INSTITUTO FEDERAL DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO SUPERIOR EM MATEMÁTICA

JOSÉ NATHAN ALVES ROSENO

O ENSINO DO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÕES NO ENSINO SUPERIOR ATRAVÉS DE *SOFTWARES* E FERRAMENTAS DIGITAIS

CAJAZEIRAS – PB
2023

JOSÉ NATHAN ALVES ROSENDO

O ENSINO DO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÕES NO ENSINO SUPERIOR ATRAVÉS DE *SOFTWARES* E FERRAMENTAS DIGITAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador (a): Prof. Dr. William de Souza Santos

CAJAZEIRAS – PB

2023

JOSÉ NATHAN ALVES ROSENO

O ENSINO DO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÕES NO ENSINO SUPERIOR ATRAVÉS DE *SOFTWARES* E FERRAMENTAS DIGITAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Data de aprovação: 08/03/2023

Banca Examinadora

William Santos

Prof. Dr. William de Souza Santos
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

José Doval Nunes Martins

Prof. Me. José Doval Nunes Martins
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

Naiara Pereira Tavares

Profa. Esp. Naiara Pereira Tavares
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

CAJAZEIRAS – PB

2023

FICHA CATALOGRÁFICA

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

R815e Roseno, José Nathan Alves.

O ensino do conceito de limite de funções no ensino superior através de softwares e ferramentas digitais / José Nathan Alves Roseno. – 2023.

59f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2023.

Orientador(a): Prof. Dr. William de Souza Santos.

1. Matemática - Ensino. 2. Cálculo diferencial. 3. Limite de função. 4. Ferramentas digitais - Ensino. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ CDU: 517.2:37

Dedico esse trabalho primeiramente a minha mãe, Ana Maria Alves de Andrade e também a minha noiva Rafaela Cavalcante do Nascimento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente e principalmente acima de tudo a Deus por me dá a vida, e por me ajudar a superar as dificuldades impostas ao longo desta jornada, por prover para que esse TCC esteja concluído e que eu esteja conseguindo mais uma vitória, toda honra e glória seja dada a Deus, pois tudo é dele, por meio dele e para ele.

Agradeço ao meu orientador, o Professor Dr. William por toda a paciência, por todos os ensinamentos e por contribuir diretamente para que esse trabalho fosse feito.

Agradeço a minha mãe Ana Maria por ter me dado todo o amor e a melhor educação que eu poderia receber. Por ter me orientado pelos caminhos corretos e por ter me corrigido quando necessário, por não ter permitido me faltar nada e por me apoiar e incentivar a nunca desistir mesmo tendo as noites mal dormidas, não deixou de se preocupar comigo.

Agradeço a minha avó Luzia, por ajudar a minha mãe na minha criação e por incentivar nos meus estudos, por me dar forças nesse momento de recuperação da minha mãe.

Agradeço a minha noiva Rafaela por mesmo precisando muito de mim, compreender muitas vezes o motivo de minhas ausências, não só durante a produção desse trabalho, mas também durante o percurso até aqui, por não desistir de mim mesmo nos momentos mais difíceis e por todo incentivo para que eu continuasse o TCC sempre me aconselhando e dizendo que sou capaz.

Agradeço a minha amiga Izabel que ajudou na correção do meu trabalho e apoiou para que eu não desistisse, incentivando mesmo tendo seus problemas.

Agradeço ao meu amigo Manoel pela correção da estrutura do trabalho.

Agradeço aos meus colegas de curso, que me apoiaram e me ajudaram a não desistir do curso.

Agradeço a todas as pessoas que torceram por mim, que me apoiaram e que me compreenderam.

“Em tudo daí graças, porque esta é a vontade de Deus em Cristo Jesus para convosco”.

1º Tessalonicenses 5:18.

RESUMO

O estudo de limites é algo essencial quando nos referimos ao Cálculo Diferencial, já que o mesmo é base para entender o comportamento de diversas funções. Neste sentido, compreende-se que o estudo de limites de funções é de suma importância como pré-requisito de outras disciplinas, bem como nas aplicações em profissões de caráter administrativo, tecnológico e engenharia. No entanto, as disciplinas de matemática são consideradas complicadas pelos discentes e como consequência, tende a ter os maiores índices de reprovação. Por este motivo, através de uma abordagem qualitativa, este trabalho tem como objetivo, analisar *softwares* e ferramentas digitais que podem contribuir para o ensino do conceito de limite de funções no ensino superior. Como resultado, são apresentados softwares e ferramentais digitais que podem ser utilizadas por professores, bem como suas potencialidades e limitações de seu uso no ensino de limites de funções.

Palavras-chave: Limites de Funções; Softwares; Ferramentas Digitais.

ABSTRACT

The study of limits is essential when we refer to Differential Calculus, since it is the basis for understanding the behavior of various functions. In this sense, it is understood that the study of function limits is of paramount importance as a prerequisite for other disciplines, as well as for applications in administrative, technological and engineering professions. However, mathematics subjects are considered complicated by students and, as a consequence, tend to have the highest failure rates. For this reason, through a qualitative approach, this work aims to analyze software and digital tools that can contribute to the teaching of the concept of limit of functions in higher education. As a result, software and digital tools that can be used by teachers are presented, as well as their potentialities and limitations of their use in teaching function limits.

Keywords: Limits of Functions; Software; Digital Tools.

LISTA DE TABELA

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

IFPB: Instituto Federal de Ciências e Tecnologia da Paraíba

CAPES: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

TCC: Trabalho de Conclusão de Curso

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo de limites é algo essencial quando nos referimos ao Cálculo Diferencial, já que o mesmo é base para entender o comportamento de diversas funções. Segundo Neto (2015), no século XVII, as derivadas e integrais já tinham sido calculadas por Newton e Leibniz, porém o conceito de limite ainda era vago, e sua utilização era informal e sem o rigor matemático. Apenas no século XIX os matemáticos Augustin Louis Cauchy (1789-1857) e Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) conseguiram formalizá-lo. Assim, temos que o surgimento do cálculo seguiu uma ordem diferente, sendo o cálculo integral o primeiro, seguindo tempos depois o diferencial.

> A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas uma operação inversa da outra (EVES, 2004, p. 417).

Sendo assim, temos que os processos citados dependem do conceito de limite de uma função, pois ele é necessário para definir com precisão o comportamento de funções nas proximidades de pontos de seus domínios. Deste modo, podemos dizer que o limite de uma função é utilizado para compreender o comportamento local de funções, portanto, o conceito de limite pode ser aplicado em diversas áreas do conhecimento, por exemplo, o estudo de variações de funções de preços e ofertas, e custo total (BOCKER, 2017).

Neste sentido, compreende-se que o estudo de limites de funções é de suma importância como pré-requisito de outras disciplinas, bem como nas aplicações em profissões de caráter administrativo, tecnológico e engenharia. No entanto, as disciplinas de matemática são consideradas complicadas pelos discentes e como consequência, tendem a ter os maiores índices de reprovação (HALLAL, et al., 2019). “Em particular, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral é protagonista de elevados índices de reprovação e apresenta um histórico de discentes com dificuldades no entendimento desse componente curricular” (MACEDO; SILVA; CARVALHO, 2022, p.1). Esse índice de reprovações, podemos apontar como uma possível causa, a má formação da base educacional, na qual diversos fatores no ambiente escolar podem influenciar nessas dificuldades.

Tendo como base Rafael (2017), podemos afirmar que vários fatores podem acarretar nessa dificuldade do aluno, tais como: um ensino básico apresentado de forma irregular, escolhas equivocadas de métodos de ensino, falta de compreensão dos problemas relativos aos livros didáticos com informações resumidas, uma falta de relacionar o conteúdo com a aplicação, entre outros diversos problemas. Quando o aluno adentra o ensino superior, é necessário que ele utilize o conhecimento que está em sua “bagagem”, no entanto, o mesmo passa a ter problemas na hora de assimilar os assuntos vistos anteriormente, já que na maioria das vezes, o aluno sequer teve contato com esses conteúdos tidos como básicos.

Atualmente, alunos e professores utilizam constantemente aparelhos de cunho digital para comunicar-se uns com os outros, e também para obter informações, consequentemente a busca por esses recursos cresce constantemente, e deste modo, torna-se possível a utilização desses aparelhos como uma ferramenta que auxilia no aprendizado do discente, conhecidos como *softwares* educacionais. Alves (2018) afirma que os alunos estão todos interconectados e conectados com as redes de internet e com a quantidade absurda de informações, que nos torna ansiosos pela rápida execução de tarefas cotidianas, criando uma geração de discentes e docentes que buscam tecnologias de forma a facilitar o ensino.

De acordo com Fonseca e Henrique (2016, p.305) a integração de *softwares* educacionais proporciona aos alunos oportunidades de elaborar conjecturas, refletir sobre o trabalho realizado, raciocinar e investigar ideias fundamentais do cálculo. Nessa perspectiva, torna-se interessante a utilização de ferramentas tecnológicas como auxílio no processo de ensino e aprendizagem, pois as mesmas podem contribuir de forma satisfatória nesse processo de construção do saber.

Definição do Problema

As aulas ministradas na disciplina Cálculo Diferencial Integral tendem a criar inquietações e repúdio no corpo discente, sendo essas afirmações baseadas em Rafael (2017). Como comentado anteriormente, esses sentimentos negativos pela disciplina, surgem devido a diversos fatores encontrados tanto no ensino superior quanto na educação básica irregular. Esses fatores prejudicam na formação de um professor, a qual necessita ter uma compreensão aprofundada da Matemática que vai instruir, ter um conhecimento profundo dos conceitos, procedimentos e das estruturas matemáticas (ALBUQUERQUE et al., 2006).

Devido a esses obstáculos no meio educacional, surge a necessidade de buscar melhorias no ensino dos alunos na graduação, sendo assim, poderiam ser explorados de melhor forma os recursos virtuais, pois isto provocaria uma aula mais dinâmica e atrativa. Hellmann et al. (2016) relata a importância da utilização de ferramentas no aprendizado ao descrever:

> A utilização dos recursos computacionais, particularmente na educação, ocupa uma posição central, e por isso é importante refletir sobre as mudanças educacionais provocadas por essas tecnologias, propondo novas práticas docentes e buscando proporcionar experiências de aprendizagem significativas para os alunos (HELLMANN et al. 2016, p. 35).

Logo, as ferramentas digitais como *softwares*, apresentam novos desafios que podem gerar grandes feitos nas práticas docentes. Deixando um ambiente atrativo e dinâmico para os discentes. Assim, surge a questão norteadora desta pesquisa: Quais e como os *softwares* podem contribuir para o ensino de limite de funções no ensino superior?

Objetivo Geral

- Analisar *softwares* e ferramentas digitais que podem contribuir para o ensino do conceito de limite de funções no ensino superior.

Objetivos Específicos

- Incentivar o uso de ferramentas digitais nas práticas docentes, por meio de relatos de autores que apoiam o uso de *softwares*;
- Investigar quais ferramentas digitais podem ser utilizadas para o ensino de limites, com o intuito de compreender o conceito de limites;
- Identificar potencialidades e limitações das ferramentas digitais para o estudo de limites de funções por meio do uso dos *softwares*.
- Identificar situações para quais os discentes podem usar os *softwares* para o auxílio na resolução de atividades.

Importância da Pesquisa

Buscando proporcionar uma experiência de aprendizagem mais significativa para os discentes, auxiliando a superar possíveis dificuldades na disciplina e incentivar o uso de recursos computacionais em ambientes de ensino superior para o entendimento do conceito de limite de função. Nesse contexto, *softwares* educacionais são vistos como auxiliares na solução de problemas encontrados no ensino superior, pois são apresentados como uma nova proposta didática colaborando com a motivação e a participação mais ativa do aluno (HELLMANN et al.,2016). Em particular, os *softwares* que serão verificados serão: *Geogebra, Photomath, Symbolab e WxMAXIMA.* Boa parte dessas ferramentas são distribuídas gratuitamente, no entanto, existem casos em que é necessário que se faça uma assinatura para usufruir de certos recursos, como no caso do aplicativo *Symbolab,* que exige assinatura mensal ou anual, para permitir o acesso a recursos únicos.

Como aluno do curso Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Ciências e Tecnologia da Paraíba (IFPB) - Campus Cajazeiras, sentia inicialmente dificuldades no entendimento do conteúdo sobre limites de funções. Em Cálculo Diferencial e Integral I, preocupado, um colega me indicou alguns aplicativos para ajudar nos meus estudos, sendo um deles o *Photomath,* uma simples ferramenta que ajudou a entender as propriedades e aplicações de limites na resolução de questões. No entanto, esse aplicativo tem suas limitações, assim, precisando utilizar outros *softwares.* Com as aulas presenciais e o uso das ferramentas em questão, foi possibilitado resolver os exercícios propostos e entender as propriedades. Assim, esse trabalho relatará a importância e a potencialidades dos recursos tecnológicos para facilitar a aprendizagem.

Aspectos Metodológicos

Esse Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) possui natureza básica, pois tende a ser uma pesquisa com o intuito de gerar novos conhecimentos sem uma aplicação na prática, já que utiliza materiais de outros autores para encontrar uma resposta à problemática do trabalho.

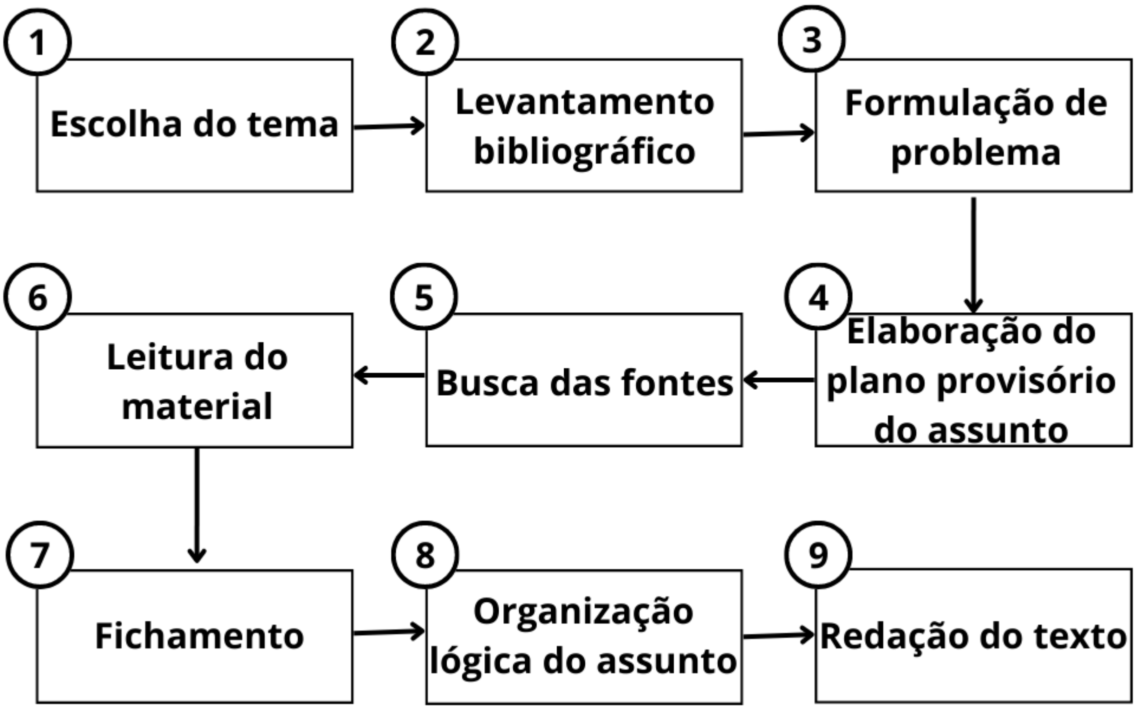
Em relação à sua abordagem, utilizamos o método qualitativo, que segundo Marconi e Lakatos (2010), se trata de uma pesquisa que tem como premissa, analisar e interpretar aspectos mais profundos, descrevendo a complexidade do comportamento humano e ainda fornecendo análises mais detalhadas sobre as investigações, atitudes e tendências de comportamento. Assim, a pesquisa não se mensura apenas com os números e dados adquiridos, mas com o objetivo de focar nos aspectos mais subjetivos como ideias e pontos de vista.

Esta pesquisa é de cunho exploratório, algo que Gil (2007), afirma que sendo assim, ela permite que o autor faça levantamentos bibliográficos, entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado e análise de exemplos que estimulem a compreensão do mesmo. Deste modo, ao optarmos por um levantamento bibliográfico, tomamos como referência para tal escolha, o pensamento de Severino (2007), onde o mesmo afirma que a partir dos materiais disponíveis, decorrentes de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses, entre outros, utilizam-se dados de categorias teóricas já trabalhadas por outros pesquisadores e devidamente registrados.

Portanto, essa produção teórica servirá para a construção da fundamentação teórica da pesquisa. Esses materiais encontram-se nas seguintes plataformas de pesquisa: Na Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), CAPES Periódicos e Google Acadêmico. E, nessa perspectiva, o estudo abordado se caracteriza por identificar quais possíveis *softwares* possibilitam ou não o aprendizado dos conceitos de limites de funções na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Além disso, é fundamental a seleção de uma boa fundamentação teórica, sendo levado em conta, autores como Eves (2004), Bocker (2017), Rafael (2017), Alves (2018), dentre outros. Um ponto importante para ressaltar no trabalho é os processos que será seguido com intuito de executar a pesquisa bibliográfica que são de suma importância, no qual com base em Freitas e Prodanow (2013), dividimos esse processo em etapas, sendo elas apresentadas a seguir na Figura 1, e descritas logo após esta figura.

Figura 1: Etapas da Pesquisa



FONTE: Própria

A primeira etapa, considerada até então uma das mais difíceis, devido aos diversos temas envolvidos, se refere à definição de uma área e ao propósito desta pesquisa. Onde o interesse no meio tecnológico contribuiu para a escolha do tema formulado, que envolve ferramentas digitais no intuito de avaliar os possíveis potenciais no aprendizado do conceito de limites de funções, sendo o tema o "O ensino do conceito de limite de funções no ensino superior através de *softwares* e ferramentas digitais".

Na segunda etapa, no mês outubro de 2021, foi iniciado o levantamento bibliográfico que se estendeu até o mês fevereiro de 2023, no qual, ao pesquisar por algumas palavras-chave como "limite de função", "limites de funções", "limite de funções" e "limites de função" nas plataformas digitais já mencionadas anteriormente.

Dentre os arquivos encontrados entre o ano de 2015 até 2023 foram selecionadas as produções que tinham em seus títulos ou resumos o termo "tecnologia". Deste resultado buscou-se o download das produções que estavam disponíveis para uma leitura mais detalhada.

O resultado desta pesquisa pode ser observado na Tabela 1 abaixo:

Tabela 1: Resultado da pesquisa

Bases	limite(s) de função(ões)	tecnologia	pós-exclusão
CAPES	5	1	1
Google acadêmico	529	20	20
Capes periódico	14	1	1
Total			22

FONTE: Própria

Na terceira etapa, foi feita a formulação do problema. Esta parte se trata da proposta de uma pergunta suscetível à solução, ou seja, uma pesquisa que possua meios para solucionar o problema proposto. Para isso, foi realizada a leitura do material encontrado e com a ajuda do orientador, foi decidido que a problemática é saber quais os *softwares* que podem contribuir para o ensino do conceito de limite de funções.

Na quarta etapa, elaboração do plano provisório do assunto, se fez necessária a construção de ideias oriundas dos aspectos que estão relacionados ao problema do trabalho, esse roteiro ajudou na triagem do material recolhido, pois foi selecionado e retirado o que seria dispensável.

Na etapa de número cinco, após a leitura dos títulos das produções e trabalhos, foram escolhidos alguns trabalhos para serem usados como suporte na pesquisa, a escolha foi feita avaliando os temas de cada material para aferir se as propostas se aproximavam ao que seria trabalhado.

Na sexta etapa, após a escolha do material que seria usado para a construção do trabalho, foi feita a leitura das produções selecionadas, com intuito de captar informações que foram colocadas no roteiro.

A etapa de número sete, pode ser considerada como sendo um complemento da etapa anterior, pois através da leitura do material, retiramos algumas citações e referências para a construção da fundamentação teórica deste trabalho.

Na etapa de número oito, foi elaborado um caminho do que seria trabalhado e usado na confecção do texto, pois com as informações adquiridas e organizadas a construção do texto se daria de forma agradável, e não correria o risco de perder o foco da pesquisa.

Na nona etapa, a produção do trabalho de conclusão de curso continua. Sendo que nessa etapa, a escrita do texto em si, se torna presente e também as orientações e correções feitas pelo orientador no texto produzido pelo orientando.

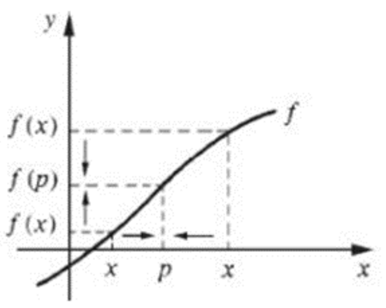
Através do cumprimento das etapas apresentadas, foi possível construir as ideias necessárias para o trabalho, além de permitir abordar os pontos necessários na pesquisa. Vale salientar, que estas etapas foram essenciais na produção deste trabalho, pois sem elas não seria possível apresentarmos as ideias de forma organizada, e com a credibilidade exigida na produção de um trabalho acadêmico.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O conceito de limite de uma função é um dos primeiros conteúdos trabalhados na disciplina de Cálculo. Este é usado com intuito de compreender o comportamento de uma função na proximidade de um ponto. À primeira vista, tal conceito é algo simples, porém quando se trata desse assunto, os discentes tendem a ter dificuldades em compreendê-lo. Um dos fatores que pode estar contribuindo para essa dificuldade no processo de aprendizagem dos conceitos de limites de uma função, é a maneira que os livros costumam abordar o conteúdo.

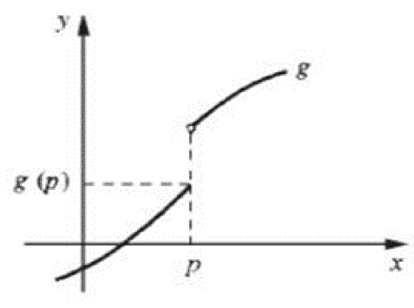
De acordo com Guidorizzi (2013), o conceito de limite é definido como algo delicado na disciplina de Cálculo. Em seu livro, de início o autor divide a introdução em conceito de continuidade e de limite. Além disso, ele apresenta de forma intuitiva como reconhecer uma função contínua. Observe as imagens abaixo, que representam os gráficos das funções f (Figura 2), e g (Figura 3).

Figura 2: Gráfico de *f*



FONTE: (GUIDORIZZI, 2013)

Figura 3: Gráfico de g



FONTE: (GUIDORIZZI, 2013)

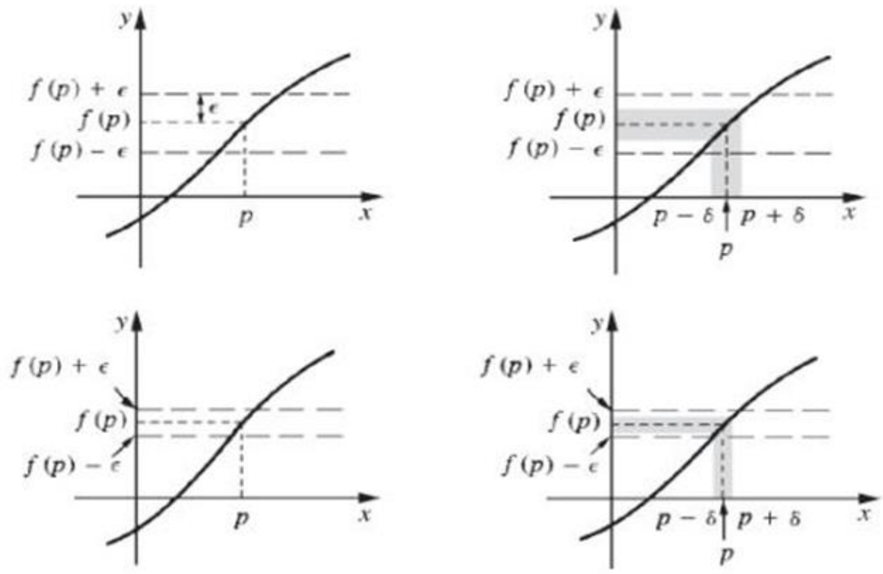
Veja que os gráficos acima mostram a diferença entre duas funções (uma contínua e uma não contínua). O gráfico de f (Figura 2), mostra uma função contínua, pois a mesma não apresenta um "salto" no ponto p, e portanto, esta função f é contínua em p, já o gráfico de g (Figura 3) representa uma função não contínua, na qual existe um "salto" no ponto p , e portanto, esta função g não é contínua em p .

Ainda de acordo com Guidorizzi, na Figura 2, é exposto um conceito de limite no qual, conforme x se aproxima de p, pela direita ou pela esquerda, os valores de $f(x)$ se aproximam de $f(p)$; e quanto mais próximo x estiver de p, mais próximo estará

$f(x)$ se aproximando de $f(p)$. Já na Figura 3, isso não acontece devido a função g não ser uma função contínua.

Em seu livro, Guidorizzi, após apresentar inicialmente a ideia intuitiva de continuidade, e trabalhar alguns exercícios de fixação, ele apresenta também, situações que destacam uma definição que permite distinguir o comportamento das funções f e g, ou seja, quando elas possuem um "salto" ou não.

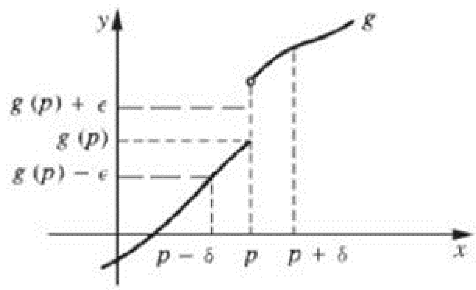
Figura 4: Gráfico *f* de *p*



FONTE: (GUIDORIZZI, 2013)

A imagem acima mostra uma função f, e um ponto p qualquer. Note que ela é contínua e nela existe a possibilidade de identificar valores que se aproximam do ponto p pela direita ou pela esquerda. Guidorizzi, afirma ainda que essa função satisfaz em *p* a propriedade "para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ε), tal que $f(x)$ permanece entre $f(p) - \varepsilon$ e $f(p) + \varepsilon$ quando x percorre o intervalo $]p - \delta$, $p + \delta[$, com x no domínio de f". Já no caso, da função *g* (Figura 5) não satisfaz em p tal propriedade, devido ao "salto" que apresenta.

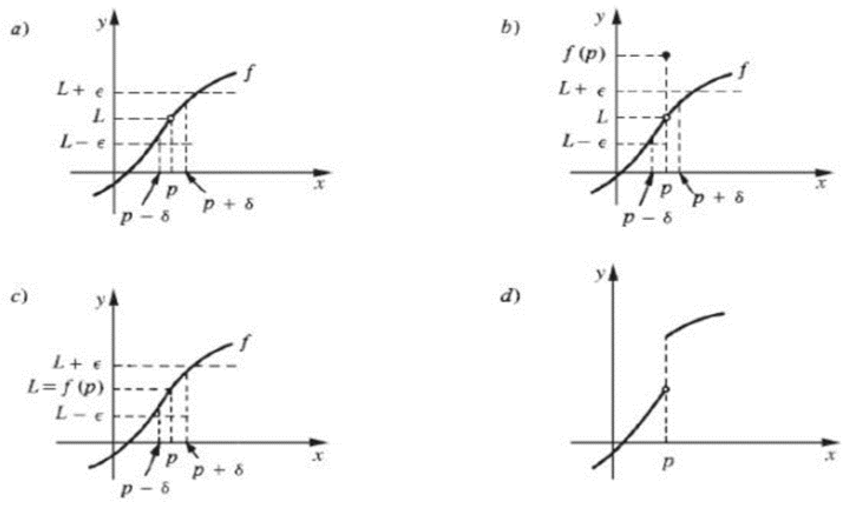
Figura 5: Gráfico g de *p*



FONTE: (GUIDORIZZI, 2013)

Observe na Figura 5, que para $\varepsilon > 0$ não existe $\delta > 0$ que torne verdadeira a afirmação que "$\forall x \in D_g,\ p - \delta < x < p + \delta \rightarrow g(p) - \varepsilon < g(x) < g(p) + \varepsilon$", sendo assim, qualquer $\delta > 0$ que se tome, teremos x percorrendo o intervalo $]p - \delta,\ p + \delta[$, no entanto, $g(x)$ não permanece entre $g(p) - \varepsilon$ e $g(p) + \varepsilon$. Nesse caso, o livro apresenta a propriedade que é adotada como a definição de continuidade, e a mesma é utilizada para resolver outros exemplos resolvidos nos demais exercícios, finalizando assim o tópico de continuidade e entrando na definição de limite. Nessa parte, são apresentadas 4 situações para trabalhar inicialmente a definição de limite, de forma intuitiva, utilizando as informações usadas em continuidade, focando ainda mais nas proximidades do ponto p e no que isso reflete no eixo das ordenadas. Observe a Figura 6:

Figura 6: Definição de limite



FONTE: (GUIDORIZZI, 2013)

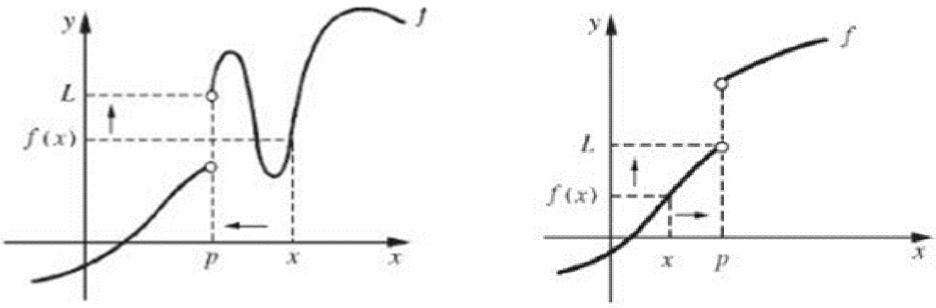
O autor apresenta uma função f e um ponto p no domínio da função ou da extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f. Considerando as situações acima, ele mostra que em (a), f não é definida em p, no entanto existe L que satisfaz a seguinte propriedade: $\forall\ \varepsilon > 0\ dado,\ \exists\ \delta > 0 \mid \forall\ x \in D_f,\ p - \delta < x < p + \delta,\ x \neq p \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ (1)

Em seguida, ele mostra que na situação (b), f está definida em p, mas a mesma não é contínua no próprio ponto, porém, existe um L que satisfaz (1); observe que neste caso, a restrição $x \neq p$ é necessária. Na situação (c), é contínua em p, satisfazendo $L = f(p)$. Finalizando essa parte, temos que no livro, no (d) não existe L satisfazendo (1) em p, devido não conseguir valores tão próximos do ponto p que refletem nos valores próximos do ponto no eixo vertical. Também temos que a propriedade (1) equivale a:

$\forall\ \varepsilon > 0\ dado,\ \exists\ \delta > 0 \mid \forall\ x \in D_f,\ 0 < |x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Sendo que $0 < |x - p| < \delta \leftrightarrow p - \delta < x < p + \delta,\ x \neq p$.

No livro, também é demonstrado que existe no máximo um número L que satisfaz a propriedade acima, que é o limite de $f(x)$, para x tendendo a p, ou seja, $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$. Em seguida é trabalhado cada propriedade de limite, usando vários exemplos para mostrar na prática como cada uma funciona, no entanto, não é utilizado imagens de gráficos de todas as funções apresentadas, algo que poderia ajudar no entendimento do aluno. Para finalizar, o livro trabalha os limites laterais, algo que pode ser compreendido como: se os limites laterais da direita e da esquerda existem e são iguais, então o limite da função, também existe. No caso abaixo temos duas figuras que ilustram graficamente o limite lateral à direita e de *p* e o limite lateral à esquerda de *p*.

Figura 7: Limite lateral à direita e limite lateral à esquerda



FONTE: (GUIDORIZZI, 2013)

Na figura 7 temos que f é uma função e p um número real. Supondo que exista um número b tal que $]p, b[$ esteja contido no domínio da função f, teremos de acordo com o autor a seguinte definição:

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L \Leftrightarrow \{\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid p < x < p + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Analogamente, caso exista a, tal que $]a, p[$ contido no domínio da função f temos de acordo com o autor a seguinte definição:

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L \Leftrightarrow \{\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid p - \delta < x < p \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Assim, o autor mostra que o limite existe quando os limites laterais existem. E, para complementar os limites laterais, L tem que ser igual ao limite da função indicada.

Para Iezzi (2005), o conceito de limite é abordado de forma intuitiva, trabalhando inicialmente com a noção intuitiva de limite, e apresentando uma função racional definida em todo x real, sendo $x \neq 1$;

$$f(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)}$$

Com a noção inicial de função o aluno pode compreender que dividindo o numerador e denominador por $x - 1$, obtém-se $f(x) = 2x - 1$. Em seguida, será substituído na função valores próximos de 1, mas que não seja 1.

Atribuindo a x valores tão próximos de 1, mas menores que 1, obtemos os valores da tabela abaixo:

Tabela 2: valores menores que 1

$\mathbf{x}$	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
$\mathbf{f(x)}$	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998

FONTE: Própria

Analogamente, porém com valores maiores que 1, temos:

Tabela 3: Valores maiores que 1

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	5	4	3,5	3,2	3,02	3,002

FONTE: Própria

Assim, podemos observar pelas tabelas que x se aproxima cada vez mais de 1, e a função cada vez mais de 3, ou seja, quanto mais próximo x estiver de 1 mais a função tende a 3. Nesse caso, o autor mostra que podemos tomar $f(x)$ tão perto de 3 quanto desejarmos, mas que não seja necessariamente 3, por isso aproximamos x suficientemente de 1.

Em relação à distância, no livro fala que "podemos tomar o módulo da diferença entre $f(x)$ e 3 tão pequeno quanto desejarmos, desde que tomemos o módulo da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno" (IEZZI, 2005). Pode-se tomar valores tão pequenos que sua distância venha a se tornar muito próxima do ponto em questão.

Adentrando na leitura, o discente já passa a ter contato com a definição de limite, no qual é apresentada inicialmente uma função de intervalo aberto ao qual possui o número $a \in R$ definido para todo $x \in I - \{a\}$, comentando (para o leitor) que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é L, e escrito da seguinte maneira: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

No caso de fórmulas e símbolos, o autor apresenta as mesmas notações que outros autores, e ressalta que seja observado que na definição de limite necessariamente sabemos o valor de $x = a$, isto é, não é necessário que a função esteja definida no ponto a, como fora visto na função $f(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)}$, que nos mostra que $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)} \right) = 3$, pois essa função não está definida em $x = 1$. Assim, o autor relata que no cálculo de $\lim_{x \to a} f(x)$, o que nos interessa é o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a e não necessariamente quando é o próprio a.

Para completar, o autor explana sobre os limites laterais utilizando-se da mesma definição que fora apresentada na figura 7. Porém, neste caso, o autor analisa o comportamento da função $f(x) = \begin{cases} 4 - x & se\ x < 1 \\ 2 & se\ x = 1 \\ x - 2 & se\ x > 1 \end{cases}$ quando x se aproxima de 1.

Nessa função, se compreende que os limites laterais são diferentes, pois no da direita, quanto mais x estiver próximo de 1, mais próximo de -1 a função estará, e no caso de x se aproximar pela esquerda de 1, mais a função se aproxima de 3. Portanto, após observarmos atentamente esta função, é fácil ver que o limite da função não existe devido ao fato de os limites laterais serem diferentes.

No livro de Vilches (2009), o conceito de limite é apresentado inicialmente de forma intuitiva, com o estudo do comportamento de uma função $y = f(x)$ nas proximidades de um ponto que não pertence necessariamente ao domínio. O autor trabalha com o mesmo exemplo de função utilizada no livro de (IEZZI, 2005). Por exemplo, mostra que seja $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x-1} = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)}$, com $D(f) = R - \{1\}$, e para um melhor entendimento, são construídas duas tabelas com valores muito próximos do ponto que não pertence ao domínio, sendo que essa aproximação é feita de ambos os lados, como podemos ver na imagem abaixo:

Figura 8:Tabela de valores

$x < 1$	$f(x)$
0	1
0.5	2
0.7	2.4
0.8	2.6
0.9	2.8
0.99	2.98
0.999	2.998
0.9999	2.9998
0.99999	2.99998
0.999999	2.999998
0.9999999	2.9999998

$x > 1$	$f(x)$
2	5
1.7	4.4
1.5	4
1.2	3.4
1.09	3.18
1.009	3.018
1.0009	3.0018
1.00009	3.00018
1.000009	3.000018
1.0000009	3.0000018
1.00000009	3.00000018

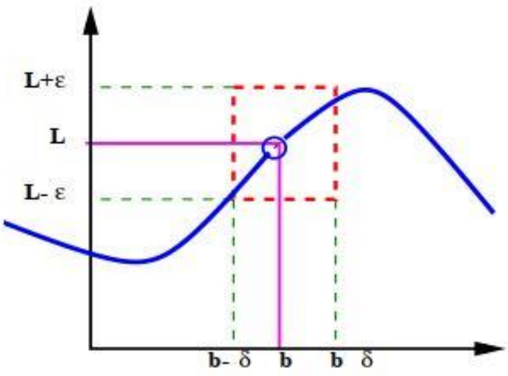
FONTE: (VILCHES, 2009)

O autor do livro faz algumas observações referentes às informações retiradas da tabela, como: I. Sempre que x se aproxima de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de 3. E, além disso, é possível observar também que essa aproximação ocorre em ambos os lados; II. A noção de proximidade fica mais precisa quando usa-se o valor absoluto, devido, a distância entre dois pontos quaisquer $x, y \in R$ ser $|y - x|$.

Assim, o que está escrito em I pode ser expressada da seguinte maneira: se $|x - 1|$ aproxima-se de 0, então $|f(x) - 3|$ também se aproxima de 0, ou seja, para que $|f(x) - 3|$ seja pequeno é importante que $|x - 1|$ também seja; III. Podemos chamar o número 3 de limite de $f(x)$ devido se aproximar de 1. Seguindo o exemplo, temos $|f(x) - 3| = 2|x - 1|$, mostrando que a distância de $f(x)$ a 3 é semelhante a duas vezes a distância de x a 1. Analogamente, se x aproxima-se de 1, $|x - 1|$ aproxima-se de 0 implicando em $|f(x) - 3|$ também aproximar-se de 0; IV. Pode-se também, tomar $f(x)$ perto o bastante de 3, para que x seja suficientemente próximo de 1. Um exemplo disso seria $|f(x) - 3| = 2$, bastando apenas, considerar $|x - 1| = 0{,}1$ e no caso de desejarmos $|f(x) - 3| < 0{,}02$, basta considerar $|x - 1| < 0{,}01$; V. Quando considerado qualquer número real positivo ε, tão pequeno quanto desejarmos e ao definirmos o número real δ, teremos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, onde a distância de $f(x)$ a 3 será menor que ε, desde que a distância de x a 1 seja menor que δ. Então para todo número real positivo ε existirá outro número real positivo δ, que dependerá de ε, de tal maneira que se $0 < |x - 1| < \delta$, então $|f(x) - 3| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$. (VILCHES, 2009).

Após apresentar o estudo relacionado aos valores próximos de uma função, Vilches, introduz o conceito de limite e sua notação, na qual, ele define uma função $f: A \to R\ e\ b \in R$ tal que todo o intervalo aberto dos racionais contendo *b*, tem-se $I \cap (A - \{b\}) \neq \emptyset$. No qual, o valor real será L, que chamamos de limite de $f(x)$, quando x aproxima-se de b para todo número $\varepsilon > 0,$ existe $\delta > 0$, tal que, se $x \in A$ então $0 < |x - b| < \varepsilon$. Em relação a notação, o autor usa a mesma notação de limite dos livros citados anteriormente, porém, ele apresenta uma definição mais direta e um gráfico mais intuitivo.

Figura 9: $\lim_{x \to b} f(x) = L$



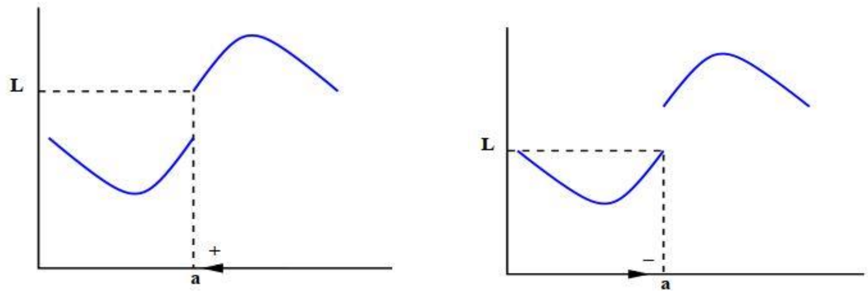
FONTE: (VILCHES, 2009)

Assim, a definição equivale a dizer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid x \in (b - \delta, b + \delta) \cap (A - \{b\})$ então $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

O autor supracitado, também apresenta um exemplo onde ele faz uma aplicação na definição de limite comentando cada passo, e aplica uma demonstração sobre a unicidade do limite, mostrando que caso o limite exista, ele será único. Além disso, também trabalha as propriedades de limites e limites laterais.

A forma com que ele trabalha a definição de limites é semelhante à de outros autores já citados, no entanto, ele usa um caso de função diferente, como podemos ver nas imagens abaixo:

Figura 10: Limite à direita e esquerda



FONTE: (VILCHES, 2009)

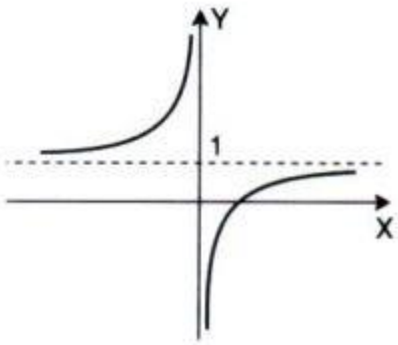
Logo acima, temos uma função na qual visualizamos os valores em lados diferentes. No primeiro caso, o limite da função quando x tende a a pela direita, no segundo, o limite da função quando x tende a a pela esquerda. E, o limite da função só existirá, quando seus limites laterais forem iguais.

No livro Cálculo A de Flemming (2006), a ideia de limite é trabalhada inicialmente, de forma intuitiva com sucessões numéricas e em seguida são apresentados tabelas e gráficos que auxiliam na visualização do limite de uma função. Em relação às sucessões, o autor comenta 4 casos: (1) Na sucessão dos números naturais, onde os termos se tornam cada vez maiores que o anterior sem atingir um limite, dado um número real qualquer é possível encontrar outro maior que seja, desta maneira ele explica que nesses casos de sucessões dizemos que os termos tendem para o infinito ou que limite da sucessão é infinito. Escrevendo-se $x \to +\infty$.

Já no (2) a sucessão de termos de forma crescente, ilimitada pelo número 1. Nesse caso, temos valores próximos de 1, mas que nunca atingirão esse valor, ou seja, $x \to 1$. (3) De maneira semelhante a (1), mas neste caso, com infinitos números pequenos, não importando o termo escolhido, podemos encontrar outro número ainda menor, ou seja, $x \to -\infty$. (4) Nesse caso, os termos oscilam, e não tendem a um limite (FLEMMING,2006).

Após esses casos, o autor começa ampliando o conceito de limite com exemplos resolvidos, sendo um deles: $y = 1 - 1/x$. Além disso, o mesmo constrói a tabela e monta o gráfico da figura abaixo.

Figura 11: y=1-1/x



FONTE: (FLEMMING, 2006)

Observe que no gráfico presente na figura acima, a função se aproxima de 1 quando x tende ao infinito, mas neste caso, não estamos visualizando o limite, e dependendo dos infinitos termos a serem utilizados, a função tende a ficar bem próxima de 1, ou seja, $y \rightarrow 1$, então $x \rightarrow \pm\infty$, e denota-se por $\lim_{x\rightarrow\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$.

O livro possui outros exemplos de funções, suas aproximações e além disso, também utiliza gráficos para uma melhor compreensão dessas funções. Posteriormente, o livro trabalha com uma função, apresentando inicialmente a ideia de limite pela definição, no qual, seja $\lim_{x\rightarrow 1}(3x-1) = 2$, de acordo com a definição, é preciso que para todo $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$, tal que $|(3x-1)-2| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x-1| < \delta$. Com isso, temos a seguinte desigualdade:

$$|(3x-1)-2| < \varepsilon$$

$$|3x-3| < \varepsilon$$

$$|3(x-1)| < \varepsilon$$

$$3|x-1| < \varepsilon$$

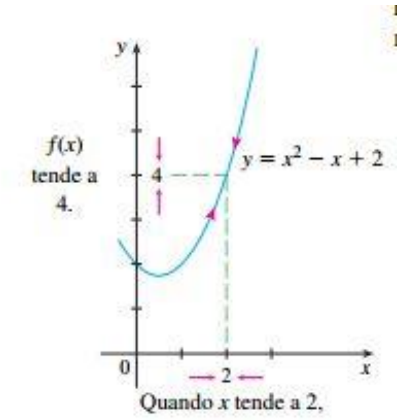
$$|x-1| < \varepsilon/3.$$

Nesta última desigualdade, o autor sugere a escolha do δ igual a ε, ou seja, fazer $\delta = \varepsilon/3$, assim temos que $|(3x-1)-2| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x-1| < \delta$. E conclui que $\lim_{x \to 1}(3x - 1) = 2$. Ademais, o autor usa a mesma definição de limite presente nos livros citados anteriormente no texto.

Para finalizar essa seção, temos o autor Stewart (2013), que apresenta inicialmente o surgimento dos limites, quando encontramos uma tangente em uma curva, ou a velocidade de um objeto, que considera a ideia central de cálculo diferencial. O autor estuda o comportamento de uma função f, definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2. Ele utiliza uma tabela, na qual é fornecido os valores da função e de x, quando se aproxima de 2 por ambos os lados.

Com as informações na tabela, é possível visualizar um gráfico de f (parábola) que segue apresentado no gráfico abaixo.

Figura 12: Limite de uma função

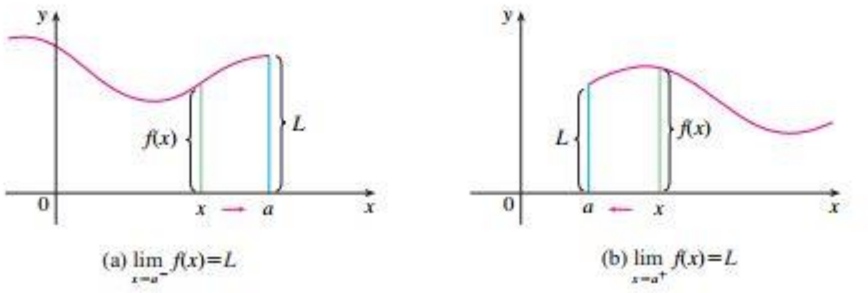


FONTE: (STEWART, 2013)

Note que quando x tende a 2 pelos lados, a função tende a 4, e nesse caso os limites laterais existem e são iguais. Sendo assim, diz-se que "o limite da função $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x tende a 2 é igual a 4", ou em notação é $\lim_{x \to 2} x^2 - x + 2 = 4$. Com isso, o autor apresenta a notação geral de limites que segue como $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e apresenta outros exemplos referente a definição.

Para compreender melhor sobre quando o limite da função existe, Stewart (2013) mostra que para existir limite é preciso determinar os valores laterais próximos do ponto. Ele apresenta dois gráficos, no qual se compreende onde está sendo considerado.

Figura 13: Limites Laterais



FONTE: (STEWART, 2013)

Comparando as definições de limite e de limites laterais, vemos que só é possível que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

Na leitura desses materiais, mesmo com a devida atenção do professor, o aluno pode apresentar inicialmente os devidos problemas de interpretação numerados: i) a incompreensão de termos como “limite”, “tende a”, “se aproxima”, “tão pequeno quanto queremos”; *ii)* não reconhecer “quem está se aproximando de quem”, ou seja, não compreender que “x se aproxima de x_0“ e “$f(x)$ se aproxima de L” no caso de $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$; iii) acreditar que se a função não for definida num ponto então o limite não existe nesse ponto; *vi*) acreditar que, quando o cálculo de $\lim_{x \to x_0} f(x)$ resulta numa indeterminação $\frac{0}{0}$, então $x = x_0$ não é ponto de assíntota; v) considerar que para uma função ser contínua, é suficiente que seus limites laterais sejam iguais; e vi) a ideia de “N suficientemente grande” que sugere implicitamente concessões de números infinitos (Tall, 1992; Juter, 2006).

Como vimos anteriormente, dentre os cinco livros vistos, três trabalham logo no início os conceitos de limite de maneira intuitiva apresentando uma função comum e estudando os valores obtidos ao substituir o termo indeterminado. Os autores nos seus livros utilizam as imagens das funções trabalhadas, para que os alunos compreendam melhor o que está sendo visto, porém, como vimos no parágrafo anterior, algo que pode deixar os alunos confusos, é a parte onde utilizam as palavras como “aproxima” e “tende a”, já que os autores trabalham com valores próximos ao ponto em questão, mas não necessariamente neste ponto.

Entender o que significa tais palavras, é algo fundamental para a compreensão dos assuntos posteriores, pois caso os alunos não entendam que os autores trabalham com valores próximos do ponto, fazendo com que o valor da função tenda para um termo muito grande ou pequeno, e em seguida apresentam a definição de limite que direciona a se preocupar com os termos tão próximos do ponto escolhido no eixo das abcissas que vai refletir em um valor que se aproxima tão perto do ponto no eixo das ordenadas, fará com que eles tenham sérias dificuldades na compreensão dos próximos assuntos.

Outra grande dificuldade enfrentada pelos alunos, é na parte do entendimento das demonstrações das definições, pois mesmo que sejam bem elaboradas, na maioria das vezes, costumam possuir diversas informações que estariam na construção das definições e as proposições, no qual devem ser provadas, exigindo um conhecimento prévio das propriedades matemáticas, e devido ao próprio discente estar acostumado a conseguir as fórmulas prontas, o mesmo tende a apresentar muita dificuldade.

Cury (2005), aponta que essa dificuldade na aprendizagem de cálculo se caracteriza como uma herança do ensino básico, no qual, os conteúdos de matemática costumam ser apresentados com muitos “macetes” e fórmulas prontas, e assim, os alunos costumam “decorar” esses “macetes”, e acabam sendo aprovados mesmo sem conseguir compreender os conceitos básicos.

Alguns professores dessa base acreditam que estão contribuindo no aprendizado do aluno, mas na verdade estão ajudando apenas a passar na disciplina, e contribuindo para um com maiores dificuldades. E isto se estende também no ensino médio e até mesmo na própria disciplina de cálculo, onde de acordo com o que foi visto nos livros, os autores trabalham com diversos exercícios que ajudam o aluno apenas a memorizar e poucos exigem a compreensão do conceito. Barufi (1999, p. 162) afirma que,

> A fim de minimizar o insucesso na construção do conhecimento significativo, a saída, muitas vezes adotada, é a de privilegiar a aplicação do cálculo, apresentando um grande número de problemas e exercícios, muitas vezes repetitivos, onde o aluno acaba memorizando, de alguma forma, processos de resolução. Nesse sentido, reduz-se a ideia, o conceito, ao algoritmo e sobra aquela eterna pergunta dos estudantes, não respondida e “odiada” pelos professores: para que serve isto?

Deste modo, é possível ver que não basta saber aplicar as fórmulas, também é necessário entender para que as mesmas servem. É importante salientar que na maioria das vezes, os professores apresentam apenas as fórmulas, com intuito de apresentar o máximo de conteúdo possível para o aluno.

O livro de Guidorizzi (2013) apresenta inicialmente o conceito de continuidade de limite de forma interessante, mas, algo que pode prejudicar o aprendizado do aluno, é a demonstração desse conceito, e procurando não se alongar nesse assunto, o professor pode se direcionar a resolução de questões que exigem apenas a "fórmula", e deste modo o aluno passa a aceitar certas afirmações, devido sua “herança” do ensino básico, mesmo não conseguindo compreender o conceito e passam a não entender a importância desse conceito.

O Uso de *Softwares* no Ensino de Matemática

A tecnologia tem sua importância no contexto educacional, sendo uma ferramenta de grande potencial no ensino e aprendizagem de Matemática, na qual, a cada dia que passa torna-se predominante o seu uso no dia a dia dos alunos. O uso de *softwares* educacionais no ensino de conceitos matemáticos pode facilitar o desenvolvimento de métodos para compreensão de diversos problemas que antes da era tecnológica, seria bem mais complexo encontrar soluções.

Autores como Fonseca e Henrique (2013) e Tall, Smith e Piez (2008) comentam em seus trabalhos sobre a utilização dos *softwares* no ensino do conceito de limite, apontando que o uso integrado e intencional dessas ferramentas educacionais permite uma aprendizagem mais significativa. Além disso, o ambiente com uma aprendizagem virtual estimula a busca por um aprendizado mais profundo por parte dos estudantes e tende a fazer com que os mesmos tenham maior envolvimento durante a aula.

Como exemplo, podemos citar o *software Geogebra,* que é estudado e indicado por diversos autores, pois este, cumpre de forma positiva o estudo dos conceitos de limite de funções, e por ter um painel de fácil compreensão possibilita ao estudante uma rápida aprendizagem no que diz respeito às ferramentas do próprio *software* e além disso, faz com que o aluno tenha maior visibilidade das funções estudadas, além disso, ainda é um *software* de livre acesso.

Em um de seus estudos, Fonseca e Henrique (2013), avaliaram como seguia a aprendizagem do conceito de limite de funções usando tarefas exploratórias no Geogebra. Nessa pesquisa, as autoras concluíram que o aplicativo contribuiu na criação de estratégias de resolução e justificativa das tarefas, possibilitando o aprendizado e a visão geométrica tridimensional. Além disso, ele proporcionou uma melhor compreensão dos principais elementos de funções. (FONSECA; HENRIQUE. 2016). Devido ao programa proporcionar diversas ferramentas gratuitas, o mesmo possibilita ao professor elaborar estratégias metodológicas e facilita a recepção da informação pelo aluno, fazendo com que não apenas o aluno aprenda coisas novas, mas também o próprio professor. E isto, enriquece o processo de ensino aprendizagem, mostrando que tanto o discente, como o docente são beneficiados durante esse processo.

Outro exemplo de *software* educacional é o *WxMAXIMA* ou *Maxima*, sendo este um sistema de computação algébrica, ou seja, um programa capaz de realizar cálculos tanto numéricos quanto simbólicos, podendo produzir gráficos que ajudam na interpretação em 2 ou 3 dimensões.

Alves (2018), relata em sua dissertação de mestrado que aplicou uma atividade para alunos do ensino médio, na qual, foi possível contestar a dificuldades na construção e leitura de gráficos de funções em aulas expositivas. Mesmo assim, ao usar o programa em questão, confirmou que os alunos tiveram mais facilidade em atingir os objetivos das atividades propostas. Deste modo, podemos notar que mesmo havendo dificuldades, o *software* contribuiu para melhor compreensão dos conceitos de limites de funções tornando as atividades mais significativas.

É possível encontrar diversos programas que podem contribuir no aprendizado, um exemplo disso é o *Photomath* que pode ser usado facilmente em qualquer celular, sendo este um aplicativo leve e de fácil uso, no qual é interessante ressaltar que nele é possível tirar fotos de questões algébricas, e o próprio aplicativo faz a leitura do cálculo, mostrando em seguida a resolução com passo a passo, contribuindo assim para a aprendizagem do aluno, fazendo com que ele possa compreender quando usar certas propriedades e como usá-las. No entanto, o aplicativo é limitado e não possui a resolução de todas as questões.

O *Symbolab* é um ótimo exemplo de aplicativo, porém esta ferramenta tem maior potencial quando utilizado os recursos pagos, nos quais, apresentam o passo a passo e as propriedades necessárias para a resolução das questões e no final o gráfico das questões. Na versão gratuita você consegue observar algumas propriedades utilizadas e gráficos também. Porém, não são mostrados todos os passos por completo, sendo possível apenas na versão paga.

Como podemos ver, é possível encontrar diversas ferramentas com grande capacidade de contribuir para o aprendizado matemático, no entanto, nós direcionamos para esses 4 recursos e verificaremos sua utilidade no aprendizado do conceito de limites de uma função.

DISCUSSÃO E RESULTADOS

Nos capítulos anteriores foi apresentado a forma como alguns livros abordam o conceito de limite de uma função e os recursos que podem ser utilizados para facilitar aprendizagem dos discentes, os *softwares* educacionais. Como foi visto, existem vários trabalhos de autores que aprovam o uso de ferramentas virtuais nas aulas de matemática como os autores Hellman *et. al.* (2016) que mostram que os recursos computacionais, particularmente na educação, ocupam uma posição central, no qual, permite criar mudanças significativas na aprendizagem dos discentes. Temos os autores Fonseca e Henrique que falam da ferramenta *Geogebra* que contribui na criação de estratégias e possibilitando um aprendizado e a visão geométrica tridimensional. Outros autores como Fonseca e Henrique (2016) e de Tall, Smith e Piez (2008) comentam que o uso dessas ferramentas na educação permite um aprendizado mais significativo e que estimula o discente a buscar um aprendizado mais profundo.

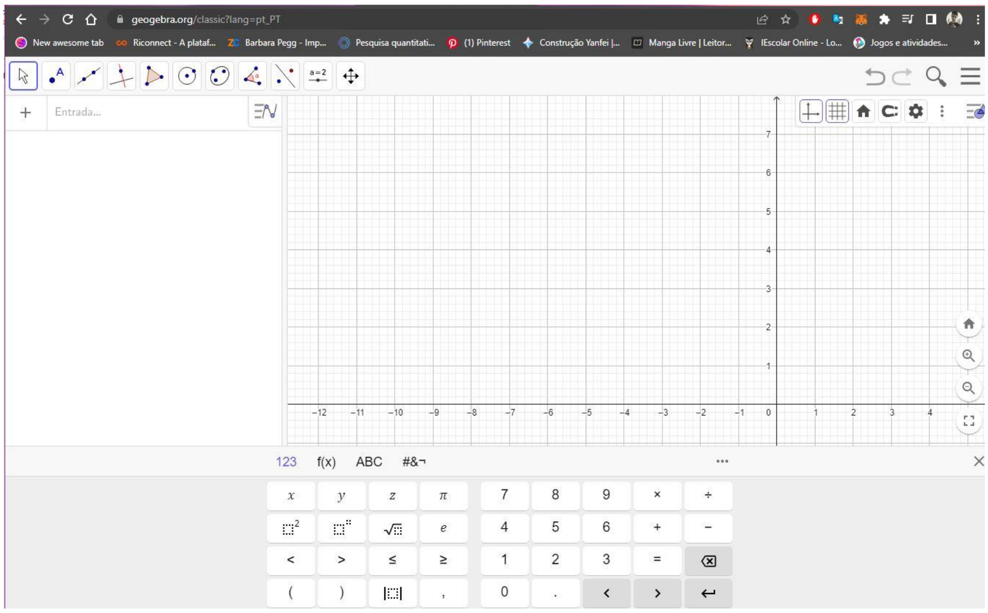
Neste capítulo, serão discutidos os tópicos relacionados ao conceito de limites abordados pelos livros dos autores Guidorizzi (2013), Vilches (2009), Flemming (2006) e Stewart (2013) apresentando sugestões aplicadas e discutindo os pontos positivos e negativos dos *softwares* selecionados, tendo como base avaliar se contribuem para o aprendizado do discente, tendo em vista os problemas sugeridos por Tall (1992); Juter (2006) que os alunos tendem a possuir dificuldades.

Geogebra

O *Geogebra*[1] é um programa livre que permite trabalhar com geometria, álgebra e cálculo entre outras áreas. Pode ser instalado nos celulares e computadores além de possuir uma interface de fácil exploração para o discente. O usuário tem acesso a diversas ferramentas logo no início, e caso o usuário coloque o cursor do mouse sobre as ferramentas disponíveis ele visualizará as informações de uso para elas.

[1] https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT

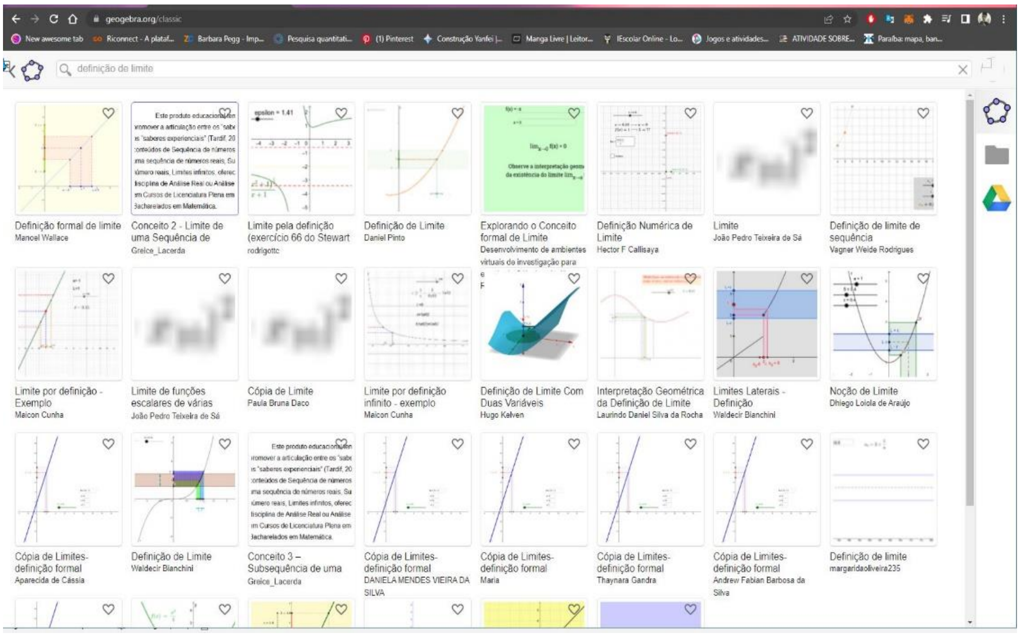
Figura 14: Interface do Geogebra



FONTE: Própria

Na parte inferior da interface, temos uma caixa com informações para auxiliar na construção da função (1). Acima temos botões como mover (2), ponto (3), reta (4), polígonos (5), controle deslizante (6), entre outros. E, caso o usuário mantenha o cursor do mouse sobre uma das opções apresentadas, uma aba com outras funções para essa ferramenta é disponibilizada, permitindo que os usuários tenham mais praticidade em construir sua função.

Figura 15: Barra de Pesquisa no Geogebra



FONTE: Própria

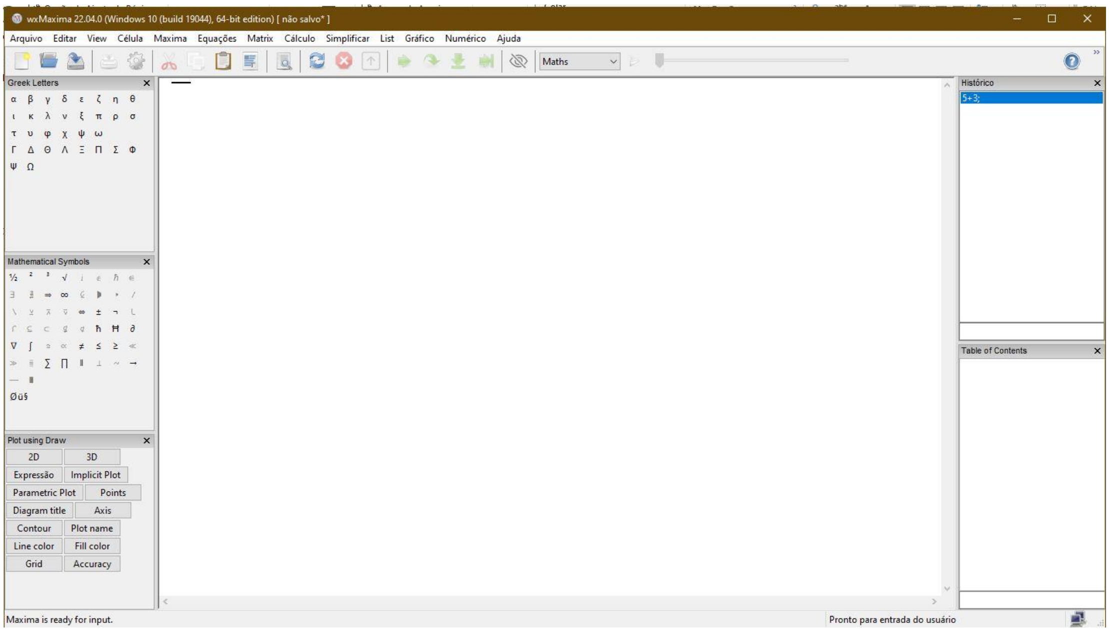
Na Figura (15), podemos verificar vários trabalhos criados por outros usuários e que estão guardados na plataforma, permitindo que os trabalhos e atividades sejam compartilhados com o intuito de facilitar a aprendizagem. Além de compreender como tal atividade foi produzida e tendo a possibilidade de adaptar para suas próprias aulas.

WxMAXIMA

O *WxMAXIMA*[2] surgiu na década de 1970 a partir do Macsyma, um sistema de álgebra computacional desenvolvido no Instituto de Tecnologia de Massachusetts. Refere-se a um *software* livre, que permite operar expressões algébricas e gráficos, operações matemáticas básicas ou avançadas. O MAXIMA é uma linguagem computacional que permite realizar cálculos numéricos e simbólicos, representações gráficas e efetuar programação, possuindo uma grande variedade de comandos para os mais variados fins em matemática e aplicações.

[2] https://maxima.br.uptodown.com/windows

Figura 16: Layout do máxima

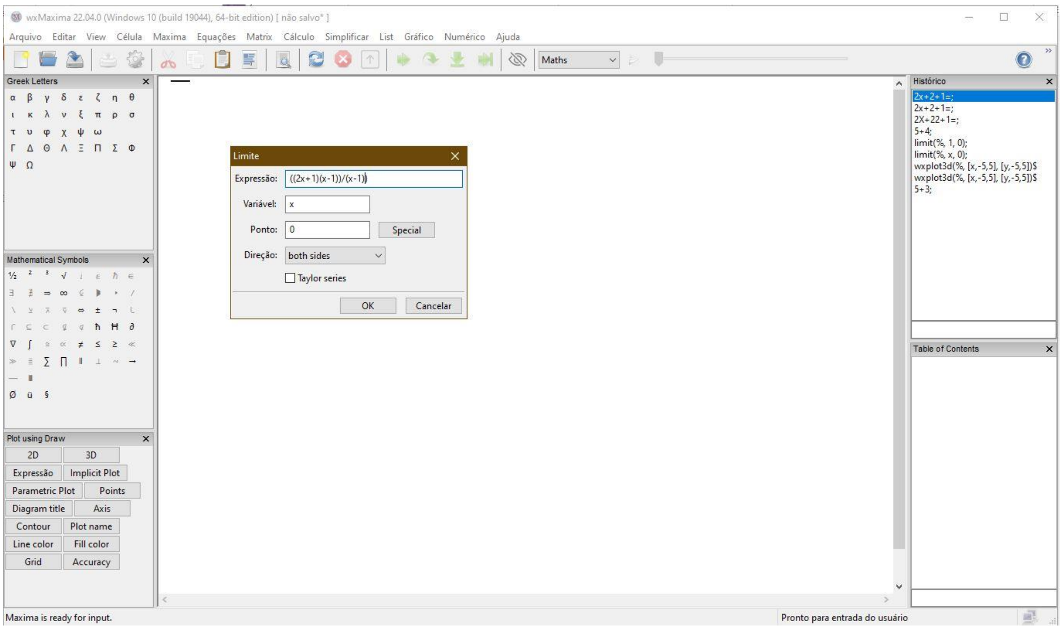


FONTE: Própria

Inicialmente vemos na imagem acima como é a tela inicial do programa, no qual possui diversas ferramentas integradas nele que possibilita ao aluno trabalhar com matrizes, equações e cálculos, sendo a janela em branco onde serão exibidos os resultados das operações.

Para estudar cálculo de limites, precisa-se inicialmente colocar o comando básico limit, no entanto, para facilitar o acesso, é possível usar o menu na parte superior e clicar sobre a janela cálculo e em seguida clicar em limite, então uma aba semelhante a da figura abaixo surgirá, e nela podemos inserir nossa função para que o *software* efetue o cálculo do limite. Também podemos calcular casos de limites especiais como, por exemplo, quando a variável tende ao infinito e também podemos calcular limites laterais.

Figura 17: Calculando limite

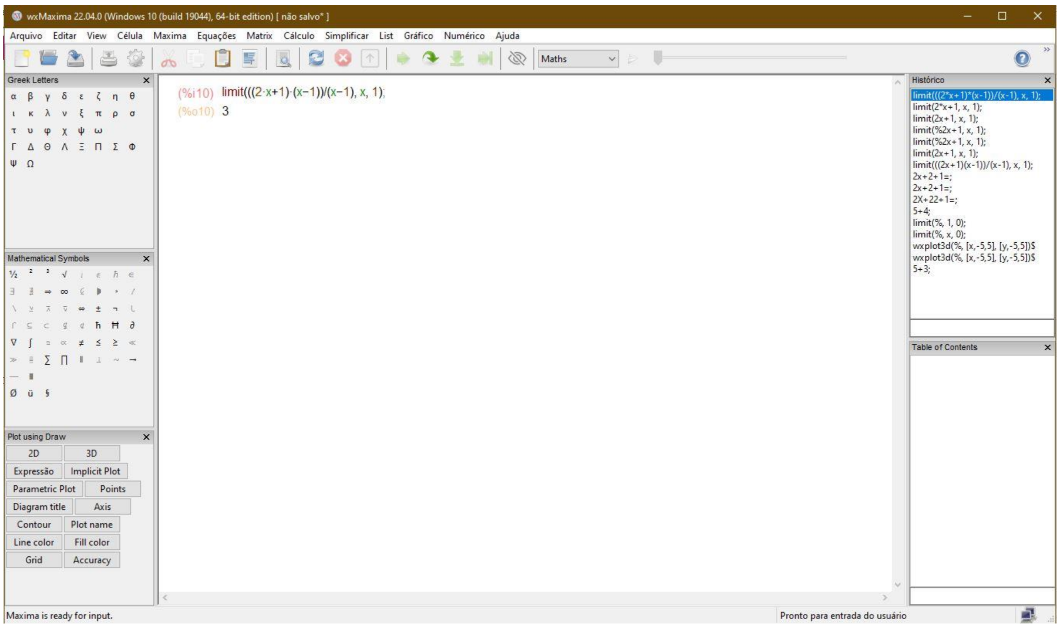


FONTE: Própria

Na Figura 18 a seguir, temos o resultado da expressão:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x+1).(x-1)}{(x-1)} = 3$$

Figura 18: Resultado do limite



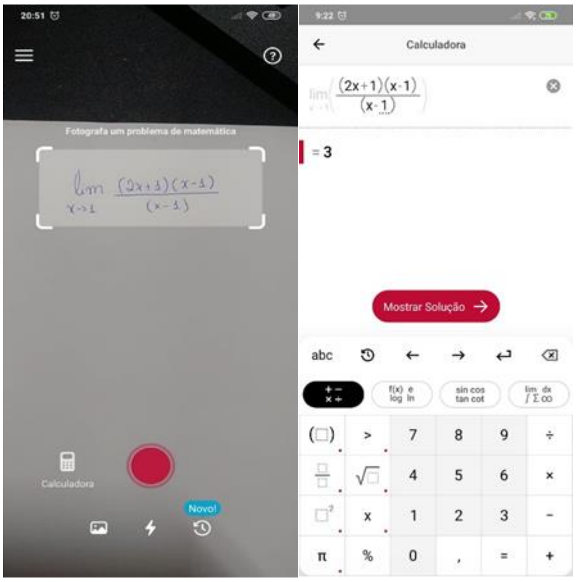
FONTE: Própria

No mesmo programa, o discente pode representar as funções em gráficos bidimensionais e tridimensionais, no qual, essa função no programa será comentada posteriormente.

Photomath

Foi lançado em 2014, criado por um pai que estava preocupado em ajudar seu filho nas lições de matemática em casa. O *Photomath*[3] foi desenvolvido por uma *startup* nomeada de *Microblink*, sediada em Zagreb, Croácia. O aplicativo permite que o usuário por meio de um *smartphone* fotografe o problema matemático ou digite manualmente na calculadora com intuito de obter o resultado de maneira rápida.

Figura 19: Layout do Photomath



FONTE: Própria

Caso o usuário tenha tirado a foto do problema e o aplicativo não identifique, o aplicativo tem uma aba que permite utilizar a calculadora para digitar a questão, no qual possui diversas ferramentas que possibilitam a construção do problema matemático. O *Photomath* abrange diversos tópicos matemáticos dentre eles temos a

[3] https://photomath.com/

matemática básica/pre-álgebra: Aritmética: conjunto de números, frações, potências, raízes, fatores; Álgebra: equações e desigualdades lineares, equações quadráticas entre outras, sistemas de equações, logaritmos, funções, matrizes, gráficos, polinômios; Trigonometria/pré-cálculo: identidades, vetores, números complexos, sequências e séries, funções logarítmicas; Cálculo: limite, derivadas, integrais, curvas; Estatísticas: combinações e fatoriais.

Figura 20: Resolução

FONTE: Própria

O aplicativo também disponibiliza uma aba de solução, no qual apresenta o processo do cálculo passo a passo até chegar na resposta correta e nesse meio o discente pode clicar para abrir informações sobre os passos, caso queira compreender como foi feito a resolução.

Symbolab

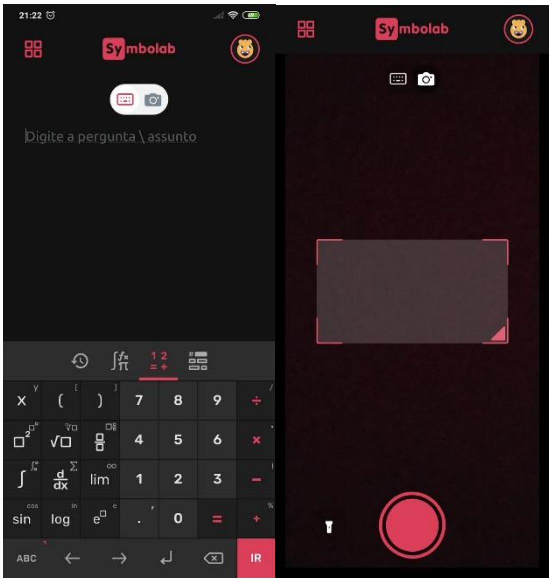
O *Symbolab*[4] é um aplicativo focado na educação matemática avançada criado pela Eqsquest, uma *startup* sediada em Israel com o intuito de tornar o conteúdo científico mais acessível. O aplicativo possibilita ao usuário descobrir tópicos matemáticos usando símbolos, notações científicas e textos. Fornece diversas

[4] https://pt.symbolab.com/

soluções automáticas iguais ao aplicativo citado no tópico anterior, no entanto, de maneira mais abrangente, apresentando mais facilidade na visualização dos gráficos que são necessários para compreender o comportamento da função. O aplicativo fornece recursos para que o usuário trabalhe com equações, equações simultâneas, inequações, limites, derivadas, integrais, reta tangente, equações trigonométricas, funções, entre outros.

O aplicativo possui a aba para fotografar ou digitar manualmente o problema, sendo sua tela de fácil acesso para qualquer usuário. Abaixo, podemos visualizar a tela inicial do aplicativo em ambos os casos citados.

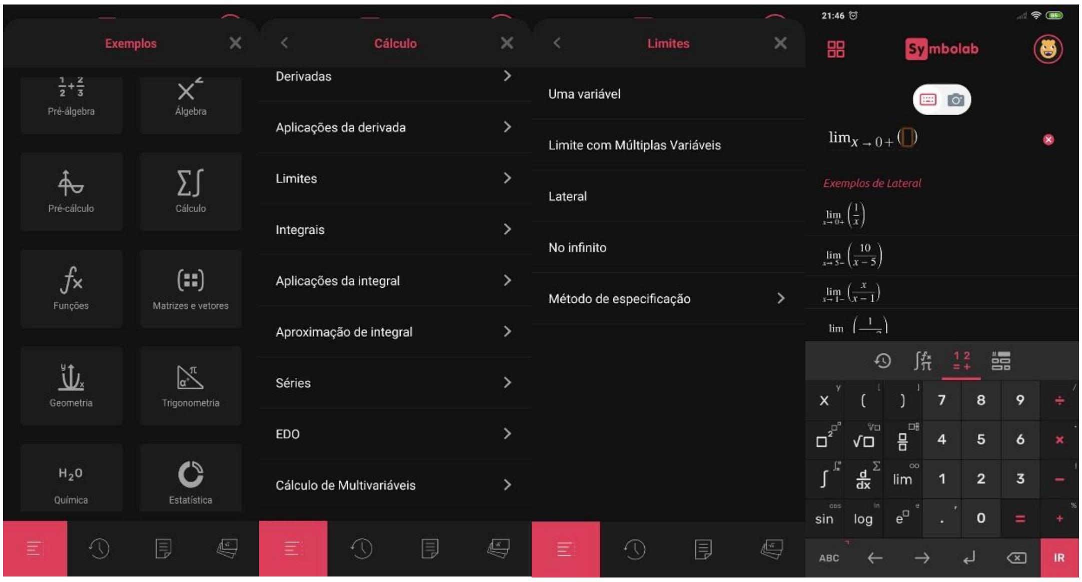
Figura 21: Tela inicial e de captura



FONTE: Própria

Como podemos visualizar nas imagens acima, no meio da tela temos a opção de mudar da calculadora que apresenta diversas opções para construir o problema, para a câmera fotográfica que constrói automaticamente o problema apenas analisando a imagem. Observe que no canto superior direito temos um botão que ao ser clicado dá acesso a uma tela com exemplos para cada assunto que queira trabalhar.

Figura 22: Tela de exemplos

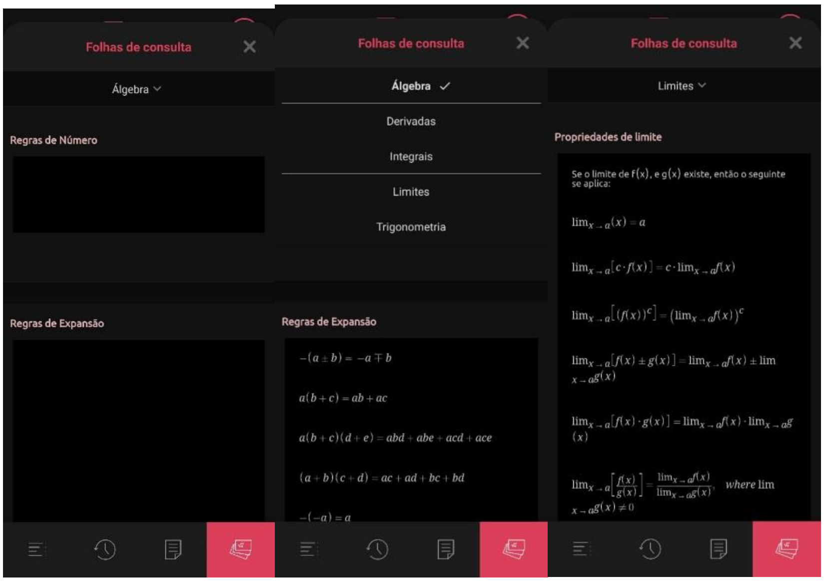


FONTE: Própria

Clicando no tópico cálculo, podemos escolher um que se queira estudar, por exemplo, limite. E, depois, podemos procurar tópicos mais específicos. Em si, o aluno tem acesso a exemplos de limites referentes ao tópico escolhido, como é apresentado na última imagem acima.

Outro ponto importante no aplicativo é a folha de consulta que se localiza na parte inferior da aba de exemplos, essa parte do aplicativo nos apresenta diversas propriedades e regras matemáticas, o que se torna de suma importância para o usuário, devido ter em sua palma da mão as informações necessárias para a disciplina escolhida.

Figura 23: Folha de consulta

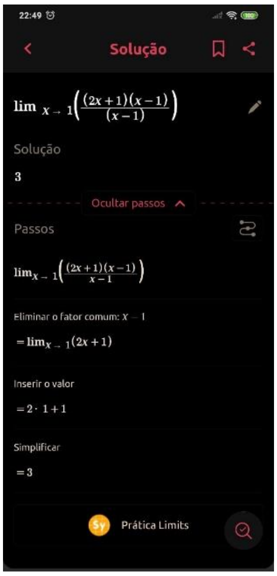


FONTE: Própria

Depois de apresentados os principais recursos, partiremos para a utilização de fato, onde o usuário caso queira digitar, poderá usar o teclado de acordo com o tipo de equação que deseja e ao final basta clicar no botão “ir” e o aplicativo mostrará o resultado ou caso queira utilizar a câmera basta focar a equação que deseja saber a solução e capturar através do botão vermelho localizado na parte inferior central, e em seguida o app. mostrará a resposta.

Em ambos os casos, o aplicativo não só mostra o resultado como mostra o passo a passo na figura abaixo, no entanto, ele possui limitações na versão gratuita e neste caso, não será mostrada toda a explanação na solução, apenas algumas partes.

Figura 24: Aba de solução



FONTE: Própria

Vale lembrar que o aplicativo só funciona se tiver conectividade com a internet, mas o diferencial fica por conta da opção que o usuário tem de compartilhar a resposta juntamente com o passo a passo ao toque de um botão localizado no canto superior direito da figura acima, onde o receptor receberá uma imagem juntamente com o link da resposta enviada.

Avaliando o Uso dos Softwares e Ferramentas Digitais

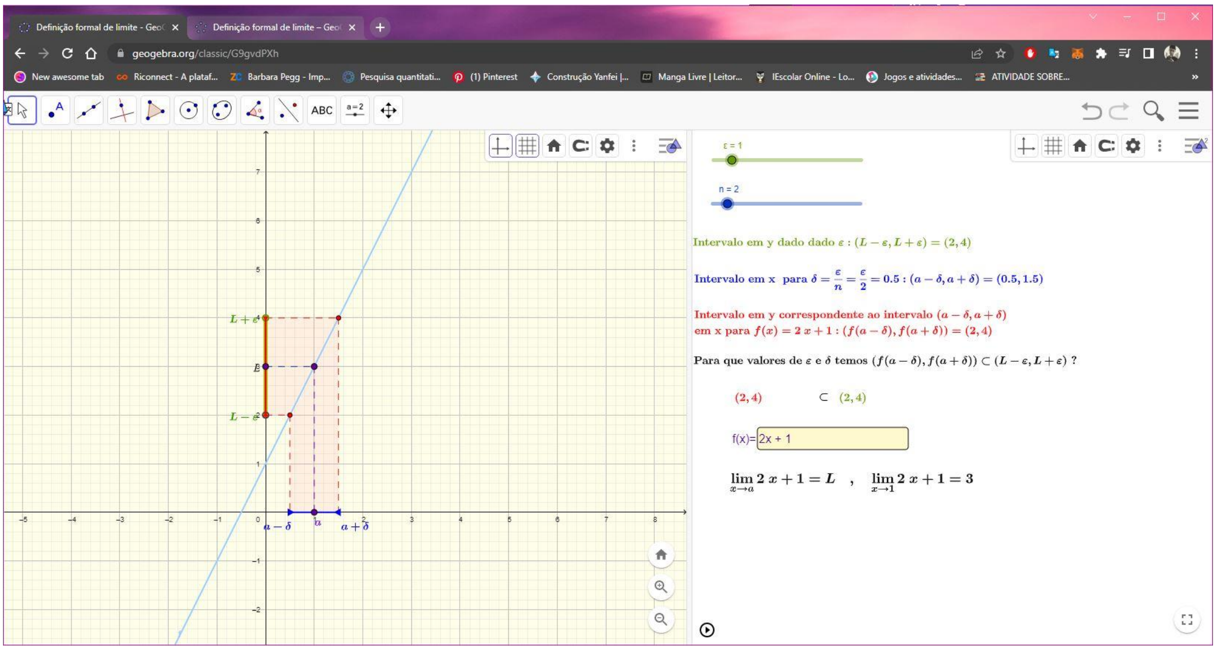
1º Situação - Geogebra

Na figura 25 aplicamos a função $f(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2x + 1$ na aba de inserir função do Geogebra, sendo essa função trabalhada inicialmente no livro de Vilches (2009) e Iezzi (2005) com intuito de apresentar ideia de aproximação. Para melhorar essa experiência, usaremos como base um modelo feito por Manoel Wallece[5] no *Geogebra.*

Aplicada a função, podemos notar que o *software* entrega automaticamente o limite e o gráfico da função apresentando os intervalos para melhor compreensão do discente.

[5] Manoel Wallace, “Definição de limite”, *geogebra*,2016, <www.geogebra.org/classic/G9gvdPXh>.

Figura 25: Definição formal de limite



FONTE: Própria

Na tela, o aluno pode acessar a ferramenta controle deslizante, no qual permite movimentar um ponto específico do gráfico, nesse caso como queremos estudar os valores próximos de *“a”* e *“L”*, que são respectivamente 1 e 3, ao movimentar essa ferramenta temos que o intervalo correspondem aumentando e diminuindo, ou seja, variando ε temos que δ também varia.

Ainda sobre a imagem acima, podemos ver que o intervalo de y é dado por $\varepsilon: (L-\varepsilon, L+\varepsilon) = (2{,}4)$ que corresponde ao intervalo em x que é dado por $\delta = \frac{\varepsilon}{n} = \frac{\varepsilon}{2} = 0.5: (a-\delta, a+\delta) = (0.5{,}1.5)$. Abaixo, no lado direito da imagem, temos o limite da questão que mostra que dado “*a*” tendendo a 1 o limite de “*L”* é 3 sendo que isso é algo que podemos comprovar, ao visualizar o gráfico na esquerda com o auxílio do “controle deslizante” para aproximar cada vez mais do ponto em questão.

Mesmo que o discente inicie com dificuldade para compreender o assunto, no *Geogebra* é possível trabalhar a ideia de “quem está aproximando de quem”, e a noção de “se aproximar” que os alunos tanto ouvem, por meio desse aplicativo, torna-se algo mais “fácil” de entender.

Guidorizi (2013) vê a necessidade do discente compreender inicialmente a ideia de continuidade de uma função para seguir no conceito de limite, ou seja, para caso o aluno tenha dificuldade entender a existência de limite, o autor explica o tópico de continuidade no intuito de apresentar que o limite não precisa está definido necessariamente no ponto para existir.

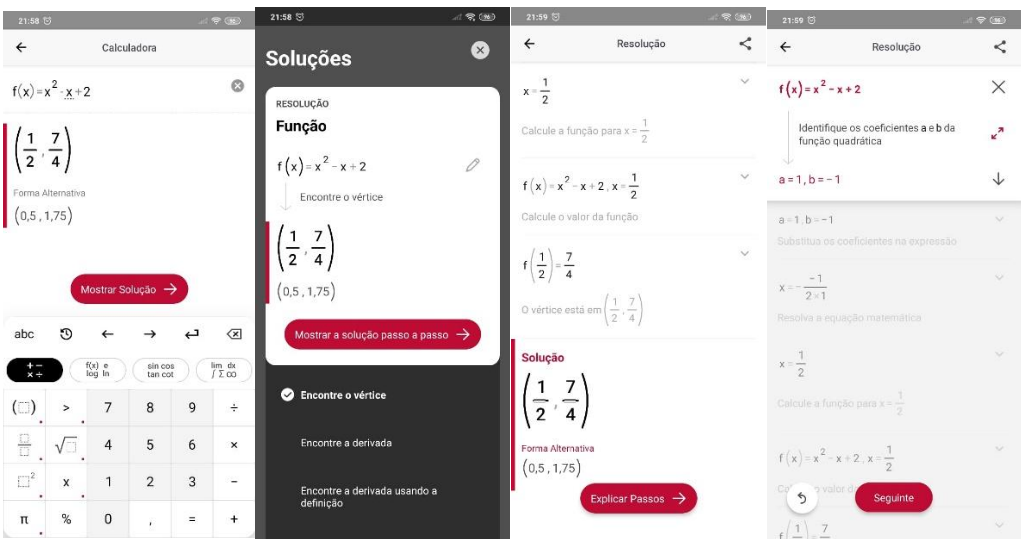
Podemos ver pela imagem apresentada anteriormente, que a função não está definida no ponto, porém o limite da função existe. Nesse caso, pela imagem o discente pode identificar que não existe “salto” e sim que ocorre um “buraco” que seria o ponto que não pertence a função, mas o professor pode orientar sobre esse caso, identificando o ponto como aberto.

Podemos ver pela imagem apresentada anteriormente, que a função não está definida no ponto, porém o limite da função existe. Nesse caso, pela imagem o discente pode não identificar o “salto” que seria o ponto que não pertence à função, mas o professor pode orientar sobre esse caso, identificando o ponto como aberto.

2º Situação – Photomath

É possível utilizar para trabalhar o conceito de limite, e acompanhar a aproximação dos pontos pelas laterais, o livro de Stewart (2013), no qual mostra a função: $f(x) = x^2 - x + 2$, e ao aplicar essa função no *Photomath*, teremos o seguinte caso:

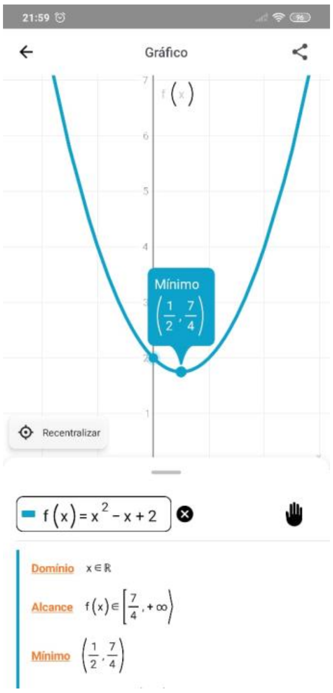
Figura 26: Resolução da função $f(x) = x\ 2 - x + 2$



FONTE: Própria

No qual, o gráfico contruído seria:

Figura 27: Representação da função no gráfico



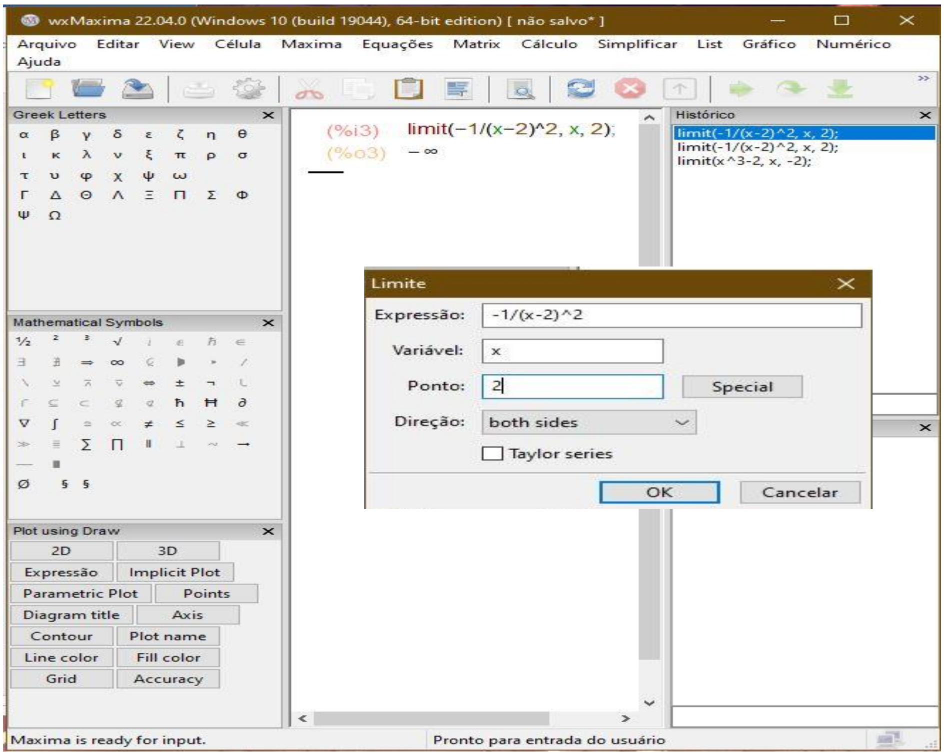
FONTE: Própria

Como podemos ver acima, o discente tem acesso ao desenvolvimento da expressão com o passo a passo, que ajuda a entender a resolução da mesma e quais as propriedades usadas. Além disso, o aluno pode visualizar o gráfico, no entanto, neste *software* o discente não possui os "controles deslizantes" e nem os valores se aproximando no ponto em questão, pois o foco do aplicativo é resolver os problemas.

3º Situação – WxMAXIMA

No *MAXIMA* o discente trabalha por meio de comandos que podem ser de suma importância para o processo de aprendizagem, e que pode contribuir no futuro, quando for necessário o uso de programas em trabalhos acadêmicos. O discente poderá calcular o limite da expressão após colocar as informações necessárias para que o *software* efetue o cálculo do limite. Utilizando um exemplo do livro de Flemming (2006) da página 64, temos:

Figura 28: Construindo o limite da função

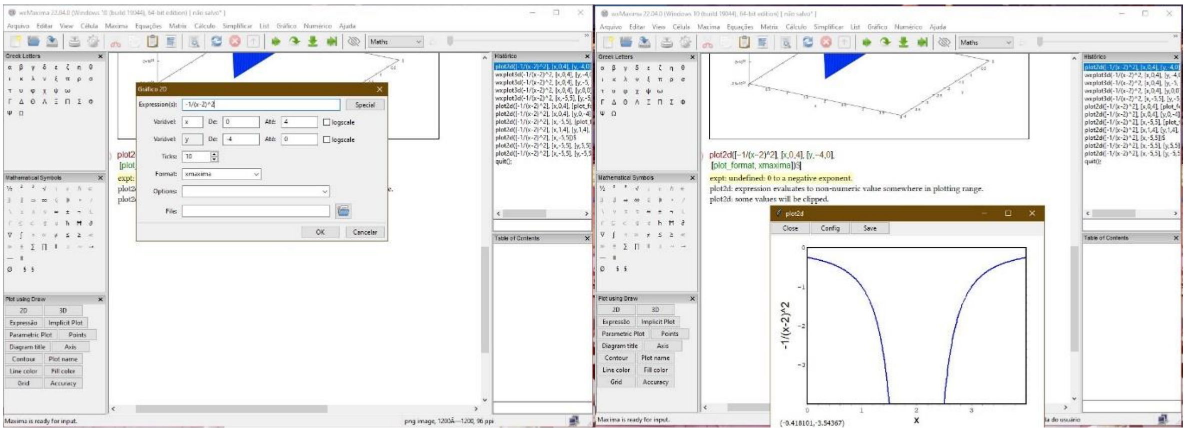


FONTE: Própria

Na figura 28, ao colocar a expressão: $\frac{-1}{(x-2)^2}$, podemos notar que o limite da função tende a menos infinito quanto mais próximo do ponto 2, porém, note que a função possui limite mesmo não sendo contínua, devido o ponto não pertencer ao domínio da função.

No caso, para visualizar o gráfico dessa função, é necessário que o discente clique no “menu” e na aba “gráfico” e escolha o modelo que deseja. Observe que na figura abaixo ao clicar "ok", o modelo do gráfico é gerado automaticamente, no entanto, não se tem acesso a nenhuma informação a mais.

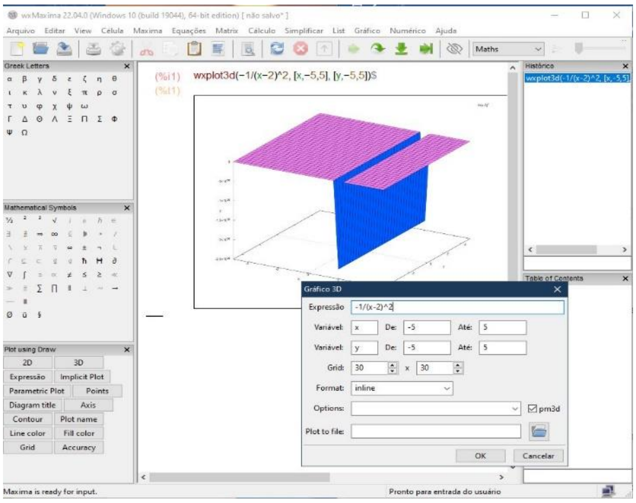
Figura 29: Construindo gráfico de funções no WxMAXIMA



FONTE: Própria

A tela para representar o gráfico surge em uma nova aba, no qual o discente pode observar tanto a expressão e o gráfico gerado, além de estudar os pontos nele, mas não tendo uma interação no gráfico. Outro ponto, é o discente querer uma visualização tridimensional do gráfico, como é mostrada na figura 30.

Figura 30: Visualização tridimensional

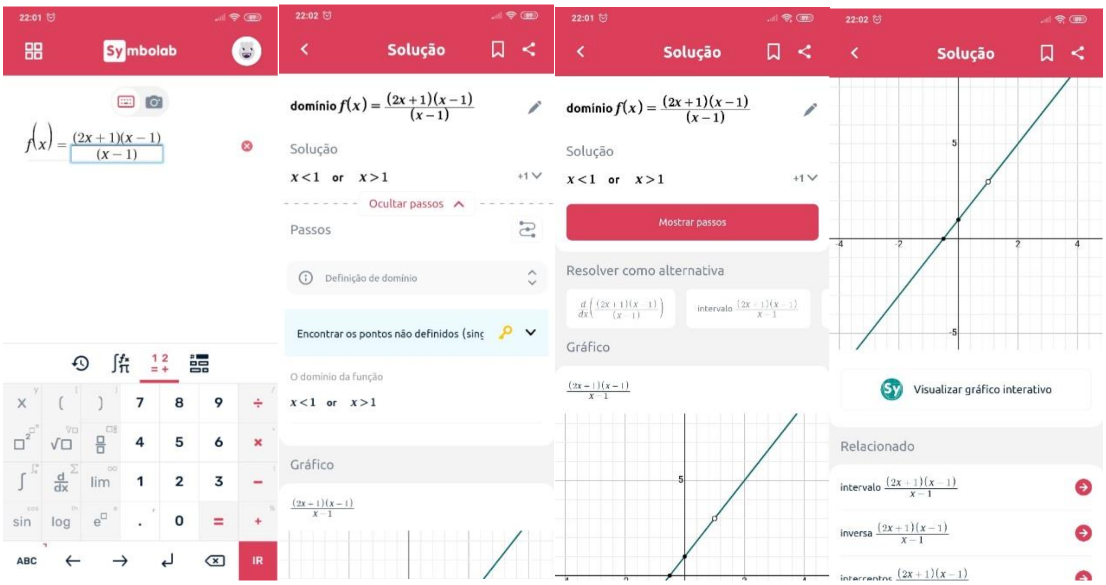


FONTE: Própria

4º Situação – Symbolab

O *Symbolab* segue o mesmo caso do *Photomath*, ou seja, ele trabalha apenas na resolução dos problemas propostos e apresenta a aplicação dessas propriedades no problema. Neste sentido, ele contribui no contexto do uso adequado das propriedades que facilitam o desenvolvimento da questão.

Figura 31: Resolvendo a função no *Symbolab*



FONTE: Própria

No entanto, devido ao *software* ser limitado pelo fato de necessitar a compra de um plano para o uso completo, o aluno só poderia acessar as demais explanações sobre o problema se caso comprasse a mensalidade.

Na função apresentada nas imagens, podemos avaliar o gráfico e identificar o ponto que não pertence ao domínio da função. O aplicativo permite ao discente entender a ideia sobre aproximação ou sobre a função ser contínua ou não, no entanto, o discente não possui tanta interação com o gráfico. No entanto, o aplicativo permite ao discente entender a ideia de sobre aproximação ou sobre a função ser contínua ou não, no entanto, não possui tanta interação no aplicativo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando alguns dos trabalhos já realizados até o momento, podemos compreender que a educação tem passado por constantes mudanças e que ao longo do tempo essas mudanças vêm sendo moldadas. Como professores, é preciso nos adaptarmos à época que nos encontramos e dar sentido aos trabalhos que vêm sendo desenvolvidos.

A disciplina de Cálculo é de suma importância para o graduando no curso de Licenciatura em Matemática, no qual ele vai precisar para as demais disciplinas, além de ser utilizadas nas atividades de qualquer engenharia e compreender o conceito de limite é necessário para esse progresso.

No entanto, os discentes vêm com uma "bagagem" incompleta devido a diversos fatores vivenciados durante a sua trajetória educacional, dificultando sua aprendizagem. Com a chegada da conhecida "era digital", cresceu a necessidade de nos adaptarmos a essa nova realidade e utilizarmos essas ferramentas para complementar o que é visto em sala de aula. Durante o desenvolvimento deste trabalho, podemos ver os pontos positivos e negativos de 4 *softwares* que são eles o *Geogebra, WxMAXIMA, Photomath* e o *Symbolab.*

Dentre os *softwares* estudados, podemos destacar o *Geogebra*, que é um excelente programa que pode ser acessado tanto pelo computador como pelo aparelho celular. Esse programa é completo e gratuito, nele é possível trabalhar com diversas expressões de cálculo, além de permitir uma interação melhor com os gráficos construídos e permitir criar anotações para melhor compreensão, além de o usuário exportar e importar material de ajuda, criando um sistema assim de ajuda mútua.

O *WxMAXIMA* é um ótimo programa, porém os discentes podem sentir estranheza ao utilizá-lo, devido o layout não ser simples e, devido às informações serem repassadas de forma extensa, o discente pode acabar se confundindo. As resoluções das questões são feitas por meio de comandos que se tornam interessantes de se aprender, pois podem ser utilizados em outros programas.

O *Photomath* tem um grande potencial, pois, no passo a passo, mostra cada detalhe dos cálculos até chegar ao resultado. Além disso, apresenta, dependendo das expressões, o gráfico para que o aluno possa entender melhor o que foi visto na solução. Com isso, o discente pode utilizar a solução, como exemplo e basear-se em outros problemas,

O *Symbolab*, devido ser o *software* pago, tem diversas restrições, no entanto, ele apresenta diversas outras possibilidades, uma delas é permitir ao discente estudar as diversas regras e propriedades que ficam na “folha de consulta” do aplicativo. Algo que atrapalha a eficiência do aplicativo, é que na aba de passo a passo, algumas partes como o uso da propriedade ou o motivo de usá-la, fica bloqueado, e para desbloquear, é necessário que os discentes comprem o pacote que mais se adequa a sua necessidade.

Por fim, utilizar ferramentas virtuais e *softwares* pode contribuir no entendimento do discente no que diz respeito ao conceito de limite de função, no qual devido a facilidade em construir e acessar os resultados, além destes acompanhados com o livro como base, o discente pode compreender melhor os pontos que são necessários para entender o tópico discutido no trabalho.

Os aplicativos são meios que facilitam os métodos de aprendizagens se bem usados e aplicados, no meio universitário, onde o ambiente são mais propícios a inovações, torna-se essencial para facilitar esse processo. No entanto, o uso de ferramentas digitais apenas para a busca de soluções prontas não é eficaz no processo de ensino aprendizagem, e para isso o aluno deve ter a consciência e maturidade de utilizar tais recursos. Sendo, que se torna necessário um estudo mais aprofundado utilizando essas ferramentas e aplicando-as em sala de aula, mas já pelas informações coletadas neste trabalho dependendo do ambiente e do professor em como usar essas ferramentas, pode contribuir na expansão de nossa educação.

Porém, vale destacar que o uso dos *softwares* é para propiciar uma melhor visualização e compreensão do que está sendo estudado e não apenas para consultar e ver qual a resposta correta do problema. Constantemente estamos observando as diversas mudanças que ocorrem ao nosso derredor e dominar essas ferramentas para facilitar nosso aprendizado, é de suma importância.

Por fim, como comentado, se torna necessário uma aplicação em casos reais, que poderão servir para comprovar essa funcionalidade das ferramentas digitais, nesse caso, um aplicação futura em uma turma na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, mas direcionada ao estudo de limites de funções com a proposta do uso dessas ferramentas no estudo do conceito e da resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Carlos *et al*. A Matemática na formação inicial de professores. **Lisboa: APM e SPCE**, v. 2003, 2006.

ALVES, Leopoldo José *et al*. **Estudo do conceito de limites de funções reais no ensino médio**: uma proposta de atividades utilizando o software WxMAXIMA. 2018.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo–FEUSP, São Paulo, SP, Brasil. Recuperado de https://www. teses. USP. br/teses/disponiveis/48/48133/tde-06022004-105356/publico/Tese. pdf, 1999.

BOCKER, Ronally Kelly Dantas. **Limites**: aplicações e uma extensão do conceito. 2017.

CORRÊA, MAURICIO A. VILCHES-MARIA LUIZA. **CÁLCULO**: VOLUME I.

CURY, Antonio. **Organização e métodos**: uma visão holística. In: Organizaçao e métodos: uma visao holística. 1995. p. 576-576.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**, tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP. Editora da Unicamp, 2011. Limites, derivadas e noções de integral. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005. v. 8.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: Funções, limites, derivadas e integração. 6ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FONSECA, Vilmar; HENRIQUES, Ana. A aprendizagem do conceito de limite de funções com recurso a tarefas exploratórias e ao Geogebra. **ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, Évora, Portugal, 2016.

GIL, Antonio Carlos *et al*. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, vol. 1. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

HALLAL, R.; PINHEIRO, N. A. M.; OLIVEIRA, R.; FALCÃO, A. P. **Ensinando Matemática à Luz da Teoria de Edgar Morin**: Uma Abordagem para o Ensino Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I. Espacios. v.40, n.19, 2019.

HELLMANN, Liliane et al. Geogebra no ensino de cálculo diferencial e integral i. **Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia**, v. 7, n. 16, p. 31-46, 2016.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J**. Fundamentos de matemática elementar**:

JUTER, Cristina. Limites de funções: **Desenvolvimento do conceito de estudantes universitários**. 2006. Tese de Doutorado. Luleå tekniska universitet.

LAKATOS, E. Maria; MARCONI, M. de Andrade. **Fundamentos de metodologia científica**: Técnicas de pesquisa. 7ed. – São Paulo: Atlas, 2010.

MACEDO, Maria José Herculano *et al*. Geogebra no estudo de limites: dificuldades ou soluções. VII CONEDU - **Conedu em Casa**... Campina Grande: Realize Editora, 2021. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/79928>. Acesso em: 10 out. 2022.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Fundamentos de cálculo**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

PRODANOW, C. C.; FREITAS, E. C. **Métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2ª ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RAFAEL, Rosane Cordeiro. **Cálculo Diferencial e Integral**: um estudo sobre estratégias para redução do percentual de não aprovação. 2017. Tese de Doutorado. Dissertação de mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora.

SEVERINO, Antonio Joaquim**. Metodologia do Trabalho Científico**. São Paulo: Cortez, 2007.

STEWART, James. **Cálculo**, Volume I. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TALL, D. O. **A Transição para o Pensamento Matemático Avançado Funções, Limites, Infinito e Prova**, traduzido por Pinto, MMF Departamento de Matemática–Faculdade de Educação, UFMG. Publicado em Grows DA (ed) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. 1992.

TALL, D.; SMITH, D.; PIEZ, C. Technology and Calculus. In: HEIDM. K.; BLUME, G. M. (Ed.). **Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics. Charlotte**, NC: Information Age Publishing, 2008. v. 1. p. 207 - 258.

WALLACE, Manoel**. Definição de limite, *geogebra*,** 2016. Disponível em: <www.geogebra.org/classic/G9gvdPXh>. Acesso em: 01 de jan. de 2023

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de trabalho de conclusão de curso

Assunto:	Entrega de trabalho de conclusão de curso
Assinado por:	Jose Nathan
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Jose Nathan Alves Roseno**, **ALUNO (201622020030) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 17/03/2023 10:10:36.

Este documento foi armazenado no SUAP em 17/03/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 781714
Código de Autenticação: 9719099401