INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PEDRO IGOR EVANGELISTA PEQUENO

DO ALGÉBRICO AO CONCRETO, PASSANDO PELO DIGITAL: UMA PROPOSTA DE OFICINA PARA A CONSTRUÇÃO DE TELHADO UTILIZANDO SUPERFÍCIE DUPLAMENTE REGRADA

CAMPINA GRANDE - PB
2022

PEDRO IGOR EVANGELISTA PEQUENO

DO ALGÉBRICO AO CONCRETO, PASSANDO PELO DIGITAL: UMA PROPOSTA DE OFICINA PARA A CONSTRUÇÃO DE TELHADO UTILIZANDO SUPERFÍCIE DUPLAMENTE REGRADA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Joab dos Santos Silva

P425a Pequeno, Pedro Igor Evangelista.
Do algébrico ao concreto, passando pelo digital: uma proposta de oficina para a construção de telhado utilizando a superfície duplamente regrada. - Campina Grande, 2022.
40 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2022.
Orientador: Prof. Me. Joab dos Santos Silva.

1.Cônicas e quádricas 2. Superfície duplamente regrada 3. Matemática- Laboratório de ensino I.Silva, Joab dos Santos II. Título.

CDU 51

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

PEDRO IGOR EVANGELISTA PEQUENO

DO ALGÉBRICO AO CONCRETO, PASSANDO PELO DIGITAL: UMA PROPOSTA DE OFICINA PARA A CONSTRUÇÃO DE TELHADO UTILIZANDO SUPERFÍCIE DUPLAMENTE REGRADA

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

22 / 12 / 2022.

BANCA EXAMINADORA:

____
ORIENTADOR: Prof. Me. Joab dos Santos Silva – IFPB

____
AVALIADOR: Prof. Me. Baldoino Sonildo da Nobrega – IFPB

____
AVALIADOR: Prof. Dr. Jonathas Jeronimo Barbosa – IFPB

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela sua eterna bondade, da qual não sou merecedor. Certamente que Ele guiou meus passos até aqui, disso não tenho dúvidas. Obrigado, Senhor.

Às duas mulheres mais importantes da minha vida: mainha e vovó — O Senhor, em sua eterna soberania, as usou para me possibilitar concluir essa graduação. Isso é inafastável.

Ao meu eterno vovô pela sua criação rígida e cuidadosa — em breve nos encontraremos nos Céus.

A toda minha família pelo apoio: foi fundamental.

Aos grandes amigos de graduação, que quero levá-los para vida: Fernando, Hozana, Raynara, Rennan, Jessy, Raí, Odilon, Daniel, Paloma, Malu e tantos outros.

A minha princesa, a morena mais linda do mundo — e não estou usando do exagero —, Beatriz Figuerêdo.

Aos meus mestres, queridos professores, do Instituto Federal, os quais aprendi a admirar absurdamente.

Ao meu orientador Joab: obrigado pela paciência e disposição.

"Pois nele vivemos, nos movemos e existimos [. . .]"
Atos 17:28

"A Matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências."

(Jacques Hadarmard)

RESUMO

O presente surge de uma instigação em propor uma oficina — intitulada “Construindo Telhados com Superfícies Duplamente Regradas”, que tem como objetivo a construção da maquete de um telhado composto por quatro módulos: cada módulo tem o formato de parte da superfície de um paraboloide hiperbólico, que é uma superfície duplamente regrada. Ou seja, por cada ponto da superfície passam duas retas totalmente contidas na superfície — para os alunos concluintes do Curso Técnico em Edificações Integrado ao Médio, a fim de uma análise prática de como as propriedades das curvas cônicas podem ser importantes na construção de monumentos/casas/edifícios. Dessa maneira, dialoga-se, também, como o Laboratório de Ensino de Matemática é um espaço adequado para o desenvolvimento de práticas que podem proporcionar aos alunos — em qualquer nível escolar — uma forma de conseguir vislumbrar a matemática através de um prisma diferente daquele que, comumente, se é percebido dentro das escolas.

Palavras-chave: Cônicas e Quádricas. Oficina. Superfície Duplamente Regrada. Laboratório de Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The present arises from an instigation to propose a workshop — entitled "Building Roofs with Doubly Ruled Surfaces", which aims to build a model of a roof composed of four modules: each module has the shape of part of the surface of a hyperbolic paraboloid, which is a doubly ruled surface. That is, for each point on the surface, two straight lines pass completely contained in the surface — for students completing the Technical Course in Buildings Integrated to the Middle, in order to carry out a practical analysis of how the properties of conic curves can be important in the construction of monuments/houses/buildings. In this way, it is also discussed how the Mathematics Teaching Laboratory is a suitable space for the development of practices that can provide students — at any school level — with a way of getting a glimpse of mathematics through a different prism. what is commonly perceived within schools.

Keywords: Conics and Quadrics. Workshop. Doubly Ruled Surface. Mathematics Teaching Laboratory.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é comumente descrita como uma ciência rígida que está totalmente pronta e acabada, sem nada que lhe possa ser acrescentada. Todavia, essa é uma concepção bastante equivocada a seu respeito. Esse campo do saber vem sendo construído e ampliado pela mente humana e não é plausível entendê-lo como sendo um produto majoritariamente terminado — na verdade, essa concepção se estende a todo e qualquer conhecimento produzido. Do contrário, é desenvolvido pela necessidade trazida por cada época, em uma espécie de *loop* constante. Envolve uma infinidade de encaixes que se unem de maneira sutil, padronizada e complexa. Ainda que seja essencialmente abstrato explicar o que é a Matemática, defini-la como a ciência que estuda os padrões é um caminho possível. E como escreve Devlin (2009, p. 35), "é de padrões que a vida é feita".

Outrossim, a matemática é uma disciplina que é difundida como sendo demasiadamente difícil e abstrata — até mesmo inatingível —, um conhecimento restrito apenas a alguns privilegiados, que são os considerados sábios e inteligentes. De acordo com Tardim, Kuger e Silva (2021) para muitos estudantes, a matemática é a disciplina considerada mais complexa da vida estudantil e que a mesmice no ensino acaba desencadeando a falta de interesse e desmotivando os alunos a compreender esta área. No Ensino Fundamental e Médio, essa ciência tem rejeição quase que total e, culturalmente, esse campo do conhecimento causa temor para muitos. De acordo com a Avaliação Nacional do Ensino Básico[1] realizada no ano de 2019, apenas 7% dos alunos que estão no último ano do Ensino Médio em escolas públicas no Brasil são proficientes na disciplina de Matemática. Ou seja, 93% têm um aprendizado abaixo do esperado para esse nível — com dificuldade em operações básicas. Nessa mesma pesquisa, no último ano do Ensino Fundamental II, o percentual de alunos com aprendizado adequado cresce para 18%.

À semelhança dos monstros assombrosos presentes nos livros, desenhos e filmes — tais como Drácula, Lobisomem, Frankenstein, Freddy Krueger e etc —, a Matemática, culturalmente, também é vista como sendo uma dentre essas espécies. Entretanto, monstros não fazem parte da realidade humana, pois, são seres fictícios, criações: não se espera encontrar-se com o Drácula no meio da rua ou em um *shopping*. A título de exemplificação, tome-se o espantalho, que funciona como um protetor dos jardins ou grandes plantações de milho, pois, imita a presença humana, espantando para longe os animais silvestres — mamíferos e muitas espécies de pássaros. No entanto, o espantalho não é nada além do que uma figura inanimada, um boneco, e, por esse motivo, a implicação lógica é que o medo não é trazido por ele, mas sim pelos animais que o veem como um monstro horrendo. De igual modo, o medo da Matemática está, essencialmente, nas mentes das pessoas que a observam como uma aberração. "[...] Os monstros são monstros de

[1] (cf. <http://www.qedu.org.br/brasil/aprendizado>. Acesso em: 24 jun. 2022)

minha cultura, e assim não posso evitar vê-los. E ao mesmo tempo eles são diferentes e monstruosos, e por isso me paralisam." (BICUDO; BORBA, 2004, p. 102).

Os motivos para essas concepções equivocadas não são, em sua totalidade, conhecidos, todavia, uma das possíveis respostas está no fato de como essa disciplina é trabalhada nas escolas: é comum entender que pela matemática possuir um rigor, de fato, acentuado, seu processo de ensino e aprendizagem também o deve ter. O processo de ensino e aprendizagem, portanto, fica preso e engessado às regras e lógicas que não são vistas no dia a dia, não gerando prazer ou sentido em estudá-lo. Logo, "se for verdadeiro que 'ninguém ama o que não conhece', então fica explicado porque tantos alunos não gostam da matemática, pois, se a eles não foi dado conhecer a matemática, como podem vir a admirá-la?" (LORENZATO, 2012, p. 34).

Assim, em relação ao processo de ensino e aprendizagem de geometria analítica, nos surgiu os seguintes questionamentos: como podemos desenvolver uma atividade que não fique restrita a apresentação de conceitos e manipulação algébrica de equações, com o potencial de contribuir para uma melhor assimilação dos conteúdos da matemática? Como desenvolver uma atividade que envolva a parte algébrica, suas representações gráficas utilizando software e construções com materiais manipulativos?

Portanto, o objetivo do nosso trabalho é propor uma oficina intitulada Construindo Telhados com Superfícies Duplamente Regradas, na qual é realizada a construção da maquete de um telhado composto por quatro módulos. Cada módulo tem o formato de parte da superfície de um paraboloide hiperbólico, que é uma superfície duplamente regrada. O pré-requisito para os cursistas é ter estudado o conteúdo de cônicas, em geometria analítica. Logo, a oficina é indicada para alunos do 3º ano do Ensino Médio e Superior.

A oficina envolve o uso de tecnologias da informação e comunicação para apresentação dos conceitos e propriedades, do software Geogebra 2D e 3D para plotar os gráficos das cônicas e quádrica e o livre manuseio de suas equações, e de materiais manipuláveis de baixo custo.

Além desta capítulo de introdução, este trabalho em composto ainda por mais três capítulos. O segundo capítulo de trabalho compreende uma revisão de literatura na qual discutimos brevemente a matemática e o desenvolvimento civilizatório, algumas discussões sobre o ensino de cônicas, a importância do laboratório de ensino de matemática e um breve recorte histórico das cônica.

O terceiro capítulo traz a proposta de oficina, elaborada para ocorrer em 4 (quatro) horas e dividida em 4 (quatro) etapas. Apresentamos de forma clara e objetiva o desenvolvimento de cada etapa, descrevendo os materiais utilizados, o passo-a-passo das construções e ilustrações dos objetos digitais e físicos construídos. O último capítulo é dedicado às considerações finais. No apêndice trazemos um resumo dos conceitos, equações e representações geométricas das cônicas e quádrica apresentadas na primeira etapa da proposta de oficina, além de algumas ilustrações de aplicações desses conceitos no cotidiano.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 A MATEMÁTICA E DESENVOLVIMENTO CIVILIZATÓRIO

A matemática e o avanço da humanidade estão diretamente unidos e entrelaçados entre si. Desde muito cedo, especificamente no período paleolítico — compreendido entre 2,6 milhões de anos atrás até algo próximo de 10.000 a.C. —, o ser humano percebeu a necessidade de contar coisas, como objetos e animais. Essa exigência deu início ao método o qual é concebido como o mais trivial: o processo de contagem. Como D'Ambrosio (1999 apud GASPERI; PACHECO, 2018, p. 3) afirma:

> As ideias Matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias Matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e saber. (p. 97)

Agora era possível ao homem estabelecer uma relação de correspondência biunívoca entre objetos, dando origem ao conceito dos números. Como esse processo se deu em um período em que ainda não existia a escrita, a simbologia que representa essa relação era feita com o uso de pedras, ossos e dedos das mãos. Considere o seguinte exemplo: tome dois conjuntos A e B, sendo $A = \{\text{conjuntos de pedras}\}$ e $B = \{\text{conjuntos de ovelhas}\}$, e que esses conjuntos se relacionam de tal forma que cada elemento de A se relaciona com um único elemento de B. Isso implica que A e B têm a mesma cardinalidade. Portanto, era possível aos pastores, por exemplo, saber se seu rebanho estava completo ou se não perdeu alguma cabeça do seu rebanho.

Com os avanços matemáticos, surgem os números da forma como hoje se concebe — $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ — e embora esses sejam vistos desde uma idade muito tenra nas escolas e, de certa forma, sejam simples, são, talvez, os maiores responsáveis em possibilitar à humanidade alçar grandes voos e visar às estrelas. Ainda que pareçam demasiadamente simplórios, carregam em sua essência maciça abstração, um conceito mental humano. Não se vê um número andando pela rua ou tomando um café, pois apesar de virem da realidade, não são eles propriamente reais. Ninguém realmente sabia o que eles são. O que se sabe, no entanto, é que essas simbologias foram sendo construídas com as necessidades de cada período da história.

Povos antigos se dedicaram ao estudo e aprimoramento dessa ciência, pois perceberam que para além da simples contagem, era possível encontrar outros importantes padrões matemáticos. Os egípcios evidenciaram como o avanço nesta ciência contribui para o desenvolvimento de uma sociedade. Eles desenvolveram-se à margem do Rio Nilo que, no período das cheias, acarretava grandes problemas. Para solucioná-los, foram construídas obras hidráulicas, reservatórios de água e canais de irrigação no rio Nilo utilizando-se matemática.

Isso também é validado ainda hoje, haja vista que há uma proporção direta entre as maiores potências mundiais e as ciências exatas. De acordo com o último resultado do Programme for International Student Assessment (PISA) — que é, basicamente, um estudo comparativo internacional realizado a cada três anos, com estudantes de 15 anos de idade ao redor do mundo, pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) —, que foi em 2018, focado apenas nas notas em Matemática, tem-se que 7 dos dez países mais ricos e desenvolvidos do mundo[1] estão entre os 20º primeiros colocados no exame.

O Brasil, no entanto, não ocupa boas posições no PISA. Quando comparado, por exemplo, apenas com os países da América do Sul que são avaliados pelo exame, é titular da pior posição em Matemática, equiparado estatisticamente à Argentina. Além disso, quase 70% dos discentes brasileiros ocupam o pior nível de proficiência em matemática, não possuindo o nível básico, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Torna-se mais alarmante, quando visto a quantidade de alunos com a nota máxima na área: algo em torno de 10 alunos — 10.961 alunos participaram da prova.

Dessa maneira, é perceptível que a matemática sempre contribuiu para o desenvolvimento civilizatório, desde os tempos mais antigos até a contemporaneidade. Os impactos gerados nas mais diversas áreas através da matemática são fatos inafastáveis, e isso inclui, de forma categórica, as edificações.

2.2 ALGUMAS DISCUSSÕES SOBRE O ENSINO DE CÔNICAS

De forma introdutória, é preponderante pensar o que vem a ser o conhecimento. Uma metáfora oportuna é aquela que compara o conhecimento produzido pela humanidade como sendo uma tapeçaria — confecção artesanal de um tecido formado pelo cruzamento de duas estruturas de fios obtidos de fibras flexíveis. O tapete que está sendo formado pode ser entendido como sendo o conhecimento dos mais variados assuntos importantes/essenciais para a humanidade — não é necessário discorrer sobre o que seriam esses temas, pois, subentende-se que são infinitos e com graus de importância distintos a depender do grupo que o está debatendo; e o tapeceiro seria a humanidade ao decorrer de sua existência.

Como já dito, essa tapeçaria envolve uma infinidade de fios que se cruzam e, em decorrência disso, podem tomar cores das mais variadas possíveis. Ainda dentro dessa argumentação, é como se nós — humanos —, a todo momento, víssemos o tapete sempre pelo lado contrário — e não é de se espantar que nessa perspectiva sempre teremos uma noção imperfeita da frente do tapete. Nesse panorama de que o conhecimento é uma

[1] O Legatum Institute. The legatum prosperity index, 2018. Ranking: The legatum prosperity index. Disponível em: <https://www.prosperity.com/rankings>. Acesso em: 19 de Abril de 2022.

espécie de construção de um determinado objeto conhecido, a inclinação para a atividade de pesquisa deve ser uma prática — um elemento — comum a todos aqueles que desejam fazer parte, de algum modo, do processo de ensino/aprendizagem. Assim, o docente precisa imprescindivelmente tê-la para um ensino eficaz; os discentes necessitam dela para uma aprendizagem eficaz; e o ambiente educacional também precisa possuí-la para que seja mediadora da educação. À semelhança dos fios que se unem formando alguns tapetes, esta pesquisa utilizou-se também de alguns teóricos, os quais contribuíram para sua escrita.

Santos (2014), em sua dissertação de mestrado, cujo tema é "Cônicas para o Ensino Médio, da Contextualização à Álgebra", teve como instigação para escrevê-la a tentativa de explicar por qual motivo o estudo das Cônicas, como simples equações quadráticas de duas variáveis, vem sendo deixado de lado, como um ordinário apêndice nos currículos da educação matemática. A partir das experiências vividas em sala de aula, angaria, também, uma contextualização que dê significado ao estudo das cônicas no Ensino Médio. Ou seja, deixar explícito que a aplicação deverá motivar a álgebra e não a álgebra motivar a aplicação.

Entretanto, essa tese esbarra com o contexto da educação brasileira, que sofre os impactos causados pelas más condições do ensino, o qual se estendem a todos os atores do processo. Na perspectiva do professor Fonseca (1997, p. 2019) salienta que " 'os professores estão infelizes', 'são marginalizados', 'sacrificados', 'não têm convicção', 'não tem vocação', são 'mal formados' (sic) e 'ganham um salário muito ruim' ". Além dessa clara debilidade na estrutura escolar, tem-se, também, uma boa parte dos docentes que retornam às antigas águas tradicionais de ensino, perdurando a falácia de que a aprendizagem pode ser transferível. Tudo isso contribui para que "[...] os professores da educação básica desfiram conteúdos em seus alunos com o simples intuito de cumprirem os seus conteúdos programáticos." (SANTOS, 2014, p. 14).

Ainda assim, nesses próprios conteúdos que são programados, alguns deles estão, em certo nível, sendo deixados à parte, como é o caso das Cônicas. Esse assunto normalmente é trabalhado no 3º ano do Ensino Médio, momento em que o educando já possui maturidade para entender e compreender assuntos mais complexos da atualidade que sobreexcedem a sala de aula. No entanto, trabalhar "[...] as cônicas como simples equações quadráticas de duas variáveis, tem deixado o conteúdo como um apêndice na educação matemática." (SANTOS, 2014, p. 15).

No 3º ano do Ensino Médio, a maior parte do corpo estudantil está preocupada em alcançar uma boa pontuação no Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) a fim de conseguir uma tão sonhada vaga nas universidades públicas do país. Fato é que o edital desse certame não conta com o conteúdo das cônicas em sua prova. Dessa maneira, quando há tempo hábil, os professores que se propõem em ensiná-lo, fazem-o com rapidez, porque isso "[...] não é importante, 'não cai no vestibular' " (SANTOS, 2014, p. 15).

Na conclusão, Santos (2014) é enfático em afirmar que “todo conteúdo a ser ensinado, se devidamente contextualizado, enriquece o ambiente de aprendizagem e faz com que o educando veja com outros olhos a necessidade da sua educação.” Embora, como já dito na introdução desta monografia, alguns percebam a Matemática como algo que pareça ser de um conhecimento inatingível para maior parte das pessoas, ela precisa ser estudada com o devido significado. Nada faz sentido sem um significado — com isso, não afirmo que todo assunto matemático precise de uma demonstração prática no cotidiano, mas sim o porquê de estudá-lo.

Sousa (2001), em sua dissertação de mestrado, cujo tema é “Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as soluções na Antiga Grécia”, teve como propósito abordar os dois problemas clássicos da geometria grega, os quais são a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo. Esse documento contribuiu bastante para a minha escrita, principalmente no segundo capítulo do trabalho, no qual é abordado a duplicação do cubo. Apesar do autor especificar todas as soluções do problema — a história do problema; a redução de Hipócrates; e as soluções de Arquitas, Eudoxo, Menecmo, Platão, Eratóstenes, Nicomedes, de Herão, Apolónio, Filão de Bizâncio, Diocles, Esporo e Papo — só foi abordado a solução de Menecmo, por haver mais intersecção com esta pesquisa. E tem essa importância haja vista que, como já debatido acima, esse dilema grego, como alguns sugerem, dá origem às cônicas.

Haja vista o teor e o envolvimento de uma oficina como um fundamento da presente pesquisa, é natural de se pensar no professor Lorenzato (2012), em seu livro “O laboratório de ensino de matemática na formação de professores”, que faz parte de uma coleção denominada “formação de professores”. Neste livro, o autor justamente com alguns outros discutem a imprescindibilidade de um LEM (Laboratório de Ensino de Matemática) nos curso de Licenciatura em Matemática, a fim de que o licenciado possa dispor de alguns meios que podem ser extremamente úteis em uma sala de aula. E, como será exposto mais à frente, é comum que aquilo que o professor em formação aprenda na licenciatura interfira — ou pelo menos tenha um grande potencial de fazê-lo — na sua vida futura como docente.

Outra grande contribuição para essa monografia é o trabalho de Sato (2005), intitulado “As Cônicas e suas Aplicações”, para obtenção do título de mestre na Universidade Federal de Uberlândia. Neste trabalho, o autor também traz uma contextualização histórica das curvas cônicas e, como o título já sugere, traz aplicações para cada uma das cônicas. Trabalhos como o de Sato (2005) são importantes para a academia, haja vista a necessidade de se mostrar caminhos que possam atenuar as dificuldades que se fazem presentes no ensino e aprendizagem da Matemática. E no trabalho dele é possível destacar dois meios que têm grande potencial de facilitar esse processo: a contextualização histórica do assunto e a sua aplicação. Comumente, os alunos indagam: “professor, onde é que eu vou usar esse conteúdo na minha vida?”, e, com a aplicação, o estudo fica mais "palpável" à realidade do aluno.

2.3 A IMPORTÂNCIA DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DOCENTE

Levando em consideração a forma majoritariamente tradicional — "tradicional" restringindo-se à ideia do conhecimento ser transferível, das aulas monótonas, da concepção do aluno como um agente passivo e apenas receptivo — com que a Matemática ainda é ensinada nos mais diferentes níveis do ensino brasileiro, é relativamente esperado que os alunos continuem a concebê-la com um certo desprezo. Os motivos para essa rejeição são vários: "é muito complexa"; "não faz nenhum sentido no dia a dia"; "não é para mim" e etc. Nessa perspectiva, faz-se necessário que os professores utilizem metodologias que os auxiliem no ensino-aprendizagem dessa ciência.

Essa realidade presente no ensino de Matemática pode ser pensada e analisada sob dois aspectos primários: o do professor e do aluno. Na primeira análise, é nítido que, muitas vezes, o docente se porta na sala de aula da forma como foi ensinado pelos seus professores, em sua formação acadêmica — com isso, não estou ratificando de que isto seja uma verdade absoluta, uma regra, pois há exceções. Como enfoca Lorenzato (2012, p. 6), "[...] muitos de nós [professores] aprendemos (e ensinamos?) a fazer contas desse modo." Dessa maneira, isso indica algo: possivelmente, essa problemática surge na formação dos professores.

Nesse sentido, há ferramentas que corroboram para o ensino de matemática, ou seja, para o processo de aprendizagem, do licenciado que é de extrema significância para a construção da formação do ser professor, haja vista que além de propiciar a aplicabilidade do conhecimento matemático na utilização de um laboratório, proporciona o desenvolvimento de um professor criativo o qual possa notar a necessidade de diversificar suas práticas pedagógicas no ambiente da sala de aula. Para Lorenzato (2012, p. 7), o LEM (Laboratório de Ensino de Matemática) deve ser o "centro da vida matemática da escola; mais que um depósito de materiais, sala de aula, ou museu de matemática, o LEM é o lugar onde os professores estão empenhados em tornar a matemática mais compreensível aos alunos".

Assim, o LEM tem como finalidade permitir que o professor em formação possa desenvolver-se e entender melhor o real sentido dos conceitos matemáticos, assim como aprender a utilizá-lo e a criar objetos que possibilitem uma aula mais atraente, através de práticas experimentais. Para ratificar, Turrioni e Perez (2012) define laboratório de matemática como sendo um ambiente que possibilita trabalhar em equipes, despertando a criatividade e a capacidade de formação de novas ideias para o ensino, bem como desenvolver no licenciado a predisposição de experimentações e reflexões sobre a ligação da teoria e da prática, instigando-os a procura de novas práticas educativas.

Assim sendo, sob essa ótica, é inadmissível que um bom curso de licenciatura em matemática — ou seja, de formação de professores — não disponibilize em seu ambiente acadêmico de um Laboratório de Ensino de Matemática. A utilização do LEM nessa formação inicial do docente é de grande relevância, uma vez que a utilização deste ambiente é propício para facilitar a aprendizagem dos conceitos matemáticos, partindo inicialmente do concreto a fim de chegar ao abstrato. Dessa maneira,

> o LEM baseia-se nos conceitos da psicologia a respeito de como se dá a aprendizagem: o tato (pegar) e a visão (ver), que são primordiais no início da aprendizagem, mesmo para os adultos, até chegar à verbalização, ao registro (sem rigor) e ao objetivo final, a abstração (TURRIONI; PEREZ, 2012, p. 70).

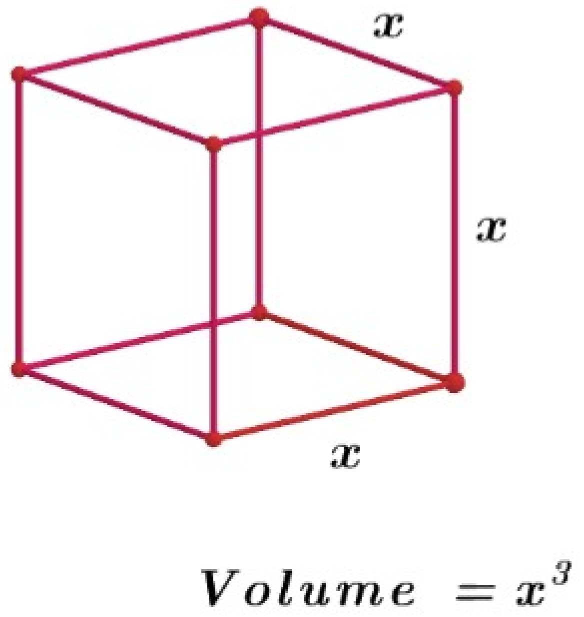
No panorama do aluno, segue-se como uma consequência da primeira análise, as mesmas benesses que advém da construção dos professores. Ou seja, auxilia de forma direta para o aprimoramento de professores que ensinam matemática e de maneira indireta para aprendizagem dos discentes da educação básica, haja vista que as manipulações no LEM possibilitam o conhecimento e aprendizado de metodologias alternativas, assim como a fazer reflexões das práticas docentes, reafirmando a possibilidade de mudanças significativas no ensino e aprendizagem de matemática. Novamente: a utilização do LEM é uma alternativa metodológica que simplifica o processo de aprendizagem, assim como apoia a formação inicial e continuada de professores a fim de facilitar o entendimento dos conceitos de forma significativa e transformadora.

2.4 CÔNICAS - UM BREVE RECORTE HISTÓRICO

O estudo das curvas cônicas — elipse, parábola e hipérbole — é, inicialmente, atribuído a Menaecmus (380-320 a.C.), o qual era discípulo do filósofo grego Eudoxo de Cnidomas (408 - 347 a.C), pois foi ele quem primeiramente percebeu que a elipse, a parábola e a hipérbole podem ser obtidas por meio de cortes em um cone circular reto por um plano não paralelo à base. A instigação para essa descoberta se dá graças a um dos problemas clássicos da Grécia Antiga: duplicação do cubo.

A lenda por trás da duplicação do cubo é remontada ao século IV a.C., quando, após uma sublime fase política e cultural, a ilha de Delos foi devastada por uma peste que açoitava à Grécia. Em uma busca para impedir que essa destruição continuasse avançando pela cidade, os seus habitantes receberam o oráculo que deveriam construir um altar com o dobro do volume daquele que já existia em forma cúbica para o deus Apolo e, apenas dessa forma, lograriam êxito na batalha a fim de que a peste cessasse. Os gregos, no entanto, falharam nessa feita, pois duplicaram a aresta do cubo, fato este que octuplicou o volume ao invés de duplicá-lo. Sendo assim, a peste ficou ainda mais intensa na cidade. Essa situação constituiu um grande embaraço para os geômetras da época. Surgia-se, assim, um dos problemas clássicos da Grécia antiga. A título de exemplificação, suponha um cubo de aresta medindo x. É trivial que o volume desse cubo tomado será de x^3. Duplicando sua aresta, $2x$, tem-se que o novo volume será $8x^3$ (Figura 1).

Figura 1 – Cubo de aresta $2x$.



Fonte: Autor.

Todavia, não é necessário se ater a todas as soluções para este problema, mas sim na forma como Menaecmus o solucionou. Como bem afirma Sousa (2001, p. 10):

> Menecmo terá sido o primeiro a representar curvas por meio de equações, no entanto de um modo um pouco primitivo. A solução que Menecmo apresenta para encontrar os meios proporcionais, referidos por Hipócrates, faz uso de curvas que se podem obter pela intersecção do cone de base circular com um plano. Pensa-se que foram as investigações efetuadas por Menecmo, para solucionar o problema em estudo, que o levaram à descoberta das secções cónicas.

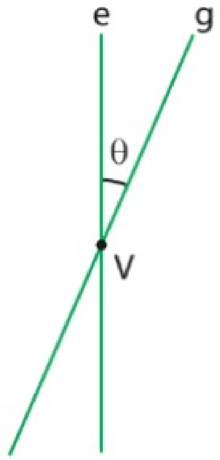
No entanto, a escrita que é dita como obra prima desse assunto matemático no meio acadêmico é atribuída a Apolônio de Perga (262 - 190 a.C), geômetra grego, em seu famoso tratado: As cônicas — estas já eram conhecidas há mais de um século quando Apolônio as escreveu. Além disso, foi ele quem também denominou os nomes de elipse, hipérbole e parábola. De acordo com Boyer (1974, p. 107-108):

> As palavras "elipse", "parábola" e "elipse" não foram inventadas expressamente: foram adotadas de uso anterior, provavelmente pelos pitagóricos, na solução de equações quadráticas por aplicação de áreas. Ellipsis (significando falta) tinha sido a palavra usada quando um retângulo de área dada era aplicado a um segmento e lhe faltava um quadrado (ou outra especificada), e hyperbola (um lançamento além) tinha sido a palavra usada quando a área excedia o segmento. A palavra parábola (indicando colocar ao lado ou comparação) não indicava nem excesso nem deficiência. Apolônio aplicou estas palavras num contexto novo como nomes para as seções planas.

Apolônio de Perga iniciou o estudo das curvas obtidas quando se secionou uma superfície cônica por um plano . A depender da posição do plano α, diferentes seções podem ser obtidas. Conside e e g duas retas concorrentes em V, oblíquas entre si e que formam um ângulo θ (Figura 2).

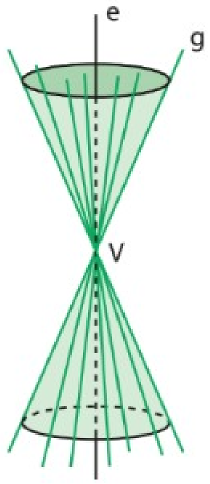
Com a reta e fixa pelo ponto V, façamos g girar 360° em torno de e, mantendo constante o ângulo de medida θ formado por elas. A reta g gera uma superfície denominada superfície cônica de duas folhas. A reta g é chamada geratriz dessa superfície (Figura).

Figura 2 – Retas e e g.



Fonte: (IEZZI et al., 2016, p. 87).

Figura 3 – Superfície Cônica de Duas Folhas.

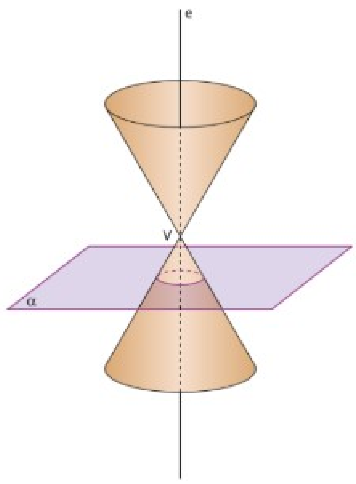


Fonte: (IEZZI et al., 2016, p. 87).

Dessa maneira, as formas com que um plano pode secionar essa superfície cônica são:

Situação I: Se o plano α é perpendicular à reta e, a seção obtida é uma **circunferência**. A título de curiosidade, se α passa por V, a seção obtida é um ponto.

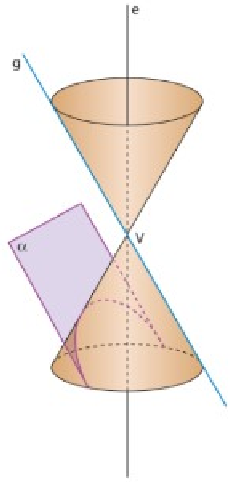
Figura 4 – Seção que obtém uma circunferência.



Fonte: (IEZZI et al., 2016, p. 88).

Situação II: Se o plano α é paralelo a uma geratriz g da superfície cônica, a seção obtida é uma **parábola**.

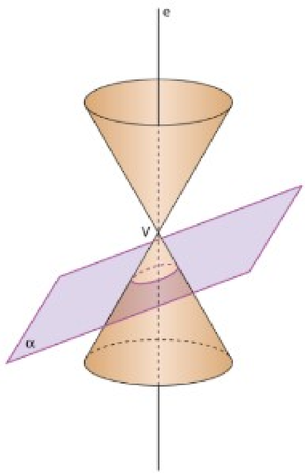
Figura 5 – Seção que obtém uma parábola.



Fonte: (IEZZI et al., 2016, p. 88).

Situação III: Se o plano α é oblíquo à reta e, mas corta apenas uma das folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma **elipse**.

Figura 6 – Seção que obtém uma elipse.

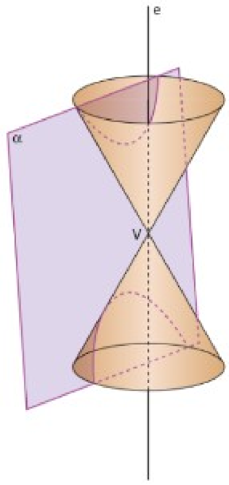


Fonte: (IEZZI et al., 2016, p. 88).

Situação IV: Se o plano α é oblíquo à reta e e corta as duas folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma **hipérbole**.

A título de contribuição aos nomes dados, na Língua Portuguesa existem as figuras de linguagem — forma de uma expressão em seu sentido que foge às regras denotativas —, dentre as quais há a elipse e a hipérbole. Na gramática, elipse diz respeito a algum termo

Figura 7 – Seção que obtém uma hipérbole.



Fonte: (IEZZI et al., 2016, p. 88).

da oração que está oculto; hipérbole, quando há um exagero na declaração. A parábola, que é um texto narrativo alegórico curto, onde são utilizadas situações e seres humanos para fazer uma comparação entre o que é real e fictício, transmitindo assim lições éticas e religiosas.

3 PROPOSTA DE OFICINA

Neste capítulo apresentamos a proposta de oficina intitulada Construindo Telhados com Superfícies Duplamente Regradas, que tem como objetivo a construção da maquete de um telhado composto por quatro módulos. Cada módulo tem o formato de parte da superfície de um paraboloide hiperbólico, que é uma superfície duplamente regrada, ou seja, por cada ponto da superfície passam duas retas totalmente contidas na superfície.

Para o desenvolvimento da oficina são utilizados:

- Computador;
- TV ou Projetor de Imagens
- Slides;
- Vídeo;
- Laboratório de informática;
- Geogebra 2D e 3D;
- Palito para algodão doce (40 cm de comprimento);
- Tampa de garrafa pet;
- Cola quente;
- Cola branca;
- Lápis;
- Régua;
- Esquadro;
- Tesoura;
- Estilete;
- Abraçadeira Nylon Enforca Gato.

A oficina tem duração de 4 (quatro) horas e se desenvolve em 4 (quatro) etapas, tendo como público alvo 16 (dezesseis) discentes da educação básica ou superior. O pré-requisito é que o discente tenha estudado geometria analítica no plano.

Na primeira etapa, com os discentes dispostos em um único grupo, o ministrante apresenta de forma sucinta as cônicas, conteúdo estudado no 3º ano do ensino médio, e algumas de suas aplicações clássicas. Na sequência, são apresentadas as principais quádricas, destacando-se o fato de algumas serem superfícies de revolução obtidas a partir da rotação das cônicas em relação a um eixo. Essa etapa é desenvolvida a partir da apresentação de slides nos quais constam as definições, principais elementos, equações algébricas e suas representações gráficas. Dessa forma, os cursistas tem a oportunidade de revisitar as cônicas e suas representações: linguagem materna, representação algébrica e geométrica.

Apresentados os conceitos de cônicas e quádricas o cursista apresenta algumas objetos com formatos que se assemelham as cônicas e quádricas e algumas construções que se utilizam nas quais esse conceitos estão presentes.

Na segunda etapa os cursistas passarão ao manuseio do software Geogebra, podendo ser online ou offline. Se o laboratório de informática comportar, sugerimos que cada cursista ocupe um computador. Não sendo possível, sugerimos que o número de cursistas por computador não ultrapasse 3 (três). Alternativamente, é possível fazer uso do software Geogebra por meio dos smartphones, mas salientamos que o reduzido tamanho da tela pode dificultar a inserção dos dados e suas visualizações.

No Geogebra 2D os cursistas devem plotar os gráficos das cônicas a partir das equações quadráticas de duas variáveis:

- Elipse:
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$
- Hipérbole:
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \quad \text{e} \quad \frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$
- Parábola:
$$(x-x_0)^2=4p(y-y_0) \quad \text{e} \quad (y-y_0)^2=4p(x-x_0)$$

variando os valores para os parâmetros a, b, p, x_0 e y_0, analisando e registrando o comportamento dos gráficos.

No Geogebra 3D os cursista devem plotar os gráficos das quádricas a partir das equações quadráticas de três variáveis:

- Elipsoide:
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
- Hiperboloide de uma folha:
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \quad , \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
$$\text{e} \quad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
- Hiperboloide de duas folha:
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1 \quad , \quad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
$$\text{e} \quad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
- Paraboloide de Revolução:
$$z=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2} \quad , \quad y=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{a^2}$$
$$\text{e} \quad x=\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{a^2}$$

- Paraboloide de Elíptico:

$$z = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \quad , \quad y = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2}$$

$$\text{e} \quad x = \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2}$$

- Paraboloide de Hiperbólico:

$$z = \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} \quad , \quad y = \frac{(z-z_0)^2}{c^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}$$

$$\text{e} \quad x = \frac{(z-z_0)^2}{c^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

variando os valores para os parâmetros a, b, c, x_0, y_0 e z_0, analisando e registrando o comportamento dos gráficos.

Sugerimos que seja estipulado um tempo para essa etapa, por exemplo, 15 minutos, para o livro manuseio e experimentação do software Geogebra 2D e 3D. Dessa forma, por meio de tentativa e erro os cursistas podem, caso não tenham ainda, se familiarizar com essa poderosa ferramenta digital.

Finalizado o tempo de livre manuseio, o ministrante passará a construção do paraboloide hiperbólico como gráfico de uma função de duas variáveis no Geogebra 3D. Para isso, iniciará instruindo os cursistas a construir o gráfico da seguinte função:

$$f(x,y) = xy$$

O ministrante deve discutir com os cursistas sobre a representação gráfica dessa função e como ela pode ser interpretada como uma rotação do paraboloide hiperbólico trabalhado no momento de livre manuseio.

Em seguida o ministrante deve instruir os alunos a utilizarem a ferramenta:

Função(Expressão,Variável 1,Valor Inicial,Valor Final,Variável 2,Valor Inicial,Valor Final)

com a qual é possível restringir o domínio da função a um retângulo. O resultado da utilização dessa ferramenta é a construção de parte do gráfico da função original.

A partir da translação em relação ao eixos Ox e Oy e redução do conjunto imagem, inserindo constantes adequadas na função original, o cursista montará virtualmente um módulo do telhado com o gráfico da função resultante da restrição do domínio. De forma análoga, com ajustes adequados, o cursista deve montar virtualmente os outros três módulos do telhado, construindo assim a versão virtual do telhado cujos módulos são partes de gráficos de paraboloides hiperbólicos. Nessa etapa de construção o ministrante deve a todo tempo monitorando e auxiliando os cursista.

Sugerimos que as funções utilizadas nessa fase e suas respectivas restrições de domínio sejam:

$$f(x,y) = \frac{(x-1)(y-1)}{3} + 1,5 \quad \Longrightarrow \quad \text{Função}(f, x, 0, 2, y, 0, 2)$$

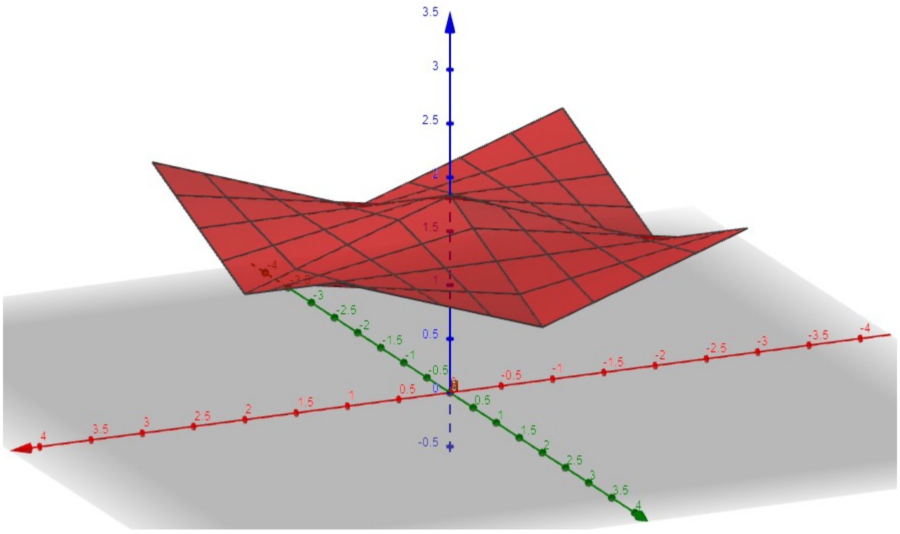
$$g(x,y) = \frac{(x+1)(y+1)}{3} + 1,5 \quad \Longrightarrow \quad \text{Função}(g, x, -2, 0, y, -2, 0)$$

$$h(x,y) = -\frac{(x+1)(y-1)}{3} + 1,5 \quad \Longrightarrow \quad \text{Função}(h, x, -2, 0, y, 0, 2)$$

$$i(x,y) = -\frac{(x-1)(y+1)}{3} + 1,5 \quad \Longrightarrow \quad \text{Função}(i, x, 0, 2, y, -2, 0)$$

O resultado dessa construção é apresentado na Figura 8.

Figura 8 – Construção da versão virtual do telhado com o Geogebra 3D.



Fonte: Autor.

Para a construção virtual das colunas de sustentação do telhado, os curistas devem plotar pontos e utilizar a ferramenta

Segmento(Ponto,Ponto)

Para o telhado virtual construído, temos os seguintes pontos e segmentos:

$$A = (0, 2, 0) \quad \text{e} \quad B = (0, 2, f(0, 2)) \quad \Longrightarrow \quad \text{Segmento(A,B)}$$

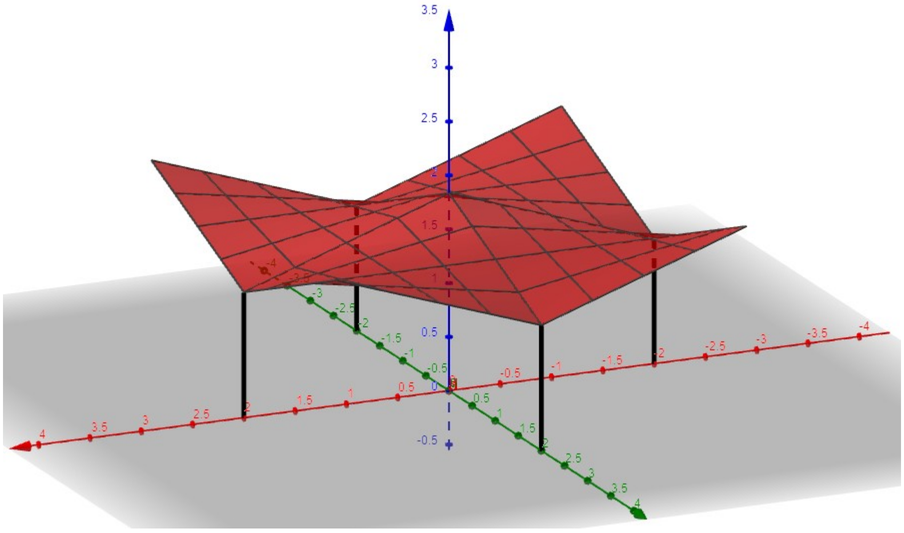
$$C = (0, -2, 0) \quad \text{e} \quad D = (0, -2, g(0, -2)) \quad \Longrightarrow \quad \text{Segmento(C,D)}$$

$$E = (2, 0, 0) \quad \text{e} \quad F = (2, 0, h(0, 2)) \quad \Longrightarrow \quad \text{Segmento(E,F)}$$

$$G = (-2, 0, 0) \quad \text{e} \quad H = (-2, 0, h(-2, 0)) \quad \Longrightarrow \quad \text{Segmento(G,H)}$$

O resultado dessa construção é apresentado na Figura 9.

Figura 9 – Construção do telhado com as colunas de sustentação com o Geogebra 3D.



Fonte: Autor.

A terceira etapa é destinada ao trabalho com materiais manipuláveis para a construção dos quatro módulos que compõem o telhado, todos em formato de paraboloide hiperbólico, e as colunas de sustentação do telhado. Para essa construção são utilizados os seguinte materiais:

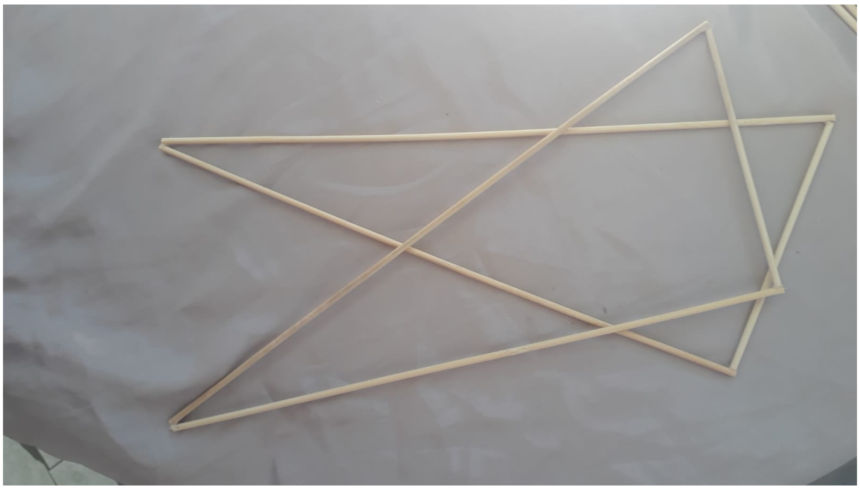
- 3 (três) pacotes, com 50 (cinquenta) unidades cada, de palitos para algodão doce (comprimento de 40 cm);
- Pistola de cola quente;
- Cola quente;
- Cola branca;
- Lápis;
- Régua;
- Esquadro;
- Tesoura;
- 8 (oito) tampas de garrafa pet;
- Estilete;
- Abraçadeira Nylon Enforca Gato.

Para essa construção os cursistas são divididos em 4 (quatro) grupos e cada grupo ficará responsável pela construção de um módulo do telhado e uma coluna de sustentação. O gerenciamento da divisão de tarefas em cada grupo é de responsabilidade do próprio grupo, possibilitando com isso o protagonismo dos cursistas.

Passemos ao passo-a-passo da construção dos módulos do telhado:

Passo 1: Com os palitos construa dois triângulos retângulos com as seguintes medidas - cateto maior (37 cm), cateto menor (15,3 cm) e hipotenusa (40 cm). Cole com cola quente na posição indicada na Figura 10.

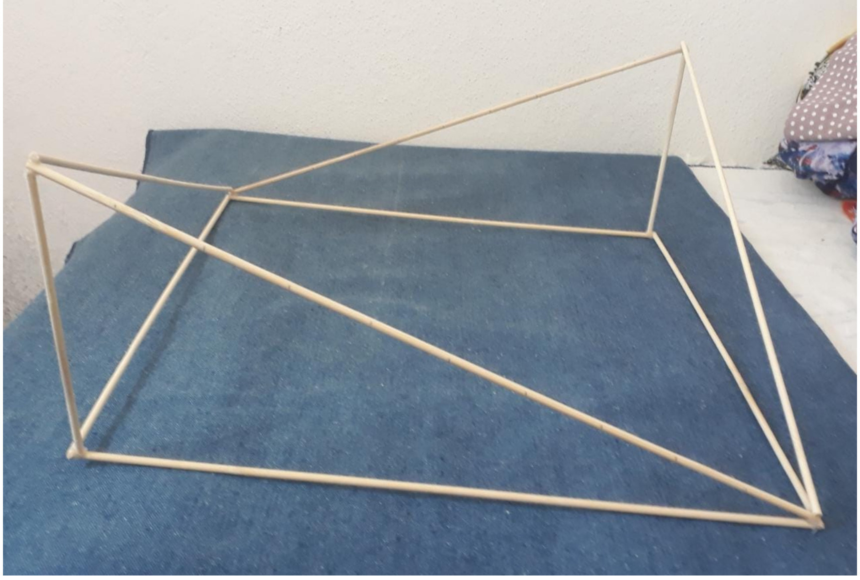
Figura 10 – Construção do módulo do telhado - passo 1.



Fonte: Autor.

Passo 2: Com dois palitos com 37 cm feche o quadrado da base e com dois palitos com 40 cm forme mais dois triângulos retângulos. Dessa forma, teremos construído uma base quadrada de lado 37 cm e quatro paredes triangulares formadas por triângulos retângulos, conforme Figura 11.

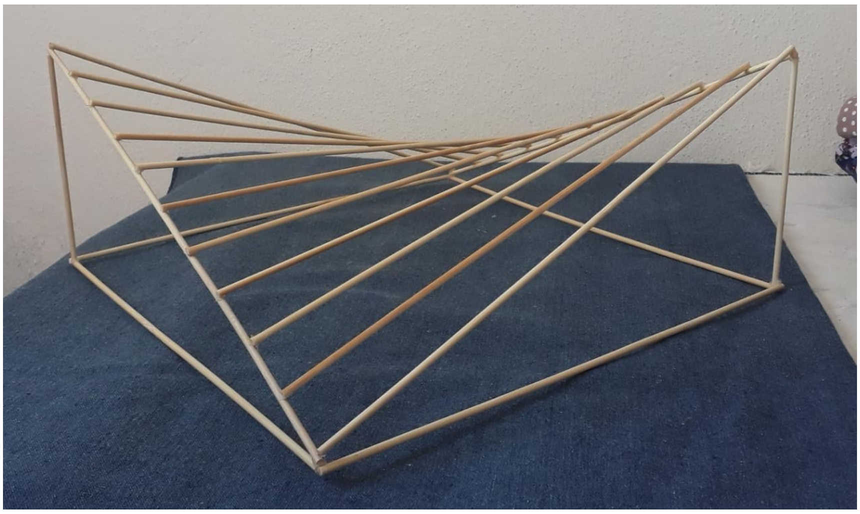
Figura 11 – Construção do módulo do telhado - passo 2.



Fonte: Autor.

Passo 3: Com régua e lápis, divida as hipotenusas dos dois triângulos retângulos construídos no Passo 1 em segmentos de 4 cm. Cole palitos paralelos seguindo as divisões feitas, conforme Figura 12.

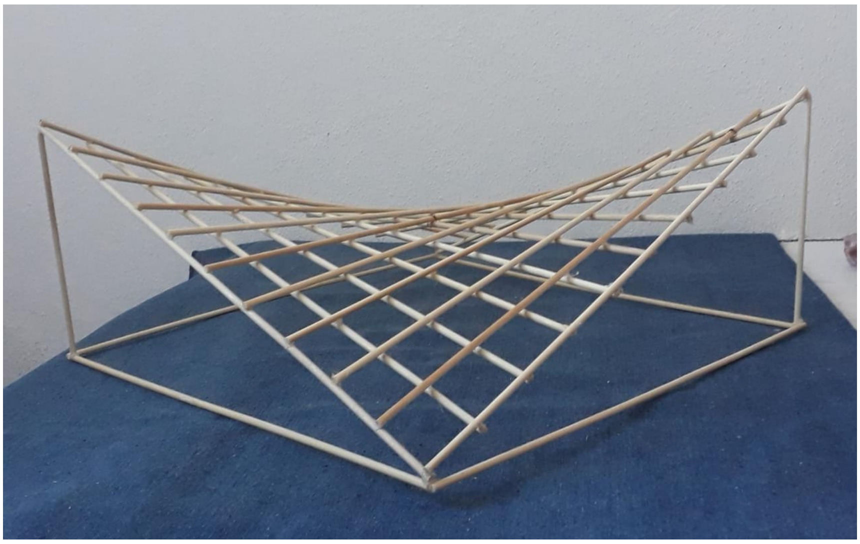
Figura 12 – Construção do módulo do telhado - passo 3.



Fonte: Autor.

Passo 4: Vire a peça construída de cabeça para baixo. Com régua e lápis, divida as hipotenusas dos dois triângulos retângulos construídos no Passo 2 em segmentos de 4 cm. Cole (por baixo) palitos paralelos seguindo as divisões feitas, conforme Figura 13.

Figura 13 – Construção do módulo do telhado - passo 4.



Fonte: Autor.

Caso deseje reforçar a resistência do módulo, os cursistas podem colar a malha quadrangular formada pelos palitos com pingos de cola quente ou pingos de cola branca nas junções da malha. Destacamos que o reforço com cola branca traz um bom resultando quanto a rigidez obtida, porém demanda um maior tempo de secagem, enquanto a cola quente torna o trabalho mais ágil.

Passemos ao passo-a-passo da construção das colunas de sustentação do telhado:

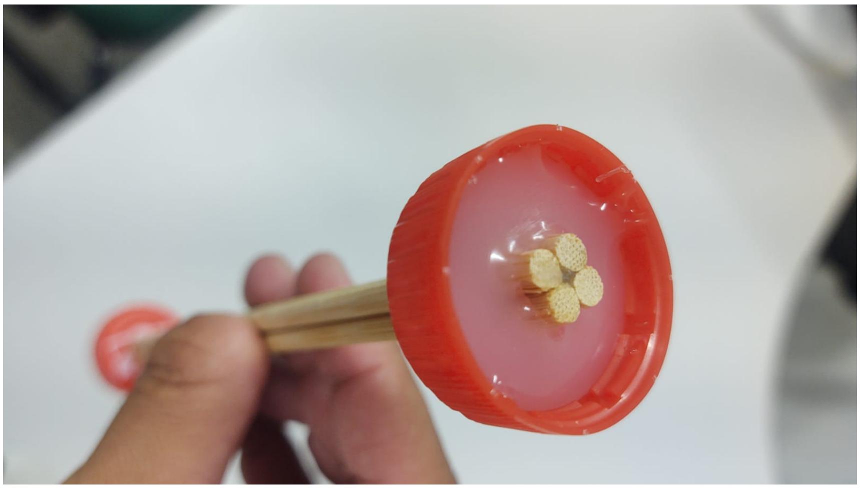
Passo 1: No centro da tampa de garrafa pet recorte com um estilete um quadrado de lado 8 mm, conforme Figura 14. Recorte duas tampas de garrafa pet.

Figura 14 – Construção da coluna de sustentação do telhado - passo 1.

Fonte: Autor.

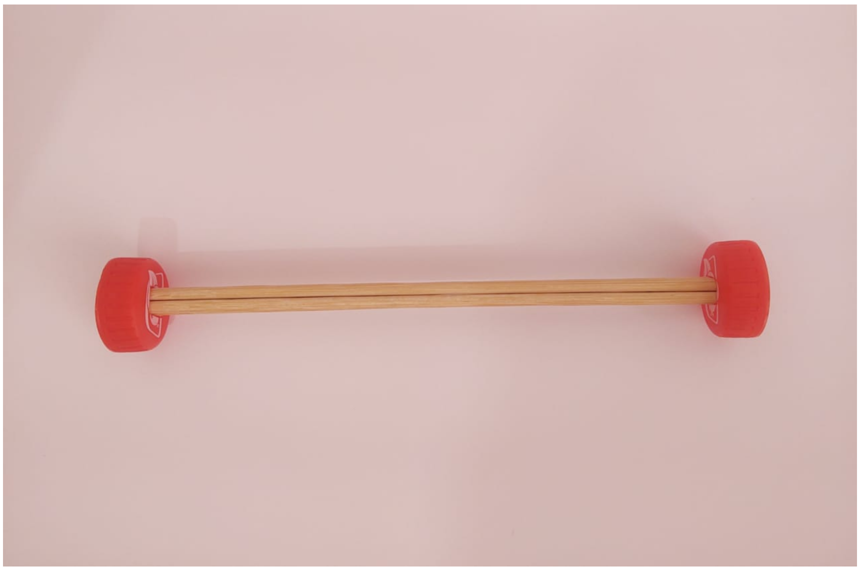
Passo 2: Tome quatro palitos de 20 cm, insira os palitos nos quadrados recortados nas tampas e preencha, não completamente, o interior da tampa de garrafa pet. O resultado dessa construção é apresentado nas Figuras 15 e 16.

Figura 15 – Construção da coluna de sustentação do telhado - passo 2.



Fonte: Autor.

Figura 16 – Construção da coluna de sustentação do telhado - passo 2.



Fonte: Autor.

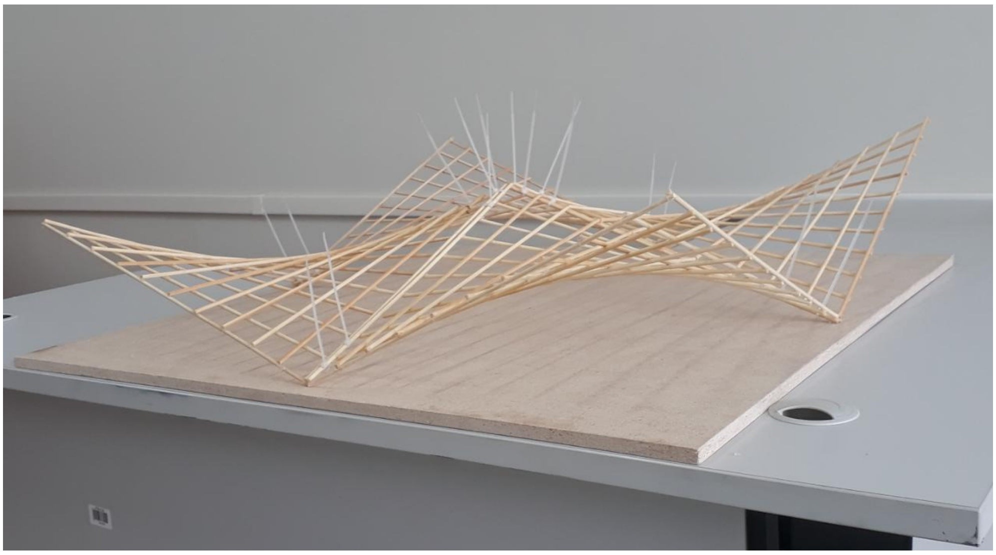
Em nossos experimentos estimamos que o tempo necessário para a construção de um módulo do telhado e de um coluna de sustentação do telhado é de aproximadamente 50 minutos, podendo esse tempo variar de acordo as divisões de tarefas realizadas em cada grupo, com as habilidades motoras dos membros das equipes com o manuseio dos materiais e instrumentos, e gerenciamento do tempo por parte do grupo.

Concluídas as construções dos quatro grupos, o ministrante reúne novamente os cursistas em um único grupo, juntando os quatro módulos do telhado e as quatro colunas de sustentação do telhado. Agora, em uma atividade coletiva, sob a orientação do ministrante, os cursistas devem retirar/cortar os catetos dos triângulos retângulos de cada módulo e unir os quatro módulos do telhado utilizando para isso 16 (dezesseis) Abraçadeiras Nylon Enforca Gato. O resultado dessa união, conforme Figura 17.

Sugerimos que o ministrante providencie uma base quadrada de 80 cm de lado. Esta servirá como base para a montagem final da maquete, fixando as colunas de sustentação na base e o telhado completo nas colunas de sustentação. Objetivando a utilização de materiais de baixo custo e fácil replicabilidades, sugerimos construir essa base com papelão. Achando necessário, pode reforçar a base colocando mais de uma camada de papelão e colando com cola branca.

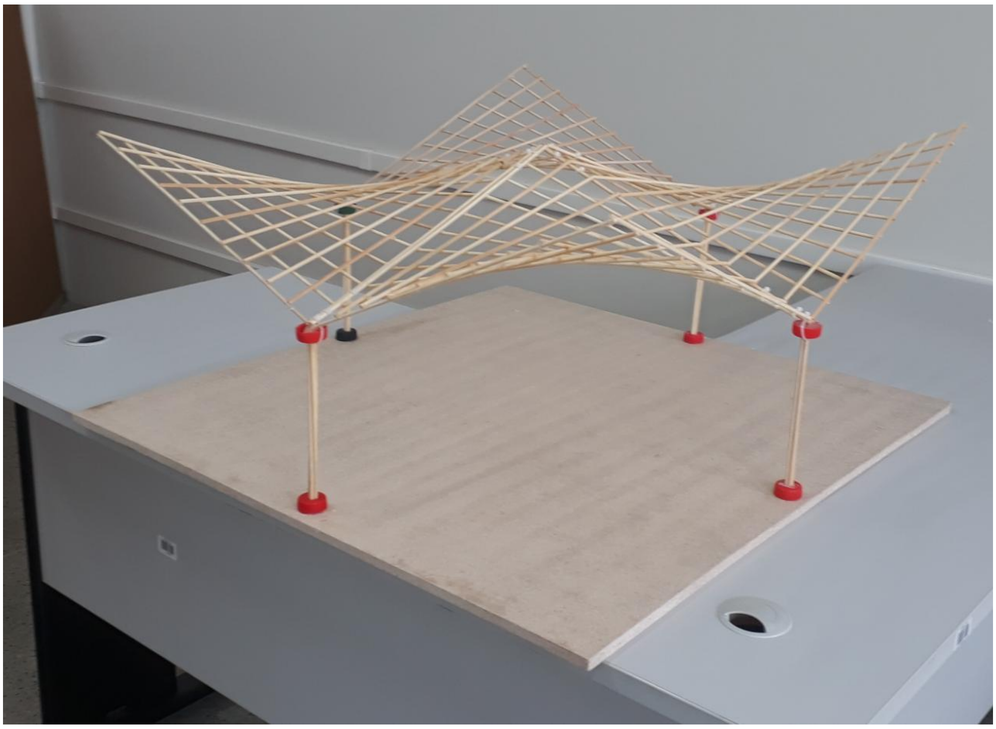
O resultado final da construção do telhado, com as colunas e a base, é apresentado na Figura 18.

Figura 17 – Montagem do telhado a partir da união dos quatro módulos.



Fonte: Autor.

Figura 18 – Telhado completo, com colunas de sustentação e base.



Fonte: Autor.

A quarta etapa é destinada a apresentação do vídeo intitulado A Geometria da Arquitetura[1], com duração de 09:14 minutos. O vídeo é introduzido com uma rápida abordagem acerca dos elementos triviais da Geometria: triângulos, quadrados e círculos. Esse início é

[1] FACULDADE DE CIÊNCIAS UNIVERSIDADE DE LISBOA. A Geometria da Arquitetura. Youtube, 21 nov. 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=M6p1HDtLWmk>. Acesso em: 11 dez. 2022.

utilizado como base a fim de mostrar que as construções, ou a criatividade dos arquitetos e dos engenheiros, não param apenas nesses polígonos básicos, mas passam aos formatos curvos. Na sequência, o vídeo passa a apresentar as cônicas propriamente.

Após esse primeiro momento, o vídeo traz três construções bastante conhecidas: a Catedral de Brasília (Brasil), a qual foi elaborada pelo arquiteto Oscar Niemeyer (1907-2012); as Escolas da Sagrada Família (Espanha), que foi elaborada pelo arquiteto Antoni Gaudí (1852-1926): e, por fim, o Restaurante Los Manantiales (México), elaborada pelo Arquiteto Felix Candela (1910-1997). A continuação do vídeo trata-se, basicamente, de qual a relação entre esses projetos. A resposta é trivial: todas são superfícies regradas.

Apresentado o vídeo, o ministrante deve conduzir uma roda de conversa objetivando discutir como os conceitos matemáticos são trabalhados em outras áreas do conhecimento, proporcionando assim um momento de interdisciplinaridade entre a matemática e a construção civil, passando pela arquitetura. Deve ainda realizar uma discussão sobre o processo de construção da maquete com materiais manipulativos, as possíveis dificuldades encontradas e os potenciais de uma atividade dessa natureza, encerrando assim a oficina.

A impressões e opiniões dos cursistas sobre a oficina, sua estrutura, execução e potencialidades podem ser coletadas através de formulários semi-estruturados objetivando posterior análise das possíveis contribuições da oficina para a formação dos cursistas, disponibilizando, inclusive, espaços de texto para que possam se expressar livremente.

Para a finalização da oficina sugerimos que o ministrante confeccione previamente adesivos com a imagem da Figura 9, as funções utilizadas para a construção de cada módulo que a compõe os pontos e segmentos utilizados na confecção das colunas de sustentação. Esses adesivos deves ser afixados na base da maquete para que se tenha em uma única peça a visualização da parte algébrica, digital e concreta do resultado da oficina.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Enquanto o presente trabalho foi desenvolvido, notou-se, ainda mais, a importância atribuída ao Laboratório de Ensino de Matemática como espaço adequado para o desenvolvimento de práticas que podem proporcionar aos alunos — em qualquer nível escolar — uma forma de conseguir vislumbrar a matemática através de um prisma diferente daquele que, comumente, se é percebido dentro das escolas: “ela é muito difícil”, “nunca vou utilizá-la no dia a dia”, “é excessivamente complexa”, “não é para mim” e etc. A possibilidade de testar, construir, experimentar e adequar permite que os personagens que estão envolvidos diretamente com a sala de aula — entenda-se como sendo professor e aluno — possam aprender juntos e perceber que a Matemática pode e deve ser mais atrativa. Tendo isto como base, este trabalho apresentou a proposta de uma oficina que, de forma prática, busca promover algumas experiências exitosas que poderão contribuir para o desenvolvimento profissional dos participantes.

Tendo em vista que a Matemática tem a fama de ser uma ciência de uma compreensão abstrata e rejeitada pela grande parte dos alunos, é importante ter meios que auxiliem no processo de ensino e aprendizagem — a proposta da oficina Construindo Telhados com Superfícies Duplamente Regradas é um desses instrumentos. Dessa forma, é interessante utilizá-la em sala de aula, pois sua aplicação pode não só ajudar a atenuar o receio que o aluno tem a essa disciplina, como estimulá-lo a estudá-la de uma maneira construtiva. Um outro ponto positivo é que essa atividade precisa apenas de materiais de baixo custo, como palito para algodão doce (40 cm de comprimento), cola quente, cola branca, arame Bwg 26, lápis, régua, esquadro e tesoura.

Sabe-se que o estudante deve adquirir tantas experiências quanto lhe for facultada, mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou auxílio, é possível que não experimente qualquer progresso: se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. Assim, o papel do professor deve ser de mediador, de tal modo que o estudante tenha parcela significativa no trabalho. Portanto, levando em consideração que a perfeição dessa ciência aparenta ser algo apenas no campo da mente, carecendo, muitas vezes, de objetos que possam representá-la no cotidiano, propostas como essas se apresentam com potenciais alternativas no processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento.* [S.l.]: Cortez Editora, 2004.

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. *Matemática Completa 3º ano.* 4. ed. São Paulo: FTD, 2016.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo: Universidade de São Paulo, 1974.

D'AMBROSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). . *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* São Paulo: UNESP, 1999.

DEVLIN, K. J. O instinto matemático.[tradução michelle dysman]. *Rio de Janeiro: Record*, 2009.

FONSECA, S. G. *Ser professor no Brasil: história oral de vida.* [S.l.]: Papirus Editora, 1997.

GASPERI, W. N. H.; PACHECO, E. R. A história da matemática como instrumento para a interdisciplinaridade na educação básica. 2018. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/deb_nre/matematica/historia_matematica.pdf>. Acesso em: 25 mai. 2022.

IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicação.* 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Org.). *Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.* Campinas - SP: Autores Associados, 2012.

SANTOS, M. H. d. *Cônicas para o ensino médio, da contextualização à álgebra.* 62 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiás, 2014. Disponível em: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/34987>. Acesso em: 30 abr. 2014.

SATO, J. As cônicas e suas aplicações. *UFU, MG*, v. 1, 2005.

SOUSA, J. M. R. d. *Trissecção do ângulo e duplicação do cubo*: as soluções na antiga grécia. 114 f. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Departamento de Matemática Pura, Porto, 2001. Disponível em: <https://hdl.handle.net/10216/10387>. Acesso em: 07 jul. 2022.

TARDIM, J. S.; KUGER, E.; SILVA, A. K. L. Demonstrando o teorema de pitágoras: um relato de experiência. In: NAVARRO E. R.; SOUSA, M. C. (Org.). *Educação matemática em pesquisa*: perspectivas e tendências. São Paulo: Editora Científica Digita, 2021. p. 623–634.

TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, S. (Org.). *Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. Campinas - SP: Autores Associados, 2012.

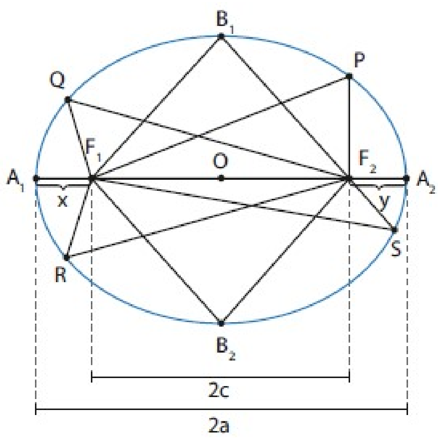
APÊNDICE A – CONCEITOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Apresentamos aqui as definições de cônicas e quádricas de acordo com Iezzi et al. (2016). Esses conceitos são utilizados no primeiro momento da oficina.

A.1 CÔNICAS

Definição A.1.1. *Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja $2c$ a distância entre eles. Elipse é o conjunto dos pontos P de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (sendo $2a > 2c$).*

Figura 19 – Elipse.

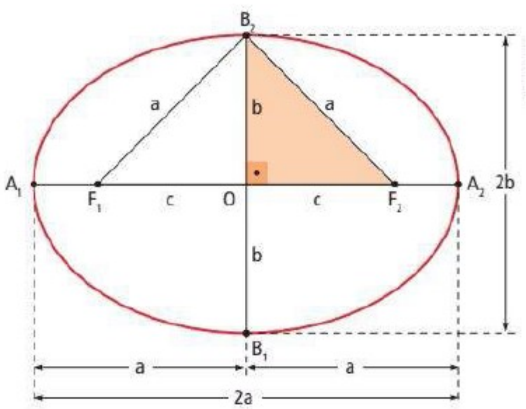


$$\begin{array}{rcl} QF_1 + QF_2 & = & 2a \\ RF_1 + RF_2 & = & 2a \\ SF_1 + SF_2 & = & 2a \\ A_1F_1 + A_1F_2 & = & 2a \\ B_1F_1 + B_1F_2 & = & 2a \\ A_2F_1 + A_2F_2 & = & 2a \\ B_2F_1 + B_2F_2 & = & 2a \end{array}$$

Fonte: (IEZZI et al., 2016, p. 90).

Os principais elementos de uma elipse são apresentados na Figura 20.

Figura 20 – Principais Elementos de uma Elipse.



$$\begin{array}{rcl} F_1 \text{ e } F_2 & \rightarrow & \text{Focos} \\ O & \rightarrow & \text{Centro} \\ A_1A_2 & \rightarrow & \text{Eixo maior} \\ B_1B_2 & \rightarrow & \text{Eixo menor} \\ 2c & \rightarrow & \text{Distância focal} \\ 2b & \rightarrow & \text{Medida do eixo menor} \\ 2a & \rightarrow & \text{Medida do eixo maior} \end{array}$$

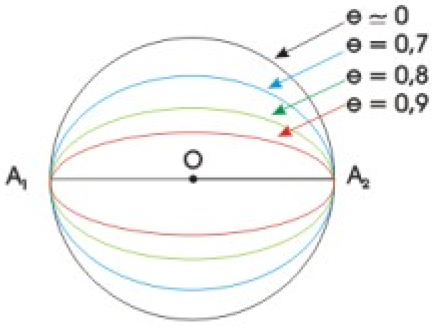
Fonte: (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA, 2016, p. 147).

Da Figura 20 temos a relação notável $a^2 = b^2 + c^2$.

Além das relações acima, existe uma outra grande relação, que é a excentricidade — é a razão entre a semi-distância focal e o semi-eixo maior: $e = \dfrac{c}{a}$.

Haja vista que $a > c$, a excentricidade é um valor compreendido entre 0 e 1 ($0 < e < 1$). Essa relação é importante, pois quanto mais próxima de 1, mais achatada a elipse será; e quando tender para 0, a elipse tende para uma circunferência.

Figura 21 – Excentricidade da Elipse.



Fonte: (SANTOS, 2014, p. 25).

Considerando um sistema cartesiano ortogonal xOy, a equação de uma elipse de centro (x_0, y_0), eixo maior e eixo menor medindo $2a$ e $2b$, respectivamente, e paralelos aos eixos coordenados é dada por

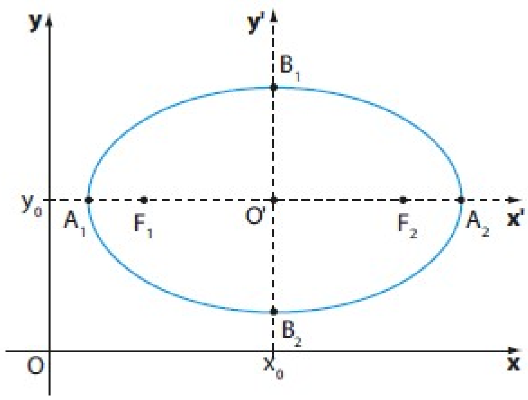
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-x_0)^2}{b^2} = 1$$

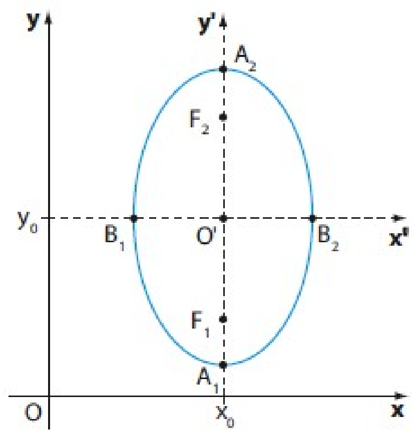
se o eixo maior for paralelo ao eixo Ox, e

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-x_0)^2}{a^2} = 1$$

se o eixo maior for paralelo ao eixo Oy.

Figura 22 – Elipse com centro (x_0, y_0) e eixos paralelos aos eixos coordenados.





Fonte: (IEZZI et al., 2016, p. 94).

A.2 AS CÔNICAS E QUÁDRICAS NO COTIDIANO

Como foi visto, a elipse é uma curva em um plano α que possui, dentre outras característica, dois focos (F_1 e F_2). Quando rotacionada em torno de um dos seus eixos, obtemos um sólido geométrico denominado de elipsoide. Esse sólido tem algumas aplicações no dia a dia. Quando se rotaciona uma elipse em torno do seu eixo maior, obtém-se uma bola de futebol americano, como mostra a Figura 23.

Figura 23 – Bola de Futebol Americano.

Fonte: Depositphotos, 2022. Disponível em: <https://br.depositphotos.com/88913894/stock-photo-american-football-on-grass.html>.

Além dessa, há uma aplicação bastante interessante na área da arquitetura: alguns teatros, catedrais e auditórios possuem peculiaridades que dão condições acústicas especiais a estas construções, pois são projetadas num formato que tem em seu entorno uma parte contendo uma elipsoide. Assim, é natural que existam dois focos estratégicos: em um fica localizado o palco e, no outro, fica a parte central da plateia. Ou seja, se duas pessoas conversarem, uma e cada foco, poderão se escutar mesmo que estejam sussurrando, haja vista a propriedade reflexiva da elipse, como é o que acontece na Catedral de São Paulo que está localizada em Londres (Figura 24) e no National Statuary Hall nos Estados Unidos (Figura 25).

Figura 24 – Catedral de São Paulo.

Fonte: Dica de londres, 2022. Disponível em: <https://dicadelondres.com.br/londres/catedral-de-sao-paulo-em-londres-inglaterra/>.

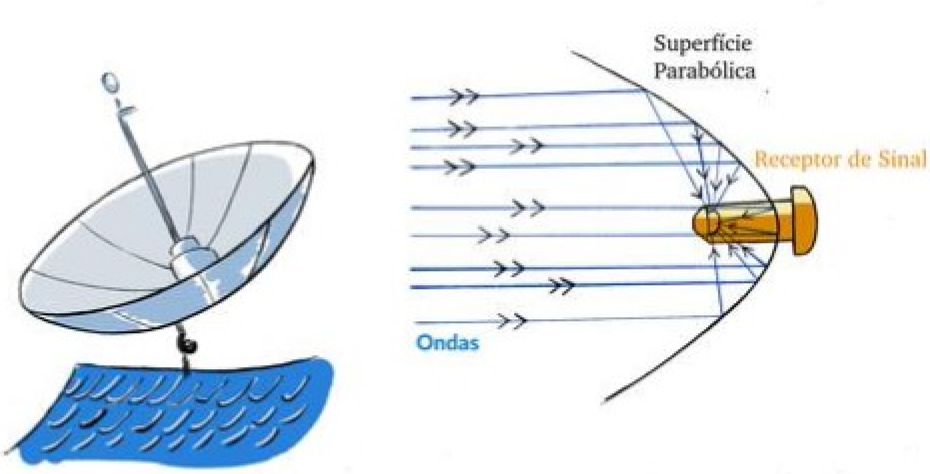
Figura 25 – National Statuary Hall nos Estados Unidos.

Fonte: flickr, 2022. Disponível em: <https://www.flickr.com/photos/carlos_seo/4498057317/sizes/l/>.

Quando se rotaciona uma parábola em torno do seu eixo, obtém-se um paraboloide de revolução. Há uma aplicação bem natural no cotidiano que, certamente, todos gozam, que são as antenas parabólicas. O nome é bastante sugestivo: é denominada assim por usufruir das propriedades reflexivas das parábolas. O fato é que essas antenas recolhem ondas eletromagnéticas, as quais são emitidas por satélites em órbita ao redor da terra.

Essa recepção de sinal ocorre em razão da propriedade da parábola de refletir o conjunto de raios recebidos para um único ponto, que chama-se de foco da parábola. E precisamente nesse ponto, é posicionado o captador de ondas, que envia o sinal recebido para um conversor que as decodifica e envia essas informações para o receptor de televisão.

Figura 26 – Antena parabólica.



Fonte: Um livro aberto, 2022. Disponível em: <https://www.umlivroaberto.org/BookCloud/Volume_1/master/view/AF209-11.html>.