ou as ordenadas dos três pontos forem iguais, eles serão colineares, isto é, considerando os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, no primeiro caso temos $x_A = x_B = x_C$ e, no segundo caso, $y_A = y_B = y_C$. Ambos podem ser observados na Figura 4.11.

Figura 4.11: Primeiro e segundo caso de colinearidade

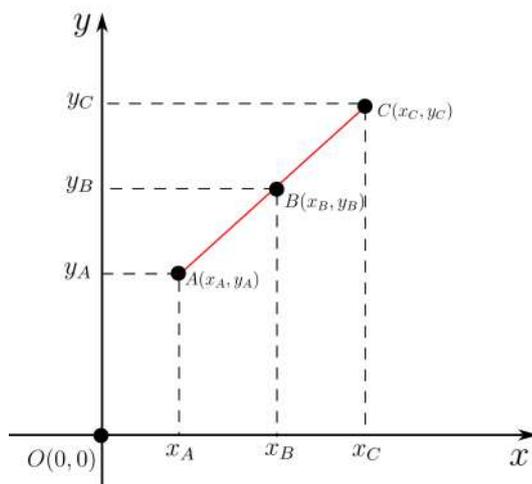


Fonte: imagem do autor

É importante destacar que, no caso das abscissas iguais (primeiro caso), as ordenadas devem ser diferentes, caso contrário, teríamos pontos coincidentes, o que não é interessante para o exemplo. O mesmo acontece para as ordenadas iguais (segundo caso).

Há o caso geral, em que os pontos estão alinhados, porém a reta que passa pelos três pode não ser paralela a um dos eixos, como é possível observar na Figura 4.12.

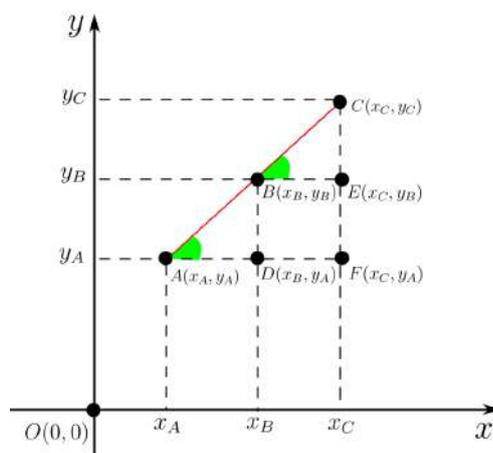
Figura 4.12: Alinhamento geral de três pontos



Fonte: imagem do autor

Tomando os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_B, y_A)$, $E(x_C, y_B)$ e $F(x_C, y_A)$, como na Figura 4.13. Tomemos os triângulos $\triangle ABD$, $\triangle BCE$ e $\triangle ACF$, pelo caso de semelhança de triângulos AA (ângulo, ângulo), são semelhantes, basta perceber que a reta \overleftrightarrow{BE} é paralela à reta \overleftrightarrow{AF} , logo os ângulos \hat{CAF} e \hat{CEB} são congruentes. Além disso, os ângulos \hat{BDA} e \hat{CEB} são retos.

Figura 4.13: Semelhança de triângulos



Fonte: imagem do autor

Logo, considerando a semelhança dos triângulos, temos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AF} = \frac{BD}{CF} \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}.$$

Desenvolvendo a igualdade chegamos a

$$x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B = 0. \quad (4.2)$$

Quanto a essa relação, a maioria dos livros didáticos fazem uma analogia entre a equação 4.2 e o determinante da equação 4.3 apresentada a seguir:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.3)$$

É importante desenvolver o determinante da equação 4.3 e comparar as duas equações para deixar claro que as duas equações são equivalentes e que é mais interessante trabalhar com o determinante apenas por sua simplicidade visual, que torna mais fácil o trabalho de memorizar a fórmula.

4.1.6 Equação da reta

Como foi mencionado na subseção anterior, uma reta tem uma representação algébrica nas variáveis x e y , quando aplicamos o conceito de plano cartesiano a ela. Para encontrar tal representação é interessante partir da equação 4.3, porém um dos três pontos deve ser a variável mencionada no início da seção, assim, teremos as coordenadas x e y satisfazendo a condição de alinhamento com outros dois pontos fixos. O novo determinante será:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

O determinante acima equivale à equação da reta (nas variáveis x e y), que é definida pelos dois pontos dados, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Desenvolvendo, temos

$$x y_A + x_B y + x_A y_B - x_A y - x_B y_A - x y_B = 0.$$

Colocando as variáveis x e y em evidência:

$$y(x_B - x_A) + x(y_A - y_B) - x_B y_A + x_A y_B = 0.$$

Deixando y em função de x , chegamos à equação:

$$y = x \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A} = x \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}.$$

Por fim, fazendo:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ e } n = \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}.$$

Assim, temos que a equação da reta pode ser dada por: $y = mx + n$. Essa equação é apresentada, de forma geral, como Equação Reduzida da Reta.

A equação da reta, de modo geral, está fortemente relacionada com função afim que, segundo Souza e Garcia (2016a), é definida da seguinte maneira:

Definição 4.6 (Função Afim). Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que a todo número real $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $ax + b$, com a e b reais, é chamado de **função afim**. Podemos representar por

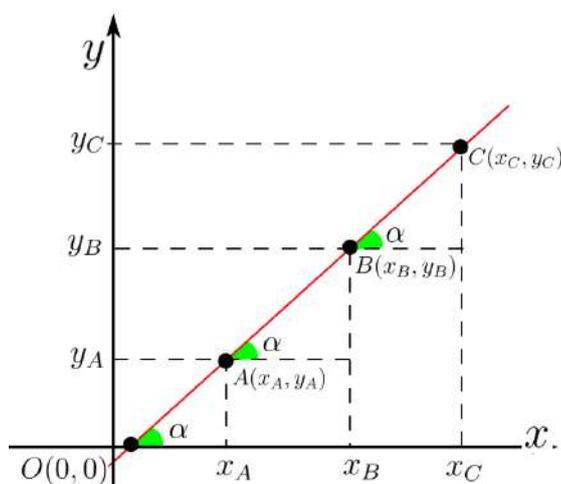
$$x \xrightarrow{f} ax + b \text{ ou } f(x) = ax + b \text{ ou } y = ax + b$$

e dizemos que a e b são os **coeficientes** da função.

Os coeficientes a e b , da definição de função afim, são equivalentes aos coeficientes m e n , da equação da reta. Em muitos livros didáticos é mencionado um termo chamado de “coeficiente angular”, que é a tangente do ângulo α destacado na Figura 4.14, ou seja

$$\tan(\alpha) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Figura 4.14: O ângulo α



Fonte: imagem do autor

Logo $\tan(\alpha)$ é justamente o coeficiente m , encontrado na discussão sobre equação da reta e, naturalmente, o coeficiente a da definição de função afim. É importante mencionar que $\tan(\alpha)$ é a taxa de variação, como disse o próprio Elon Lages Lima.

Se a função afim é dada por $f(x) = ax + b$, não é adequado chamar o número a de coeficiente angular da função f . O nome mais apropriado, que usamos, é a taxa de variação (ou taxa de crescimento). Em primeiro lugar não há, na maioria dos casos, ângulo algum no problema estudado. Em segundo lugar, mesmo considerando o gráfico de f , o ângulo que ele faz com o eixo horizontal, depende das unidades escolhidas para medir as grandezas x e $f(x)$. Em resumo: tem-se taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta (LIMA, 2013, p. 83).

4.2 CIRCUNFERÊNCIA E ESFERA

Neste tópico, faremos uma breve apresentação sobre circunferência e esferas, destacando suas propriedades e equações. Dando ênfase aos casos de interseção entre circunferências e entre esferas. As propriedades apresentadas aqui consistem basicamente numa tentativa de justificar as afirmações presentes nas aplicações referentes a esses dois lugares geométricos.

4.2.1 Circunferência

Definição 4.7. Uma **circunferência** é o lugar geométrico em que todos os pontos (de um mesmo plano) e somente eles têm a seguinte propriedade: Equidistância $r > 0$ (raio), de um ponto $C \in \mathbb{R}^2$ (centro).

Seguindo essa definição vamos encontrar a equação da circunferência no plano cartesiano nas variáveis x e y . Tome um ponto fixo $C(a, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, vamos encontrar uma expressão para todos os pontos $P(x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $d(C, P) = r$. Pela definição de distância entre dois pontos, temos $r = d(C, P) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, logo:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (4.4)$$

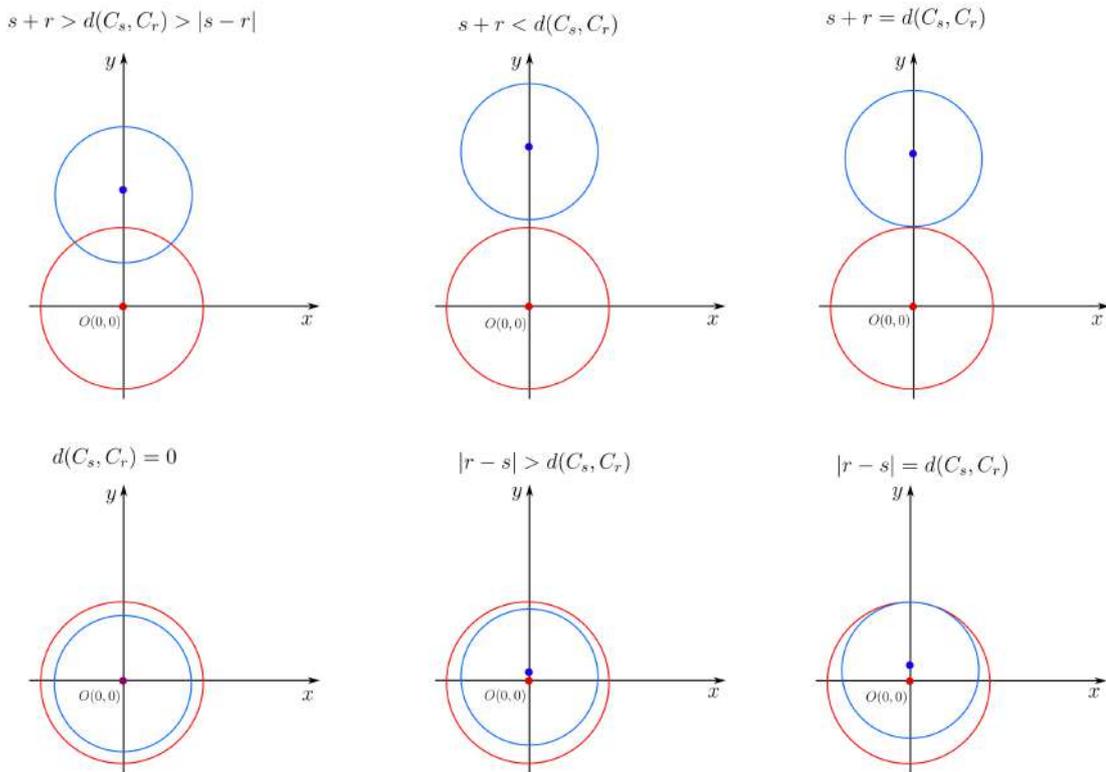
A equação 4.4, segundo Souza e Garcia (2016b), é a Equação Reduzida da Circunferência de centro em $C(a, b)$ e raio $r > 0$.

4.2.2 Interseção entre duas circunferências

Sabemos que a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ representa uma circunferência, em que $C(a, b)$ é o centro da circunferência e r seu raio. Vamos demonstrar que as interseções de duas circunferências (quando houver interseção) são dois pontos ou somente um ponto.

Vamos considerar duas circunferências uma com centro C_s e raio s e outra com centro em C_r e raio r . Para facilitar a compreensão, sem perda de generalidade, vamos considerar $C_s = O(0, 0)$ e $C_r(0, b)$, onde $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $s > r$. Ou seja, a circunferência de maior raio terá o centro coincidindo com a origem do plano cartesiano adotado e as ordenadas de uma possível interseção deve ser positiva, pois $b > 0$. Temos os casos possíveis descritos na Figura 4.15:

Figura 4.15: Posição relativa entre duas circunferências



Fonte: imagem do autor

O caso que queremos demonstrar é o primeiro, quando $s+r \geq d(C_s, C_r) \geq s-r$, em que há interseções. As duas circunferências têm equações $x^2 + y^2 = s^2$ e $x^2 + (y - b)^2 = r^2$. Caso as interseções entre elas sejam dois pontos, então o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = s^2 \\ x^2 + (y - b)^2 = r^2. \end{cases} \quad (4.5)$$

terá soluções e estas serão as coordenadas dos pontos de interseção. Numerando as equações de 4.5 da seguinte maneira.

$$x^2 + y^2 = s^2 \quad (4.6)$$

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (4.7)$$

Substituindo 4.6 em 4.7 temos:

$$\begin{aligned}
 x^2 + (y - b)^2 = r^2 &\Leftrightarrow \overbrace{x^2 + y^2}^{s^2} - 2yb + b^2 = r^2 \\
 &\Leftrightarrow s^2 - 2yb + b^2 = r^2 \\
 &\Leftrightarrow -2yb = r^2 - s^2 - b^2 \\
 &\Leftrightarrow -2yb = r^2 - s^2 - b^2 \\
 &\Leftrightarrow 2yb = s^2 + b^2 - r^2 \\
 &\Leftrightarrow y = \frac{s^2 + b^2 - r^2}{2b}.
 \end{aligned}$$

Aqui determinamos o valor da ordenada em caso de interseção entre as circunferências (que deve ser positivo), já que não há problemas com esse quociente ($b \neq 0$). Vale lembrar que esse não é um valor geral, mas serve de base para uma possível generalização. Agora fazendo

$$y = k = \frac{s^2 + b^2 - r^2}{2b} > 0.$$

Substituindo $y = k$ na equação 4.6, temos

$$x^2 + k^2 = s^2 \Leftrightarrow x^2 = s^2 - k^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{s^2 - k^2}.$$

É importante destacar que a $x = \pm\sqrt{s^2 - k^2}$ tem solução quando $s^2 - k^2 \geq 0$ e isso é equivalente aos casos que queremos. Ou seja,

$$s^2 - k^2 \geq 0 \Leftrightarrow s + r \geq d(C_s, C_r) \geq s - r. \quad (4.8)$$

Observe que, como tomamos C_s na origem, então $d(C_s, C_r) = b$. Partindo da primeira desigualdade:

$$\begin{aligned}
 s + r \geq b &\Leftrightarrow r \geq |b - s| \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{r^2}_{r>0} \geq (b - s)^2 \\
 &\Leftrightarrow r^2 \geq s^2 + b^2 - 2bs \\
 &\Leftrightarrow 2bs \geq s^2 + b^2 - r^2 \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{s}_{b \neq 0} \geq \frac{s^2 + b^2 - r^2}{2b} = k > 0 \\
 &\Leftrightarrow s^2 - k^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Partindo da segunda desigualdade, temos:

$$\begin{aligned}
 b \geq s - r &\Leftrightarrow r \geq |s - b| \\
 &\underbrace{\Leftrightarrow}_{r > 0} r^2 \geq (s - b)^2 \\
 &\Leftrightarrow r^2 \geq s^2 + b^2 - 2sb \\
 &\Leftrightarrow 2bs > s^2 + b^2 - r^2 \\
 &\underbrace{\Leftrightarrow}_{b \neq 0} s \geq \frac{s^2 + b^2 - r^2}{2b} = k > 0 \\
 &\Leftrightarrow s^2 - k^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Com isso, garantimos que as condições geométricas (ver Figura 4.15) para que haja interseção entre circunferências são equivalentes as condições algébricas encontradas na equivalência da expressão 4.8.

Portanto, as interseções serão os elementos (que são pontos) do conjunto I , dado por $I = \{(\sqrt{s^2 - k^2}, k), (-\sqrt{s^2 - k^2}, k)\}$. Observe que, no caso de acontecer $s = k$, as circunferências serão tangentes. Isto é, o conjunto I terá somente um elemento e a interseção das duas circunferências será somente um ponto, o ponto $(0, k)$.

Embora tenha sido utilizado uma circunferência com centro na origem e uma outra com centro sobre o eixo Oy é possível demonstrar para um caso geral (com centros quaisquer). Este caso geral sempre pode ser reduzido ao caso acima, bastando utilizar transformações (translação e rotação), trabalhando com novas coordenadas.

4.2.3 Esfera

Numa tentativa de embasar melhor as ideias utilizadas na aplicação referente à esfera, iremos assumir uma extensão do \mathbb{R}^2 como o plano para o \mathbb{R}^3 como o espaço, valendo-se basicamente das mesmas propriedades com o adicional de uma coordenada, nos dando que

$$P \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \exists x, y, z \in \mathbb{R}; P = (x, y, z).$$

Pode-se observar que tomando $z = k$ (constante), há uma bijeção entre os conjuntos \mathbb{R}^2 e $R_k^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } z = k\}$. Em outras palavras, podemos considerar cada R_k^2 como sendo equivalente ao \mathbb{R}^2 . Dito isso, assumiremos que as definições e propriedades referentes à distância e a lugares geométrico sejam conhecida como, por exemplo, sendo $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B) \in \mathbb{R}^3$, temos que

$$AB = d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Definição 4.8. Esfera é o lugar geométrico do espaço (\mathbb{R}^3) cuja distância a um ponto fixo C é constante e igual a $r \in \mathbb{R}_+^*$.

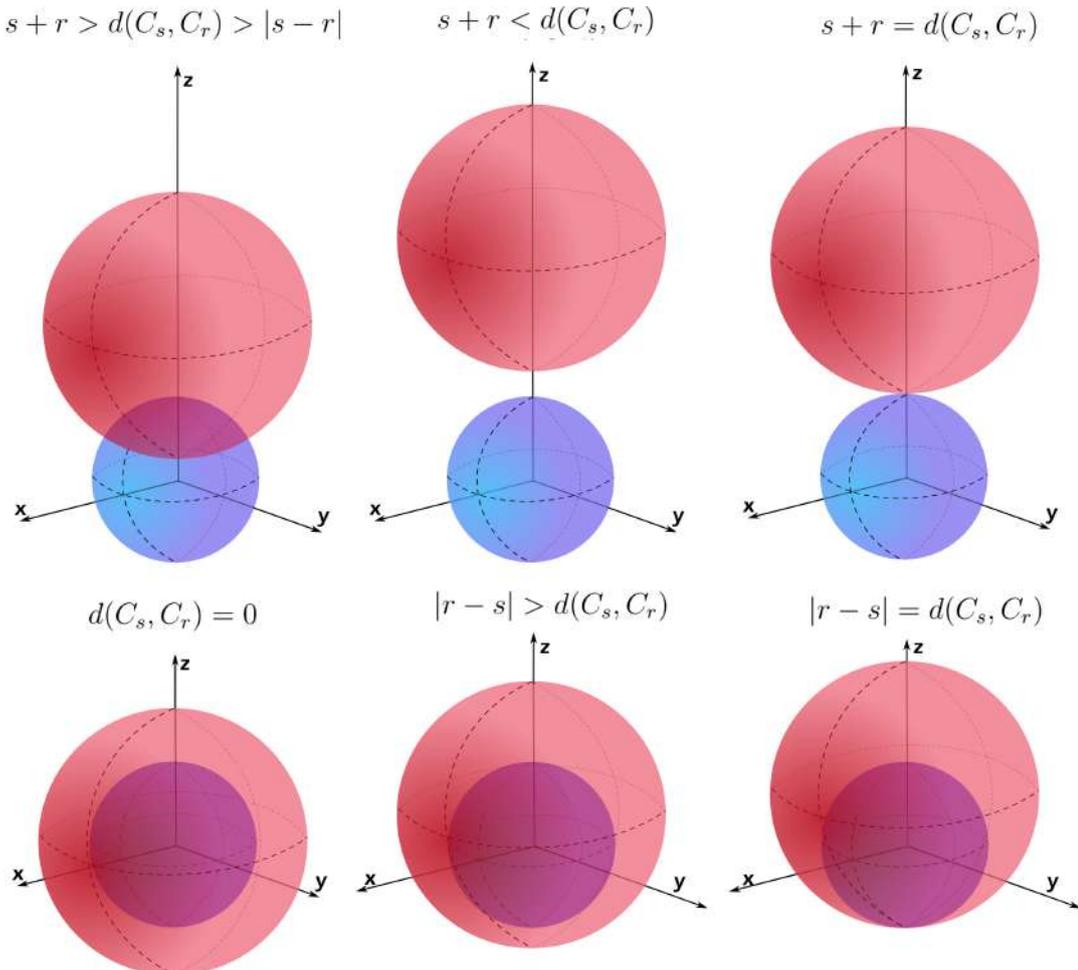
Podemos observar que uma esfera (λ) centrada na origem $C(0, 0, 0)$ e de raio $R > 0$ pode ser representada por

$$P \in \lambda \Leftrightarrow d(P, C) = R \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

4.2.4 Interseção de esferas

Aqui será discutido a posição relativa entre duas esferas e demonstrado que a interseção entre duas esferas (quando houver interseção) é uma circunferência ou um ponto, para isso será tomada uma esfera de centro na origem e raio s e uma outra esfera de centro em $(0, 0, c)$, com $c \in \mathbb{R}_+^*$ e raio r . As esferas têm equações: $x^2 + y^2 + z^2 = s^2$ e $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r^2$

Figura 4.16: Posições relativas entre duas esferas



Fonte: imagem do autor

Para que haja a interseção, semelhante ao que aconteceu com as circunferências, é necessário que os centros e os raios das esferas satisfaçam a condição:

$$s + r > d(C_s, C_r) > s - r. \quad (4.9)$$

Caso a interseção das duas esferas seja uma circunferência, ao resolver o sistema 4.10 (imediatamente abaixo) encontraremos, como solução, a equação de uma circunferência.

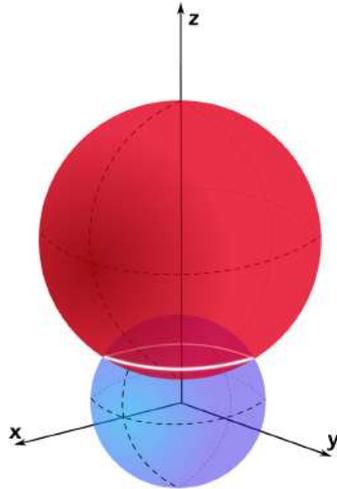
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = s^2 \\ x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r^2. \end{cases} \quad (4.10)$$

Assumindo como válidas as condições apresentadas na desigualdade 4.9 e pondo $k = \frac{s^2 + c^2 - r^2}{2c}$, temos que a solução do sistema 4.10 é formada pelas soluções da equação

$$x^2 + y^2 = s^2 - k^2 \quad (4.11)$$

que representa uma circunferência de raio $\sqrt{s^2 - k^2}$ e centro $C(0, 0, k)$.

Figura 4.17: Caso onde a interseção é uma circunferência



Fonte: imagem do autor

De forma análoga ao que foi discutido em circunferência, quando fazemos $s = k$ encontramos que $x^2 + y^2 = 0$ que equivale a $x = y = 0$. Isso significa que a interseção das duas esferas, nesse caso, será um ponto pertencente ao eixo Oz , com as coordenadas $(0, 0, k)$, no caso em que $s + r = d(C_s, C_r)$, e $(0, 0, -k)$, quando $|s - r| = d(C_s, C_r)$, que são justamente pontos de tangência.

4.3 CÔNICAS

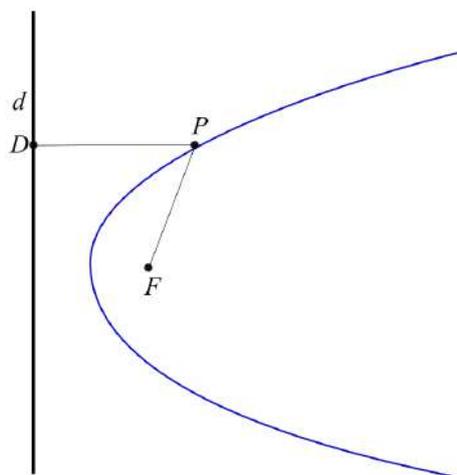
Esta seção é destinada à demonstração analítica das propriedades reflexivas das cônicas: Parábola, Elipse e Hipérbole. É muito importante discutir este resultado obtido por Heron de Alexandria, um matemático que viveu por volta de 60 d.c, no Egito.

O resultado mencionado é conhecido como Princípio da Reflexão e se aplica a vários campos da física que envolvem, principalmente, ondas eletromagnéticas, sonoras e de calor. Segundo Weinberg (2015), esse princípio se baseia no Princípio do Menor Esforço, de Aristóteles, este princípio enuncia que a Natureza sempre toma o caminho que utiliza menos energia, ou de forma mais simples, o menor caminho, o mais simples. O Princípio da Reflexão diz que dada uma superfície refletora os ângulos de incidência e o reflexão são iguais.

4.3.1 Parábola

Definição 4.9. Dados um ponto F , que chamaremos de foco e uma reta d , denominada de diretriz ambos de um mesmo plano, com F fora da reta d , seja p a distância entre F e d . Chama-se **parábola** o lugar geométrico que contém todos pontos P , do mesmo plano, tal que as distâncias DP e FP são iguais, sendo DP a distância de P à diretriz.

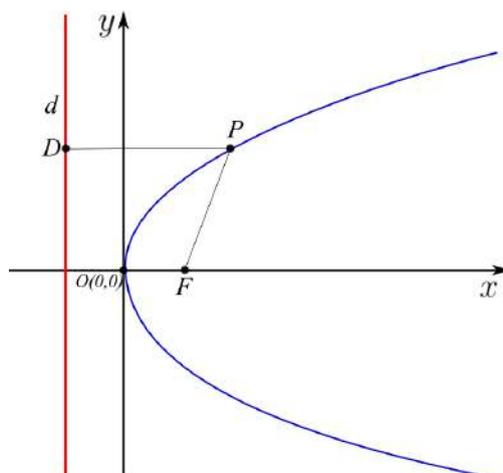
Figura 4.18: Representação de uma parábola e sua diretriz



Fonte: imagem do autor

Para encontrar a equação da Parábola vamos considerar uma parábola de foco $F(p/2, 0)$, diretriz $x = -p/2$ com $p \in \mathbb{R}_+$, eixo sobre o eixo Ox e vértice (ponto da parábola mais próximo da diretriz) na Origem. Considere um ponto $P(x, y)$ sobre a parábola e sua projeção $D(-p/2, y)$ sobre Oy . A Parábola tem o eixo Ox como eixo de simetria. Logo, temos $VF = \frac{p}{2}$.

Figura 4.19: Representação de uma parábola no plano cartesiano



Fonte: imagem do autor

Pela definição de parábola, vale

$$\begin{aligned}
 DP = PF &\Leftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + (0 - y)^2} \\
 &\Leftrightarrow x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 \\
 &\Leftrightarrow xp = -xp + y^2
 \end{aligned}$$

Isolando o y^2 no primeiro membro da equação, temos

$$y^2 = 2xp. \tag{4.12}$$

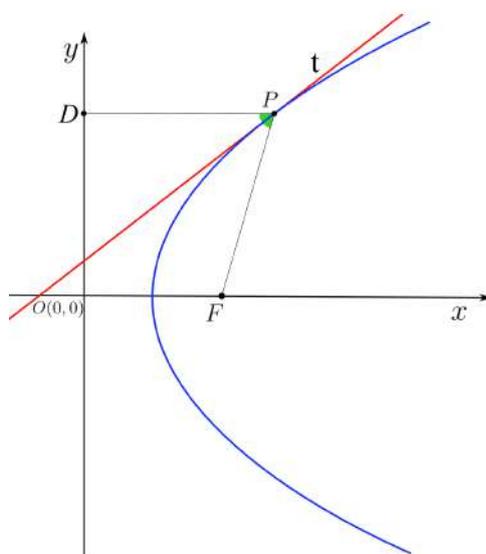
A equação 4.12 é a equação da parábola com foco $F(\frac{p}{2}, 0)$ e vértice na origem do plano cartesiano adotado.

4.3.2 Propriedade reflexiva da parábola

Para enunciar e demonstrar a propriedade reflexiva da parábola, consideremos uma parábola de foco $F(p, 0)$, diretriz Oy , eixo de simetria sobre o eixo Ox e vértice $V(a, 0)$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$. Considere um ponto P sobre a parábola e sua projeção D sobre Oy .

Teorema 4.10. A bissetriz, t , do ângulo $D\hat{P}F$, como na Figura 4.20, também é a reta tangente à Parábola no ponto P .

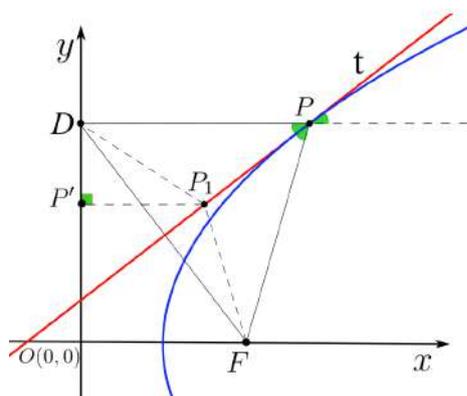
Figura 4.20: Representação de um ponto P e da reta t



Fonte: imagem do autor

Demonstração. Pela definição de parábola, temos que $DP = PF$. Tomemos um ponto P_1 , pertencente à reta t , diferente de P e seja P' a projeção de P_1 sobre o eixo Oy , como vemos na Figura 4.21.

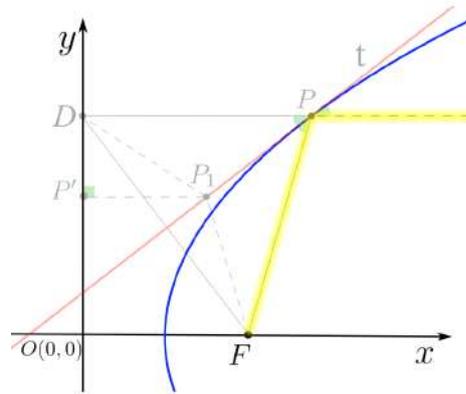
Figura 4.21: A mediatriz t , do triângulo DPF



Fonte: imagem do autor

Perceba que o triângulo FDP ($DP = PF$) é isósceles, a reta t sendo sua bissetriz também é mediatriz de \overline{DF} , logo $DP_1 = P_1F$ e $P'P_1 < DP_1$, (basta observar que no triângulo $\triangle DP_1P'$, o segmento DP_1 é hipotenusa). Como $P'P_1 < DP_1 = P_1F$ então $P'P_1 < P_1F$, isso nos diz que P_1 não pertence à parábola. Assim, só existe um ponto que pertence à parábola e à bissetriz simultaneamente. Portanto, a reta t é tangente em P . ■

Figura 4.22: Ângulo de incidência e reflexão de um feixe de luz FP



Fonte: imagem do autor

Como consequências desse resultado temos que, prolongando o segmento DP no sentido do *eixo* Ox positivo, temos o ângulo oposto ao ângulo $D\hat{P}P_1$ (com relação às retas \overleftrightarrow{DP} e t) é justamente o ângulo de reflexão, esse, por sua vez, é congruente a $D\hat{P}P_1$ (opostos pelo vértice P) que é congruente a $F\hat{P}P_1$, pois a reta t é a bissetriz de $D\hat{P}F$. Isso conclui a propriedade reflexiva de uma parábola. Resumidamente, temos que o ângulo formado entre uma reta paralela ao eixo focal (reta que passa pelo vértice da parábola e o foco da mesma), e a reta t , tangente à parábola em P (ângulo de incidência) é sempre congruente ao ângulo $F\hat{P}P_1$ (ângulo de reflexão).

[...] por um princípio da óptica geométrica, a luz de uma fonte colocada em F será refletida ao longo de uma reta paralela ao eixo x . Isso explica por que os paraboloides, superfícies obtidas por rotações de parábolas sobre seus eixos, são usados como forma de alguns faróis de automóveis e espelhos para os telescópios (STEWART, 2022, p. 244).

4.3.3 Elipse

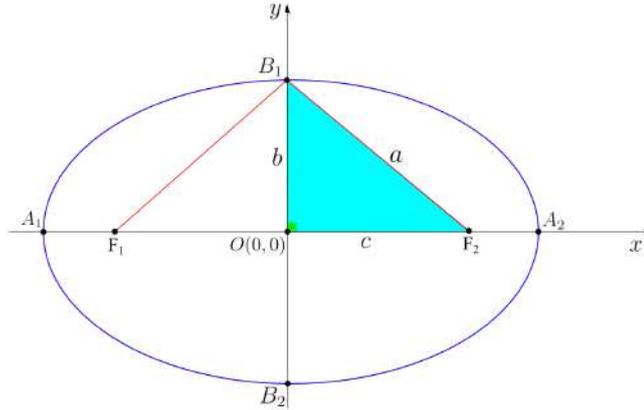
Definição 4.11. Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um mesmo plano, sendo $2c > 0$ a distância entre eles, chama-se **elipse** o lugar geométrico que contém todos os pontos P , do mesmo plano, cujo a soma das distâncias de F_1 e F_2 é a constante $2a$, desde que $2a > 2c$.

Para facilitar a abordagem, consideraremos uma Elipse centrada na origem do plano cartesiano adotado. Com isso, temos que $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ são os focos, $2c$ é a distância focal. Além disso, adotaremos: $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$ como os vértices do eixo maior e $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$, os vértices do eixo menor sempre que $a > b$. Podemos observar, além dos elementos dispostos graficamente na Figura 4.23, que para a Elipse

assim definida vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Por último, mas não menos importante, temos a **excentricidade** de uma elipse que é dada por $\frac{c}{a}$.

Mesmo considerando um caso simples de elipse no plano, as propriedades podem ser estendidas para elipses no espaço, transladadas ou para elipses que sofreram¹ algum tipo de rotação.

Figura 4.23: Elementos da Elipse



Fonte: imagem do autor

Para encontrar a equação da elipse, vamos considerar uma Elipse (\mathcal{E}) centrada na origem, com focos F_1 e F_2 , tais que a distância entre eles seja $2c > 0$ e um ponto $P(x, y) \in \mathcal{E}$, tal que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, com $2a > 2c$. Assim vale

$$\begin{aligned}
 d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a &\Leftrightarrow \sqrt{(-c-x)^2 + (0-y)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 &\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \\
 &\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
 &\Leftrightarrow 2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} - 2xc \\
 &\Leftrightarrow 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc \\
 &\Leftrightarrow (a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2})^2 = (a^2 - xc)^2 \\
 &\Leftrightarrow a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - a^2xc + x^2c^2 \\
 &\Leftrightarrow a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2 \\
 &\Leftrightarrow a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{(a^2 - c^2)}_{b^2} x^2 + a^2y^2 = a^2 \underbrace{(a^2 - c^2)}_{b^2} \\
 &\Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.
 \end{aligned}$$

¹A elipse rotacionada, na verdade, não sofreu uma rotação. O que acontece é que a tratamos utilizando um sistema de eixos coordenados rotacionados, diferindo assim do caso padrão xOy

dividindo ambos os membros da igualdade por $a^2b^2 \neq 0$ chegamos a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.13)$$

que é chamada de **Equação Reduzida da Elipse**, com centro na origem. Há o caso em que o centro está fora da origem, segundo Iezzi (2013), se uma elipse tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $A_1A_2 \parallel Ox$, sua equação em relação ao sistema auxiliar $x'O'y'$ é:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

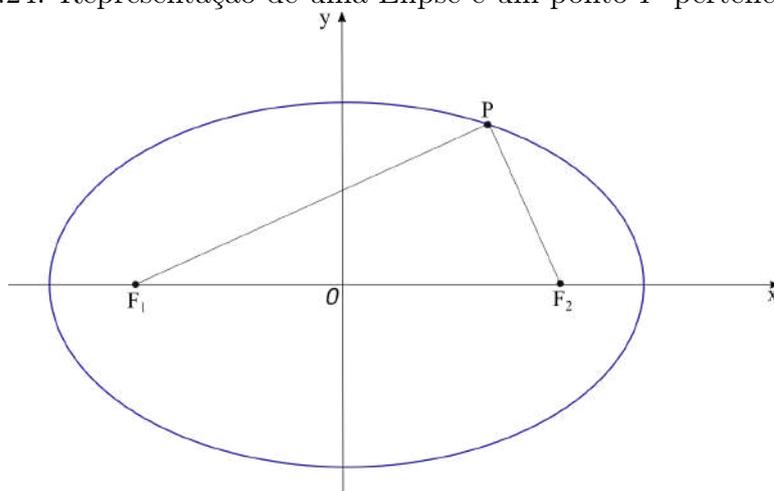
portanto, de acordo com as fórmulas de translação, sua equação relativa ao sistema xOy é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (4.14)$$

4.3.4 Propriedade reflexiva da elipse

Para demonstrar a propriedade reflexiva da Elipse, vamos considerar uma elipse de centro na origem, com focos F_1 e F_2 , um ponto P pertencente à Elipse e os segmentos F_1P e PF_2 .

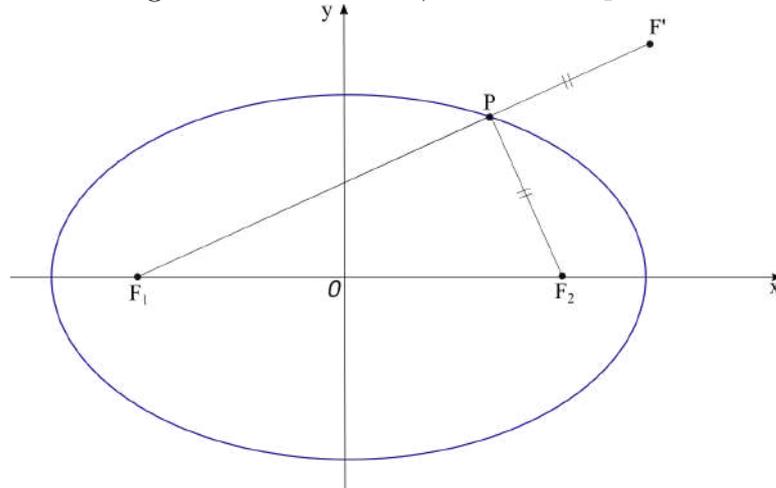
Figura 4.24: Representação de uma Elipse e um ponto P pertencente a ela



Fonte: imagem do autor

Consideremos ainda um ponto $F' \in \overleftrightarrow{F_1P}$ externo à elipse de modo que $F_2P = PF'$, isto é, de modo que F_1 , P e o próprio F' sejam colineares.

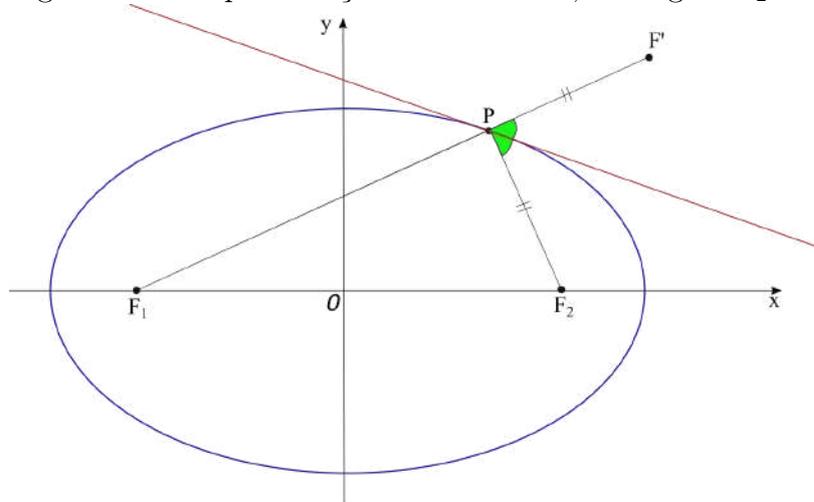
Figura 4.25: Ponto F' , colinear a F_1 e P



Fonte: imagem do autor

Teorema 4.12. Seja P um ponto pertencente à Elipse \mathcal{E} , de focos F_1 e F_2 , tomando um ponto F' de modo que esse seja colinear com F_1 e P e ainda $PF' = PF_2$. Se a reta t é a bissetriz do ângulo $F_2\hat{P}F'$, então a reta t é tangente à \mathcal{E} em P .

Figura 4.26: Representação da bissetriz t , do ângulo F_2PF'

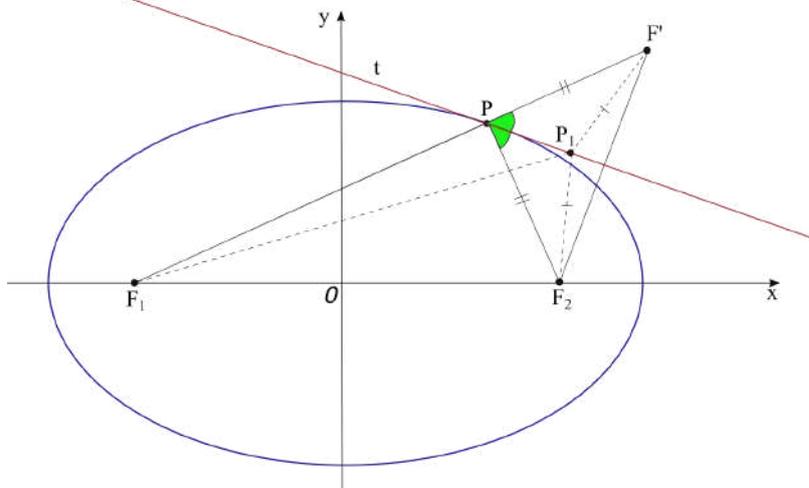


Fonte: imagem do autor

Demonstração. Tome um ponto P_1 pertencente à reta t de modo que P_1 seja diferente de P . Para que a reta t seja tangente em P , precisamos mostrar que P_1 não pertence à Elipse, isto é, que P é o único ponto da reta t que pertence à Elipse. Temos que $PF_2 = PF'$ (por construção), podemos concluir que $F_1P + PF' = 2a$. Como a reta t é bissetriz do ângulo F_2PF' então também é mediatriz do triângulo isósceles $\Delta F_2PF'$, logo $F_2P_1 = P_1F'$. Se P_1 pertencesse à Elipse então teríamos que $F_1P_1 + P_1F_2 = 2a = F_1P + PF_2$, porém, perceba que, pelo triângulo $\Delta F_1F'P_1$, por desigualdade triangular, $F_1P_1 + P_1F' > F_1F'$, ou seja, $F_1P_1 + P_1F' > 2a$. Logo P_1 não pode pertence à Elipse, isto é, não existe outro

ponto da reta t , diferente de P , que pertença à Elipse. Logo, t é tangente à Elipse em P . ■

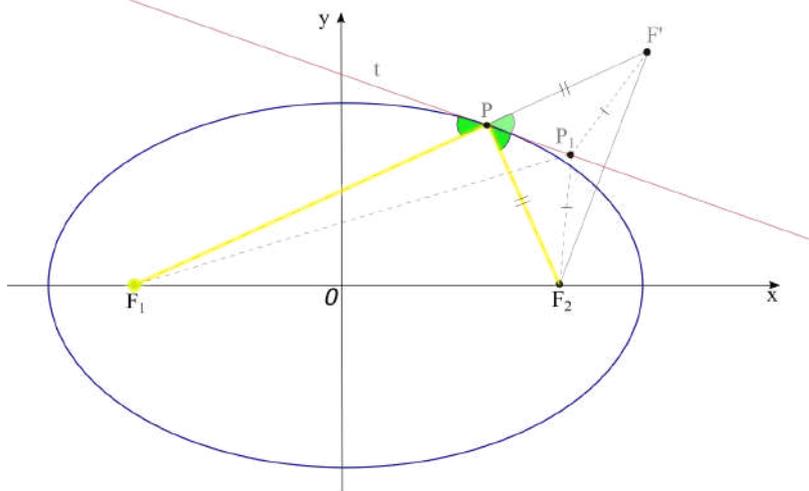
Figura 4.27: Representação do triângulo F_2PF'



Fonte: imagem do autor

Como t é bissetriz do ângulo $F_2\widehat{P}F'$ e tangente a Elipse em P . Perceba que o ângulo oposto ao ângulo $F'\widehat{P}P_1$ com relação as retas F_1P e t é justamente o ângulo de inflexão e o ângulo $F_2\widehat{P}P_1$ o ângulo de reflexão, que pelo que foi provado são iguais. Se tomarmos um feixe de luz $(\overrightarrow{F_1P})$ com origem em F_1 e atingindo P , ele será refletido para f_2 , como ilustrado na Figura 4.28:

Figura 4.28: Mediatriz t , do triângulo F_2PF'



Fonte: imagem do autor

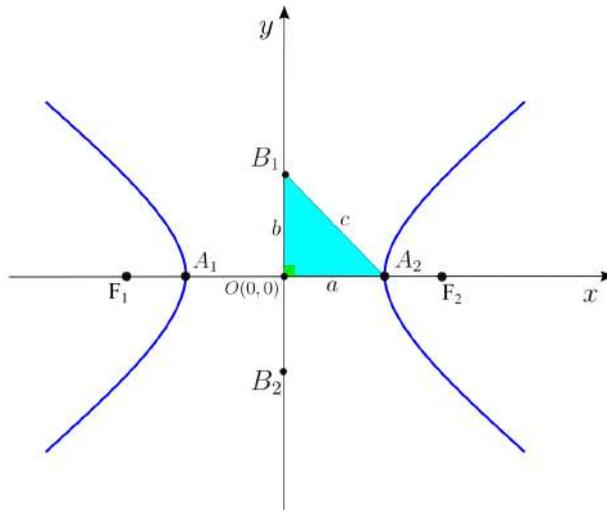
4.3.5 Hipérbole

Definição 4.13. Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 pertencentes a um mesmo plano, seja $2c$ a distância entre eles, chama-se **hipérbole** o lugar geométrico que contém todos

os pontos P , do mesmo plano, cujo módulo da diferença das distâncias PF_1 e PF_2 é a constante $2a$ (constante hiperbólica), com $0 < 2a < 2c$.

Vamos considerar, sem perda de generalidade, uma hipérbole (\mathcal{H}) com centro na origem do plano cartesiano e os pontos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ os focos. Vamos considerar ainda os vértices $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$ e nomearemos o segmento $\overline{A_1A_2}$ de eixo real (ou eixo transversal) e os pontos $B_1(b, 0)$ e $B_2(-b, 0)$ sendo os extremos do segmento $\overline{B_1B_2}$ de eixo imaginário. Com essa notação, temos a seguinte relação $c^2 = a^2 + b^2$. Os elementos e a própria curva estão representados na figura 4.29.

Figura 4.29: Representação da Hipérbole e seus elementos



Fonte: imagem do autor

Para encontrar a equação de um hipérbole vamos partir da definição 4.13, considerando uma hipérbole (\mathcal{H}) com focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e um ponto $P(x, y) \in \mathcal{H}$ de modo que $|PF_1 - PF_2| = 2a$, fazendo cálculos análogos aos utilizados para encontrar a equação 4.13, concluímos que

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.15}$$

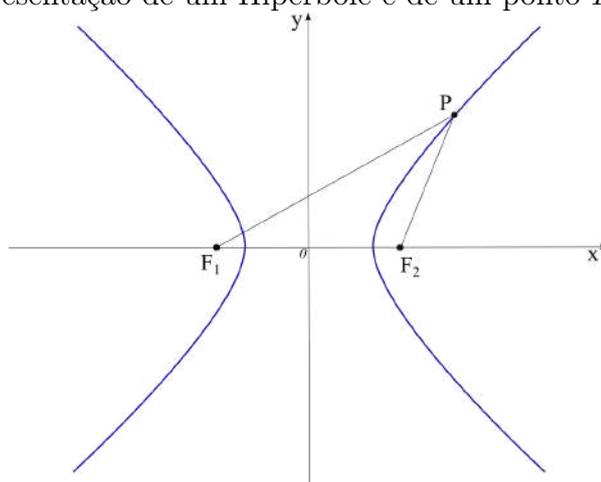
A Equação 4.15 é denominada de **Equação Reduzida da Hipérbole** com centro na origem. De forma análoga à Elipse, uma Hipérbole com centro $C'(x_0, y_0)$ fora da origem e eixo $\overline{A_1A_2}$ paralelo ao eixo Ox tem equação:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \text{ com } x_0, y_0 \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

4.3.6 Propriedade reflexiva da hipérbole

Na demonstração da propriedade reflexiva da Hipérbole vamos considerar uma hipérbole com centro na origem, focos F_1 e F_2 , além de um ponto qualquer P pertencente à hipérbole, como mostra a Figura 4.30.

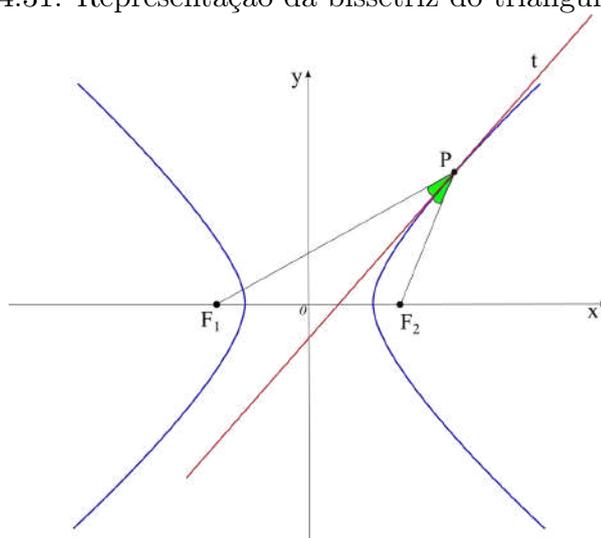
Figura 4.30: Representação de um Hipérbole e de um ponto P pertencente a ela



Fonte: imagem do autor

Considere a bissetriz t do ângulo $F_1\widehat{P}F_2$, vamos mostrar que t também é tangente à hipérbole no ponto P e assim mostrando que os ângulos de incidência e reflexão de F_1 a P e de P a F_2 são iguais.

Figura 4.31: Representação da bissetriz do triângulo F_1PF_2



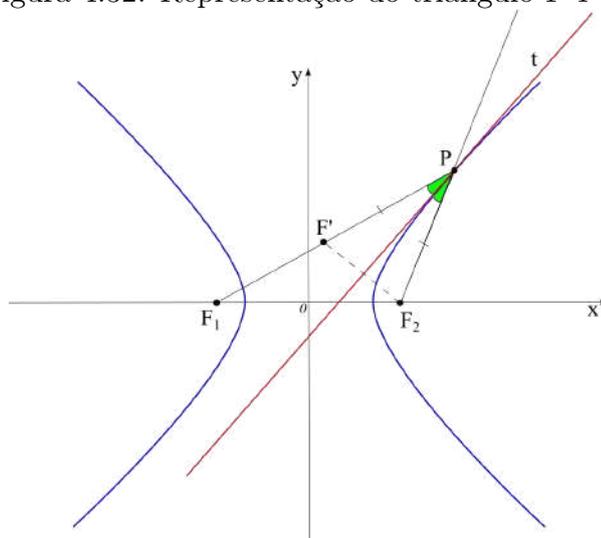
Fonte: imagem do autor

Considerando um ponto F' sobre o segmento $\overline{F_1P}$ de modo que $F'P = PF_2$, logo

a reta t é a mediatriz do segmento $\overline{F'F_2}$. Com isso,

$$|F_1P - F'P| = |F_1P - F_2P| = F_1F' = 2a = k \text{ (constante)}.$$

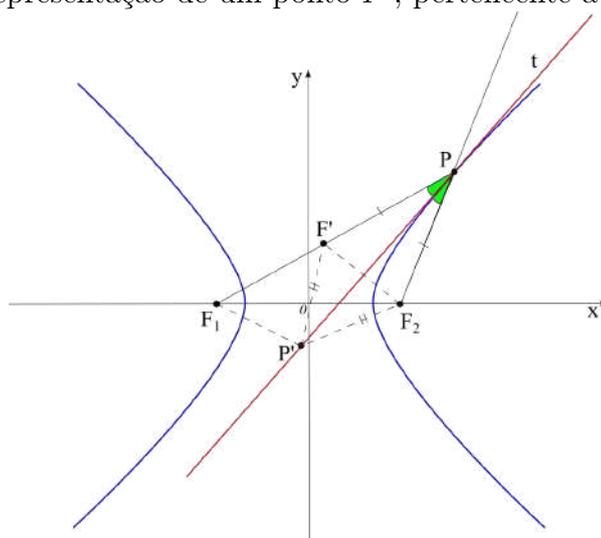
Figura 4.32: Representação do triângulo $F'PF_2$



Fonte: imagem do autor

Além disso, se um ponto P' pertencente à reta t e diferente de P é tal que vale $F'P' = P'F_2$.

Figura 4.33: Representação de um ponto P' , pertencente a t diferente de P



Fonte: imagem do autor

Por desigualdade triangular, aplicada ao triângulo $\Delta F_1F'P'$, temos as seguintes desigualdades:

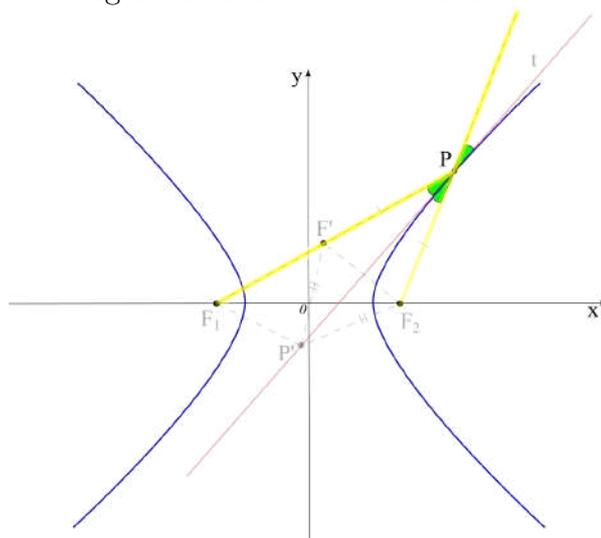
$$\begin{aligned}
 P'F' < F_1P' + F_1F' \text{ e } F_1P' < F_1F' + P'F' &\Rightarrow P'F' - F_1F' < F_1P' \text{ e } F_1P' < F_1F' + P'F' \\
 &\Rightarrow P'F' - F_1F' < F_1P' < F_1F' + P'F'
 \end{aligned}$$

temos assim que $P'F' - F_1F' - P'F' < F_1P' - P'F' < F_1F' + P'F' - P'F'$ é válida e essa, por sua vez, implica a validade de $-F_1F' < F_1P' - P'F' < F_1F'$. Pelo fato de $P'F_2 = P'F'$, por suposição, temos que

$$F_1P' - P'F_2 = F_1P' - P'F' < F_1F' = 2a \Rightarrow F_1P' - P'F_2 < 2a$$

ou seja, P' não pertence à hipérbole, dessa maneira, não existe um outro ponto P' diferente de P , que pertença à bissetriz t e à hipérbole simultaneamente. Portanto, a reta t também é tangente à hipérbole em P e o ângulo oposto ao ângulo $P'\widehat{P}F_2$ (ângulo de incidência) é justamente o ângulo de reflexão no ponto P . Como indicado na Figura 4.34.

Figura 4.34: Reflexão da Hipérbole



Fonte: imagem do autor

5 APLICAÇÕES

Segundo Descartes, “A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.” É com essa citação que iniciamos esse capítulo que propõe apresentar algumas aplicações de um conteúdo que, em uma primeira vista, seria tão abstrato por transformar algo como elementos geométricos em elementos algébricos.

A Geometria Analítica tem uma gama de aplicações. Algumas delas serão discutidas com o objetivo de destacar a importância do estudo da disciplina, que por ser muito algébrica tende a ser menos atraente por parte dos alunos, pois tende a aparentar muito abstrata, como citada anteriormente, e desconexa da realidade. Destacar aplicações que são vistas diariamente, torna o estudo da disciplina mais significativa para a aluno, logo, mais interessante.

Salientamos ainda o fato de que o estudante pode não utilizar determinada aplicação com frequência em seu dia a dia, mesmo assim tal conhecimento trará uma compreensão da matemática que está ao seu redor, da utilização na prática de determinado conhecimento e da concretização do saber matemático.

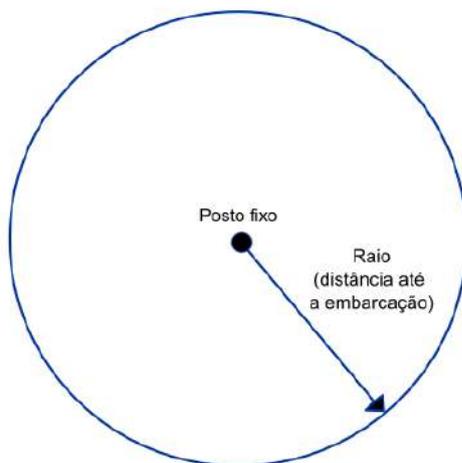
5.1 CIRCUNFERÊNCIA

Um das aplicações mais importantes atualmente de circunferência/esfera é o Sistema de posicionamento global, mais conhecido como GPS (Global Positioning System). Inicialmente será apresentada uma adaptação de um exemplo prático contido em Hegarty (2006).

Imagine a seguinte situação: um navegador de uma embarcação em alto-mar deseja determinar sua posição atual, agora considere um posto fixo de comando onde há uma sirene, imagine ainda que este navegador tem um relógio muito preciso que é sincronizado com outro relógio idêntico no posto fixo. A sirene emite o som em um horário já conhecido pelo navegador.

Após ouvir a sirene o navegador anota o tempo que a sirene levou para sair de sua fonte até seu ouvido, que foi exatamente cinco segundos. A velocidade do som é de aproximadamente 340,29 m/s, logo multiplicando a velocidade do som por o tempo decorrido encontra-se a distância 1701,45 m, isso significa que a embarcação está em uma circunferência de raio aproximadamente 1,701 km, em que o centro é o posto fixo, isto é, pode estar em qualquer ponto da circunferência, como mostra a Figura 5.1.

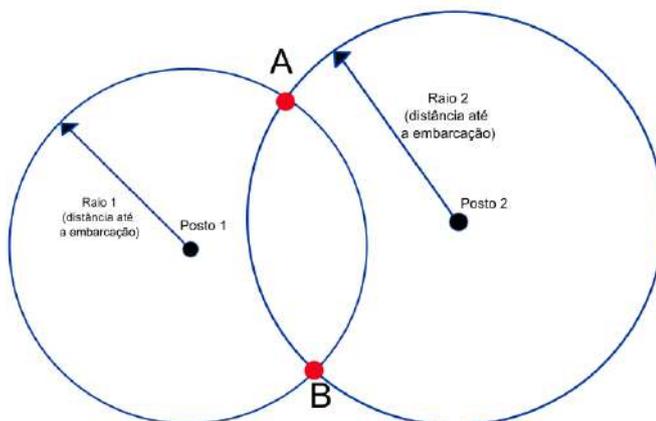
Figura 5.1: Representação da distância do posto até a embarcação



Fonte: imagem do autor.

Ainda assim não é possível determinar, com apenas esse posto, a posição do navegador. Agora imagine um segundo posto fixo (posto 2) diferente do primeiro discutido, porém nas mesmas condições do o segundo também tem um relógio sincronizado com a embarcação. Agora considere o primeiro posto fixo como posto 1 e a distância entre este e a embarcação de raio 1. Após tocar a sirene do posto 2 o navegador anota novamente o tempo que o som da mesma leva até seu ouvido, que foi de sete segundos, logo, seguindo a mesma analogia, $(340,29 \text{ m/s} \cdot 7 \text{ s})$ o navegador está a uma distância de 2382,03 m do posto 2, isto é, em uma circunferência de raio 2 de aproximadamente 2,382 km. Agora unindo as duas informações, do posto 1 e do posto 2, temos o esquema da Figura 5.2.

Figura 5.2: Representação da distância do posto 1 e do posto 2 até a embarcação



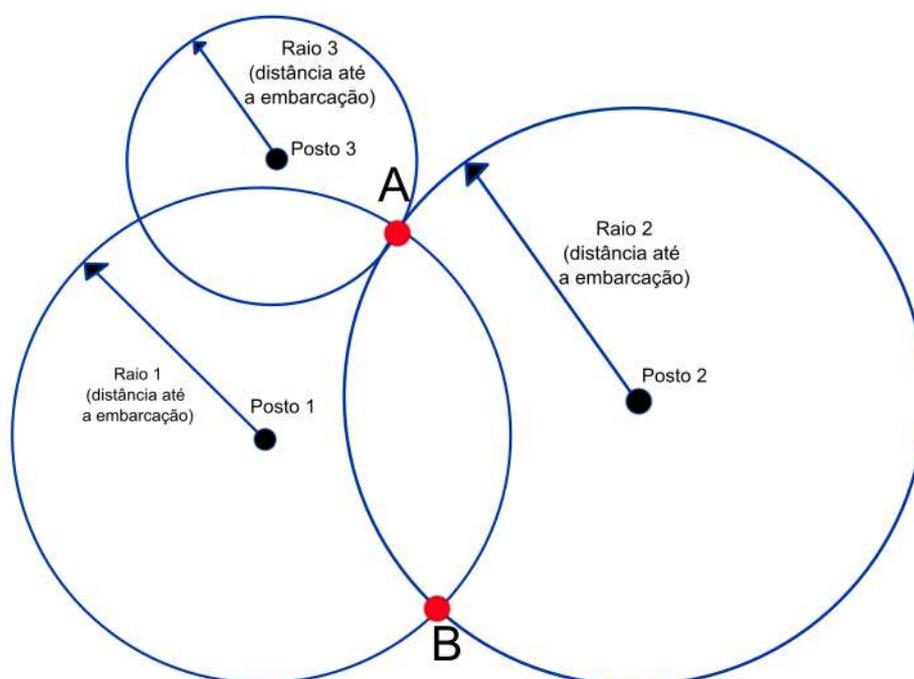
Fonte: imagem do autor.

Aqui os pontos A e B representam as possíveis posições da embarcação, pois ambos os pontos satisfazem as anotações do navegador. Para determinar em qual dos pontos está localizado a embarcação, é necessário um terceiro posto (posto 3), utilizando exatamente a mesma analogia dos outros dois postos e a medição do navegador em seu relógio foi de três segundos logo:

$$340,29 \text{ m/s} \cdot 3 \text{ s} = 1020,87 \text{ m}$$

Isto é ele está em uma circunferência com raio aproximadamente de 1,020 km. Vejamos o novo esquema na Figura 5.3.

Figura 5.3: Representação da distância do posto 1, posto 2 e posto 3 até a embarcação

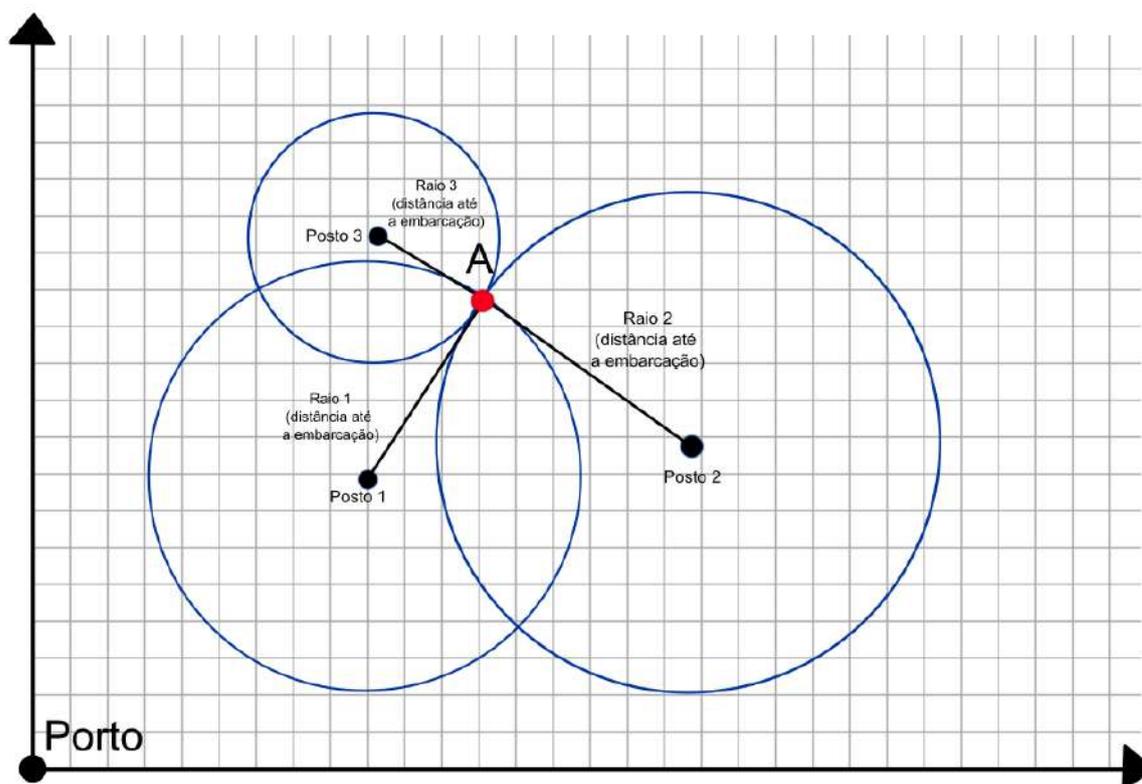


Fonte: imagem do autor.

Com isso a posição do navegador é determinada, ele está no ponto A, que é a interseção das três circunferências de raios: raio 1, raio 2 e raio 3.

É possível trabalhar nas coordenadas cartesianas com as informações já obtidas até então. Considerando um porto próximo ao litoral como sendo a origem do plano e as circunferências, postos e a própria embarcação como mostrado na Figura 5.4.

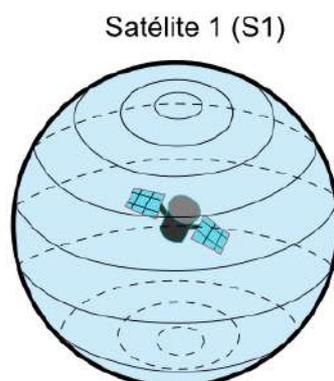
Figura 5.4: Representação dos postos e embarcação em um plano cartesiano



Fonte: imagem do autor.

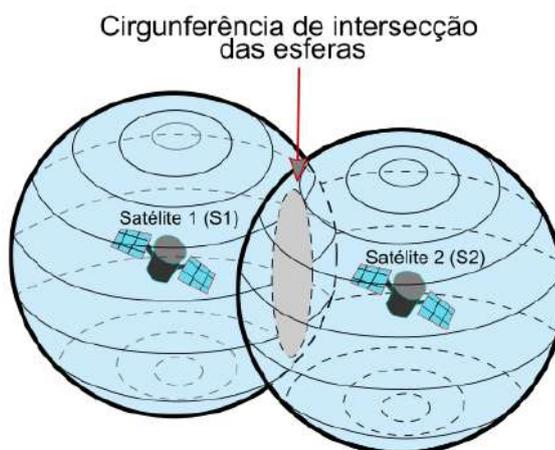
Assim é possível representar todas as localizações mencionadas através de coordenadas cartesianas. Permitindo utilizar, por exemplo, distância entre dois pontos, interseção de circunferências e suas equações.

Aplicando o mesmo conceito desse exemplo, é possível entender como funciona o GPS. Imagine um satélite que tenha um relógio próprio e que possa emitir um sinal. Agora considere um indivíduo na superfície da terra com um aparelho que tenha GPS (smartphones no geral, por exemplo), este aparelho tanto emite quanto recebe o sinal do satélite. O satélite emite um sinal na velocidade da luz, fazendo o produto do tempo que o sinal levou até o aparelho pela velocidade da luz é possível verificar que o indivíduo está no limite de uma esfera de raio R_1 , cujo centro é o satélite (S_1). Como ilustrado na Figura 5.5.

Figura 5.5: Representação de S_1 

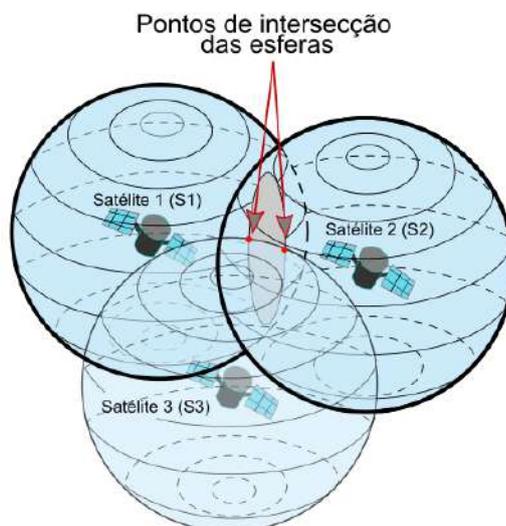
Fonte: imagem do autor.

Ainda assim não é possível determinar com certeza a posição do indivíduo. Utilizando outro satélite (S_2), nas mesmas condições a interseção de ambas as esferas é uma circunferência, isto é, o indivíduo está posicionado em algum ponto dessa circunferência.

Figura 5.6: Representação da interseção de S_1 e S_2 

Fonte: imagem do autor.

Utilizando as informações de um terceiro satélite (S_3), junto das informações de S_1 e S_2 , verifica-se que a interseção das três esferas são dois pontos, onde um deles no geral está no subsolo da Terra ou na atmosfera e o outro é a posição do indivíduo, como indicado abaixo:

Figura 5.7: Representação da interseção de S_1 , S_2 e S_3 

Fonte: imagem do autor.

Embora tenha uma ideia extremamente simples, a Geometria Analítica aplicada ao Sistema de Posicionamento Global é de fundamental importância e é utilizada com frequência, atualmente, por exemplo, quando é necessário enviar a localização para um amigo ou familiar, no rastreamento de aparelhos perdidos/furtados ou mesmo quando é necessário chamar um motorista por algum aplicativo, como os da empresa Uber (Uber Technologies Inc).

5.2 ELIPSE

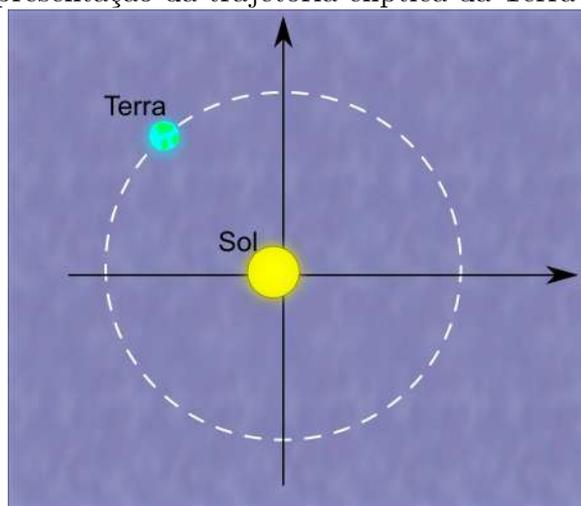
A Elipse tem uma das aplicações mais interessantes e que foi um dos maiores motivos do estudo dessa curva. A Elipse descreve uma das possíveis trajetórias de corpos celestes em torno de outros corpos celestes.

As conclusões de Halley também comprovaram a veracidade da 1ª Lei de Kepler, que afirma que as trajetórias dos astros em torno do Sol são elípticas, estando este em um dos focos. As extremidades do eixo maior dessa elipse são chamadas de periélio (ponto orbital mais próximo do sol) e afélio (ponto orbital mais distante do sol) (SOUZA; GARCIA, 2016b, pp. 94).

Porém é possível que existam órbitas circulares, a terra, por exemplo tem uma órbita quase circular em relação ao sol, se fossemos encolher o nosso sistema solar, (mantendo a proporção) de modo que o maior eixo tivesse $10,16 \text{ cm}$ o menor eixo teria, aproximadamente, $9,9 \text{ cm}$ o que seria próximo de uma circunferência de raio de 10 cm (FERRE; GALLI; MATTJE, 2018, p. 374)

O achatamento da elipse é determinado pela excentricidade da mesma. Ou seja, quanto mais achatada for uma elipse, maior será a sua excentricidade. De modo análogo, quanto menor for a excentricidade de uma elipse, mais próxima de um círculo essa será. Com essas informações, sabemos que a excentricidade da órbita da Terra é um valor próximo de zero. Sistematizando a órbita da Terra com relação ao Sol em um plano cartesiano, temos a representação da Figura 5.8.

Figura 5.8: Representação da trajetória elíptica da Terra em torno do Sol

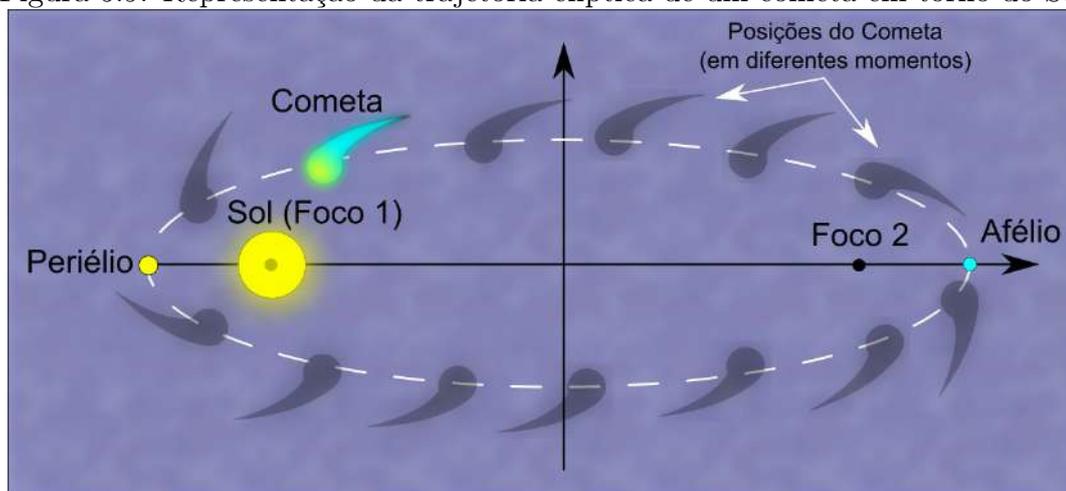


Fonte: imagem do autor.

Alguns alunos, ao estudarem que a trajetória dos astros em torno do Sol é uma trajetória elíptica tendem a acreditar que as quatro estações do ano (verão, primavera, inverno e outono), ocorrem por conta do distanciamento da Terra em relação ao Sol de acordo com sua trajetória, aqui é importante destacar que as estações do ano ocorrem por conta da inclinação da terra com relação ao seu próprio eixo, o que gera estações diferentes em hemisférios diferentes, não tem assim, relação alguma com a trajetória elíptica (quase circular), da Terra com relação ao Sol.

Reforçar a ideia de que um dos principais pontos do estudos de equações consiste na previsão de algum dado é muito importante. As equações da Elipse, por exemplo, auxiliam na previsibilidade da posição e velocidade de astros que tem suas trajetórias determinadas pelas mesmas, por exemplo a trajetória do Cometa Halley pode ser sistematizada através de um plano cartesiano, como, por exemplo, na Figura 5.9.

Figura 5.9: Representação da trajetória elíptica de um cometa em torno do Sol



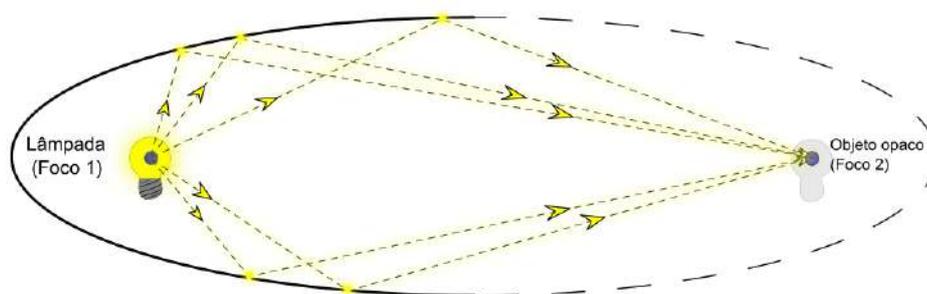
Fonte: imagem do autor.

A Mecânica de Newton é baseada no determinismo, graças a estudos como este é possível prever onde e quando um corpo celeste está, estará ou até mesmo esteve, desde que tenhamos as forças que atuam sobre ele e as condições iniciais.

Que entendemos por determinismo? A física newtoniana descreve um mundo determinístico. Se você disparasse um projétil de um canhão, lançasse um foguete no espaço ou descobrisse um novo cometa no sistema solar, poderia prever as trajetórias desses objetos com total certeza. Em teoria, se você conhecesse as forças e as condições iniciais, tudo isso seria previsível. (BRENNAN, 1998, p. 88).

Algumas das aplicações das cônicas no cotidiano envolve as propriedades reflexivas. Para apresentar melhor a ideia, imagine um espelho semi-elíptico onde em um de seus focos há uma lâmpada e no outro foco em objeto opaco de mesmo tamanho da lâmpada, como apresentado na Figura 5.10.

Figura 5.10: Representação da propriedade reflexiva da elipse



Fonte: imagem do autor.

Todo feixe de luz emitido pela lâmpada é refletido para o objeto independente de qual parte do espelho seja atingida, isto é, todo feixe que sai do foco 1 é redirecionado para o foco 2 logo após atingir a elipse. Embora o exemplo da aplicação foi dado com feixes de luz a reflexibilidade vale para vetores no geral, por exemplo, o próprio som, de acordo com Benson (2012), as ondas sonoras são capazes de produzir um efeito de focagem semelhante. Imagine uma sala em forma de elipse com paredes que refletem o som. Então, independentemente do tamanho da sala, qualquer som que emana de um foco da elipse pode ser ouvido com surpreendente clareza no outro foco. Uma sala desse tipo é chamada de “Galeria dos Sussurros”. Normalmente, a natureza elíptica da sala é parcial, sutil e não intencional. Galerias de sussurros notáveis existem no Salão Estatuário no Capitólio Nacional dos EUA e na Catedral de Saint Paul em Londres.

Uma possível demonstração para a propriedade reflexiva da elipse que pode ser feita em sala de aula é a chamada Sinuca Elíptica ou Bilhar Elíptico que, segundo Oliveira, Silva e Silva (2018), se trata de uma mesa de bilhar em formato elíptico onde em um dos focos é posicionado uma bola de bilhar e no outro um buraco onde a bola possa ser encaçapada. Ao lançar uma das bolas em direção a um dos focos da elipse (o buraco) a partir do outro foco (onde a bola é posicionada inicialmente) poderá ser jogada em qualquer direção, que a bola passará pelo outro foco, que é a caçapa da sinuca.

Figura 5.11: Bilhar Elíptico



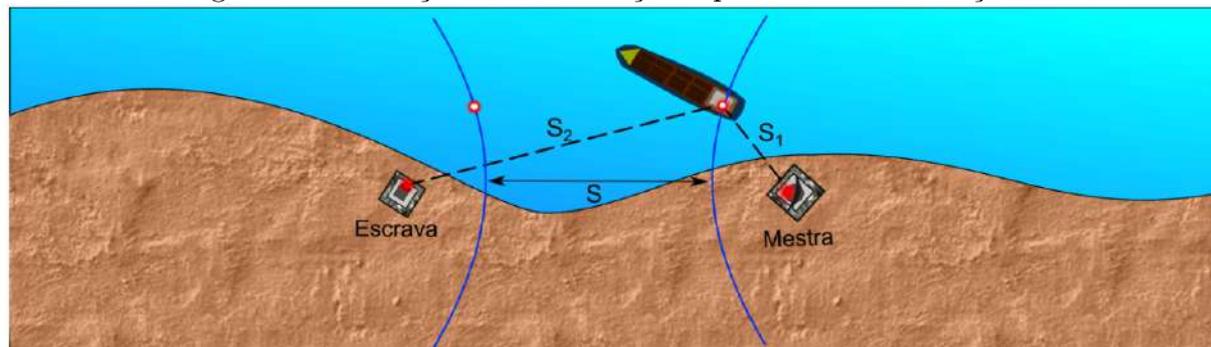
Fonte: (OLIVEIRA; SILVA; SILVA, 2018)

5.3 HIPÉRBOLE

Uma aplicação da circunferência mencionada neste trabalho, trata da localização de um navegador a partir de sinais sonoros e das distância deste a três postos fixos. Existe um sistema de navegação que utiliza o conceito de hipérbole, chama-se LORAN-C (em português: Navegação de Longa Distância), é baseada na diferença de tempo de recepção de sinais de rádio por uma embarcação que tem o receptor LORAN-C, enviados de duas estações fixas em terra, onde uma é denominada Mestre (M) e a outra de Secundária, ou Escrava (E).

Como sinais de rádio tem a velocidade da luz na atmosfera basta dividi-la pelo tempo que o sinal levou das estações até a embarcação, para determinar a distância da embarcação até as estações, a diferença (S) das distâncias da Mestra até a embarcação e da Escrava até a embarcação faz parte do conjunto de pontos que definem uma hipérbole, sendo S a constante hiperbólica.

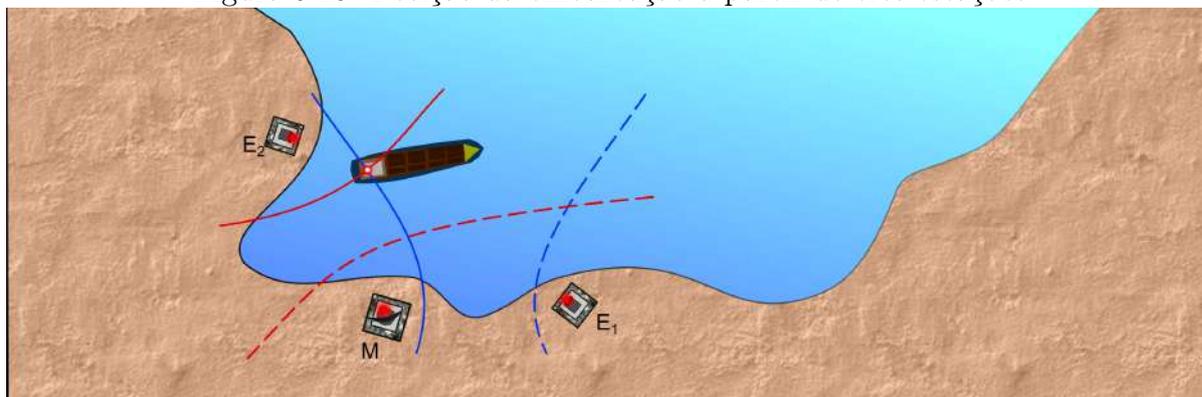
Figura 5.12: Posição da embarcação a partir de duas estações



Fonte: imagem do autor.

Tem-se dois pontos que satisfazem essas condições, ou seja, dois pontos que têm a mesma diferença nas distâncias mencionadas. Para determinar qual dos dois pontos corresponde a posição da embarcação é necessária uma terceira estação.

Figura 5.13: Posição da embarcação a partir de três estações



Fonte: imagem do autor.

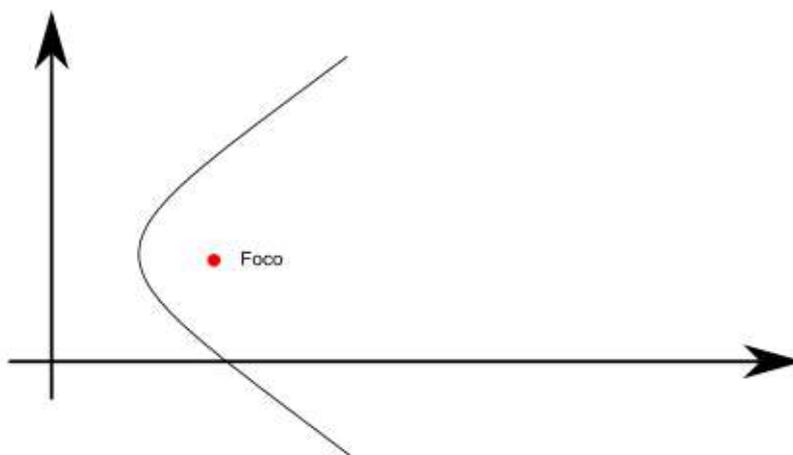
Assim, com três estações é possível determinar a posição da embarcação com uma boa precisão, de forma similar a aplicação das circunferências, com relação a GPS.

5.4 PARÁBOLA

A aplicação reflexiva da parábola aparece com frequência no cotidiano, por exemplo, nos faróis de veículos, lanternas no geral e em antenas parabólicas. Para entender

como funciona essa propriedade considere uma parábola com o eixo na horizontal e foco como descrito na Figura 5.14.

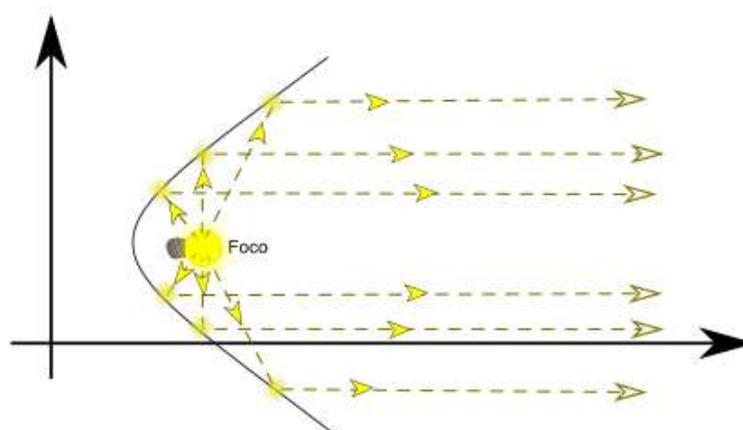
Figura 5.14: Parábola e Foco



Fonte: imagem do autor

Agora, como foi visto com a elipse, considere que a parábola é revestida com um material que tenha propriedades reflexivas e que em seu foco tenha uma lâmpada que emita luz constantemente. Todos os feixes de luz que saem da lâmpada são refletidos paralelamente ao eixo da parábola após colidirem com a parábola, como na Figura 5.15.

Figura 5.15: Propriedade reflexiva da parábola



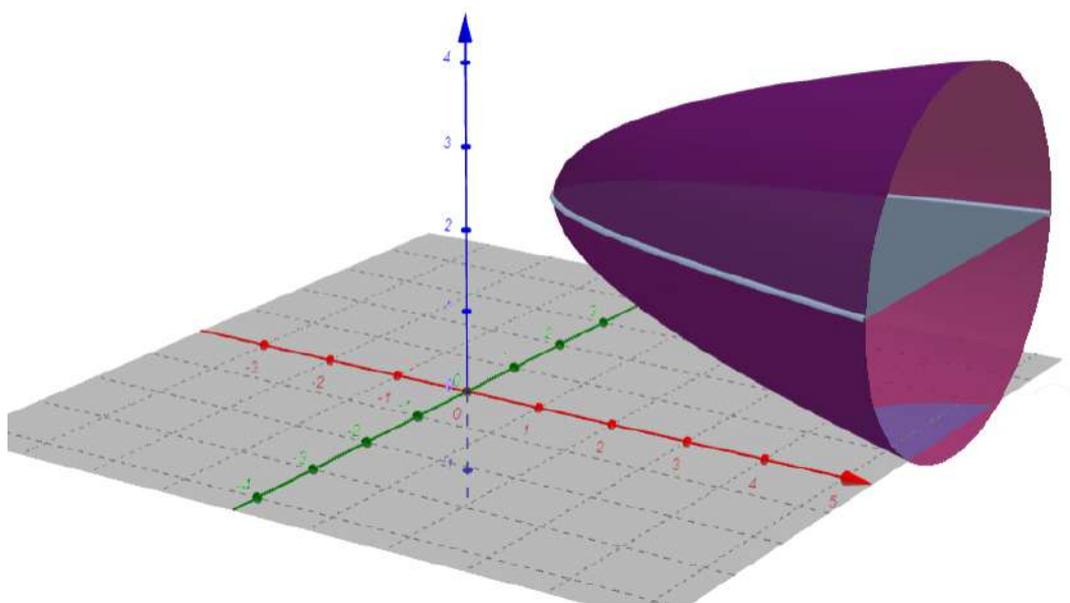
Fonte: imagem do autor

No cotidiano, de forma geral, a parábola não é trabalhada no espaço bi-dimensional. Utilizando a ideia de Sólido de Revolução, tem-se o que é chamado de Parabolóide que é como uma parábola no espaço tridimensional, como explica Santos e Ferreira (2009).

Uma das aplicações dessa propriedade é a construção de faróis parabólicos, da seguinte maneira: girando-se uma parábola em torno de seu eixo obtemos uma superfície denominada parabolóide circular reto. O farol parabólico é obtido seccionando-se essa superfície por um plano perpendicular ao seu eixo. Quando a fonte de luz é colocada sobre o foco do farol parabólico, todos os raios luminosos se refletem paralelamente ao seu eixo (...) de modo análogo, o princípio é também aplicado na construção de antenas parabólicas, nas quais os receptores são colocados sobre o foco. (SANTOS; FERREIRA, 2009, pp. 80)

Para visualizar melhor o que foi dito acima, é possível mostrar a ideia de sólido de revolução a partir do programa de computador Geogebra, como vemos na Figura 5.16.

Figura 5.16: Parábola e Parabolóide vistos com auxílio do Geogebra



Fonte: imagem do autor

É sempre importante trazer algo concreto para apresentar aos estudantes, algo prático com a intenção de despertar o interesse e a curiosidade. Mencionar, por exemplo, que há equações que descrevem o formato de parabolóides, a utilização do Geogebra pode ser interessante, fazendo uma breve explicação de como inserir equações no programa e de como a alteração de valores nas equações podem influenciar no formato da curva ou do sólido gerado. Embora o espaço tridimensional não seja o foco desse estudo é importante mencionar a existência e aplicação do mesmo, podendo assim instigar um aprofundamento maior do educando no conteúdo trabalhado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ausência da Geometria Analítica no Ensino Médio é uma perda significativa para a educação básica, o processo histórico do desenvolvimento desse ramo da matemática, descrito no Capítulo 3, trouxe ao longo do tempo, contribuições extremamente importantes, muitas delas já citadas no decorrer deste trabalho como, por exemplo, as propriedades reflexivas das cônicas, GPS e a trajetória elíptica de corpos celestes em torno do Sol, citadas no Capítulo 5. Tais aplicações ajudam a tornam a matemática mais significativa para os estudantes. Do ponto de vista educacional é muito importante que a matemática seja percebida como parte do dia a dia do educando, como uma forma de entender que a Geometria Analítica, apesar de ser tão algébrica, é consistente quando se trata de aplicações.

Este trabalho teve como objetivo ressaltar a importância da Geometria Analítica para o Ensino Médio, podendo-se evidenciar essa importância destacando dois grandes nomes da Geometria Analítica, René Descartes e Pierre de Fermat, na discussão do contexto histórico, a qual foi desenvolvida, onde esses matemáticos conseguiram representar algebricamente alguns lugares geométricos a partir de suas definições.

Vele enfatizar que foram discutidas algumas de suas diversas aplicações e ressaltando a importância da mesma para o ensino. O Capítulo 4 foi destinado a dar base para as afirmações feitas no Capítulo 5, trazendo as demonstrações e definições necessárias para manter, neste trabalho, o rigor matemático de uma forma tangível aos estudantes do Ensino Médio, trazendo, sempre que possível, figuras auxiliares com este fim.

Como o foco da pesquisa é de trabalhar a Geometria Analítica no Ensino Médio e para o Ensino Médio, houve algumas limitações, uma delas foi a utilização de vetores na definição e representação das cônicas. Em muitos casos, usar vetores com esse propósito torna as manipulações algébricas mais simples a partir de algumas definições e demonstrações. Uma possível continuidade do estudo apresentado neste trabalho seria a utilização de vetores na Geometria Analítica, embora seja necessário um embasamento inicial mais específico.

A Geometria Analítica, como discutido neste trabalho, é de suma importância para o educando na compreensão do mundo do ponto de vista matemático, bem como para o aperfeiçoamento de técnicas relativas às manipulações matemáticas, abstração, raciocínio, além de fazer uma conexão com outras áreas do saber, dentro e fora da matemática.

Referências Bibliográficas

- BENSON, D. C. **The Ballet of the Planets A Mathematician's Musings on the Elegance of Planetary Motion**. New York: Oxford University Press, 2012.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.
- _____. **Guia de Implantação do Novo Ensino Médio**. <<https://anec.org.br/wp-content/uploads/2021/04/Guia-de-implantacao-do-Novo-Ensino-Medio.pdf>>. Acessado em 14 de ago. de 2022. [S.l.]: Ministério da Educação, 2021.
- BRENNAN, R. P. **Gigantes da Física - Uma História da Física Moderna Através de Oito Biografias**. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.
- CAMPOLINO, M. L. Translação e rotação de cônicas em \mathbb{R}^2 . **Universidade de Brasília Instituto de Ciências Exatas Departamento de Matemática**, 2014.
- DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar, 10: Geometria Espacial - posição e métrica**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- FERRE, N.; GALLI, A. C.; MATTJE, E. B. G. **Álgebra y Geometría - Una manera de pensar**. La Plata: Edulp, 2018.
- FILHO, I. de O. H.; CRUZ, M. P. M. da. **Geogebra: Soluções e Práticas na Geometria Analítica**. 1. ed. Curitiba: Editora Appris, 2020.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- HEGARTY, E. K. . C. **Understanding GPS: principles and applications**. 2. ed. Norwood: Artech House, 2006.
- IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar, 7: Geometria Analítica**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- LIMA, E. L. **Número e Funções Reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- MODERNA, E. **Diálogo: Matemática e suas Tecnologias: Manual do Professor**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.
- NEWTON, I. **Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy, and his System of the World**. 1. ed. Inglaterra: Reimpressão, Editora da Universidade de São Paulo: 2012, 1729.
- OLIVEIRA, N. C. de; SILVA, J. N. de M. O.; SILVA, L. L. dos S. Propriedade reflexiva do bilhar elíptico. **V Congresso Nacional de Educação**, v. 1, n. 1, p. 5, 2018.
- PRODANOV, C. C. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale Ernani Cesar de Freitas: Cortez, 2013.
- ROQUE, T. **História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

SANTOS, F. J. dos; FERREIRA, S. F. **Geometria Analítica**. 1. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.

SANTOS, R. de S. **Tecnologias Digitais na Sala de Aula para Aprendizagem de Conceitos de Geometria Analítica: Manipulações no Software GRAFEQ**. PORTO ALEGRE: Universidade Federal do Rio Grande do Sul Instituto de Matemática Programa de Pós-Graduação em Ensino DeMatemática, 2008.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2017.

SOUZA, J. R. de; GARCIA, J. da S. R. **#Contato Matemática, 1º ano**. São Paulo: FTD, 2016.

_____. **#Contato Matemática, 3º ano**. São Paulo: FTD, 2016.

STEWART, J. **Cálculo**. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2022. v. 1.

WEINBERG, S. **Para Explicar o Mundo - A descoberta da Ciência Moderna**. 1. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2015.



Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de TCC

Assunto: Entrega de TCC
Assinado por: Guilherme Pereira
Tipo do Documento: Dissertação
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Guilherme Pereira de Souza, DISCENTE (202112210004) DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 10/12/2022 19:06:55.

Este documento foi armazenado no SUAP em 10/12/2022. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 689000
Código de Autenticação: 78ac7525c2

