INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FÁBIO BATISTA DE ABREU

MÉTODOS RESOLUTIVOS DAS EQUAÇÕES CÚBICAS

CAJAZEIRAS
2023

FÁBIO BATISTA DE ABREU

MÉTODOS RESOLUTIVOS DAS EQUAÇÕES CÚBICAS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à **Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba** Campus Cajazeiras, como requisito parcial para a obtenção do grau de **Licenciado em Matemática**.

Orientador:

Prof. Me. José Doval Nunes Martins.

Cajazeiras

2023

FÁBIO BATISTA DE ABREU

MÉTODOS RESOLUTIVOS DAS EQUAÇÕES CÚBICAS

Trabalho de Conclusão de curso submetido à **Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 27/03/2023

Banca Examinadora:

José Doval Nunes Martins

Prof. Me. José Doval Nunes Martins
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

João Paulo de Araújo Souza

Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Stanley Borges de Oliveira

Prof. Me. Stanley Borges de Oliveira
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

A162m Abreu, Fábio Batista de.

Métodos resolutivos das equações cúbicas / Fábio Batista de Abreu. – 2023.

52f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2023.

Orientador(a): Prof. Me. José Doval Nunes Martins..

1. Equações de terceiro grau. 2. Equação cúbica - Ensino médio. 3. Fórmula de Viete. 4. Casos irredutíveis. 5. Ensino de matemática. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ CDU: 511.14:37

Todo meu empenho dedico a meus pais e familia, pois são os únicos que me fazem seguro e persistente na luta para realização dos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente, sempre primeiro, a Deus por me conceder a vida e também por estar sempre do meu lado quando precisei, como nos momentos de aflição para superar os problemas adversos durante todo caminho percorrido, por suas bençãos para que esse TCC esteja finalizado, para que eu posso da caminhada para uma próxima etapa vitoriosa como foi essa, toda honra e glória são de Deus, pois tudo é dele, por meio dele, para ele, juntos e sempre. Agradeço por demais ao meu orientador Professor Mr. José Doval Nunes Martins por toda sua capacidade e paciência, por seus grandes ensinamentos, tanto como orientador, quanto como professor em sala de aula, que veio contribuir diretamente para que esse trabalho fosse concluído com o sucesso devido. Grande parte dos meus agradecimentos não poderia diferir, que é a toda minha família por sempre estarem ao meu lado, em especial a minha mãe Jacira Batista de Abreu, meu pai Francisco Nunes de Abreu, também a todos os meus irmãos e meus avós, que fazem parte da minha garra e perseverança, me alegram e concedem o meu conforto sempre que preciso, eles que são os responsáveis por toda minha segurança. Agradeço a minha namorada Mirelle, que veio a entrar na minha vida em um dos momentos que mais precisei nessa jornada, quando estive lotado de diversos deveres para resolver e quando estive distante da minha família, correndo perigos para chegar até casa, ela estava lá me dando forças e motivações para continuar, mesmo precisando muito de mim, compreendeu muitas vezes o motivo de minhas ausências, não só durante a produção desse trabalho, mas também durante uma parte dessa caminhada, sempre esteve lá me dando conselhos e incentivos para não desistir, nos momentos mais difíceis esteve me falando para que continuasse o TCC que faria parte do nosso futuro. Para todos os meus colegas de curso quero deixar meus agradecimentos, todas aqueles que me apoiaram bastante, em especial meu grande amigo José Nonato que sempre me incentivou e me fez enfrentar tudo com alegria e diversões. Todo agradecimento para todas as pessoas que fizeram parte dessa minha fase da vida, mesmo aqueles que fizeram parte do meu crescimento de forma indireta com seus lados negativos que me fizeram aprender algo para levar para a minha vida.

"A motivação é uma porta que se abrir por dentro."

Mario Sergio Cortella, Por que fazemos o que fazemos.

RESUMO

No presente trabalho, aprofundamos no estudo dos métodos de solução das Equações do Terceiro Grau, realizado após ter identificado que os livros didático, especialmente os do ensino médio, são desprovidos de uma sequência logicamente estruturada sobre as definições e propriedades específicas que constituem estes conteúdos, com isso, a elaboração de uma complementação teórica mais significativa foi buscada, com intuito de conceder um estudo característico e mais específico sobre esse assunto, mostrando alguns dos contextos históricos, definições primordiais e também os principais métodos resolutivos. O problema norteador da pesquisa, é a falta de um conteúdo com sequência lógica e específica, tratando-se de equações cúbicas nos livros do Ensino Médio. O objetivo geral do trabalho é trazer métodos algébricos que possam solucionar problemas de equações cúbicas com coeficientes reais cujas raízes são todas irracionais que possa ser apresentado no Ensino Médio. Os objetivos específicos são, trazer um contexto histórico sobre as equações cúbicas, entender e exemplificar os métodos de Cardano e Viete, ultilizados para solução das equações do terceiro grau. Sendo assim, o presente trabalho, com os dados apresentados notamos que poderia torna-se necessário que contém os contextos históricos e os dois métodos resolutivos para solucionar problemas de equações cúbicas, com uma sequência didática mais lógica, apresentada no trabalho , pois, é um conteúdo que têm um significado e importâcia inestimavel, mas, não é encontrado nos livros do Ensino Médio. Dessa forma, recorremos a uma pesquisa de caráter qualitativa e de natureza básica, pois busca o aprofundamento em um determinado conteúdo. Sendo assim, foi realizada uma pesquisa bibliográfica exploratória, bibliográfica porque a pesquisa foi desenvolvida com base em materiais que já existiam, e exploratória, pois buscava uma maior familiaridade com o problema.

Palavras-chave: Equações Cúbicas. Caso irredutível. Formula de Viete. Metódos resolutivos.

ABSTRACT

In the present work, we deepened the study of the methods for solving Third Degree Equations, carried out after having identified that textbooks, especially those of high school, are devoid of a logically structured sequence on the configurations and developed properties that develop these contents, with this, the elaboration of a more significant theoretical complementation was sought, with the intention of granting a characteristic and more specific study on this subject, showing some of the historical contexts, primordial definitions and also the main resolving methods. The guiding problem of the research is the lack of content with a logical and specific sequence, when it comes to thinking about cubes in high school books.The general objective of the work is to bring algebraic methods that can solve problems of cubic reflections with real coefficients whose roots are all irrational that can be presented in High School. The specific objectives are to bring a historical context about cubic meditations, to understand and exemplify Cardano and Viete's methods used to solve third degree anxieties. Therefore, the present work, with the presented data, we noticed that it could become necessary that it contains the historical contexts and the two solving methods to solve problems of cubics, with a more logical didactic sequence, presentation in the work, therefore, it is a content which has inestimable significance and importance, but is not found in high school textbooks. In this way, we resorted to a research of a qualitative nature and of a basic nature, as it seeks to deepen in a certain content. Therefore, an exploratory bibliographical research was carried out, bibliographical because the research was developed based on materials that already existed, and exploratory, because it sought a greater familiarity with the problem.

Keywords: Cubic Equations. Irreducible Case. Viete Formula. Resolving Methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Nicolló Tartaglia. 16
Figura 2.2 – Ars Magna A Grande Arte. 18
Figura 3.1 – Plano de Argand-Gauss 21
Figura 3.2 – Conjugado de z 21
Figura 3.3 – Forma polar de z 22
Figura 3.4 – Representação geométrica da raízes cúbicas de z 24
Figura 4.1 – Representações gráficas dos casos positivos 34
Figura 4.2 – Representações gráficas dos casos iguais a zero 35
Figura 4.3 – Representações gráficas dos casos negativos 35
Figura 5.1 – Redução ao primeiro quadrante 41

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **11**

2 PRINCÍPIOS HISTÓRICOS SOBRE O ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU **13**

2.1 Contexto Primordial Sobre as Equações do Terceiro Grau . . . **13**

3 REQUESITOS BÁSICOS PARA O ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO TERÇEIRO GRAU **20**

3.1 Números Complexos **20**

3.1.1 Forma Polar de um Número Complexo 22

3.2 Polinômios **25**

3.3 Equações polinomiais **26**

3.4 Equação do Segundo Grau **27**

3.4.1 Relações de Girard Para as Equações do Segundo Grau 29

4 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TERÇEIRO GRAU **30**

4.1 Desenvolvimento Algébrico do Método de Cardano **30**

4.2 Natureza das Raízes de uma equação do Terceiro Grau **33**

5 RESOLUÇÃO PARA CASOS IRREDUTIVEIS **38**

5.1 Casos Irredutiveis **38**

5.2 Solução Para Casos Irredutíveis **40**

5.2.1 Solução de Equações do Caso Irredutível Usando Números Complexos. . 40

5.2.2 Solução de Equações do Caso Irredutível Usando o Método Trigonométrico de Viete. 44

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS **49**

REFERÊNCIAS **51**

1 INTRODUÇÃO

A procura pela desmistificação das soluções para as equações polinomiais é considerado um dos marcos históricos mais antigos e importante da área matemática, pois, incluía conhecimentos diversos solucionados e modelados para utilizar equações polinomiais, dentre as quais são mais reconhecidas as compostas de polinômios de primeiro, segundo, terceiro e grau.

Motivado pela importância e complexidade destes assuntos, vamos enfatizar neste trabalho os métodos de solubilidade para as equações de grau três (também conhecidas como cúbicas), que são encontradas sem uma sequência didática em diversos materiais do Ensino Médio e Superior, diferente de outros assuntos, como equações do primeiro grau, segundo grau e funções, que são bem detalhados.

Nas palavras de Eves (1995, p.302) , "o feito matemático mais extraordinário do século XVI foi a descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbicas e quárticas".

Ao estudar a solução de algumas equações do terceiro grau, tanto no terceiro ano do Ensino Médio quanto na disciplina de Matemática Básica III do Curso de Licenciatura em Matemática que estou cursando, percebe-se que os métodos utilizados para determinar as soluções não incluem a solução das equações desse tipo que possuem todas as raízes irracionais.

Segundo Antonio (2021, p.18), ao analisar alguns livros do Ensino Médio, dentre eles o livro Matemática — Ciência e Aplicações — vol 3, ano 2016, escrito pelos autores Gelson Iezze, Osvaldo Dolce, David Degrnsszanln, Roberte Périgo e Nilze de Almeida, os métodos aplicados pelos autores (Dispositivos de Briot-Ruffini, Relações de Girard e Teorema das raízes racionais) impedem a generalização para a resolução de todas as equações do terceiro grau, ou seja, os métodos apresentados pelos autores não contemplam as equações do terceiro grau que possuem todas as raízes irracionais.

Sabendo que, para solucionar problemas como os casos das equações cúbicas que possuem todas as raízes reais irracionais, é preciso ir mais à fundo nesse assunto, tornando conveniente ter matériais de caráter específico sobre este conteúdo. Então, pensando nisso o objeto de estudo relaciona-se com a produção de um ativo de adesão teórica para educadores e educandos, seja do Ensino Médio ou Superior, que despertarem curiosidade ao pesquisar encontre um material mais detalhado sobre estudo das equações cúbicas.

Esse trabalho visa investigar a seguinte problemática. Existe algum método algébrico para a resolução de equações do terceiro grau com coeficientes reais cujas raízes são todas irracionais que possa ser apresentado no Ensino Médio?

Nesse sentido, esse trabalho tem como objetivo geral, trazer os estudo sobre os métodos algébricos desenvolvidos por Cardano e Viete para resolução de equações do terceiro grau com coeficientes reais. Visando este propósito têm-se como objetivos específicos: Conhecer um breve histórico das equações polinomiais; entender e exemplificar o método algébrico de Cardano na resolução de equações do terceiro grau; entender e exemplificar o método de Viete na resolução de equações do terceiro grau que possuem somente raízes irracionais.

Dessa forma, recorremos a uma pesquisa de caráter qualitativa, e de natureza básica, pois busca o aprofundamento em um determinado conteúdo. Sendo assim, foi realizada uma pesquisa bibliográfica exploratória, bibliográfica porque a pesquisa foi desenvolvida com base em materiais que já existiam, e exploratória, pois buscava uma maior familiaridade com o problema. Sousa e Oliveira (2021, p.68).

A coleta de dados foi realizada usando livros e base de dados como Google Acadêmico e repositórios de universidades para busca de artigos e dissertações que abordam a resolução de equações do terceiro grau.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos. No primeiro capítulo buscamos fazer um breve histórico sobre as equações do terceiro grau. Já no segundo capítulo apresentamos alguns resultados que entendemos ser necessários o conhecimento para a abordagem do tema.

Sobre terceiro capítulo procuramos fazer uma abordagem da fórmula de Cardano, onde primeiro foi feito a dedução da fórmula e do estudo da análise das raízes da equação de terceiro grau. Por fim, no quarto capítulo, apresentamos a solução dos casos irredutíveis, que são os casos de equação de terceiro grau que tem as três raízes reais e sempre recaem em números complexos quando resolvidos pela fórmula de Cardano. Mostramos ser possível resolvê-los através de funções trigonométricas, método atribuído a Viete.

2 PRINCÍPIOS HISTÓRICOS SOBRE O ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU

Aprofundando ao meio da discussão sobre os aspectos característicos direcionados ao estudo das equações do terceiro grau, convém estudar previamente sobre os acontecimentos primordiais que impulsionaram o avanço e descoberta dos resultados adquiridos nessa área da matemática. Dessa forma, este capítulo aborda os fatos históricos a respeito das equações do terceiro grau, ou seja, suas contextualizações históricas, que introduziram os resultados que conhecemos hoje.

Todo o contexto histórico, métodos e relatos que foram expostos, estão assegurados após os estudos de livros e artigos, de autores diferentes que atuaram em épocas distintas onde os mesmos escreveram e publicaram seus estudos sobre épocas passadas que são: Matos (2014), Casaroto (2013), Eves (1995), Gomes e Gomes (2010), Lima (1991), Lima (1987), Melo (2022).

2.1 Contexto Primordial Sobre as Equações do Terceiro Grau

O surgimento de diversas dúvidas para se obter soluções de questões algébricas prevaleceram nesse período que não existiam estudos mais desenvolvidos sobre está categoria de assunto . Dessa forma surgiram problemas e curiosidades sobre as equações cúbicas para serem resolvidas, com isso grandes disputas para solucionar estes problemas surgiram nessa época. Com isso, veio os primeiros passos da álgebra que tinham escritas diferentes das que é ultilizada atualamente, como aponta Gomes,

> Naquele tempo as equações não eram escritas utilizando variáveis. A variável que hoje chamamos de x era chamada de coisa, x^2 de censo, x^3 de cubo, x^4 de censo e assim por diante. Assim, a Álgebra de hoje era chamada de "a arte da coisa" ou "a coisa maior". Estas notações foram utilizadas até 1572, ano em que se deu o surgimento da Álgebra de Raphael Bombelli. (GOMES; GOMES, 2010, p.12)

Podemos perceber que historicamente as apresentações das equações se desenvolveram vagarosamente ao decorrer da história. Na história constar que, nesse período, aconteceram várias disputas, que concedia aos envolvidos reconhecimento, pois, ao vencer alguma dessas disputas seus nomes seria considerado um grande destaque entre tantas mentes geniais daquela época, mas para isso, não era suficiente apenas vencer a disputa, tinha que convencer para ter seu reconhecimento almejado.

Por volta de 1500 d.C., teve uma prática bem recorrente pela busca da resolução de equações de terceiro grau, onde atingiu um maior ápice de crescimento na Itália, onde os pioneiros matemáticos italianos tornaram-se especialistas no aperfeiçoamento desse tipo e equações, dominando a matemática naquela época. Como afirma Lima (1987, p.12), em suas palavras:

> [...]
>
> Por uma efervescência criativa e uma extraordinária explosão produtiva nas artes plásticas literaturas, arquitetura e ciência. Seu epicentro se localizou na Itália, onde surgiram gênios do porte daqueles já mencionados por G. Libri, na época bastante conhecido e mencionado, aos quais acrescentamos Scipione Ferro, Girolamo Cardono, Niccoló Tartaglia, Loudovico Ferrari e Galileu Galilei.
>
> [...]

Para Casaroto (2013, p.20), houve registros do ano 1510 que relatava sobre um renomado matemático italiano conhecido por Scipione Del Ferro apresentou nos seus estudos a fórmula para resolver as equações dos tipos $x^3 + px = q$, mas antes de publicar faleceu. Porém, ele apresentou todos seus estudos ao seu aluno Antônio Maria Fior, que por sua vez, tentou se apropriar do mérito do seu mestre.

Ter entre seus estudos soluções como essas trouxe grande reconhecimento para os italianos, consequentemente, descobertas como essas não podem ser consideradas comuns, pois são estudos que continuaram sendo lembrados por muitos anos. A solução algébrica da equações cúbicas descobertas pelos matemáticos italianos, já era previsto por eles, que este estudo muito valioso seria ainda mais reconhecido com o passar dos anos, como está acontecendo neste trablho, mesmo depois de se passsarem tantos anos.

Também nessa mesma época um matemático taletoso também conseguia resolver as equações cúbicas, de forma resumida sobre este feito descreve Eves (1995),

> Por volta de 1535, Niccoló Fontana de Brescia, mais conhecido como Tartaglia (o tartamudo), devido a lesões físicas sofridas quando criança que afetaram sua fala anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$. (EVES, 1995, p.302).

Naquela época os matemáticos, tais como Dell Ferro e Tartaglia resolviam estes tipos de problemas por ser autodidata, também tinham interesse de sobressair entre seus concorrentes nas disputas matemáticas e queriam ser reconhecido no meio a sociedade. Ter reconhecimento era necessário para poder usar matemática na ciência dos tiros de artilharia e ser porfesor de Universidades, o que mais despertava o interesse destes estudiosos.

Neste contexto, como Fior dicipulo de Scipione tinha em suas mãos este estudo valiosíssimo, não se conteve, após seu mestre falecer, se apropiou de suas descobertas para desafiar Tartaglia para um duelo em público, para soluçionar problemas que envolvesse principalmente às equações cúbicas, pois, Fior soube que ele também teria está solução. Com isso, Tartaglia, grande matemático talentoso que era, aceitou este desafio e assim realizaram este grande marco histórico.

De acordo com Casaroto (2013, p.20) desafio consistia na solução de diversos problemas que um deveria propor ao outro, Fior naturalmente, pretendia apresentar questões que dependessem de equações de terceiro grau, a qual ele sabia resolver. Porém, Tartaglia, com sua genialidade, além de resolver todas as questões propostas pelo seu oponente, desafiou-o a apresentar a solução geral para as equações do terceiro grau do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. Fior ao contrário de Tartaglia não foi capaz de apresentar tal solução.

Sobre os feito de Niccoló Tartaglia, pode-se destacar que:

> [...] Tartaglia sabia, pelas questões que lhe foram propostas, que tal fórmula devia existir, enquanto Fiore não podia ter essa certeza. Quem já fez pesquisa em matemática sabe a grande diferença que isso faz. É a mesma que existe entre resolver um exercício ou demonstrar um novo teorema. Tartaglia resolveu de um golpe os 30 problemas de Fiore, ganhou a disputa e recusou magnanimamente os 30 banquetes estipulados como prêmio ao vencedor.(LIMA, 1991, p.13).

Deveríamos também acrescentar sobre acontecimentos na vida de Niccoló Tartaglia, contado em Eves (1995, p.307). Tartaglia teve uma infância difícil, nasceu em Brescia no ano de 1499, filho de pais muito pobres, e presenciou a tomada de sua cidade natal pelos franceses em 1512, onde quase foi morto junto com seu pai, mas graças a sua mãe que o salvou sobreviveu. Foi um matemático muito talentoso que conseguiu varíos feitos na sua vida até a sua morte que foi em 1557. Na(Figura 2.1) abaixo o grande matemático Nicolló Tartaglia.

Figura 2.1 – Nicolló Tartaglia.

Fonte: (TARTAGLIA,)

Este feito de Scipione, Fior e Tartaglia foi surpreendente para a época, pois, resolveram um problema que já existia a três mil anos, problema esse que vinha desafiando a inteligência dos matemáticos já há muito tempo. A grande ascensão dos matemáticos italianos, veio por causa dessas disputas, pois, os mesmos passaram a ser responsáveis por descobertas que os representam até hoje, pela utilidade e aplicações em todas as áreas de conhecimentos. Segundo Eves (1995) , "O feito matemático mais extraordinário do século XVI foi á descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbica e quadráticas".

Segundo Lima (1987) estas disputas de conhecimento eram realizadas frequentemente por matemáticos daquela época. Todo um planejamento era feito, pois, era observado sempre por autoridades, para dar veracidade ao acontecido e respeito, muitas vezes era assistido por multidão.

Sabendo sobre os grandes feitos de sucesso, desempenhados e bem executados por Tartaglia , despertou curiosidade de muitos matemáticos da época, chegando até a Milão onde morava o professor de Veneza, Girolamo Cardono outro gênio também inestimável e reconhecido já em Milão. Interessado no valioso segredo das equações cúbicas, o gênio foi ao encontro do professor de Veneza.

Como bem nos assegura (GOMES; GOMES, 2010, p.3) podemos dizer que Cardano era filho ilegítimo de um advogado, tornou-se assistente de seu pai, mas começou a pensar em uma carreira acadêmica após aprender matemática. Ele estudou medicina, mas por ser muito sincero e crítico não era bem-visto. Jogo tornou-se um vício que era para durar muitos anos e roubar de Cardano tempo precioso, dinheiro e reputação.

Considerado até mesmo por se própio um traidor Cardono teve e realizou muitos feitos escrevendo em seus livros sobre diversos assuntos, entre elas uma iteressantíssima e comprometedora autobiografia, na qual se definiu como desbocado, espião, melancólico, traidor, invejoso, solitário, obsceno, desonesto, incomparavelmente vicioso e portador de total desprezo pela religião. Matos (2014, p.21).

Mesmo com o respectivo desprezo por sua pessoa, Cardono era um estudioso muito árduo, que usava de sua esperteza junto ao seu conhecimento para se sobressair sobre seus colegas e adversários, algo que não importava tanto para ele era as críticas, o que mais o interessava era ter o reconhecimento diante a sociedade e não se importava com o que seus concorrentes falavam sobre sua pessoa.

Segundo Casaroto (2013, p.20) " o matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576), estava escrevendo uma obra que envolvia conceitos de Álgebra, Aritmética e Geometria, então procurou Tartaglia e queria que ele revelasse o método para ser publicado."

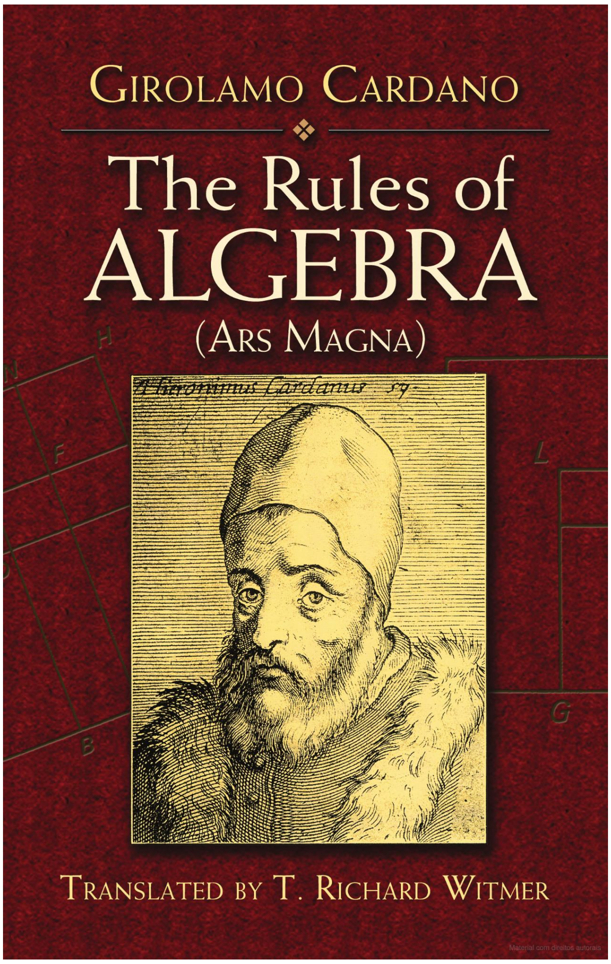
Sobre a história que de fato aconteceu, quem a conta, falar sobre a traição de Cardano com julgamentos parecidos. Encontra-se muitos autores acorbertando Cardano da culpa ou pelo menos retirar o peso de suas atitudes inapropriadas, já outros consideram como um plagiador. Há alguns grupos formados por aqueles que relativiza pois, consideram que não há provas reais que Cardano utilizou artimanhas para conseguir publicar os estudos realizados por Tartaglia.

O fato foi resumido na falar de Eves (1995, p.303):

> Mais tarde, Girolamo Cardano, um gênio inescrupuloso que ensinava matemática e praticava medicina em Milão, depois de um juramento solene de segredo, conseguiu arrancar de Tartaglia a chave da solução da cúbica. Em 1545, porém, quando apareceu em Nuremberg a Ars Magna de Cardano, um grande tratado em latim de álgebra, lá estava à solução de Tartaglia da cúbica. Os protestos veementes de Tartaglia foram rebatidos por Ludovico Ferrari, o mais brilhante dos discípulos de Cardano [...].

Contrar a prova para a regra da resolução da equação $x^3 + px = q$ Cardono começou a estuda-la melhor, sabia que naquele tempo não era comum considerar os termos da equação no primeiro membro onde ficariam apenas o zero depois da igualdade e também não se tinha conhecimento da equação sem aparecer o x^2 que seria o mesmo que ter esse termo com o coeficiente zero. Dessa forma, a relatos que Cardano descobriu uma substituição do tipo $x = y - a/3$ que elimina o termo x^2 da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Por fim sabe-se que foram deduzidas formulas para resolver 13 tipos de equações do terceiro grau. Na (Figura 2.2) apresentamos a capa do livro de Cardano.

Figura 2.2 – Ars Magna A Grande Arte.



Fonte: (CARDANO et al., 2007)

O livro Ars Magna é a primeira obra a mostrar métodos de resolução de equações de terceiro e quarto grau do tipo $x^3 + ax = b$, com a e b positivos. Este livro também é considerado como um dos primeiros a mostra os números complexos pela primeira vez.

Após todos os acontecidos a respeito de sua regra e descoberta sobre equações do terceiro grau, Tartaglia não quis ficar por baixo e no mesmo período optou por divulgar um livro, “Quesiti et Inventioni Diverse” onde tinha os seus versos com a sua versão da solução do problema de equações do terceiro grau que havia descoberto, neste livro.

Em seus versos escritos em seu livro, Tartaglia, deixar claro a ideia sobre a fórmula para a solução de problemas envolvendo equações do terceiro grau todos os passos de forma bem ousada e extraordinária, o que nos mostrar que o talentoso professor de Veneza era verdadeiramente um gênio da matemática, mas mesmo assim acabou confiando em pessoas que desviaram do seu foco. Todos seus feitos contribuiram muito na história das equações de graus maiores do que dois, contada até o momento.

Toda essa história chegou ao fim quando, Ferrari mostrou a solução da equação do quarto grau, até então, desconhecida para Tartaglia, que não conseguiu solucionar nenhum dos problemas propostos a ele em disputas. Assim, Tataglia foi sendo esquecido e Cardano teve por muito seu nome relacionado diretamente com à fórmula. Gomes e Gomes (2010, p.6).

Passos foram seguidos para solucionar essas questões, foi visto então que na história teve muitos personagens envolvidos nessa época, alguns com glórias e reconhecimentos maiores do que outros. Podemos perceber o quanto a matemática contém uma história bem específica, pois, vemos que a partir de uma solução de alguns problemas pode surgir a desmitificação de uma equação que até o momento daquela disputa citada anteriormente seria algo inconclusivo difícil até de se compreender e pensar em uma resposta que pudesse convencer.

3 REQUESITOS BÁSICOS PARA O ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO TERÇEIRO GRAU

Neste capítulo, apresentaremos, de forma resumida, alguns tópicos de Matemática que consideramos importantes para o estudo das equações do terceiro grau, a saber. Números complexos, Polinômios, Equações polinomiais e Equações do $2^{\underline{o}}$ grau.

Os conteúdos aqui abordados são bastante conhecidos tanto por professores como alunos do Ensino Médio e estão presentes em praticamente todos os livros didáticos utilizados atualmente. Para o desenvolvimento desse capítulo tomamos como base as referências (LIMA et al., 2006) e (PAIVA, 2009).

3.1 Números Complexos

Historicamente, Gerônimo Cardano (1501-1576), médico e matemático italiano, após ter aprendido com Tartaglia o método para resolução de equações da forma $x^3+px+q=0$, foi o primeiro a admitir a existência de números não reais. Após tal descoberta, outro matemático contemporâneo de Cardano, Raphael Bombelli (1526-1573), teve o que considerou uma "ideia louca": começou a operar com os números não reais estudados por Cardano. Bombelli admitiu, por exemplo, a identidade:

$$2+\sqrt{-1}+3-\sqrt{-1}=5,$$

dando, assim, subsídios para o início da construção de um novo conjunto de números: o conjunto dos números complexos.

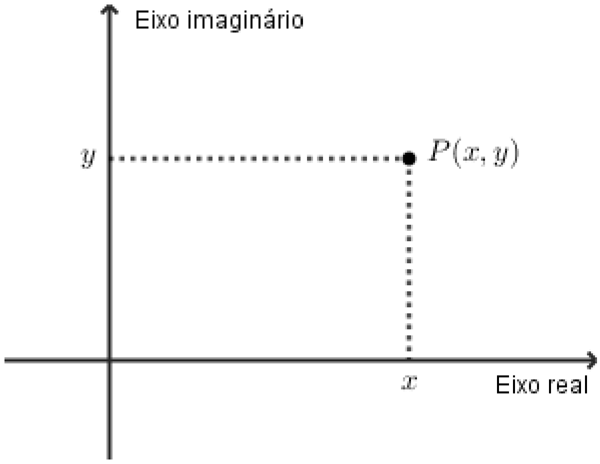
Como podemos observar, os conjuntos dos números complexos está intimamente ligado com a resolução de equações do terceiro grau, pois, os números complexos apareceram no desevolvimento inicial das cubicas, veio surgir no livro do matemático Cardano. Lima (1987).

A seguir, apresentaremos as definições de números complexos na forma algébrica, conjugado e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre números complexos e, por fim, apresentaremos a forma polar e a primeira e segunda fórmula de Moivre, que permitem calcular de forma prática a potenciação e a radiciação de números complexos.

Definição 3.1. Um número complexo é um número da forma $z=x+yi$, com x e y reais e $i=\sqrt{-1}$.

Fixando um sistema de coordenadas no plano, chamado de plano de Argand-Gauss, o número complexo $z = x + yi$ é representado pelo ponto $P(x,y)$. O ponto P é chamado de *imagem* do complexo z.

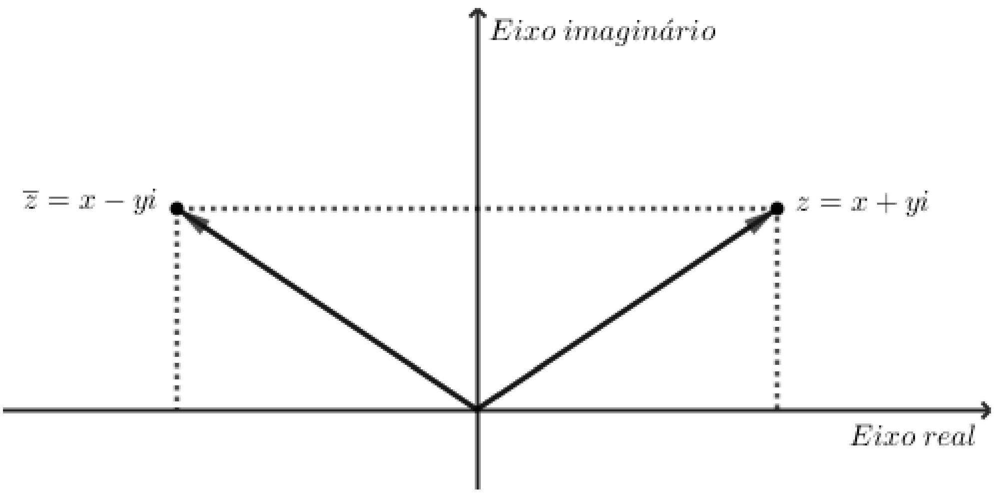
Figura 3.1 – Plano de Argand-Gauss



Fonte: Elaborado pelo autor

O conjugado de um número complexo tem imagem simétrica em relação ao eixo real ver(Figura 3.2).

Figura 3.2 – Conjugado de z



Fonte: Elaborado pelo autor

Além disso, o produto de z por $\overline{z}$ é um número real, ou seja,

$$z \cdot \overline{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

Para quaisquer números complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, com $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, temos:

(i) $z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\,i$

(ii) $z_1-z_2=z_1+(-z_2)=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\,i$

(iii) $z_1\cdot z_2=(x_1\cdot x_2-y_1y_2)+(x_1y_2-x_2y_1)\,i$

(iv) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1}{z_2}\cdot\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+(x_2y_1-x_1y_2)\,i}{(x_2)^2+(y_2)^2}$ *se* $z_2\neq 0$

.

3.1.1 Forma Polar de um Número Complexo

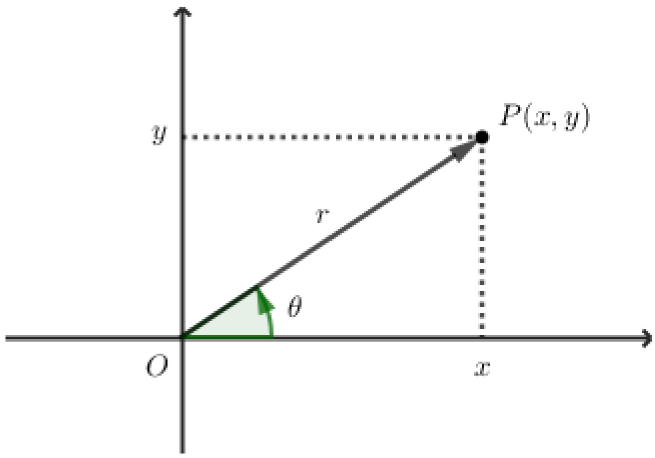
A forma polar, devida a Euler, pode ser chamada também de forma trigonométrica e tem como principal finalidade facilitar a realização das operações de potenciação e radiciação de números complexos.

Definição 3.2. O *módulo* de um número complexo $z=x+yi$, denotado por $|z|=r$, é definido como sendo o módulo do vetor que o representa, ou seja, é o valor r da distância de sua imagem P à origem. Portanto,

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1}$$

Definição 3.3. O *argumento* de um número complexo, não nulo, $z=x+yi$, é, por definição, qualquer dos ângulos $\theta=\arg z$ que o vetor $\overrightarrow{OP}$ forma com o semi-eixo positivo dos x, ver (Figura 3.3) .

Figura 3.3 – Forma polar de z



Fonte: Elaborado pelo autor

Se θ é um argumento de $z=x+yi$, então $x=r\cos\theta$ e $y=rsen\theta$, o que nos permite escrever

$$z=x+yi=r\cos\theta+ir\sin\theta=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)\,,$$

que é a chamada *forma trigonométrica ou polar* do complexo z.

A fórmula a seguir é conhecida como Primeira Fórmula de Moivre, em homenagem a Abraham de Moivre (1667 - 1754). Essa fórmula é muito útil para o cálculo de potências de um número complexo.

Teorema 3.1. Se n é um número inteiro, então

$$z^n = [r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n \cdot [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]. \tag{2}$$

A demonstração do Teorema (2) é feita por indução e pode ser encontrada em (LIMA et al., 2006).

O resultado a seguir é conhecido como Segunda Fórmula de Moivre e é muito útil para o cálculo da raíz e-nésima de um número complexo.

Teorema 3.2. Dado o número complexo $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ e o número natural $n\,(n > 2)$, então existem n raízes enésimas de z que são da forma:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right],\ k = 0,1,2,\cdots,(n-1), \tag{3}$$

A demonstração dessa igualdade utiliza a Primeira Fórmula de Moivre e pode ser encontrada em (LIMA et al., 2006).

Exemplo 3.1. Neste exemplo, vamos aplicar a segunda fórmula de Moivre para calcularmos as raízes cúbicas de $z = 8$.

É facil ver que z tem módulo igual a 8 e argumento igual a 0 radiano. Assim, segue da segunda fórmula de Moivre que

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right) \\ &= 2 \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Agora, observe que cada aumento de uma unidade no valor de k gera um aumento de $\frac{2\pi}{3}$ no argumento. Por outro lado, um aumento de três unidades no valor de k gera um aumento de 2π no argumento e faz com que o valor de

$$\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

se repita, ou seja, os valores de z_K se repetem em ciclos de 3. Assim:

Para $k = 0$, temos

$$z_0 = 2 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0) = 2 \cdot (1 + i \cdot 0) = 2;$$

Para $k = 1$, temos

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i \cdot \sqrt{3};$$

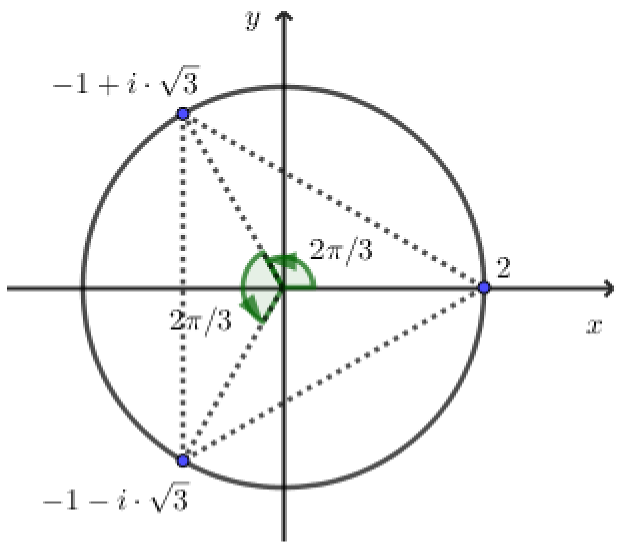
Para $k = 2$, temos

$$z_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i \cdot \sqrt{3}.$$

Portanto, as rázes cúbicas de $z = 8$ são 2, $-1 + i \cdot \sqrt{3}$ e $-1 - i \cdot \sqrt{3}$.

Geometricamente, essas raízes são os vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo de centro na origem e raio 2 ver (Figura 3.4).

Figura 3.4 – Representação geométrica da raízes cúbicas de z



Fonte: Elaborado pelo autor

3.2 Polinômios

Uma função $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ é uma função polinomial complexa quando existem números complexos $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tais que

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

para todo $x \in \mathbb{C}$.

Os números $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são os coeficientes da função polinomial. Se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n. Se um número complexo α é tal que $p(\alpha) = 0$, dizemos que α é raiz de p. Um caso de especial interrese é aquele em que os coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são todos números reais, nesse caso temos uma função polinomial de p:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Quando uma função polinomial p pode ser expressa como o produto $p = qr$ das funções polinomiais q e r, dizemos que p é divisível por q e r.

Teorema 3.3. Se o número complexo α é raiz de uma função polinomial p, então $p(x)$ é divisível por $x - \alpha$.

Demonstração 3.1. Como $p(\alpha) = 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) - p(0) \\ &= \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) - \left(a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0\right) \\ &= a_n\left(x^n - \alpha^n\right) + a_{n-1}\left(x^{n-1} - \alpha^{n-1}\right) + \cdots + a_1\left(x - \alpha\right). \end{aligned}$$

Como cada uma das parcelas da expressão acima é divisível por $x - \alpha$, $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$, isto é, existe um polinômio q tal que $p(x) = q(x)(x - \alpha)$.

De modo geral, se os números complexos $\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p de grau n, então existe uma função polinomial q de grau $n - k$ tal que

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_k)\, q(x).$$

Uma consequência imediata deste resultado é que uma função polinomial complexa de grau n pode ter no máximo, n raízes.

3.3 Equações polinomiais

Equação polinomial ou equação algébrica na incógnita x é toda equação que pode ser representada sob a forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

com $a_n, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$.

Teorema 3.4. Todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

O Teorema acima é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra e sua demonstração é baseada na continuidade das funções polinomiais complexas e pode ser encontrada em Lima et al. (2006, p. 263).

O Teorema Fundamental da Álgebra garante a existência de pelo menos uma raiz complexa, contudo, ele não especifica diretamente quantas e quais são as raízes da equação.

Teorema 3.5. Todo polinômio complexo $p(x)$ de grau n pode ser fatorado na forma

$$p(x) = c\,(x - x_1)\,(x - x_2) \cdots (x - x_n)\,,$$

onde c é um número complexo e $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são raízes complexas de $P(x)$ (possivelmente repetidas). Além disso, esta fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.

A demonstração desse resultado poder encontrada em Lima et al. (2006, p. 251).

Teorema 3.6. Se o complexo $a + bi$ é uma raiz complexa não-real de uma equação algébrica com coeficientes reais, então seu complexo conjugado $a - bi$ também é raiz da equação, com a mesma multiplicidade.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Lima et al. (2006, p. 258).

Teorema 3.7. Se uma equação polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, (a_n \neq 0),$$

de coeficientes inteiros, admite uma raiz racional da forma $\frac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+^*$ e p e q são primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de aa_n.

A demonstração do Teorema acima pode ser encontrada em Iezzi (2005, p. 258). No exemplo a seguir, aplicaremos o Teorema das Raízes Racionais para determinar as raízes da equação $x^3 - 6 - 9 = 0$.

Exemplo 3.2. Consideremos a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Suponhamos que esta equação admite uma raiz da forma $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$. Então, segue do Teorema das raízes racionais que

$$p \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\} \quad e \quad q \in \{\pm 1\}.$$

Assim,

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}.$$

Testando cada um desses números, temos que $x = 3$ é uma raiz da equação. Em seguida, dividindo a expressão $x^3 - 6x - 9$ por $x - 3$, obtemos $x^2 + 3x + 3$. Assim, as duas raízes restantes são as da equação $x^2 + 3x + 3 = 0$, isto é,

$$-\frac{3}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } -\frac{3}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, as raízes da equação são $3, -\frac{3}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $-\frac{3}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.4 Equação do Segundo Grau

Consideremos o seguinto problema extraído do ENA (Exame Nacional de Acesso ao PROFMAT): Um grupo de pessoas foram a uma pizaria e no final o consumo total foi de 120 reais. Quando foram pagar a conta, dividindo-a igualmente, notaram que duas pessoas foram embora sem deixar dinheiro e as pessoas que ficaram tiveram que pagar cinco reais a mais que pagariam se a conta fosse dividida igualmente entre todos os membros do grupo inicial. Quantas pessoas pagaram a conta?

Para responder a pergunda acima, e outras tantas que envolvem funções do segundo grau, precisamos saber resolver tais equações.

A resolução da equação do segundo grau é estudada no nono ano do Ensino Fundamental e é conhecida como Fórmula de Bháskara, pois Bháskara a demonstrou algebricamente, porém ela já era conhecida centenas de anos antes.

Considere a equação $ax^2+bx+c=0$ com coeficientes em $\mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned}
a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) &= 0\\
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= 0\\
\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} &= 0\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2} &= 0\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\
x &= -\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Em alguns casos é mais prático escrevermos a fórmula de Bhaskara como

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta=b^2-4ac$.

Se os coeficientes a, b e c da equação forem números reais, teremos:

(i) Se $\Delta=b^2-4ac>0$, as raízes da equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$, são:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \; e \; x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(ii) Se $\Delta=b^2-4ac=0$, as raízes da equação do segundo grau $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$, são $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

(iii) Se $\Delta=b^2-4ac<0$, a equação possui duas raízes complexas conjugadas.

Retornando ao problema apresentado inicalmente, temos:

Seja n o número de pessoas que pagaram a conta. Como havia $n+2$ pessoas, o rateio inicial era de $\dfrac{120}{n+2}$.

Saindo as duas pessoas, o rateio passou a ser de $\frac{120}{n}$. Como o rateio aumentou em 5 reais, isso leva à equação

$$\frac{120}{n+2}+5=\frac{120}{n}.$$

Multiplicando-se os dois lados por $n(n+2)$, resulta na equação de segundo grau

$$5n^2+10n-120=0,$$

cuja solução positiva é $n=6$.

3.4.1 Relações de Girard Para as Equações do Segundo Grau

Relacionando, pela soma e produto, as raízes com os coeficientes, ambos de uma mesma equação, Albert Girard (1595-1632), apresentou seu método capaz de encontrar as raízes de uma equação polinomial.

Se $\Delta=b^2-4ac\geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1\cdot x_2 &= \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}. \end{aligned}$$

4 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO TERÇEIRO GRAU

Em 1545, Girolamo Cardano publicou no livro Ars Magna uma fórmula que dava a solução para as equações cúbicas do tipo $x^3+px+q=0$ (cúbica reduzida, sem o termo quadrático). Em notação atual a fórmula de Cardano para a resolução de equações dessa forma é dada por:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Apesar dessa fórmula ser válida apenas para equações sem o termo quadrático, mais adiante veremos que isso não é um problema, pois de modo geral, toda equação cúbica pode ser reduzida a uma equação da forma apresentada no método de Cardano acima.

4.1 Desenvolvimento Algébrico do Método de Cardano

Para o desenvolvimento algébrico do método de Cardano seguiremos os passos de (LIMA, 1987) os quais descrevemos a seguir:

Consideremos uma equação do terceiro grau da forma

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \tag{4}$$

com $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$.

Ao dividirmos a equação (4) por $a\neq 0$, obtemos

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0. \tag{5}$$

Em seguida, definimos $\alpha=\frac{b}{a}$, $\beta=\frac{c}{a}$ e $\gamma=\frac{d}{a}$, assim a equação (4) pode ser escrita como

$$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0. \tag{6}$$

Seja $x=y+h$, onde y é uma nova incógnita e h é uma constante a ser determinada de modo que a equação (6) seja transformada em uma equação do terceiro grau sem o termo quadrático. Assim, segue-se que

$$\begin{aligned}(y+h)^3+\alpha(y+h)^2+\beta(y+h)+\gamma&=0\\ y^3+3y^2h+3yh^2+h^3+\alpha y^2+2\alpha yh+\alpha h^2+\beta y+\beta h+\gamma&=0\\ y^3+(3h+\alpha)y^2+\left(3h^2+2\alpha h+\beta\right)y+\left(h^3+\alpha h^2+\beta h+\gamma\right)&=0\end{aligned} \tag{7}$$

Para eliminarmos o coeficiente de y^2 na equação (7), basta tomarmos $h = -\dfrac{\alpha}{3}$.

De fato:

$$y^3 + (-\alpha + \alpha)\,y^2 + \left(\frac{3\alpha^2}{9} - \frac{2\alpha^2}{3} + \beta\right) y + \left(-\frac{\alpha^3}{27} + \frac{\alpha^3}{9} - \frac{\beta\alpha}{3} + \gamma\right) = 0$$
$$y^3 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{3}\right) y + \left(\frac{2\alpha^3}{27} - \frac{\alpha\beta}{3} + \gamma\right) = 0.$$

Dessa forma, a mudança de variável $x = y - \dfrac{\alpha}{3}$ transformará a equação (6) em uma equação na variável y da forma

$$y^3 + py + q = 0, \tag{8}$$

onde $p = \beta - \dfrac{\alpha^2}{3}$ e $q = \dfrac{2\alpha^3}{27} - \dfrac{\alpha\beta}{3} + \gamma$.

Para resolvermos a equação (8), faremos a substituição $y = u + v$. Assim,

$$\begin{aligned}
(u+v)^3 + p\,(u+v) + q &= 0\\
u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q &= 0\\
u^3 + v^3 + 3uv\,(u+v) + p\,(u+v) + q &= 0\\
u^3 + v^3 + (3uv + p)\,(u+v) + q &= 0 \qquad (9)
\end{aligned}$$

Observe que se conseguirmos determinar u e v, tais que $u^3 + v^3 = -q$ e $uv = -\dfrac{p}{3}$, ou seja, $u^3 + v^3 = -q$ e $u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27}$, então $y = u + v$ será uma raiz da equação (9).

Para determinarmos u^3 e v^3, usaremos o fato que eles são raízes da equação do segundo grau

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Resolvendo esta equação através da fórmula de Bhaskara, temos

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } v^3 = -\frac{q}{2}\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Logo,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ou

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}},$$

onde $D = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$.

Assim $y = u + v$, dada pela fórmula acima, é uma raiz da equação $y^3 + py + q = 0$.

A seguir, traremos dois exemplos em que aplicaremos a fórmula de Cardano para determinar suas raízes.

Exemplo 4.1. Consideremos a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Neste caso, identificamos $p = -6$ e $q = -9$, Assim, segue da fórmula de Cardano que

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{q^3}{27} \Rightarrow D = \frac{81}{4} - \frac{216}{27} \Rightarrow D = \frac{1323}{108} \Rightarrow D = \frac{49}{4}.$$

Então,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} \\ &= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Logo, uma das raízes da equação em questão é $x = 3$.

Em seguida, dividindo a expressão $x^3 - 6x - 9$ por $x - 3$, obtemos $x^2 + 3x + 3$. Assim, as duas raízes restantes são as da equação $x^2 + 3x + 3 = 0$, isto é,

$$-\frac{3}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } -\frac{3}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, as raízes da equação são $3, -\dfrac{3}{2} + i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $-\dfrac{3}{2} - i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exemplo 4.2. Consideremos a equação $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$.

Observe, neste caso, que a equação está na forma $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Assim, a mudança de variável $x = y - \dfrac{\alpha}{3}$ reduzirá a equação dada a forma $y^3 + py + q = 0$, onde $p = \beta - \dfrac{\alpha^2}{3}$ e $q = \dfrac{2\alpha^3}{27} - \dfrac{\alpha\beta}{3} + \gamma$.

Como temos $\alpha = -6$, $\beta = 6$ e $\gamma = -5$, segue-se que

$$p = 6 - \frac{(-6)^2}{3} = \frac{18-36}{3} = -\frac{18}{3} = -6 \text{ e}$$
$$q = \frac{2\cdot(6^3)}{27} - \frac{(-6)\cdot 6}{3} - 5 = -16 + 12 - 5 = -9,$$

o que implica na equação $y^3 - 6y - 9 = 0$, que por sua vez tem $y = 3$ como uma de suas raízes (ver exemplo anterior).

Como $x = y - \dfrac{\alpha}{3}$, concluímos que $x = 3 - \dfrac{(-6)}{3} = 5$ é uma das raízes da equação em questão. Em seguida, dividindo a expressão $x^3 - 6x^2 + 6x - 5$ por $x - 5$, obtemos $x^2 - x + 1$. Assim, as outras duas raízes são as da equação $x^2 - x + 1 = 0$, isto é,

$$\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, as raízes da equação são $5, \dfrac{1}{2} + i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{1}{2} - i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Nos dois exemplos, poderíamos chegar as raízes reais obtidas simplesmente examinando os divisores de 9 e 5, mas de forma intencional optamos por utilizar a fórmula de Cardano para obtê-las.

4.2 Natureza das Raízes de uma equação do Terceiro Grau

Na sequência, mostraremos como fatos elementares de Cálculo podem ser usados para explicar a natureza das raízes da equação do terceiro grau da forma $y^3 + py + q = 0$ a partir do sinal do discriminante $D = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$.

O leito pode encontrar boas noções de cálculo diferencial e integral em (FLEMING; GONÇALVES, 2006).

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^3 + px + q$. Sabemos que cada ponto em que o gráfico de f cortar o eixo x representará uma raiz real da equação $x^3 + px + q = 0$.

Inicialmente, observemos que a função f pode ser escrita como

$$f(x) = x^3\left(1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2}\right).$$

Intuitivamente, é fácil ver que as expressões $\dfrac{p}{x}$ e $\dfrac{q}{x}$ tendem para zero quando x tende para $\pm\infty$. Então, podemos concluir que $f(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ e $f(x) \to -\infty$

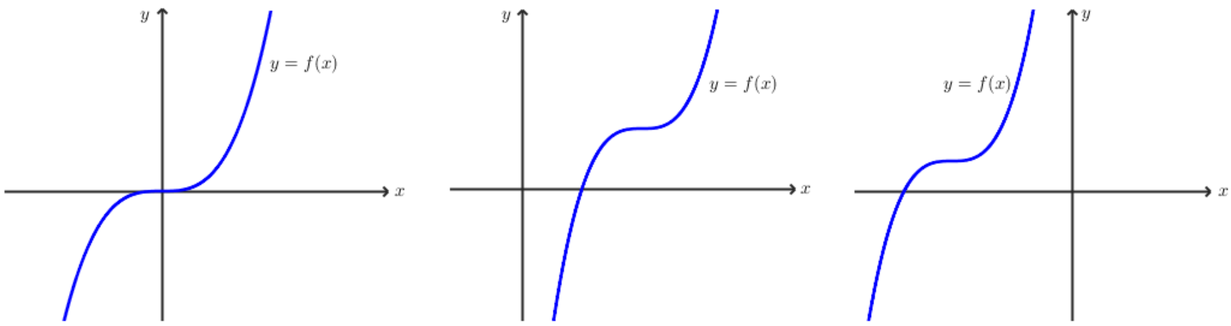
quando $x \to -\infty$. Esta discussão, permite concluirmos que o gráfico da função $f(x)$ interceptará o eixo x em pelo menos um valor real. Em outras palavras, podemos concluir que toda equação do terceiro grau tem pelo menos uma raiz real.

A derivada primeira de f é a função $f'(x) = 3x^2 + p$. Na sequência, consideremos os seguintes casos:

1º Caso: $p > 0$

Observe que para $p > 0$, temos $f'(x) > 0$ para todo x real, assim, neste caso, f é uma função crescente que corta o eixo x num único ponto. Por outro lado, é fácil ver que $p > 0$ implica em $D > 0$. Contudo, concluímos que quando $D > 0$ a equação possuirá uma única raiz real, a qual pode ser positiva, nula ou negativa, e, consequentemente, duas raízes complexas conjugadas ver (Figura 4.1).

Figura 4.1 – Representações gráficas dos casos positivos



Fonte: Elaborado pelo autor

2º Caso: $p = 0$

Se $p = 0$, a equação em questão se reduzirá a $x^3 + q = 0$. Se $q \neq 0$, teremos

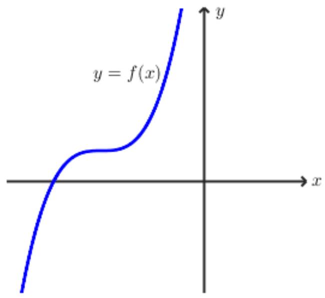
$$x^3 + q = 0 \text{ ou } (x + \sqrt[3]{q})\left(x^2 - \sqrt[3]{q}x + \sqrt[3]{q^2}\right) = 0,$$

o que implica em

$$x = -\sqrt[3]{q} \text{ ou } x^2 - \sqrt[3]{q}x + \sqrt[3]{q^2} = 0.$$

É fácil ver que o discriminante Δ da equação $x^2 - \sqrt[3]{q}x + \sqrt[3]{q^2} = 0$ é negativo, logo a equação $x^2 + px + q = 0$ terá uma raiz real não nula (positiva ou negativa) e duas complexas. Se, por outro lado, $q = 0$, a equação terá três raízes reais iguais a zero. Neste caso, o gráfico de f apresenta uma das formas ilustradas na (Figura 4.2).

Figura 4.2 – Representações gráficas dos casos iguais a zero



Fonte: Elaborado pelo autor

3º Caso: $p < 0$

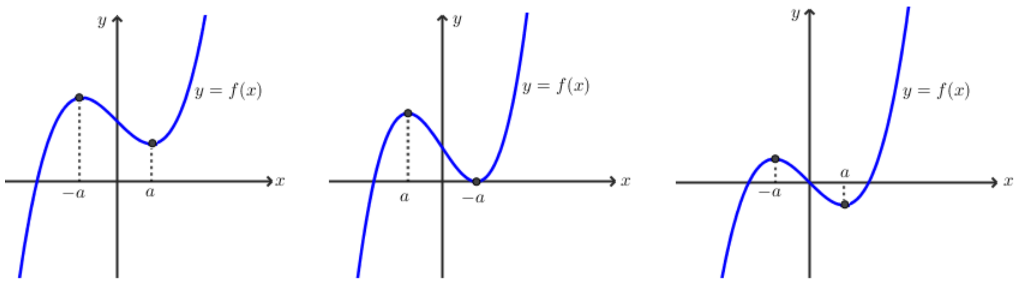
Neste caso, podemos tomar em $f(x) = x^3 + px + q$, sem perca de generalidade, $p = -3a^2$, com $a > 0$. Dessa forma, a função $f(x)$ é escrita como $f(x) = x^3 - 3a^2x + q$, cuja derivada primeira é dada por $f'(x) = 3x^2 - 3a^2$, que se anula nos pontos em que $x = \pm a$.

Aplicando os pontos $x = a$ e $x = -a$ na derivada segunda de f, dada por $f''(x) = 6x$, temos

$$f''(a) = 6a > 0 \text{ e } f''(-a) = -6a < 0.$$

Assim, a função f possui um ponto de mínimo local em $x = a$ e um ponto de mínimo local em $x = -a$. Contudo, o gráfico de f apresenta uma das formas ilustradas na (Figura 4.3), conforme a equação $x^3 + px + q = 0$ possua uma raiz e duas complexas, uma raiz real simples e uma dupla, ou três raízes reais distintas.

Figura 4.3 – Representações gráficas dos casos negativos



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que os três casos ilustrados pela Figura (4.3), correspondem, respectivamente, a $f(-a)\cdot f(a)>0$, $f(-a)\cdot f(a)=0$ e $f(-a)\cdot f(a)<0$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} f(a)\cdot f(-a) &= (a^3-3a^3\cdot a+q)\cdot\left(a^3-3a^2(-a)+q\right)\\ &= \left(a^3-3a^3+q\right)\left(-a^3+3a^3+q\right)\\ &= \left(q-2a^3\right)\left(q+2a^3\right)\\ &= q^2-4a^6. \end{aligned}$$

Como $p=-3a^2$, o que implica em $a^2=-\dfrac{p}{3}$, segue-se que

$$\begin{aligned} f(a)\cdot f(-a) &= q^2-(a^2)^3\\ &= q^2-\left(-\frac{p}{3}\right)^3\\ &= q^2+\frac{4}{27}p^2\\ &= 4\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^2}{27}\right). \end{aligned}$$

Como $D=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^2}{27}$, concluímos que $f(a)\cdot f(-a)=4D$.

Portanto, o sinal de $f(a)\cdot f(-a)$ é o mesmo do discriminante D.

Contudo, concluímos que a equação do terceiro grau $x^3+px+q=0$ possui:

(i) uma raiz real quando o discriminante $D>0$;

(ii) três raízes reais, sendo todas iguais ou duas iguais distintas quando o discriminante $D=0$;

(iii) três raízes reais distintas quando o discriminante $D<0$.

Nos exemplos a seguir, analisaremos a natureza das raízes de equações de terceiro grau através do valor do discriminante D.

Exemplo 4.3. Consideremos a equação $x^3-6x+4=0$.

Observe que a equação já está na forma $x^3+px+q=0$. Então,

$$\begin{aligned} D &= \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\\ &= \frac{4^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}\\ &= 4-\frac{216}{27}\\ &= -\frac{108}{27}\\ &= -4. \end{aligned}$$

Como $D = -4 < 0$, concluímos que a equação tem três raízes reais distintas. Mais adiante mostraremos que as raízes da equação são $-1-\sqrt{3}$, $-1+\sqrt{3}$ e 2.

Exemplo 4.4. Consideremos a equação $x^3 - 3x - 2 = 0$.

Neste caso, identificamos $p = -3$ e $q = -2$. Então,

$$D = \frac{(-2)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} = 1 - 1 = 0.$$

Como $D = 0$, a equação têm três raízes reais, sendo duas ou três iguais.

5 RESOLUÇÃO PARA CASOS IRREDUTIVEIS

Teremos como objeto de estudo nesta seção apenas os especiais casos irredutiveis das equações cúbicas, que compôe o objetivo principal desse trabalho, onde apresentaremos solução sem precisar dos conhecimentos e aspectos introdutórios de numeros complexos para resolver esses tipos de equações cúbicas que se caracterizam irredutiveis por possuirem três raizes reias distintas que não podem ser expressas em radicais.

5.1 Casos Irredutiveis

Pelo que foi desenvolvido anteriormente, podemos observar que as equações de terceiro grau podem ser compostas por uma raiz real e duas complexas ou por chegar a três raizes reais, onde todas são distintas, duas ou três iguais. Mas como foi visto, temos casos particulares de cúbicas que ao aplicarmos a fórmula de Cardano, chegamos a um resultado dado pela soma de duas raizes cúbicas de números complexos.

Como descreveu (LIMA, 1987) este caso é chamado tradicionalmente de "caso irredutível" porque, ao tentar eliminar os radicais, recai-se noutra equação do terceiro grau. Este resultado pode ser observado na equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, após ser aplicada a fórmula de Cardano encontramos a expressão:

$$y = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}. \tag{10}$$

Sentenças como essas ficaram por muitos anos sem um resultado mais explicito, até que, no ano 1572 veio o despertar de Rafael Bombelle, o mesmo trouxe um desenvolvimento de relações por meio de cálculos, da forma:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \\ &= \sqrt[3]{(2+i)^3} + \sqrt[3]{(2-i)^3} \\ &= (2+i)+(2-i) = 4. \end{aligned} \tag{11}$$

Analogamente, podemos chegar a igualdade $y = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4$ de onde veio a surgir os numeros complexos. Estes cálculos foram encontrados em estudos feitos no artigo de (RIPOLL et al.,).

O artigo acima citado de Jaime Ripoll, Cydara Ripoll e Silveira (2016), deixa bem explicado uma parte da indignação e "Tormento de Cardano" onde tem como propósito de mostrar a existência das cúbicas Anti-Cardano, denominadas pelos os autores como aquelas equações cúbicas que possuem somente raízes reais e para as quais não há nenhum meio de expressar suas raízes por radicais reais.

Com embasamento de estudos nesses trabalhos podemos notar que não seria tão facíl apresentar uma equação Anti-Cardano como por exemplo , sabemos que não é viavel calcular raízes imaginarias usando radicais reais. Desse modo, os autores formularam o tormento de Cardano, expecificamente para equações que tenham apenas raizes reias. Pois sem essa interceptação, seria bem mais fácil o caminho até o desse problema, basta termos uma cúbica de coeficientes inteiros e de raizes reias imaginárias, como $(x-1)(x^2+1)=0$, serveria como Anti-Cardano. Como direção para a afirmação ao "Tormento de Cardano", os autores embasaram-se primeiro ao meio dos teoremas e definições que compôem a Álgebra Clássica e segundo pelos métodos e linhas de conhecimentos da Teoria de Galois.

Definição 5.1. Uma equação é solucionável por radicais se suas raízes puderem ser expressas por uma fórmula envolvendo apenas inteiros, n-raízes e as quatro operações aritméticas básicas.

Definição 5.2. Uma equação polinomial de coeficientes inteiros é dita redutível (sobre os números racionais) se, e só se, o correspondente polinômio puder ser fatorado como um produto de dois polinômios (não constantes) de coeficientes racionais; caso não exista uma tal fatoração, diremos que a equação é irredutível.

Para os autores Jaime Ripoll, Cydar Ripoll e Silveira (2016), é trivial dar exemplos de equações redutíveis. No entanto, decidir se uma equação dada é redutível, ou irredutível, talvez seja difícil. Mesmo assim, o caso das cúbicas é bem fácil, pois podemos nos recorrer ao seguinte Teorema.

Teorema 5.1. Uma equação de grau três com coefientes inteiros é redutível, se e somente se, possuir uma raiz racional.

Desse modo a consequência, para qualquer possível fatoração conveniente ao grau três tem de envolver um polinômio de grau um e coeficientes racionais, nos propondo a origem de uma raiz racional da equação. Da mesma maneira, se r for uma raiz racional do polinômio $P(x)=0$ de coeficientes racionais, com a divisão do correspondente polinômio $P(x)$ por $x-r$, encontramos um quociente de grau dois de coeficiente obrigatoriamente racionais, pois r e os coeficientes de $P(x)$ são números racionais. Para afirmação observe que a equação $x^3-15x-4=0$ não é considerada anti-cardano, pois obtemos $x=4$ como uma de suas raizes, como também a mesma pode ser escrita na sua forma fatorada $(x-4)(x+4x+1=)$. Além disso, suas outras raizes podem ser expressas por $-2+\sqrt{2}$ e $-2-\sqrt{2}$.

De outro modo, a equação $x^3+x+1=0$ é uma conhecida irredutivel sobre os números racionais. Para notarmos isso basta aplicarmos o teste das raízes racionais que encontramos ± 1 como as possiveis raízes racionais para a equação, mas como $f(-1) = -1$ e $f(1) = 3$, conclui-se que a equação não têm raizes racionais. Contudo, ela não pode ser escrita como produto de dois polinômios de raizes racionais, portanto ela é Anti-Cardano. Logo, pode-se concluir que pelo o teorema anterior que toda equação de grau três que tiver somente raízes reais e irredutíveis elas são denomimadas como Anti-Cardano.

Para continuarmos as descrições sobre esse assunto denotaremos todas as equações cúbicas que não contém raizes racionais de cúbicas Anti-Cardano, para que não sejam generalizadas junto a todos os tipos de casos irredutíveis.

5.2 Solução Para Casos Irredutíveis

Nesta secção apresentaremos métodos para a resolução de equações do terceiro grau classificada como Anti-Cardano, o primeiro usando números complexos e o segundo usando trigonometria.

5.2.1 Solução de Equações do Caso Irredutível Usando Números Complexos.

Este método consiste, basicamente, na utilização da segunda fórmula de De Moivre para calcularmos as raízes cúbicas dos números complexos que surgirão após a aplicação da fórmula de Cardano.

Vejamos o funcionamento desse método atrávés do exemplo a seguir.

Exemplo 5.1. Consideremos a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$.

Neste caso, identificamos $p = -6$ e $q = 4$. Assim,

$$D = \frac{4^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} = 4 - \frac{216}{27} = -4.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{-4}{2} + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{\frac{-4}{2} - \sqrt{-4}} \\ &= \sqrt[3]{-2 + 2i} + \sqrt[3]{-2 - 2i}. \end{aligned}$$

Na sequência, vamos calcular as raízes cúbicas dos números complexos $z = -2 + 2i$ e $w = -2 - 2i$.

Escrevendo z e w na forma trigonométrica, temos:

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4}\right) \text{ e } w = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Agora, aplicando a segunda fórmula de De Moivre, temos:

$$z_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi+8k\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{3\pi+8k\pi}{12}\right) \quad (12)$$

e

$$w_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi+8k\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{5\pi+8k\pi}{12}\right). \quad (13)$$

Assim, em relação a z_k, temos:

$$\begin{aligned} k &= 0 \Rightarrow z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right); \\ k &= 1 \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{11\pi}{12}\right); \\ k &= 2 \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{19\pi}{12}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

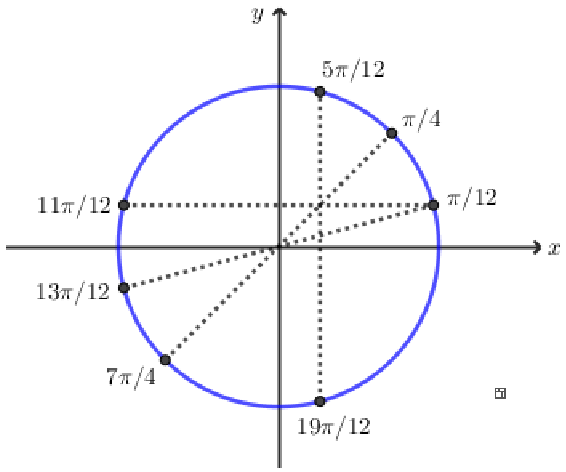
Já em relação a w_k, temos:

$$\begin{aligned} k &= 0 \Rightarrow w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{12}\right); \\ k &= 1 \Rightarrow w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\cdot\sin\frac{13\pi}{12}\right); \\ k &= 2 \Rightarrow w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Na sequência vamos calcular o seno e cosseno dos ângulos $\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$ e $\frac{7\pi}{4}$.

Localizando esses arcos no ciclo trigonométrico e em seguida reduzindo-os ao primeiro quadrante ver (Figura 5.1), temos:

Figura 5.1 – Redução ao primeiro quadrante



Fonte: Elaborado pelo autor

$$\begin{aligned}
\sin\frac{11\pi}{12} &= \sin\frac{\pi}{12}\\
&= \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\frac{11\pi}{12} &= -\cos\frac{\pi}{12}\\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= -\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{5\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{12}$ são complementares, temos que

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \ \text{ e } \ \cos\frac{5\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Em relação ao ângulo $\frac{13\pi}{12}$, temos

$$\sin\frac{13\pi}{12}=-\sin\frac{\pi}{12}=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \ \text{ e } \ \cos\frac{13\pi}{12}=-\cos\frac{\pi}{12}=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Em relação ao ângulo $\frac{19\pi}{12}$, temos

$$\sin\frac{19\pi}{12}=-\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \ \text{ e } \ \cos\frac{19\pi}{12}=\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Por fim, em relação ao ângulo $\frac{7\pi}{4}$, temos

$$\sin\frac{7\pi}{4}=-\sin\frac{\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2} \ \text{ e } \ \cos\frac{7\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Em seguida, substituindo em (15) e (16) os valores obtidos acima, temos

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i;\\
z_1 &= \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\cdot i;\\
z_2 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\cdot\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\cdot i;\\
w_0 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot i;\\
w_1 &= \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\cdot\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\cdot i;\\
w_2 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=1-i.
\end{aligned}$$

Logo, os possíveis valores de x são:

$$\begin{aligned}
x &= z_0+w_0=1+i+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot i=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{2}\cdot i;\\
x &= z_0+w_1=1+i+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\cdot i=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{2}\cdot i;\\
x &= z_0+w_2=1+i+1-i=2;\\
x &= z_1+w_0=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\cdot i+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot i=-1+\sqrt{3}\cdot i;\\
x &= z_1+w_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\cdot i+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\cdot i=-1-\sqrt{3};\\
x &= z_1+w_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\cdot i+1-i=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\cdot i;\\
x &= z_2+w_0=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\cdot i+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot i=-1+\sqrt{3};\\
x &= z_2+w_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\cdot i+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\cdot i=-1-\sqrt{3}\cdot i;\\
x &= z_2+w_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\cdot i+1-i==\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-3-\sqrt{3}}{2}\cdot i.
\end{aligned}$$

Sabemos que a equação em questão tem três raízes reais distintas, pois o discriminante da fórmula de Cardano é $D=-4<0$. Assim, concluímos que dos nove valores obtidos, apenas $-1-\sqrt{3}$, $-1+\sqrt{3}$ e 2 são raízes da equação.

Na resolução desse exemplo optamos por detalhar os cálculos de forma intencional para que o leitor visualize o passo a passo do método empregado e perceba o quanto é minucioso e um tanto quanto complicado para chegar a solução destes casos irredutíveis ultilizando números complexos.

Entretanto, para encremetar ainda mais nossos conhecimentos a respeito de métodos para solucionar equações cúbicas, que é o nosso embasamento e foco pricipal do nosso trabalho, apresentando um método um pouco menos usual, mas que propõe uma forma diferente, que não precisamos recorrer aos complexos. Dessa forma, vamos propor a solução pelo método trigonométrico elaborado pelo matemático François Viete.

5.2.2 Solução de Equações do Caso Irredutível Usando o Método Trigonométrico de Viete.

De acordo com Jaime Ripoll, Cydar Ripoll e Silveira (2016), a teoria de Galois nos assegurar que quando as três raizes são reias e nunhuma é racional, reconhecida como "anti-Cardano", não se pode expressar as raízes em forma de radicais reais, mesmo não havendo uma fórmula de radicais que faça evitar os complexos.

Há um método pelo qual as raízes dessas equações podem ser calculadas por meio de expressões puramente reais, adquirida ultilizando funções trigonométricas, mais especificamente, em termos de cosseno e arco cosseno. Este método foi exposto por François Viete que desenvolve os calcúlos com números batante aproximados e sem nos fazer recorrer aos números complexos.

Segundo (SCHUVAAB, 2013), usando trigonometria Viete desenvolveu um método para calcular as três raizes reais da equação da forma $x^3+px+q=0$.

Consideremos a equação $x^3+px+q=0$, onde os coeficientes p e q são números reais não nulos.

Fazendo $x=t\cos\theta$, com $t>0$, temos que

$$\begin{aligned} (t\cos\theta)^3+p(t\cos\theta)+q &= 0 \\ t^3\cos^3\theta+pt\cos\theta+q &= 0 \quad \times\frac{4}{t^3} \\ 4\cos^3\theta+\frac{4p}{t^2}\cdot\cos\theta+\frac{4q}{t^3} &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Fazendo a comparação com a identidade $4\cos^3\theta-3\cos\theta-\cos 3\theta=0$, Viéte notou que $x=t\cos\theta$ será solução da equação $x^3+px+q=0$ se, e somente se,

$$\frac{4p}{t^2}=-3 \Rightarrow t^2=-\frac{4p}{3} \Rightarrow t=2\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

e

$$-\cos 3\theta=\frac{4q}{t^3} \Rightarrow \cos 3\theta=\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}} \Rightarrow \quad \theta=\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right).$$

Logo,

$$x = t\cos 3\theta = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right].$$

Para as três raizes, temos:

$$x_n = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)+\frac{2n\pi}{3}\right] \quad \text{com } n = 0,1,2.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right]\\
x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)+\frac{2\pi}{3}\right]\\
x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)+\frac{4\pi}{3}\right].
\end{aligned}$$

Portanto, este método fuciona, mas com as suas devidas condiçoes:

Para $t = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$, $p < 0$, pois se $p > 0$, a solução retorna a números complexos. Além disso, como $-1 \leq \cos 3\theta \leq 1$, temos que, $D \leq 0$

Isso incluir os casos irredutíveis, onde $D < 0$.

Na sequência, traremos exemplos de equações do terceiro grau cuja solução é calculada aplicando o método de Viete.

Exemplo 5.2. Consideremos a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$.

Neste caso, identificamos $p = -3$ e $q = -1$. Assim, aplicando incialmente a fórmula de Cardano, temos

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{-\left(\frac{-1}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-3}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\left(\frac{-1}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-3}{3}\right)^3}},\\
x &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}}.
\end{aligned}$$

Como o discriminante $d = -\dfrac{3}{4} < 0$, estamos diante do caso irredutível. É fácil ver que esta equação não possui raízes racionais, então neste caso temos uma equação Anti-Cardano.

Na sequência vamos aplicar o método trigonometrico de Viete para obtermos as três soluções da equação.

Para $n = 0$, temos

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right],\\
&= 2\sqrt{-\frac{(-3)}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3(-1)}{2(-3)}\cdot\sqrt{\frac{-3}{-3}}\right)\right],\\
&= 2\sqrt{1}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}\right)\right],\\
&= 2\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right],\\
&= 2\cos\left(\frac{1}{3}\cdot 60^\circ\right),\\
&= 2\cos(20^\circ)\\
&\cong 1,879385.
\end{aligned}$$

Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)+120^\circ\right]\\
&= 2\sqrt{-\frac{(-3)}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3(-1)}{2(-3)}\cdot\sqrt{\frac{-3}{-3}}\right)+120^\circ\right]\\
&= 2\sqrt{1}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}\right)+120^\circ\right]\\
&= 2\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1}{2}\right)+120^\circ\right]\\
&= 2\cos(20^\circ+120^\circ)\\
&= 2\cos(140^\circ)\\
&\cong -1,532080.
\end{aligned}$$

Para $n = 2$, vem

$$\begin{aligned}
x_2 &= 2\sqrt{-\frac{(-3)}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3(-1)}{2(-3)}\cdot\sqrt{\frac{-3}{-3}}\right)+240^\circ\right]\\
&= 2\cos(20^\circ+240^\circ)\\
&= 2\cos(260^\circ)\\
&\cong -0,347296355.
\end{aligned}$$

Portanto, as raízes da equação em questão são aproximadamente $-1,532080, -0,347296$ e $1,879385$.

Exemplo 5.3. Consideremos a equação $x^3 + 3x - 9x - 5 = 0$.

Aplicando o Teorema das raízes racionais é fácil verificar que esta equação não possui raízes racionais.

Observe, neste caso, que a equação está na forma $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Assim, a mudança de variável $x=y-\dfrac{\alpha}{3}$ reduzirá a equação dada a forma $y^3+py+q=0$, onde $p=\beta-\dfrac{\alpha^2}{3}$ e $q=\dfrac{2\alpha^3}{27}-\dfrac{\alpha\beta}{3}+\gamma$.

Como temos $\alpha=3$, $\beta=-9$ e $\gamma=-5$, segue-se que

$$p=-9-\frac{(3)^2}{3}=-12 \text{ e}$$
$$q=\frac{2\cdot(3^3)}{27}-\frac{3\cdot(-9)}{3}-5=6,$$

o que implica na equação $y^3-12y+6=0$, cujo discriminante é $D=-\dfrac{431}{27}$.

Como o discriminante $D<0$ e a equação não possui raízes racionais, não podemos aplicar a fórmula de Cardano. Então, vamos recorrer ao método de Viete para determinarmos suas raízes.

Fazendo uma aplicação direta da fórmula

$$y_n=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)+\frac{2n\pi}{3}\right],\text{ com } n=0,1,2,$$

temos:

$$\begin{aligned}
y_0 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)\right],\\
&= 2\sqrt{-\frac{(-12)}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\cdot 6}{2(-12)}\cdot\sqrt{\frac{-3}{-12}}\right)\right],\\
&= 4\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-3}{8}\right)\right],\\
&= 4\cos\left[\frac{1}{3}\arccos(-0,375)\right],\\
&\cong 4\cos\left[\frac{1}{3}\cdot 1,9551\right],\\
&\cong 4\cos(0,6517)\\
&\cong 4\cos(37,3414^\circ)\\
&\cong 4\cdot 0,7950\\
&\cong 3,1801.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)+120^\circ\right],\\
&= 2\sqrt{-\frac{(-12)}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\cdot 6}{2(-12)}\cdot\sqrt{\frac{-3}{-12}}\right)+120^\circ\right],\\
&= 4\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-3}{8}\right)+120^\circ\right],\\
&= 4\cos\left[\frac{1}{3}\arccos(-0,375)+120^\circ\right],\\
&\cong 4\cos\left[\frac{1}{3}\cdot 1,9551+120^\circ\right],\\
&\cong 4\cos(0,6517+120^\circ)\\
&\cong 4\cos(37,3414^\circ+120^\circ)\\
&\cong 4\cos(157,3414^\circ)\\
&\cong -3,6912.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\cdot\sqrt{\frac{-3}{p}}\right)+240^\circ\right],\\
&= 2\sqrt{-\frac{(-12)}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\cdot 6}{2(-12)}\cdot\sqrt{\frac{-3}{-12}}\right)+240^\circ\right],\\
&= 4\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-3}{8}\right)+240^\circ\right],\\
&= 4\cos\left[\frac{1}{3}\arccos(-0,375)+240^\circ\right],\\
&\cong 4\cos\left[\frac{1}{3}\cdot 1,9551+240^\circ\right],\\
&\cong 4\cos(0,6517+240^\circ)\\
&\cong 4\cos(37,3414^\circ+240^\circ)\\
&\cong 4\cos(277,3414^\circ)\\
&\cong 0,5111.
\end{aligned}
$$

Como $x = y - \frac{\alpha}{3}$, segue-se que $x = y - \frac{3}{3} = y - 1$. Então,

$$
\begin{aligned}
x_0 &= y_0 - 1 \Rightarrow x_0 = 3,18014 - 1 = 2,1801.\\
x_1 &= y_1 - 1 \Rightarrow x_1 = -3,691267 - 1 = -4,6912.\\
x_2 &= y_2 - 1 \Rightarrow x_2 = 0,5111 - 1 = -0,4889.
\end{aligned}
$$

Portanto, as raízes da equação em questão são aproximadamente $-4,6912, -0,4889$ e $2,1801$.

Dessa forma, obtevemos a solução das equações propostas sem precisar usar os números complexos, apenas ultilizando o método trigonométrico.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao desenvolver esse trabalho de conclusão de curso, foi detectado a insuficiência de estudos específico, continuo, lógico e detalhado das equações cúbicas nos livros do Ensino Médio, com isso tornaria viavél a produção de um material que pudesse agregar e contribuir para a solução dessa ausência, através de uma apredizagem mais desenvolvida com detalhações e características especificas encontradas no estudo das definições deste conteúdo.

Ao longo desse trabalho, foi realizada uma revisão bibliográfica das definições e propriedades primordiais das equações polinomiais, junto a alguns requisitos básicos para o estudo das equações do terceiro grau e seus principais métodos de resoluções.

Durante este estudo, detectou-se a importância do desenvolvimento dos métodos de resolução de equações de terceiro grau ultilizando o método de Cardano-Tartaglia (um dos mais reconhecidos) e o método de Viete que apresenta a solução para os casos irredutivéis das cúbicas conhecidas como Anti-Cardano, pois, esses conteúdos não são encontrados nos livros do Ensino Médio.

Mediante a isto, o presente trabalho tomou como principal fudamento de estudo oportunizar profesores e estudantes com acesso esse conteúdo que são inexplicávelmente defasados em livros matemáticos, de tal forma que torna-se desinteressante estuda-los. Ao estudar as equações polinômiais do terceiro grau começamos reconhecer a importâcia desse conhecimento, sendo assim compactuando que todo objetivo foi realizado, pois, tornou-se possível a criação de um material bem embasado, com uma sequência didática lógica que touxesse conforto para a realização do etendimento de cada parte do trabalho, tudo isso com fundamentação nas referências teórica que embasaram cada capítulo e contextualização desse material.

Para enfatizar os objetivos específicos, que também foram atendidos, trouxemos nesse trabalho os grandes fatos históricos que aconteceram para sugirem o conhecimento que hoje adquirimos diante esse estudo a respeito das equações cúbicas, apresentando algumas definições de números complexos que seriam usados juntamente às principais características, definições, propriedades e teoremas relacionado a equação cúbica. Além disso, enfatiza métodos irredutivéis de equações cúbicas que podem ser resolvida pela Formúla de Cardano que ultilizar números complexos e traz um método diferenciado deste que é geralmente o mais encontrado.

Portanto, para a resposta da questão norteadora, que dessencadeou a espuculação sobre a necessidade de obter tais estudos posteriomente citados em livros matemáticos, concluimos ser possivel a execução de um estudo mais específico, sobre as equações cúbicas, seguindo como base os objetivos anteriormente apresentados por meio da ultilização de métodos que foram expostos e desenvolvidos anteriormente. Mas percebe-se que ainda podemos encontrar vários assunto que devem despertar a curiosidade do leitor, onde os mesmo não pode ser apresentado nesse trabalho devido a complexidade e extensão do mesmo.

Como todo trabalho de informações seguras exige, tão quanto, a sua grandiosidade, por motivos como estes, vale salientar algumas desconfortos logo no inicio do levantamento e construção desse Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Devido à grande quantidade de matériais sem uma didática mais explicita, pois, foi necessário desenvolver uma sequência didática com mais sofisticação que o torna-se interssante, tudo a respeito das equações cúbicas. Ao analisar as literaturas cada uma mostrava sua caracteristica eminente, tornando-as diferente uma das outras. Dessa maneira, cada tópico do trabalho exigiu uma busca minuciosa por assuntos e informações que se entrelaçassem.

REFERÊNCIAS

ANTONIO, L. L. d. S. Ensino e resolução das equações cúbicas: A fórmula de cardano e a sua importância para o aprendizado da matemática no ensino médio. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, MACAPÁ-AP, p. 76, 2021.

CARDANO, G.; WITMER, T. R.; ORE, O. **The rules of algebra: Ars Magna**. [S.l.]: Courier Corporation, 2007. v. 685.

CASAROTO, P. Um estudo sobre equações polinomiais dedicado ao ensino básico. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2013.

EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Unicamp, 1995.

FLEMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limites, derivação, integração**. [S.l.]: São Paulo: Pearson, 2006.

GOMES, V. D.; GOMES, A. Um passeio na história da resolução da equação do terceiro grau–uma metodologia de ensino (co). In: **XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. [S.l.: s.n.], 2010.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios, equações**. [S.l.]: Atual, 2005.

LIMA, E. L. A equação do terceiro grau. **Matemática Universitária**, v. 5, p. 9–23, 1987.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. d. et al. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 3. 293 p.

MATOS, E. B. Estudo das equações do terceiro grau no ensino médio a partir da equação de van der waals. Universidade Federal de Santa Maria, 2014.

MELO, G. M. Métodos para solução de equações polinomiais do terceiro e quarto graus. Instituto Federal Goiano, 2022.

PAIVA, M. Matemática–volume 1, 2 e 3. 1ªedição. **São Paulo: Moderna**, 2009.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA, F. P. da. O tormento de cardano.

SCHUVAAB, J. L. Resolução de equações algébricas até quarto grau: uma abordagem histórica. 2013.

SOUSA, G. S. Angélica Silva de; OLIVEIRA, L. H. A. A pesquisa bibliografica: princípios e fundamentos. **Cadernos da FUCAMP**, v. 20, n. 43, 2021.

TARTAGLIA, I. triangolo di. Niccolò fontana tartaglia.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

TCC- Entrega do Trabalho de Conclusão de Curso

Assunto: TCC- Entrega do Trabalho de Conclusão de Curso
Assinado por: Fabio Abreu
Tipo do Documento: Anexo
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Fábio Batista de Abreu**, **ALUNO (201712020012) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 13/04/2023 15:11:50.

Este documento foi armazenado no SUAP em 13/04/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 806019
Código de Autenticação: 30ed81ba19