INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FABRÍCIO LIMEIRA DE SOUSA

DIVISÃO DE FRAÇÕES: relacionando conceitos importantes para o seu ensino

CAJAZEIRAS
2022

FABRÍCIO LIMEIRA DE SOUSA

DIVISÃO DE FRAÇÕES: relacionando conceitos importantes para o seu ensino

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito parcial à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Orientador(a): Profa. Me. Kíssia Carvalho
Coorientador(a): Profa. Dra. Fernanda Andréa Fernandes da Silva

CAJAZEIRAS
2022

FABRÍCIO LIMEIRA DE SOUSA

DIVISÃO DE FRAÇÕES: relacionando conceitos importantes para o seu ensino

Monografia apresentada ao programa de **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 12/12/2022

Banca Examinadora:

Kissia Carvalho

Profª. Me. Kissia Carvalho
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Fernanda Andréa F. Silva

Profª. Drª. Fernanda Andréa Fernandes Silva
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Francisco Aureliano Vidal

Prof. Me. Franscisco Aureliano Vidal
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Geraldo H. L.

Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S725d Sousa, Fabrício Limeira de.

Divisão de frações : relacionando conceitos importantes para o seu ensino / Fabrício Limeira de Sousa. – 2022.

47f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2022.

Orientador(a): Profª. Me. Kíssia Carvalho.
Coorientador(a): Profª. Dra. Fernanda Andréa Fernandes Silva.

1. Ensino de matemática. 2. Frações. 3. Álgebra. 4. Geometria plana. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ CDU: 514:37

Dedico este trabalho a minha família e todos os amigos que contribuíram nesta conquista.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por proporcionar sabedoria para superar todos os desafios na produção deste trabalho e durante todo o Curso de Licenciatura em Matemática.

Agradeço aos meus familiares que contribuíram direta ou indiretamente neste trabalho, em especial as minhas irmãs, Franciélia e Gilvânia, por todo apoio no decorrer desse estudo, e a minha esposa Ana Karla por todo apoio e motivação.

Agradeço também a todos os meus amigos, por todos os conselhos e os desafios que enfrentamos durante o curso.

Em especial, agradeço as professoras Kíssia Carvalho e Fernanda Andréa Fernandes da Silva, orientadora e coorientadora respectivamente, deste trabalho. Expresso profunda gratidão pelo compromisso e paciência comigo durante todo o decorrer do trabalho e também ao professor William de Souza Santos por sua contribuição.

Por fim, agradeço a toda comunidade do IFPB campus Cajazeiras, professores e demais profissionais.

Faça o teu melhor, na condição que você tem, enquanto você não tem condições melhores, para fazer melhor ainda!.

Mario Sergio Cortella

RESUMO

Este trabalho, motivado pela percepção da dificuldade, por parte de muitos alunos concluintes dos cursos de Licenciatura em Matemática, de identificar em que momento da graduação o conceito de frações e operações básicas com frações foi abordado e de como ensiná-lo no ensino básico, buscou discutir alguns dos conhecimentos especializados sobre divisão de fração a serem construídos na formação inicial do professor de matemática. Para tal fim, foi escolhido por Público-alvo Professores da rede básica de educação da região de Cajazeiras e desenvolvida uma pesquisa bibliográfica de caráter exploratório com abordagem dos dados feita de forma qualitativa, mas também com características descritivas e explicativas. Como resultado são apresentados os conceitos da disciplina de Introdução à Álgebra que subsidiam a compreensão da divisão de frações e os conceitos de Geometria Plana que podem ser usados como ferramenta para abordagem do ensino de divisão de frações. Apresenta também o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (Mathematics Teachers' Specialized Knowledge - MTSK), como modelo teórico que descreve o conhecimento profissional específico e especializado que deve possuir um professor para ensinar matemática. Concluímos que os professores da educação básica conseguem identificar que durante a graduação o conceito de fração foi abordado nas disciplinas de Estruturas Algébricas e Geometria Plana, no entanto é notório que grande parcela possui a dificuldade em como transpor e transformar os conceitos avançados aprendidos em ferramentas metodológicas para o ensino.

Palavras-chave: Fração, Matemática, Licenciatura, Álgebra Moderna, Geometria Plana.

ABSTRACT

This article, motivated by the perception of difficulty for many undergraduate students in mathematics to identify at what point in their Bachelor's Degree the concept of fractions and basic operations with fractions was learned and how to teach it at the basic education, searched for discussing some of the specialized knowledge on fraction division to be built in the initial studies of the mathematics teacher. In such a way, it was chosen by Target Audience Cajazeiras' Teachers of the basic education and an exploratory bibliographic research is developed with a qualitative approach to data, but also with descriptive and explanatory characteristics. As a result, the concepts of the discipline of Modern Algebra are presented, which support the understanding of the division of fractions and the concepts of Flat Geometry that can be used as a tool for the teaching of fractional division. It also presents the MTSK as a theoretical model that describes the specific and specialized professional knowledge that must have a teacher to teach mathematics. We conclude that teachers of basic education can identify that during graduation the concept of fraction was taught in the disciplines of Algebraic Structures and Flat Geometry, however, it is notorious that most teachers have the difficulty in how to transpose and transform the advanced concepts learned into methodological tools for teaching.

Keywords: Fraction, Mathematics, Bachelor's Degree, Modern Algebra, Flat Geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Subdomínios do MTSK. 20
Figura 3.1 – Algoritmos da divisão de fração identificados 35
Figura 3.2 – Área do quadrado 40
Figura 3.3 – Exemplo 1 41
Figura 3.4 – Exemplo 2 42
Figura 3.5 – Caso geral 43

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	- Base Nacional Comum Curricular
CALC	– Algoritmo uso do protocolo da calculadora científica
CD	– Algoritmo conversão de frações em decimais
ENEM	- Exame Nacional do Ensino Médio
ID	– Algoritmo igualar denominadores
IM	– Algoritmo inverter e multiplicar
KFLM	– Conhecimento das características de aprendizagem de matemática - (Knowledge of Features of Learning Mathematics)
KMLS	– Conhecimento de normas de aprendizagem de matemática -(Knowledge of Mathematics Learning Standars)
KMT	– Conhecimento do ensino de matemática -(Knowledge of Mathematics Teaching)
KoT	– Conhecimento de tópicos matemáticos - (Knowledge of topics)
KPM	– Conhecimento da pratica matemática -(Konowledge of the Practice of Mathematics)
KSM	– Conhecimento da estrutura da matemática - (Konowledge of the Structure of Mathematics)
MKT	– Mathematical Knowledge for Teaching
MTSK	– Mathematics Teacher's Specialized Knowledge
MK	- Conhecimento Matemático
OBMEP	- Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PC	– Algoritmo produtos cruzados
PCN's	- Parâmetros Curriculares Nacionais
PCK	- Conhecimento Pedagógico do Conteúdo
PISA	- Programa Internacional de avaliação do Estudante
PNLD	- Programa Nacional do Livro Didático
UF	– Algoritmo uso da unidade fracionada

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **16**

1 CONHECIMENTOS ESPECIALIZADOS PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA **19**

2 CONSTRUÇÃO ALGÉBRICA DA DIVISÃO DE FRAÇÕES **24**

2.1 Anéis e Domínios **24**

2.2 Subanéis **26**

2.3 Homomorfismo de anéis **26**

2.4 O corpo de frações de um domínio **28**

2.4.1 Usando o corpo de frações para definir divisão de frações em $\mathbb{Q}$ 31

3 DIVISÃO DE FRAÇÕES E INTUIÇÃO GEOMÉTRICA . . . **34**

3.1 Áreas de polígonos **38**

3.2 Problemas sobre divisão de frações utilizando cálculo de áreas **40**

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS **44**

REFERÊNCIAS **46**

APÊNDICE A – **48**

INTRODUÇÃO

O conceito de fração, introduzido no sistema escolar a partir do 4º ano do ensino fundamental, é inserido geralmente para solucionar situações problemas que não podem ser resolvidas utilizando o conjunto dos números naturais. Essa tem sido a forma de introduzir os números racionais, utilizando uma de suas muitas representações (SILVA, 2013). Conforme a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2018), a habilidade de compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias, bem como resolver e elaborar problemas que envolvam estas operações, deve ser desenvolvida entre os 6º e 7º anos, sendo aprofundada e desenvolvida até o final da educação básica, no entanto pesquisas na área de educação vêm apontando dificuldades sobre o ensino e aprendizagem do conceito de frações e suas operações (JUNIOR et al., 2019; FÁVERO; NEVES, 2012; PROENÇA, 2015; MOCROSKY et al., 2019).

Segundo dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) realizado em 2018, o Brasil estava entre os 10 piores desempenhos do mundo em matemática. Outro dado desta avaliação é que dois terços dos brasileiros de 15 anos de idade, próximos ao final da educação obrigatória sabem menos que o básico de matemática (OLIVEIRA, 2019). Muito se discute sobre as razões desse baixo desempenho e quais estratégias devem ser adotadas para reverter este quadro, especialmente no tocante a valorização e formação do professor do ensino básico. Nesse sentido, estudos que visam melhorar o ensino de conteúdos básicos, como frações, são necessários e urgentes, principalmente os que relacionam teoria e prática.

Para muitos alunos concluintes dos cursos de licenciatura em matemática pode ser difícil identificar em que momento de sua graduação o conceito de frações e operações básicas com frações, especialmente a divisão, foi abordado e como ensiná-lo. Pode-se até presumir que muitos lecionarão esse conteúdo com base em seu próprio ensino básico, repetindo mecanicamente, como fazer a divisão de frações, sem de fato compreender o porquê da escolha dessa didática. A base para tal presunção é a percepção das dificuldades que os alunos do ensino básico demonstram sobre o domínio de operações com frações, principalmente em avaliações nacionais, como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas- (OBMEP) e o Exame Nacional do Ensino Médio - (ENEM), de acordo com dados explícitos nas edições do PISA. Uma análise realizada por Fraga et al. (2015) sobre os argumentos utilizados em livros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), obteve como resultado a verificação de que em alguns livros didáticos não abordam uma argumentação ou justificativa para o algoritmo da divisão de frações, e que em outros esse aspecto se apresenta, ainda que timidamente, introduzidos por uma situação problema. Como também, em dois livros que constam no PNLD, não trabalhavam a divisão de fração. Em resumo, Fraga et al. (2015) conclui que os livros didáticos apresentam ou uma falta de argumentos convincentes sobre a divisão de frações, ou tão logo apresentam o algoritmo, sem muitos exemplos, revelando a preferência pelo ensino do procedimento, em detrimento do ensino do processo.

Percebe-se uma falta de relação entre o conteúdo lecionado no ensino básico e algumas disciplinas que o aluno de graduação de licenciatura em matemática cursa. Além de saber como ensinar fração, é importante que os estudantes na formação inicial de professores de matemática entenda os conceitos fundamentais que permitem as operações com as frações. É necessário identificar as principais contribuições de estudos sobre conhecimento docente relativo ao ensino e a aprendizagem da divisão de frações e analisar como tais resultados contribuem para entender quais conhecimentos um professor precisa para ensinar e fazer aprender divisão de frações. Diante desse cenário, *quais saberes matemáticos os professores devem aprender para ensinar o conteúdo de divisão de frações?* E em qual momento da graduação esses conhecimentos são adquiridos?

Portanto, o objetivo geral desse trabalho consiste em investigar alguns dos conhecimentos especializados sobre divisão de fração a serem construídos na formação inicial do professor de matemática. Para esse fim, identificamos os conceitos da disciplina de Introdução à Álgebra que subsidiam a compreensão da divisão de frações, além de, baseado nas anotações de Silva (2020), investigar os conceitos de Geometria Plana que podem ser usados como ferramenta para abordagem do ensino de divisão de frações.

Devido à natureza do nosso objetivo, desenvolvemos uma pesquisa bibliográfica de caráter exploratório, com aporte teórico em livros, sites, artigos e teses, com abordagem dos dados feita de forma qualitativa, mas também com características descritivas e explicativas. Em nosso projeto, tivemos a oportunidade de fazer uma apresentação em um grupo de estudo, cujas as sugestões foram de grande ajuda para o desenvolvimento da pesquisa.

No primeiro capítulo apresentamos o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (*Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* - MTSK), um modelo teórico que descreve o conhecimento profissional específico e especializado que possui (ou deve possuir) um professor para ensinar matemática (CARRILLO et al., 2014);(MONTES et al., 2013).

No segundo capítulo, abordamos o conteúdo de álgebra moderna o qual é estudado na graduação, permitindo formalizar o conceito de fração, desde a definição e operações básicas, como é visto nos cursos de graduação em licenciatura em matemática, com enfoque na construção da prova da divisão de fração apontando teoremas e exemplos.

No nosso terceiro capítulo, realizamos uma pesquisa com amostragem por conveniência e abordagem qualitativa com professores da educação básica da região de Cajazeiras, a respeito da formação e ensino de frações. As evidências resultantes motivaram a apresentação do trabalho de Cicero Silva (2020), que visa uma forma de abordar a divisão de fração utilizando a geometria, fazendo uso de exemplos e dos números racionais.

1 CONHECIMENTOS ESPECIALIZADOS PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Este capítulo aborda o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática - MTSK [1] (na sigla em inglês), que segundo Carrillo et al. (2014), é tanto uma ferramenta metodológica quanto uma proposta teórica que analisa, por meio de seis subdomínios, dois grandes grupos de conhecimento: o conhecimento que o professor tem da matemática como disciplina científica em um contexto escolar e o conhecimento relacionado ao conteúdo matemático como objeto de ensino-aprendizagem, necessários para que o professor possa ensinar matemática. Portanto, nesta pesquisa o MTSK pode ser usado como instrumento metodológico para entender como o conhecimento especializado contribui para o ensino de divisão de frações, ponto chave deste estudo.

Segundo Fiorentini (2005) o conhecimento matemático pode ser visto a partir de três viés: o acadêmico, o escolar e aquele das práticas cotidianas consideradas não-formais. Estes devem ser trabalhados na formação do professor, pois a matemática escolar, com suas particularidades, necessita se relacionar com a matemática acadêmica e a do cotidiano dos indivíduos.

Apresentado no trabalho de Carrillo et al. (2013), o MTSK é um modelo teórico sobre conhecimento profissional de professores de matemática, abordado/desenvolvido por este autor em diversos trabalhos. O mesmo ressalta que o “conhecimento especializado de conteúdo” é diferente do “conhecimento especializado do professor de matemática”:

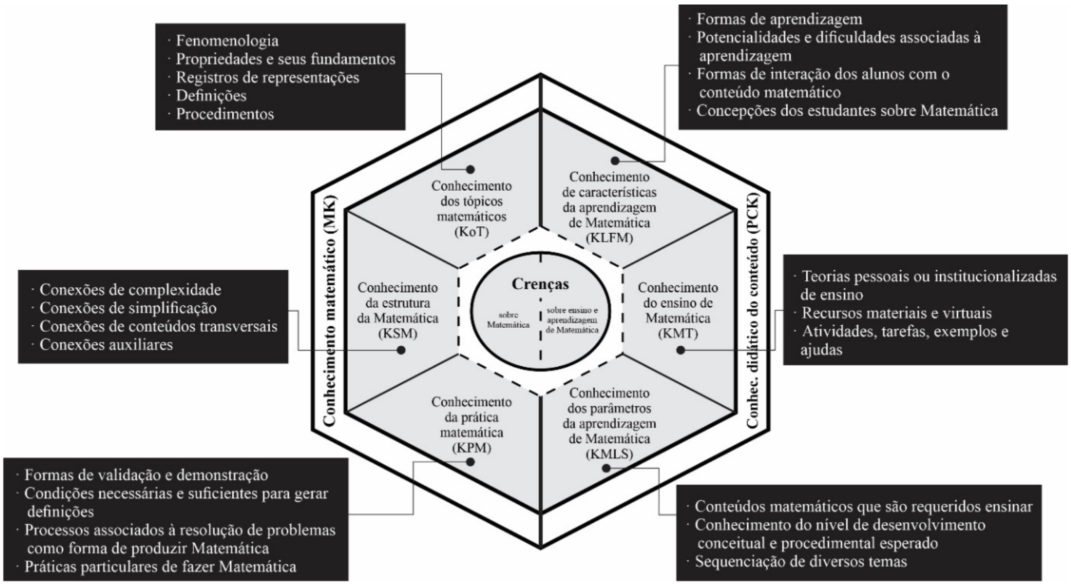
> A especialização do MTSK deve permitir diferenciá-lo da pedagogia geral (conhecimento de pedagogia e psicologia geral, que também faz parte do conhecimento profissional do professor de matemática), do conhecimento especializado de professores de outras disciplinas e do conhecimento de outras matemáticas profissionais. Em outras palavras, é especializada com respeito ao ensino de matemática (CARRILLO et al., 2013, p.2988)[2]

O MTSK possui dois domínios: O domínio do conhecimento matemático (MK - *Mathematical Knowledged*), e o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK - *Pedagocical Content Knowledge*), que por sua vez são divididos, cada um, em três subdomínios conforme apresentado na figura 1.1.

O modelo apresentado na figura 1.1 relaciona-se com o pensamento de Fiorentini (2005)

[1] Sigla para *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*
[2] Tradução do autor

Figura 1.1 – Subdomínios do MTSK.



Fonte: (MELO; MORIEL JUNIOR, 2021)

> O professor precisa conhecer o processo de como se deu historicamente a produção e a negociação de significados na Matemática, bem como isso acontece, guardadas as devidas proporções, em sala de aula. Além disso, precisa conhecer e avaliar potencialidades educativas do saber matemático; isso o ajudará a problematizá-lo e mobilizá-lo da forma mais adequada, tendo em vista a realidade escolar onde atua e os objetivos pedagógicos relativos à formação dos estudantes, tanto no que diz respeito ao desenvolvimento intelectual como à possibilidade de compreender e atuar melhor no mundo (FIORENTINI, 2005, p.109-110)

À vista disso, para a eficaz transposição do conhecimento dos conteúdos avançados aos alunos, é importante que o professor esteja ciente dos saberes matemáticos avançados e atento à realidade em que está inserido. De tal modo, o MTSK apresenta-se como uma ferramenta metodológica que auxilia o professor a elaborar sua prática sobre o ensino de divisão de frações, visando proporcionar uma aprendizagem significativa, livre de fórmulas mágicas e simples memorização.

Os subdomínios do Conhecimento Matemático (MK) - mais relevantes para nosso trabalho - e dos Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo (PCK) foram definidos formalmente em Carrillo et al. (2014 apud MORIEL JUNIOR, 2014). A seguir descrevemos estes conceitos:

1.1 Conhecimentos Matemáticos - MK

1.1a) Conhecimento de Tópicos Matemáticos (KoT - *Knowledge of Topics*)

Este subdomínio abarca o conteúdo matemático a ser abordado, incluindo os conceitos, definições, propriedades, exemplos e contraexemplos, aplicações em situações, algumas demonstrações específicas, justificativa de procedimentos. No caso específico da divisão de frações, o estudo de Fraga et al. (2015) observa que a maioria dos livros didáticos apresentam o algoritmo da divisão sem uma argumentação teórica que justifique o procedimento, os que apresentam, fazem isso de forma muito tímida. Nesse contexto é importante que o professor tenha a fundamentação teórica e conceitual necessária para suprir a lacuna deixada pelo livro didático.

1.1b) Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM- *Konowledge of the Structure of Mathematics*)

Envolve saber fazer conexões tanto entre conceitos avançados e elementares, tornando-os mais acessíveis para os alunos, como entre conhecimentos prévios e futuros, além de saber relacionar com outras áreas do conhecimento matemático, exceto as relativas à fundamentação conceitual previstas em KoT. Na definição formal do conceito de frações, utiliza-se a noção de classes de equivalência e justifica-se formalmente a divisão de frações por meio do corpo de frações de $\mathbb{Q}$. Do KSM, faz-se a transposição do saber acadêmico para o escolar explorando o conceito inverso de um número fracionário sem falar de estruturas algébricas.

1.1c) Conhecimento da Prática Matemática (KPM - *Konowledge of the Practice of Mathematics*)

Compreende conhecer como os conhecimentos matemáticos são produzidos e comunicados, isto é, inclui o conhecimento da lógica ou argumentação matemática, a natureza axiomática de se construir resultados através de uma argumentação lógica válida, incluindo estratégias para generalizar e explorar matematicamente alguns conceitos. No entanto, destaca-se que pertence ao KoT o conhecer uma demonstração específica. Em adição, inclui conhecer como as conexões entre conceitos se dão, que difere de apenas conhecer que existe, que no caso se refere ao subdomínio KSM. Além disso, conforme **??** (**??** apud MORIEL JUNIOR, 2014), a importância de tal conhecimento também se justifica pela necessidade do professor saber gerir os raciocínios matemáticos colocados por seus alunos na hora de aceitá-los, refiná-los ou refutá-los.

Os subdomínios até então discutidos, KoT, KSM e KPM, têm uma forte relação ao presente trabalho, já que esperamos esclarecer os conhecimentos matemáticos adquiridos durante a graduação em Licenciatura em Matemática para o ensino de divisão de fração.

1.2 Conhecimentos Pedagógicos do Conteúdo (PCK)

1.2a) Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM - *Knowledge of Features of Learning Mathematics*)

A abordagem de um conteúdo em sala de aula pode ser influenciada e construída a partir do conhecimento prévio de que os alunos comumente apresentam dificuldades em compreendê-lo, como é o caso da divisão de números racionais. Assim, é importante o professor dispor de conhecimentos acerca do processo de aprendizagem matemática, e a isto se refere o KFLM, o qual engloba o domínio de teorias formais ou informais (não apenas saber que existem, mas como contribuem para o processo de aprendizagem), dificuldades e erros comuns associados à aprendizagem de um conteúdo específico, além do conhecimento de estratégias comuns de solução de problemas. A pesquisa realizada por Junior et al. (2019), que buscou identificar as principais contribuições de estudos sobre conhecimentos docentes relacionado ao ensino divisão de frações, adveio que os estudos que analisaram conexões entre interpretações, problemas, suas resoluções e algoritmos para a divisão de frações, evidenciaram que algumas formas de abordagem e algoritmos são mais acessíveis para os alunos, facilitando a compreensão do problema e de situações em que a divisão de fração é aplicável, quando comparados à abordagens onde a divisão de fração é apresentada como uma solução intuitiva com o auxílio de desenhos ou formas geométricas para justificá-la.

1.2b) Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT- *Knowledge of Mathematics Teaching*)

Trata-se do domínio de estratégias de ensino diversificadas, conhecer atividades, jogos, analogias, softwares ou exemplos que podem ser utilizados bem como as limitações de tais recursos. Um exemplo disso é a estratégia de ensinar frações utilizando uma figura geométrica (circular ou retangular, por exemplo) ou modelos e saber que isto é (mais) adequado para desenvolver a interpretação parte-todo e como será abordado no terceiro capítulo, pode-se fazer uso de problemas geométricos relacionados ao cálculo de áreas de polígonos para significar, intuitivamente, a divisão de frações. Ou como apontado em Junior e Wielewski (2016) realizar uma abordagem para o ensino de divisão de frações baseada na comparação entre dois modos de resolução, o procedimento geométrico e o algoritmo inverter-multiplicar, visando opor os dois métodos pela ênfase nas dificuldades computacionais do primeiro ao trabalharmos com frações obtidas a partir de divisão envolvendo números maiores, como por exemplo $\frac{9}{45}$. Algo semelhante é feito para incentivar a aprendizagem e uso das regras de derivação, ao primeiro calcularmos por definição.

1.2c) Conhecimento de Normas de Aprendizagem de Matemática (KMLS - *Knowledge of Mathematics Learning Standars*)

Para a devida adequação e a aprendizagem sequenciada dos conteúdos matemáticos, em particular no estudo de conjuntos numéricos, o professor precisa conhecer as especificações curriculares, nacionais e estaduais, sobre o que prevê cada etapa da educação escolar em relação a conteúdos e sequenciamento destes, competências e habilidades a serem desenvolvidas. Assim, além das propostas curriculares oficiais, como a BNCC e os PCN's, ainda inclui o conhecimento de pesquisas na área de Educação e Educação Matemática, ponto de vista de professores experientes. Portanto, para capacitar o estudante do curso de Licenciatura em Matemática para a prática futura de ensinar divisão de frações, além das disciplinas teóricas de álgebra abstrata e geometria, são fundamentais as disciplinas pedagógicas, de prática, metodologia, pesquisa e laboratório para o ensino de matemática.

A importância deste capítulo é enfatizar que o saber do professor de matemática vai além do domínio do conteúdo teórico, mas também passa pelo conhecimento pedagógico do conteúdo, como apontam os três últimos subdomínios anteriormente apresentados. O presente trabalho, no entanto, tem como enfoque principal o embasamento teórico dos conceitos. Sendo assim, no próximo capítulo serão apresentados os conceitos do ponto de vista algébrico abordados na formação inicial dos professores, mostrando o conteúdo necessário para justificar a divisão de frações.

2 CONSTRUÇÃO ALGÉBRICA DA DIVISÃO DE FRAÇÕES

Neste capítulo iremos identificar os conceitos da disciplina de Introdução à Álgebra que subsidiam a compreensão da divisão de frações, apresentamos neste capítulo os conceitos teóricos do ponto de vista algébrico que justificam de forma clara a divisão de frações. Abordaremos o conceito por meio da estrutura do corpo de frações de um domínio de integridade. Para isso, vamos partir das definições básicas necessárias, desde a definição de anel e homomorfismo de anéis, tendo como base as referências (GARCÍA, 2013) e (GONÇALVES, 2012), livros clássicos comumente utilizados como livro-texto nas disciplinas de Introdução à Álgebra nos cursos de licenciaturas em Matemática.

2.1 ANÉIS E DOMÍNIOS

Definição 2.1.1. Um anel comutativo $(A,+,\cdot)$ é um conjunto A com pelo menos dois elementos, munido de uma operação denotada por + (chamada adição) e de uma operação denotada por · (chamada multiplicação) que satisfazem as seguintes condições:

A.1) A adição é associativa, isto é,

$$\forall\, x,y,z \in A, (x+y)+z = x+(y+z).$$

A.2) Existe um elemento neutro com respeito à adição, isto é,

$$\exists\ 0\ \in A \text{ tal que, } \forall x\ \in A,\ 0+x = x \text{ e } x+0 = x.$$

A.3) Todo elemento de A possui um inverso com respeito à adição, isto é,

$$\forall\ x\ \in A,\ \exists z\ \in A \text{ tal que } x+z = 0 \text{ e } z+x = 0.$$

A.4) A adição é comutativa, isto é,

$$\forall\ x,\ y\ \in A,\ x+y = y+x.$$

M.1) A multiplicação é associativa, isto é,

$$\forall\ x,\ y,\ z\ \in A,\ (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$$

M.2) Existe um elemento neutro com respeito á multiplicação, isto é,

$$\exists\ 1\ \in A \text{ tal que, } \forall x \in A,\ 1\cdot x = x \text{ e } x\cdot 1 = x.$$

M.3) A multiplicação é comutativa, isto é,

$$\forall\ x,\ y\ \in A,\ x \cdot y = y \cdot x.$$

AM) A adição é distributiva relativamente à multiplicação, isto é,

$$\forall\ x,\ y,\ z\ \in A,\ x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Se todas as condições são satisfeitas com exceção de M.3), então (A,+,·) é chamado de *anel* não-comutativo.

Exemplo 2.1.2. Com as operações de adição e multiplicação usuais, os conjunto dos números inteiros e dos números reais, são exemplos de anéis. Um exemplo de um anel não comutativo é o conjunto $(M_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ das matrizes quadradas de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$, munido das operações de adição e multiplicação usuais.

Além da comutatividade, há outra importante diferença estrutural entre o anel das matrizes e dos inteiros: é possível tomar duas matrizes A e B não nulas, tais que $A \cdot B = 0$. Por exemplo, fazendo $n = 2$, para as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4/3 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$, temos que $A \cdot B = 0$, onde 0 é a matriz nula de ordem 2.

Isto motiva as seguintes definições:

Definição 2.1.3. Seja $(A,+,\cdot)$ um anel. Um elemento $a \neq 0$ de um anel A é chamado divisor de zero quando existe $b \neq 0 \in A$, tal que $a \cdot b = 0$ ou $b \cdot a = 0$.

Definição 2.1.4. Dizemos que um anel $(A,+,\cdot)$ é sem divisores de zero quando dados $a,\ b \in A$, se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$

Definição 2.1.5. Um anel (D, +,·) comutativo e sem divisores de zero é chamado *domínio* ou *domínio de integridade.*

Definição 2.1.6. : Um anel $(K,+,\cdot)$ é chamado *corpo* se ele satisfazer a seguinte condição:

M.4) Todo elemento diferente de zero de K possui um inverso com respeito à multiplicação, isto é,

$$\forall\ x \in K - \{0\}, \exists\ y \in K \text{ tal que } x \cdot y = 1.$$

Exemplos de Anéis comutativos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

2.2 SUBANÉIS

Seja $(A,+,\cdot)$ um anel e B um subconjunto não vazio de A. Suponhamos que B seja fechado para as operações $+$ e $\cdot$ de A, isto é,

a) $x,\ y \in B \Rightarrow x+y \in B$

b) $x,\ y \in B \Rightarrow x \cdot y \in B$.

Assim podemos também considerar a adição e o produto como operações em B. Se $(B,+,\cdot)$ for um anel com as operações de A dizemos que B é um **subanel** de A. Vamos agora dar um critério para que um subconjunto de um anel seja um subanel.

Proposição 2.2.1. Seja $(A,+,\cdot)$ um anel e seja B um subconjunto de A. Então B é um subanel de A se, e somente se, as seguintes condições são verificadas.

(i) $0 \in B$ (o elemento neutro de A pertence a B)

(ii) $x,\ y\ \in B \Rightarrow x-\ y \in B$ (B é fechado para a diferença)

(iii) $x,y \in B \Rightarrow xy \in B, \forall x,y \in B$ (B é fechado para o produto).

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se B é subanel então por definição temos claramente as condições (i), (ii) e (iii). Observe que o elemento neutro $0'$ de B relativamente a adição é o mesmo elemento neutro 0 de A, pois se $b \in B$, então $0' = b+(-b) = 0$.
($\Leftarrow$) Suponhamos que $B \subset A$ e as três propriedades (i), (ii) e (iii) são satisfeitas. Por (i) segue que $B \neq \emptyset$, e por (i) e (ii) temos que,
(*) se $x \in B$ então $-x = 0-x \in B$.
Agora, por (ii) e por (*) teremos, se $x,y \in B$ então $x+y = x-(-y) \in B$, isto é, B é fechado para a soma. Por (iii) B é fechado para o produto. Como as propriedades associativas, comutativas e distributivas são hereditárias segue imediatamente que B é um subanel de A. ■

2.3 HOMOMORFISMO DE ANÉIS

Sejam A e A' dois anéis. Por comodismo vamos denotar as operações desses anéis pelos mesmos símbolos $+$ e $\cdot$ e denotamos por 0 o elemento neutro de A e por $0'$ o elemento neutro de A'. Se ambos anéis A e A' possuírem unidade, denotaremos por 1 a unidade de A e por $1'$ a unidade de A'.

Definição 2.3.1. Uma função $f : A \to A'$ diz-se um homomorfismo de A em A' se satisfazem as seguintes condições:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x,y \in A$;

2. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)\ \forall x,y \in A$.

Dizemos que dois anéis A e A' são *isomorfos* (e escrevemos $A \cong A'$) se existir um homomorfismo bijetivo $f : A \to A'$ o qual chamamos de isomorfismo.

Os homomorfismos $f : A \to A$ também são chamados de *endomorfismos* de A, e os isomorfismo de A sobre si mesmo são chamados de *automorfismos* de A. Denotamos por End (A) o conjunto $\{f : A \to A : f$ é endomorfismo$\}$

Vamos agora provar algumas propriedades elementares de homomorfismo.
Proposição 2.3.2. Sejam A e A' anéis e $f : A \to A'$ um homomorfismo, então:

a. $f(0) = 0'$

b. $f(-a) = -f(a)\ \ \forall a \in A$

c. Se A e A' são domínios de integridade então ou f é a função constante zero ou $f(1) = 1'$.

d. Se A e A' são corpos então ou f é a função constante zero ou f é injetiva.

Demonstração: (a) É claro que em um anel a equação $X + X = X$ tem o elemento neutro como única solução e assim temos, $0+0 = 0 \Rightarrow f(0+0) = f(0)+f(0) = f(0)$ e portanto $f(0) = 0'$ que é o elemento neutro de a'.
(b) Seja $a \in A$. De $a + (-a) = 0$ segue pelo item (a) que: $f(a) + f(-a) = 0'$ ou seja $f(-a) = -f(a)$
(c) De $1.1 = 1$ segue que $f(1)^2 = f(1)$, isto é $f(1) \cdot (f(1) - 1') = 0'$. Agora, A' domínio de integridade nos diz que ou $f(1) = 0'$ ou $f(1) = 1'$. Se $f(1) = 0'$ então segue que $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) \cdot f(1) = f(x) \cdot 0' = 0'\ \forall x \in A$, ou seja, f é a função constante zero.
(d) Sejam A e A' corpos e suponhamos que f não é a função constante zero. Assim, pelo item anterior sabemos que $f(1) = 1'$. Vamos provar que f é injetiva. De fato, se $x,y \in A$ e $f(x) = f(y)$ teremos, $f(x-y) = 0'$. Suponhamos por absurdo que $x \neq y$, então $x - y \neq 0$ e A corpo nos diz que $\exists\ b \in A$ tal que $b \cdot (x-y) = 1$ e dai segue que $f(b) \cdot f(x-y) = f(b) \cdot 0' = 1'$ que é uma contradição. ■

Teorema 2.3.3. Sejam A e A' anéis e $f : A \to A'$ um homomorfismo. Então,

a. $\operatorname{Im} f = \{f(a) : a \in A\}$ é um subanel de A'.

b. $N(f) = \{a \in A : f(a) = 0'\}$ é um ideal de A, e f é injetiva $\Leftrightarrow N(f) = \{0\}$.

c. os anéis $A/N(f)$ e $\mathrm{Im}\, f$ são isomorfismo.

Demonstração: (a) De fato, claramente temos: (i) $0' = f(0) \in \mathrm{Im}\ f$; (ii) $f(a), f(b) \in \mathrm{Im}\ f \Rightarrow f(a) - f(b) = f(a-b) \in \mathrm{Im}\ f$; (iii) $f(a), f(b) \in \mathrm{Im}\ f \Rightarrow f(a) \cdot f(b) = f(a \cdot b) \in \mathrm{Im}\ f$.

(b) Vamos provar que $N(f) = \{a \in A : f(a) = 0'\}$ é um ideal de A. De fato, (i) $0 \in N(f)$ pois $f(0) = 0'$; (ii) $a, b \in N(f) \Rightarrow f(a-b) = f(a) - f(b) = 0' - 0' = 0'$ ou seja, $a - b \in N(f)$; (iii) Seja $x \in A$ e $a \in N(f)$ então $f(a \cdot x) = f(a) \cdot f(x) = 0' \cdot f(x) = 0'$ e $f(x \cdot a) = f(x) \cdot f(a) = f(x) \cdot 0' = 0'$ ou seja, $a \cdot x \in N(f)$ e $x \cdot a \in N(f)$. Assim $N(f)$ é um ideal de A. Agora, se f é injetiva, segue imediatamente que $N(f) = \{0\}$ pois $f(0) = 0'$. Se $f(x) = f(y), x, y \in A$ e $N(f) = \{0\}$ segue, $f(x) - f(y) = 0' \Rightarrow f(x-y) = 0' \Rightarrow x - y \in N(f) = \{0\} \Rightarrow x = y$ isso demonstra (b).

(c) Vamos definir uma função $F : A/N(f) \to \mathrm{Im}\ f$ bijetiva, a qual provaremos ser também um homomorfismo de anéis. Defina $F : A/N(f) \to \mathrm{Im}\ f$ por : $F(\overline{x}) = f(x)$ Observe que F está "bem definida" é biunívoca pois: $\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x \equiv y(modN(f)) \Leftrightarrow x - y \in N(f) \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \Leftrightarrow F(\overline{x}) = f(x) = f(y) = F(\overline{y})$. Também Im $(F) = \{F(\overline{x}) : \overline{x} \in A/N(f)\} = \{f(x) : x \in A\} = Imf$. Logo $A/N(f) \simeq Imf$ como queríamos demonstrar. ■

2.4 O CORPO DE FRAÇÕES DE UM DOMÍNIO

Seguindo a construção do corpo de frações $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ a partir do domínio $\mathbb{Z}$, vamos construir um corpo K a partir de um dado domínio D.

Sejam D um domínio de integridade qualquer, $D' = D - \{0\}$ e $\delta = D \times D' = \{(a, b) : a \in D, b \in D'\}$. Dados $(a, b), (c, d) \in \delta$, a relação $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$, claramente define uma relação de equivalência no conjunto δ.

Vamos denotar por $\dfrac{a}{b}$ (em vez de $\overline{(a,b)}$) a classe de equivalência de (a, b) em δ, ou seja

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \delta : xb = ya.\}$$

Seja K o conjunto quociente $\delta/\sim = \left\{\dfrac{a}{b} : a \in D, b \in D'\right\}$, então

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow bx = ay \text{ em } D.$$

Neste conjunto K definimos as seguintes operações:

$$\begin{aligned} \text{Adição:} \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd} \\ \text{Multiplicação:} \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} &= \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \end{aligned}$$

Observe que se $b,d \in D'$ então $b\cdot d \in D'$, pois D é um domínio de integridade.

Como das vezes anteriores em que definimos operações em conjuntos quocientes, vamos provar que as operações acima estão "bem definidas" em K.

De fato, suponhamos que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ e $\dfrac{c}{d} = \dfrac{c'}{d'}$ então, mostraremos que:

1) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d} = \dfrac{a'}{b'}+\dfrac{c'}{d'}$

2) $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d} = \dfrac{a'}{b'}\cdot\dfrac{c'}{d'}$

De $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ e $\dfrac{c}{d} = \dfrac{c'}{d'}$ segue que : ab' = ba' e cd'=dc' em D.

Agora

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'} = \frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}$$

se, e somente se, $(ad+bc)b'd' = (a'd'+b'c')bd$ em D e isto ocorre se, e somente se, $(ab')(dd')+(cd')(bb') = (a'b)(dd')+(c'd)(bb')$ em D e 1) segue das igualdades $ab' = ba'$ e $cd' = c'd$.

Para a demonstração de 2) basta observa que $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a'}{b'}\cdot\dfrac{c'}{d'} \Leftrightarrow (ab')\cdot(cd') = (a'b)\cdot(c'd)$ em D e o resultado segue pelas igualdades ab'= a'b e cd' = c'd. Vamos denotar por $a^* = \dfrac{a}{1}$ onde D e 1 é a unidade de D, e denotamos

$$D^* = \left\{a^* = \frac{a}{1} : a \in D\right\} \subset K = \left\{\frac{a}{b}; a \in D, b \in D'\right\}.$$

É fácil provar que D^* é um domínio de integridade com unidade $1^* \in D^*$. Aliás, 1^* é tal que,

$$\forall\ \frac{a}{b} \in K \text{ então } \frac{a}{b}\cdot 1^* = 1^*\cdot\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

e mais ainda , $\forall\ \dfrac{a}{b} \in K$ temos $\dfrac{a}{b}+0^* = 0^*+\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b}$.

Consideramos agora a seguinte função :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & D & \rightarrow & D^* \\ & a & \mapsto & a^*. \end{array}$$

É de imediata verificação que :

a) $Im\varphi = D^*$

b) $N(\varphi) = \{a \in D : a^* = 0^*\} = \{0\}$

c) $\varphi(a+b) = (a+b)^* = a^* + b^* = \varphi(a) + \varphi(b)\ \forall a, b \in D$

d) $\varphi(a \cdot b) = (a \cdot b)^* = a^* \cdot b^* = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \forall$ a , b $\in$ D

Portanto D $\simeq D^* \subset K$.

Observe também que, se $\frac{a}{b} \neq 0^*$ em K, isto é, a $\neq$ 0 em D, então $\frac{a}{b} \in$ K e mais, $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1^*$.

Como $D \simeq D^* \subset K$ dizemos que D está imerso em K. Observe também que $b^* \cdot \frac{1}{b} = 1^*$ se b $\neq$ 0, $b \in D$. Assim denotamos por $(b^*)^{-1} = \frac{1}{b}$ se $b \neq 0, b \in D$. Agora é fácil provar que:

$$D^* = \{a^* : a \in D\} \subset K = \left\{a^* \cdot (b^*)^{-1} : a^* \in D, b^* \in D\right\} \text{, sendo } b^* \neq 0^*\}.$$

O corpo K construído nesse parágrafo recebe o nome de **corpo de frações do domínio**

Observação 2.4.1 (O inverso multiplicativo no corpo de frações)**.** Seja D um domínio de integridade e $\mathbb{F}$ seu corpo de frações. Dado qualquer elemento $\frac{a}{b} \neq 0$ em $\mathbb{F}$, existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{F}$ tal que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1}{1}$$

Vamos determinar um representante para a classe $\frac{p}{q}$ ou no caso, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$. Note que :

$$\frac{ap}{bq} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow ap = bq$$

Assim, fazendo $p = b$ e $q = a$, pela comutatividade em D, podemos escolher como representante para a classe $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$, o elemento, $\frac{b}{a}$.

Portanto, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

2.4.1 Usando o corpo de frações para definir divisão de frações em $\mathbb{Q}$

O corpo de frações de $\mathbb{Z}$ é o conjunto de classes de equivalência $\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}$ - $\{0\}/\sim$ onde :

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

que tem estrutura de corpo com as operações :

i) $\frac{a}{c} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

ii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Como provamos, este é um corpo e portanto um domínio, que chamamos de $\mathbb{Q}$. Logo, também podemos construir o corpo de frações de $\mathbb{Q}$, cujos elementos são da forma:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, \text{ com } a,c \in \mathbb{Z} \text{ e } b,d \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

.

No caso geral, sempre podemos ver D como um subanel de seu corpo de frações $\mathbb{F}$, através do mergulho (homomorfismo injetivo):

$$\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{F} \\ a & \mapsto & \frac{a}{1} \end{array}$$

Quando D já é um corpo, então seu corpo de fração $\mathbb{F}$ é o próprio D, via o isomorfismo,

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{F} & \to & D \\ & \frac{a}{b} & \mapsto & ab^{-1} \end{array}$$

Para provar que φ é de fato isomorfismo, primeiro garantimos a boa definição. Sejam $x, a \in D$ e $y, b \in D - \{0\}$, tais que $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, isto é, de modo que $\frac{x}{y}$ e $\frac{a}{b}$ representam a mesma classe de equivalência. Logo, vale que $xb = ya \in D$. Disto, segue-se que;

$$xb = ya \Rightarrow xb \cdot (y^{-1}b^{-1}) = ya(y^{-1}b^{-1}) \Rightarrow xy^{-1} = ab^{-1} \Rightarrow \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \varphi\left(\frac{a}{b}\right)$$

Para provar a injetividade, suponhamos que $\dfrac{x}{y}, \dfrac{a}{b} \in \mathbb{F}$ são tais que $\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right) = \varphi\left(\dfrac{a}{b}\right)$ ou seja, $xy^{-1} = ab^{-1}$. Mas isto implica que $xy^{-1} \cdot (by) = ab^{-1} \cdot (by)$. Portanto, $xb = ay$ e assim, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$.

Para provarmos a sobrejetividade, seja $z \in D$ qualquer. Note que $\dfrac{z}{1} \in \mathbb{F}$, daí:

$$\varphi\left(\frac{z}{1}\right) = z \cdot 1 = z.$$

Resta provar que é um homomorfismo. Dados $\dfrac{x}{y}, \dfrac{a}{b} \in \mathbb{F}$, temos,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b}\right) &= \varphi\left(\frac{xa}{yb}\right) = xa(yb)^{-1} \\
&= xay^{-1}b^{-1} \\
&= (xy^{-1})(ab^{-1}) \\
&= \varphi\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \varphi\left(\frac{a}{b}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{x}{y} + \frac{a}{b}\right) &= \varphi\left(\frac{xb + ay}{yb}\right) \\
&= (xb + ay)(yb)^{-1} \\
&= (xb + ay)(y^{-1}b^{-1}) \\
&= xy^{-1}bb^{-1} + ayy^{-1}b^{-1} \\
&= xy^{-1} + ab^{-1} \\
&= \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi\left(\frac{a}{b}\right)
\end{aligned}$$

Portanto, provando assim que φ é um isomorfismo de anéis.

Na prática, a divisão de frações $\frac{a}{b}/\frac{c}{d}$, é um elemento do corpo de fração de $\mathbb{Q}$, que pelo isomorfismo anterior, podemos identificar como sendo :

$$\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right) = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Restando assim, a conhecida regra de “manter” o numerador e multiplicar pelo “inverso” do denominador, a qual conhecemos nas nossas escolas como manter a primeira e multiplicar pelo o inverso da segunda, a mesma iremos representar esse algoritmo como (IM).

Exemplo 2.4.2. Como justificar a divisão $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$?

Claro que para o aluno do ensino fundamental não podemos falar em classes de equivalência, homomorfismo, corpo de fração etc. Mas, usaremos a identificação que mostramos ser verdadeira

$$\frac{a}{b} = ab^{-1} \text{ no corpo } \mathbb{Q}.$$

Em particular se b = 1, logo $\frac{a}{1} = a$.

Então o primeiro passo é escrever $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$ na forma $\frac{a}{1}$.

Para isso seria necessário multiplicar $\frac{4}{5}$ por seu inverso $\frac{5}{4}$, e portanto, o numerador também deve ser multiplicado por esse fator, para que não haja alteração na fração original, pois afinal, estamos apenas multiplicando por 1: Assim,

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} \cdot \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Justificando assim algebricamente a divisão de fração (IM).

Nesta perspectiva, neste capítulo apresentamos toda fundamentação teórica necessária para provarmos a divisão de fração do ponto de vista algébrico, utilizando conteúdos que são abordados na formação inicial de professores de matemática, mostrando assim que os assuntos apresentados são importantes e fundamentais para os futuros docentes. No próximo capítulo mostraremos uma forma de abordagem do ponto de vista geométrico para a divisão de fração, onde utilizaremos como referencia o trabalho do professor (SILVA CICERO, 2020).

3 DIVISÃO DE FRAÇÕES E INTUIÇÃO GEOMÉTRICA

Um dos problemas no ensino de divisão de frações é a prescrição de regras e macetes logo no primeiro contato do estudante com a operação (LOPES, 2008). Isto caracteriza um modo de ensinar baseado na exposição de fórmulas, associado à memorização sem instigar o raciocínio dos alunos. Charalambous et al. (2011), comenta que este tipo de explicação, entitula-se “enunciar matemática”, em que basicamente se descreve o procedimento, isto é, como fazer sem explicar de onde vem o fazer.

Ademais, o conceito de fração é amplo, visto as diversas ramificações, maneiras de abordagem e resolução de problemas, como bem explanou Rincón (2012) em seu inventário reconhecendo estas seis principais abordagens: inverter e multiplicar (IM); igualar denominadores (ID); conversão das frações em decimais (CD); produtos cruzados (PC); uso da unidade fracionada (UF); e uso do protocolo da calculadora científica (CALC). Quanto à escolha de abordagem para resolver frações, MORIEL JUNIOR (2014), em sua pesquisa a 32 sites educativos, observou que majoritariamente (94%) faziam uso da abordagem IM para cálculo do resultado das expressões, assim como nos estudos sobre conhecimento docente. Já García (2013) constatou, em pesquisa a um grupo de 17 professores, que somente um fez uso de argumentação formal (algébrica) para justificativa da validade dos algoritmos IM, ID, enquanto os demais, sob alegação de estar em livros didáticos, aceitavam o IM e o ID como válidos sem necessidade de justificativa.

Com base em tais investigações, realizamos uma pesquisa com amostragem por conveniência[1] com professores da educação básica da região de Cajazeiras, a fim de conhecer e ter uma intuição se, durante a formação inicial houve o estudo dos conceitos de álgebra e geometria, e se os mesmos foram informados sobre a importância do domínio de tais conteúdos para auxiliá-los no ensino de divisão de frações, bem como investigar se os mesmos utilizam-se desses conhecimentos para o ensino.

Para a pesquisa aplicada com abordagem quantitativa aos professores, foi elaborado o instrumento de coleta de dados composto por 6 questões de múltipla escolha - apresentadas no apêndice - disponibilizado para resposta no Google Forms® e tabulação pelos recursos da ferramenta.

A coleta de dados ocorreu no período de 28 de agosto a 05 de setembro de 2022. O convite para contribuir com a pesquisa foi enviado por meio de link do Google Forms®, por mensagem individual via WhatsApp® a dez(10) professores da educação básica. Resultou

[1] A amostra por conveniência consiste em uma amostra não probabilística em que o pesquisador elege os membros da população que se encontram disponíveis e mais acessíveis

em dez(10) respostas válidas da pesquisa.

Fez-se o uso de metodologia de análise estatística dos dados quantitativos por meio de gráficos atrelados à pesquisa de fundamentação teórica, Segue-se as análises dos questionários:

Todos os dez professores da educação básica participantes da pesquisa, 100%, afirmaram já ter lecionado o conceito de divisão de fração.

Figura 3.1 – Algoritmos da divisão de fração identificados

Observe a figura que apresenta a Tabela 6, de que maneira você costuma explicar divisão de fração (você pode escolher mais de uma)? *
Figura retirada do artigo: Moriel Junior, Jeferson Gomes. **Meta-análise sobre Conhecimento para Ensinar Divisão de Frações**. ISSN 1980-4415 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a02

Tabela 6 – Sete algoritmos da divisão de frações identificados

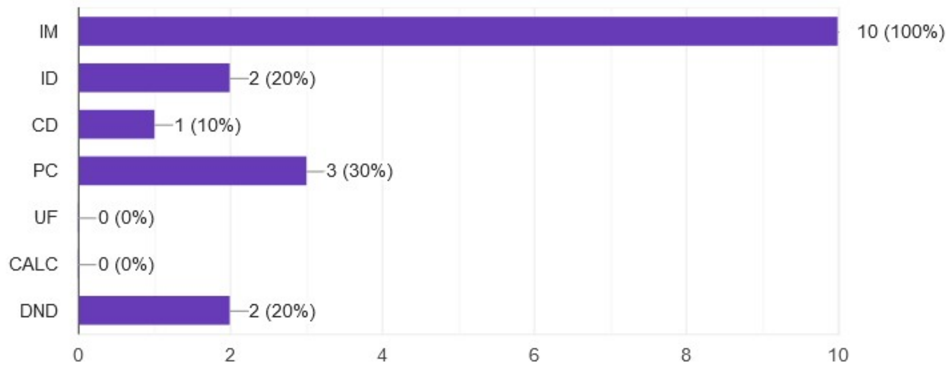
NOMENCLATURA (SIGLA)	ALGORITMO
Inverter e multiplicar (IM)	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$
Igualar denominadores (ID)	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} \div \frac{c.b}{d.b} = \frac{a.d}{b.c}$
Conversão das frações em decimais (CD)	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.x}{b.x} \div \frac{c.y}{d.y} = \frac{ax}{cy} = \frac{a.d}{b.c}$, sendo $b.x = d.y$ potências de 10.
Produtos cruzados (PC)	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c}$
Uso da unidade fracionada (UF)	Se $\frac{a}{b}$ equivale a $\frac{c}{d}$, então $\frac{1}{d}$ equivale a $\frac{a}{b.c}$ e a unidade $\frac{d}{d}$ equivale a $\frac{a.d}{b.c}$.
Uso do protocolo da calculadora científica (CALC)	2 a b/c 3 ÷ 1 a b/c 5 = $\boxed{10 \lrcorner 3.}$
Dividir numeradores e denominadores entre si (DND)	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$ (Caso particular: a é múltiplo de c e b é de d) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.c.d}{b.c.d} \div \frac{c}{d} = \frac{acd \div c}{bcd \div d}$ (Caso geral)

Fonte: Dados organizados pelo autor a partir do *corpus* de estudos revisado (2019).

Fonte:(MORIEL JUNIOR, 2014)

Quando perguntado sobre as maneiras que costumam explicar o conceito de divisão de fração, fazendo uso da figura 3.1, e podendo escolher mais de uma opção, dependendo das maneiras que os mesmos abordavam o conteúdo, obtemos os seguintes resultados, conforme mostra a figura **??**: dentre os métodos sugeridos, 100% dos professores fazem uso do algoritmo inverter e multiplicar; Acrescido a 30% que também utilizam o método produtos cruzados; 20% aplicam o método de igualar denominadores; 20% exploram a técnica dividir numeradores e denominadores entre si; e 10% deles usam conversão de frações em decimais. Observa-se o fato de que nenhum dos professores indicou utilizar o algoritmo, unidade fracionária, e o protocolo da calculadora científica.

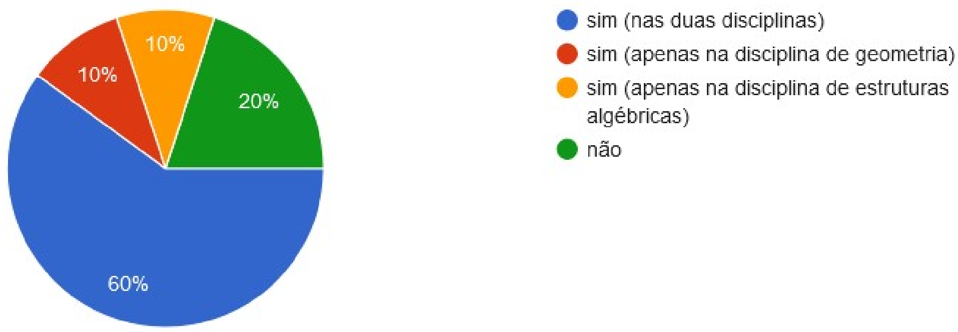
Gráfico 3.1 – Algoritmos utilizados pelos professores



Fonte: Resultados Originais da Pesquisa

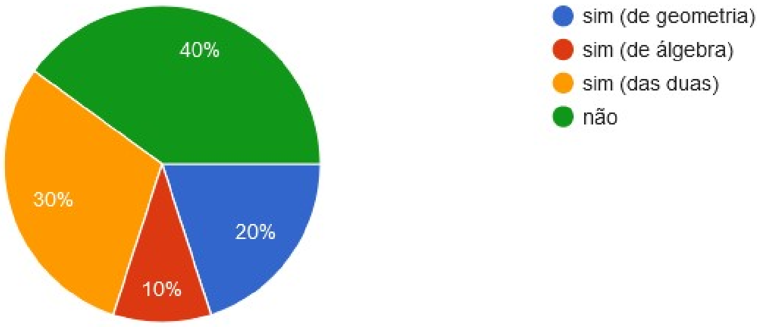
Questionado se os professores cursaram as disciplinas que estudavam Estruturas Algébricas e Geometria Plana, resultou-se que 100% dos professores participantes da pesquisa igualmente afirmaram ter cursado ambas disciplinas. Visto isso, foi questionado se em algum momento foi mencionado que algum conteúdo das disciplinas poderia ser usado para entender ou explicar o conceito de divisão de fração, conforme figura 3 observamos que, durante a graduação, tiveram conhecimento que algum dos conceitos ali estudados poderiam ser utilizados para fundamentar o ensino da divisão de frações, sendo 10% na disciplina de Estruturas Algébricas, 10% na disciplina de Geometria Plana, 60% em ambas as disciplinas. Enquanto 20% não tiveram conhecimento de tal possibilidade.

Gráfico 3.2 – Percepção de que o conceito de divisão de fração é visto nas disciplinas



Fonte: Resultados Originais da Pesquisa

Gráfico 3.3 – Uso dos conceitos aprendidos no ensino de divisão de frações



Fonte: Resultados Originais da Pesquisa

Diante da pergunta se em algum momento fez uso dos conceitos aprendidos nas disciplinas de geometria ou de álgebra para ensinar fração, evidencia-se na figura **??** que, de modo geral, 60% dos professores aplicaram conteúdos aprendidos nas disciplinas de Estrutura Algébricas e Geometria Plana para ensinar fração, sendo 30% proveniente das duas, 20% de Geometria Plana e 10% de Estruturas Algébricas. No entanto, 40% nunca usaram esses conceitos para ensinar fração, que pode ir ao encontro de um dos problemas no ensino de divisão de frações que é a prescrição de regras e macetes logo no primeiro contato do estudante com a operação (LOPES, 2008).

Apesar da limitação da pesquisa acerca da pequena amostragem, em comparação ao número real de professores da educação básica que em sua prática realizam o ensino de divisão de fração, os professores da rede básica de educação da região de Cajazeiras participantes da pesquisa demonstraram, em sua maioria, identificar que durante a graduação o conceito de fração foi abordado nas disciplinas de Estruturas Algébricas e Geometria Plana. Descobriu-se, assim como evidenciado em outras pesquisas semelhantes (JUNIOR et al., 2019) e (GARCÍA, 2013), a escolha majoritária pelo método do algoritmo IM, no entanto é notório que grande parcela possui a dificuldade em como transpor e transformar os conceitos avançados aprendidos em ferramentas metodológicas para o ensino, uma vez que 40% nunca usaram conceitos formais algébricos ou geométricos para ensinar divisão de frações, o que sugere uma lacuna entre teoria e prática e a necessidade de discussões mais pontuais e voltadas para as situações do ensino de divisão de frações no ambiente de formação.

Motivados por tais evidências, neste capítulo veremos uma abordagem do ponto de vista geométrico afim de dar um sentido intuitivo à divisão de frações, tomando como unidade uma fração fixada.

Essa abordagem baseada no artigo de (SILVA CICERO, 2020) é uma sugestão para ser ministrada na formação inicial ou continuada de professores. Para isso tomaremos como referência os números racionais para medir uma grandeza contínua (para quantificar área de conjuntos comensuráveis[2]), abordando a divisão de frações a partir de uma intuição geométrica, sem recorrer a memorização de macetes ou fórmulas. Uma vez que para tal tratamento é necessário o cálculo de áreas de figuras planas, inicialmente apresentaremos o embasamento teórico necessário e em seguida iremos trabalhar alguns exemplos de como abordar a divisão de fração segundo (SILVA CICERO, 2020).

3.1 ÁREAS DE POLÍGONOS

Os conceitos e proposições descritos nesta seção seguem de perto a construção sobre o cálculo da área de um retângulo feita no Capítulo 5 do livro Caminha (2013).

Assumiremos que as seguintes propriedades são válidas:

a. Polígonos [3] congruentes têm área iguais.

b. Se um polígono convexo [4] é particionado em um número finito de outros polígonos convexos (i.e., se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou uma aresta) então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

c. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.

d. A área de um quadrado de lado 1cm é igual a $1cm^2$.

Tomando um quadrado de lado n, com $n \in \mathbb{N}$, o particionamos em n^2 quadrados de lados 1 cada. Denotando por A_n a área do quadrado de lado n, pela propriedade 2), devemos ter A_n igual á soma das áreas desses n^2 quadrados de lado 1, de modo que

$$A_n = n^2.$$

Como calcular a área de um quadrado cuja medida do lado seja um número racional? Considere um quadrado de lado $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, e área $A_{\frac{m}{n}}$. Ordenamos n^2 cópias deste quadrado, empilhando n quadrados de lado $\frac{m}{n}$ por fila, em n filas, formando assim um quadrado de lado $\frac{m}{n} \cdot n = m$. Este quadrado assim obtido, terá uma área maior, a qual

[2] Em matemática, dois números reais dizem-se comensuráveis se a razão entre eles for um número racional.

[3] Polígonos são figuras planas fechadas formadas por lados que, por sua vez, são segmentos de reta e não se cruzam em nenhum ponto.

[4] Polígonos são convexos quando qualquer segmento de reta que possui extremidades em seu interior está totalmente contido no polígono.

já sabemos calcular, sendo igual à m^2; por outro lado, como ele está particionando em n^2 quadrados, cada um dos quais de lado $\frac{m}{n}$, sua área é igual á soma das áreas desses quadrados menores de área $A_{\frac{m}{n}}$, ou seja,

$$m^2 = n^2 \cdot A_{\frac{m}{n}}.$$

Portanto,

$$A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Com isto, sabemos calcular a área de um quadrado cuja medida do lado é um número racional e a pergunta natural que surge é se um quadrado de lado l, $l \in \mathbb{R}$, possui área A_l igual a l^2. Aqui apresentamos uma demonstração para isto diferente da feita em Caminha (2013):

Dado $\varepsilon > 0$, seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \frac{2l+1}{\varepsilon}$, (que existe, pois $\mathbb{N}$ é ilimitado). Assim, para os racionais a e b com $l - \frac{1}{2k} < a < l < b < l + \frac{1}{2k}$, temos que $b - a < \frac{1}{k}$, então, construímos quadrados de lado a e b, o primeiro contido no quadrado de lado l e o segundo o contendo. Como já sabemos calcular áreas de quadrados de lado racional, o postulado 3) garante que área A_l deve satisfazer as desigualdades

$$a^2 < A_l < b^2.$$

Mas, como $a^2 < l^2 < b^2$, concluímos que ambos os números A_l e l^2 devem pertencer ao intervalo $\left(a^2, b^2\right)$, logo,

$$\begin{aligned} | A_l - l^2 | &< b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) \\ &< \frac{1}{k}(b+a), \end{aligned}$$

mas, $b + a = b - a + 2a < \frac{1}{k} + 2l$, daí,

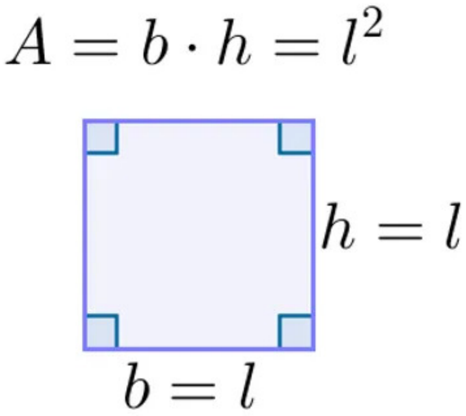
$$\begin{aligned} | A_l - l^2 | &< \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} + 2l\right) \\ &< \frac{1}{k}(1+2l) < \varepsilon \end{aligned}$$

Isto prova que $| A_l - l^2 | = 0$, ou seja, $A_l = l^2$.

Portanto, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.1.1. Um quadrado de lado l tem área l^2.

Figura 3.2 – Área do quadrado



Fonte: Mundo Educação, Disponível em <http://l1nq.com/Xdgmx>, 2022.

Argumentos análogos nos permitem demonstrar que um retângulo de lados a e b têm área igual à ab, seguindo os mesmos passos, primeiro provando ser válido para o caso em que as medidas dos lados do retângulo são números naturais, em seguida supondo que as medidas dos lados são números racionais, e com a mesma técnica utilizada para os quadrados, generalizar para medidas quaisquer. Assim, podemos apresentar a seguinte proposição;

Proposição 3.1.2. Um retângulo de lados a e b tem área ab.

Formalmente tendo estabelecido o cálculo da área de quadrados e retângulos, vejamos, expondo os exemplos trabalhados em Silva (2020) como abordar do ponto de vista geométrico, a divisão de frações em sala de aula.

3.2 PROBLEMAS SOBRE DIVISÃO DE FRAÇÕES UTILIZANDO CÁLCULO DE ÁREAS

Usaremos a terminologia da seção anterior e denotaremos por A_n a área de um quadrado de lado n.

Exemplo 3.2.1. Considere um quadrado de lado 1 e decomponha um lado deste quadrado em cinco partes, formando cinco retângulos justapostos, conforme figura 3.3.

Figura 3.3 – Exemplo 1

Fonte: Silva Cicero, (2020)

Então, a área de cada retângulo é igual a $\frac{1}{5}$ e A_1 é igual a soma das áreas destes retângulos, ou seja, $A_1 = 1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \Longrightarrow 5 = \frac{1}{\frac{1}{5}}$ (Significa que o quadrado de lado 1 dividido pela unidade fixada $\frac{1}{5}$ forma cinco retângulos justapostos de áreas iguais. Assim, A_1 cabe cinco vezes os retângulos de áreas medindo $\frac{1}{5}$. Isso nos permite trabalhar com frações múltiplos da unidade fixada $\frac{1}{5}$. Por exemplo, como efetuar a divisão da fração $\frac{2}{5}$ pela fração $\frac{1}{5}$? Na figura 3.3 a região colorida equivale à fração $\frac{2}{5}$, que é portanto, duas vezes a unidade fixada $\frac{1}{5}$, assim,

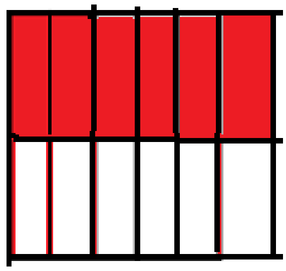
$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{5}} = 2.$$

Seguindo uma linha construtiva para trabalhar a divisão de quaisquer frações, o autor sugere o seguinte problema e sua respectiva solução, usando a ideia de escrever a fração em termos de uma unidade fixada.

Exemplo 3.2.2. Quanto vale $\frac{1}{2}$ dividido por $\frac{1}{6}$?

Aplicando a este caso a ideia usada anteriormente, tomamos um quadrado de lado 1, onde um dos seus lados será dado em termo da unidade de medida $\frac{1}{2}$ e outro em termo da unidade de medida $\frac{1}{6}$, conforme figura 3.5.

Figura 3.4 – Exemplo 2



Fonte: (SILVA, 2020)

Isto é, decompomos um lado do quadrado em duas partes iguais e o outro lado em seis partes iguais, formando doze retângulos justapostos, cada um com área igual à $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Observe na figura 3.5 a região colorida que corresponde à um retângulo de lados $\frac{1}{2}$ e 1, logo, sua área é igual a $\frac{1}{2}$, que por outro lado é igual a soma das áreas de seis retângulos de área $\frac{1}{12}$, ou seja, $\frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{12}$. Por outro lado, também podemos perceber na figura 3.5 que os retângulos de lados 1 e $\frac{1}{6}$, contém dois retângulos de área $\frac{1}{12}$, ou seja, $\frac{1}{6} = 2 \cdot \frac{1}{12}$, e assim conseguimos expressar ambas as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$ em termos da unidade fixada $\frac{1}{12}$. Isso nos permite facilmente deduzir o valor da divisão de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{6}$:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = \frac{6 \cdot \frac{1}{12}}{2 \cdot \frac{1}{12}} = 3.$$

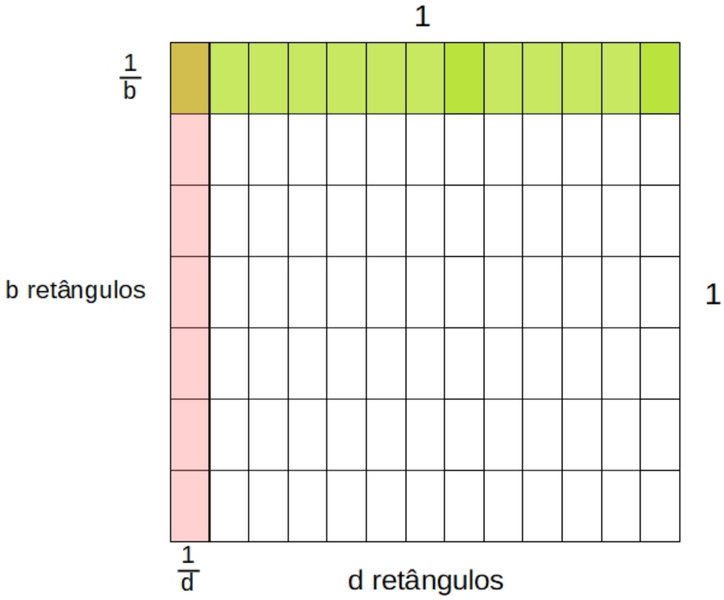
Com base nestes exemplos apontados em Silva (2020), propomos a seguinte abordagem para o problema geral de efetuar a divisão de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$, com $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ quaisquer.

Exemplo 3.2.3. Sejam $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Qual o valor da divisão de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$?

Seguindo a ideia construída no exemplo anterior devemos visualizar $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ como áreas dadas em termos de uma unidade fixada. Como $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ e $\frac{c}{d} = c \cdot \frac{1}{d}$, aplicaremos a técnica desenvolvida no exemplo anterior para calcular a divisão de $\frac{1}{b}$ por $\frac{1}{d}$.

Tomamos um quadrado de de lado 1 e dividimos um lado em b partes iguais de medida $\frac{1}{b}$ e outro lado em d partes iguais a $\frac{1}{d}$, conforme figura a seguir. Com isso obtemos bd retângulos de áreas iguais à $\frac{1}{bd}$.

Figura 3.5 – Caso geral



Fonte: Autor

Agora, no retângulo de lados $\frac{1}{b}$ e 1, cabem d retângulos de área $\frac{1}{bd}$ e analogamente, no retângulo de lados 1 e $\frac{1}{d}$, há b retângulos de área $\frac{1}{bd}$, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{a\cdot\frac{1}{b}}{c\cdot\frac{1}{d}}\\ &= \frac{a}{c}\cdot\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{d}}\\ &= \frac{a}{c}\cdot\frac{d\cdot\frac{1}{bd}}{b\cdot\frac{1}{bd}}\\ &= \frac{a}{c}\cdot\frac{d}{b}\\ &= \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}\end{aligned}$$

onde na última igualdade apenas reorganizamos para recuperar o conhecido algoritmo da divisão de frações, só que desta vez usando cálculo de áreas.

A importância de tratar em cursos de formação inicial e continuada abordagens dessa natureza se justifica pelas inúmeras pesquisas que reafirmam que a aprendizagem é significativa quando a abordagem do problema não é feita apenas apresentando uma fórmula a ser decorada, sem qualquer justificativa, mas quando o abordam com diferentes exemplos e métodos didáticos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A fim de investigar alguns dos conhecimentos matemáticos específicos sobre a divisão de frações em um curso de licenciatura em matemática - objetivo geral deste trabalho - para que o futuro professor ao adquiri-los, permita-lhe entender como surge o algoritmo da divisão, e por conseguinte sua futura prática não seja uma repetição mecânica, focada apenas em procedimento, apresentamos os números racionais, e portanto as frações, como sendo o corpo de frações dos inteiros, com duas operações bem definidas de adição e multiplicação. Visualizando uma fração como uma classe lateral, estendemos esse conceito aos racionais para assim entender, formalmente, o que representa a divisão de duas frações e justificamos, por meio da existência de inverso para a operação de multiplicação, o porquê do algoritmo da divisão.

Alcançamos os objetivos específicos com a abordagem do conteúdo de Álgebra Moderna: formalizando o conceito de fração, desde a definição e operações básicas, como é aplicado nos cursos de graduação em licenciatura em matemática, com enfoque na construção da prova da divisão de fração apontando teoremas e exemplos.

Os Professores da rede básica de educação da região de Cajazeiras - participantes da pesquisa aplicada - demonstraram, em sua maioria, identificar que durante a graduação o conceito de fração foi abordado nas disciplinas de Estruturas Algébricas e Geometria Plana. Observou-se que há, sim, a aplicação deste conteúdo no ensino de divisão de fração, majoritariamente pelo método do algoritmo IM, no entanto é notório que grande parcela possui a dificuldade em como transpor e transformar os conceitos avançados aprendidos em ferramentas metodológicas para o ensino. Realçando de tal modo o MTSK como modelo teórico que descreve o conhecimento profissional específico e especializado que deve possuir um professor para ensinar matemática. As evidências da pesquisa motivaram ainda a abordagem da divisão de fração utilizando a Geometria Plana, fazendo uso de exemplos e dos números racionais, conforme apresentado no trabalho de Cicero Silva (2020).

Ressaltamos a importância deste trabalho para o mundo acadêmico, uma vez que ao professor dispor de tal conhecimento, tem domínio do conteúdo que leciona, tem maiores chances de juntamente com os saberes referentes ao conhecimento pedagógico do conteúdo, possibilitar uma aprendizagem significativa sobre a divisão de frações, contribuindo para o letramento matemático e para alcançar os principais objetivos da educação matemática no Ensino Fundamental, que é desenvolver a capacidade de agir matematicamente nas mais diversas situações da vida, desenvolver o pensamento crítico, a autonomia e a capacidade de reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo.

Para enriquecimento do tema, incentivamos novos estudos com profunda abordagem dos saberes que se referem ao conhecimento pedagógico, identificando na literatura estudos que abordam características de aprendizagem de Matemática, o desenvolvimento cognitivo de um estudante em Matemática, que evidenciem erros comuns de estudantes ao lidarem com frações.

REFERÊNCIAS

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: <http://www.basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 26 de julho de 2022.

CAMINHA, A. **Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MUÑOZ-CATALÁN, M. d. C. *Determining specialised knowledge for mathematics teaching.* In: **Proceedings of the CERME**. [S.l.: s.n.], 2013. v. 8, p. 2985–2994.

CARRILLO, J.; CONTRERAS, L.; CLIMENT, N.; ESCUDERO-AVILA, D.; FLORES-MEDRANO, E.; MONTES, M. *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* **Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones**, 2014.

CHARALAMBOUS, C. Y.; HILL, H. C.; BALL, D. L. *Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: how does it look and what might it take?* **Journal of Mathematics Teacher Education**, Springer, v. 14, n. 6, p. 441–463, 2011.

FÁVERO, M. H.; NEVES, R. d. S. P. A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. **Zetetiké**, v. 20, n. 1, 2012.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, n. 18, 2005.

FRAGA, D. A. R.; ATTIE, J.; SILVA, A. F. Argumentos utilizados no ensino da divisão de frações. In: **IX Coloquio Internacional Educação e Contemporaneidade**. São Cristovão, Sergipe: Educon, 2015.

GARCÍA, A. I. M. ***Conocimiento profesional de un grupo de profesores sobre la división de fracciones***. Máster, 2013.

GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. 5.ed.. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

JUNIOR, J. G. M.; WIELEWSKI, G. D. Conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações mobilizados por um licenciando em contexto formativo. In: _____. **Práticas de formação e letivas do professor de Matemática**. [S.l.]: Editora CRV, 2016. p. 137–154.

JUNIOR, J. G. M.; WIELEWSKI, G. D.; CARRILLO, J. Meta-análise sobre conhecimento para ensinar divisão de frações. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, SciELO Brasil, v. 33, p. 988–1026, 2019.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Boletim de Educação Matemática**, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 21, n. 31, p. 1–22, 2008.

MELO, C. I. B. de; MORIEL JUNIOR, J. G. Um marco teórico para o conhecimento especializado de professores de matemática *(Mathematics Teachers' Specialized Knowledge–MTSK)*. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, v. 5, n. 1, 2021.

MOCROSKY, L. F.; ORLOVSKI, N.; TYCHANOWICZ, S. D.; ANDRADE, S. P.; PANOSSIAN, M. L. Frações na formação continuada de professoras dos anos iniciais: fragmentos de uma complexidade. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, SciELO Brasil, v. 33, p. 1444–1463, 2019.

MONTES, M.; CONTRERAS, L. C.; CARRILLO, J. *Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK*. **Universidad del País Vasco**, 2013.

MORIEL JUNIOR, J. G. **Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações**. Doutorado em Educação em Ciências e Matemática, 2014.

OLIVEIRA, S. Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em leitura, matemática e ciências no brasil. **Portal do MEC**, dez. 2019. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/83191-pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil>. Acesso em: 10 mar. 2022.

PROENÇA, M. C. d. O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de pedagogia. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, SciELO Brasil, v. 29, p. 729–755, 2015.

RINCÓN, M. C. del. ***Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones: un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje***. Tese (Doutorado) — Universitat de València, Departament de Didàctica de la Matemàtica, 2012.

SILVA, C. J. Medida de área e números racionais(comensuráveis). Universidade Estadual de Pernambuco. Artigo não publicado. 2020.

SILVA, F. A. F. **Significados e representações dos números racionais abordados no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2013.

APÊNDICE A –

Você já lecinou o conceito de divisão de fração? *

- [ ] sim
- [ ] não

Observe a figura que apresenta a Tabela 6, de que maneira você costuma explicar divisão de fração (você pode escolher mais de uma)? *

Figura retirada do artigo: Moriel Junior, Jeferson Gomes. **Meta-análise sobre Conhecimento para Ensinar Divisão de Frações**. ISSN 1980-4415 DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a02

Tabela 6 – Sete algoritmos da divisão de frações identificados

NOMENCLATURA (SIGLA)	ALGORITMO
Inverter e multiplicar (IM)	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$
Igualar denominadores (ID)	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} \div \frac{c.b}{d.b} = \frac{a.d}{b.c}$
Conversão das frações em decimais (CD)	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.x}{b.x} \div \frac{c.y}{d.y} = \frac{ax}{cy} = \frac{a.d}{b.c}$, sendo $b.x$=$d.y$ potências de 10.
Produtos cruzados (PC)	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c}$
Uso da unidade fracionada (UF)	Se $\frac{a}{b}$ equivale a $\frac{c}{d}$, então $\frac{1}{d}$ equivale a $\frac{a}{b.c}$ e a unidade $\frac{d}{d}$ equivale a $\frac{a.d}{b.c}$.
Uso do protocolo da calculadora científica (CALC)	2 $\boxed{a\frac{b}{c}}$ 3 $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{a\frac{b}{c}}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{10\lrcorner 3.}$
Dividir numeradores e denominadores entre si (DND)	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$ (Caso particular: a é múltiplo de c e b é de d) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.c.d}{b.c.d} \div \frac{c}{d} = \frac{acd \div c}{bcd \div d}$ (Caso geral)

Fonte: Dados organizados pelo autor a partir do *corpus* de estudos revisado (2019).

- [ ] IM
- [ ] ID
- [ ] CD
- [ ] PC
- [ ] UF
- [ ] CALC
- [ ] DND

Você cursou a disciplina que estudava estrutura algébricas (grupos, anéis e corpos)? *

- ○ sim
- ○ não

Você cursou a disciplina que estudava geometria plana (aréas de figuras planas)? *

- ○ sim
- ○ não

Em algum momento foi mencionado que algum conteúdo desta disciplina poderia ser usado para entender ou explicar o conceito de divisão de fração?

- sim (nas duas disciplinas)
- sim (apenas na disciplina de geometria)
- sim (apenas na disciplina de estruturas algébricas)
- não

Em algum momento você usou conceitos aprendidos nas disciplinas de geometria ou de algebra para ensinar fração?

- sim (de geometria)
- sim (de álgebra)
- sim (das duas)
- não

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Restrito

Entrega do TCC

Assunto:	Entrega do TCC
Assinado por:	Fabricio Limeira
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Restrito
Hipótese Legal:	Auditoria Interna - Controle Interno (Art. 26, $ 3o, da Lei no 10.180/2001)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Fabrício Limeira de Sousa, ALUNO (201522020330) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 09/02/2023 21:33:13.

Este documento foi armazenado no SUAP em 09/02/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 742085
Código de Autenticação: b5b6d3f1b8