INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

BRENDA SILVA MARTINS DE ALBUQUERQUE

ESTUDO DE TRIÂNGULOS ENVOLVENDO PROBABILIDADE ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CAMPINA GRANDE – PB

2022

BRENDA SILVA MARTINS DE ALBUQUERQUE

ESTUDO DE TRIÂNGULOS ENVOLVENDO PROBABILIDADE ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Orientador: Cícero da Silva Pereira

CAMPINA GRANDE – PB

2022

A345e Albuquerque, Brenda Silva Martins de.
Estudo de triângulos envolvendo probabilidade através da resolução de problemas. - Campina Grande, 2022.
53 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Especialização em Ensino de Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2022.
Orientador: Prof. Me. Cícero da Silva Pereira.

1. Educação matemática 2. Ensino-aprendizagem 3.Classificação de triângulos I. Pereira, Cícero da Silva II. Título.

CDU 519.2

BRENDA SILVA MARTINS DE ALBUQUERQUE

ESTUDO DE TRIÂNGULOS ENVOLVENDO PROBABILIDADE ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ensino de Matemática.

Aprovada em: 21/12/2022

BANCA EXAMINADORA

Cícero da Silva Pereira

Me. Cícero da Silva Pereira / IFRN
Orientador

Baldoíno Sonildo da Nóbrega

Me. Baldoíno Sonildo da Nóbrega / IFRN
Examinador Interno

Leonardo Lira de Brito

Me. Leonardo Lira de Brito / UFCG
Examinador Externo

CAMPINA GRANDE – PB

2022

Dedico este trabalho aos meus pais Adailson e Betânia, e a minha irmã Bianca.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por tudo, absolutamente tudo!

Aos meus pais por todo amor, carinho, apoio, inventivo e compreensão. Por me ajudarem a conquistar meus objetivos, respeitando e apoiando minhas decisões e tornando possível mais essa conquista. Amo vocês e sou muito grata por tudo que fazem por mim.

A minha irmã e amiga, agradeço pelo amor, apoio e incentivo sempre.

Aos meus queridos avós, Rita e Adonias, por todo amor e carinho.

Ao meu amigo, Giovanny Marcellus, por sua amizade, ajuda e por me acolher em sua casa durante o curso.

Aos professores do Curso de Especialização em Ensino de Matemática, pelos ensinamentos ao longo do curso. Agradeço em especial ao professor Me. Cícero da Silva Pereira pela orientação e contribuição para meu crescimento acadêmico.

Aos professores da banca examinadora, o professor Me. Baldoíno Sonildo da Nóbrega e ao professor Me. Leonardo Lira de Brito obrigada pela disponibilidade e contribuições. Em especial ao professor Leonardo, por quem tenho enorme carinho e admiração, agradeço por sempre me ajudar e contribuir para minha vida acadêmica.

Aos meus colegas de curso pelos conhecimentos compartilhados, pela ajuda e por tornarem mais leve e alegre o período do curso.

Finalmente agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho e na minha vida acadêmica.

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo verificar como alunos do 2º ano aplicam o conceito de probabilidade a partir de temas geométricos através da Resolução de Problemas e como essa metodologia pode contribuir para um ensino-aprendizagem com mais compreensão. O presente trabalho se propõe a dar continuidade a uma pesquisa desenvolvida a nível de graduação, a qual investiga as potencialidades da Resolução de Problemas e suas contribuições para o processo de ensino-aprendizagem da matemática. Nesse contexto, uma investigação qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica é proposta neste trabalho, sendo dividida da seguinte forma: aspectos históricos e a concepção de pesquisadores sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas; alguns aspectos históricos e a importância do ensino de Geometria; alguns aspectos históricos e a importância do ensino de Probabilidade; procedimentos metodológicos; descrição e análise dos resultados da aplicação do problema. Após serem investigados os conhecimentos prévios dos alunos, foi iniciada a aplicação do problema, quando foram notadas dificuldades por parte dos alunos na resolução do problema aplicado. No entanto, com o auxílio de métodos como o uso de passos do roteiro do GTERP (Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas) e a mediação-refutação, foi possível minimizar e sanar essas limitações. Além disso, um fator que pode ser notado foi a socialização do conhecimento e a explicação de conceitos na perspectiva dos próprios alunos. Dessa forma, é possível concluir que a Resolução de Problemas oferece inúmeras possibilidades que auxiliam e melhoram o ensino-aprendizagem da matemática, fazendo com que o aluno compreenda os conceitos matemáticos de forma satisfatória.

Palavras-chaves: Educação matemática. Ensino-aprendizagem. Classificação de triângulos. Princípio multiplicativo.

ABSTRACT

In this research, the authors aims to verify how students of the 2nd grade of the high school apply the concept of probability from geometric themes through Problem Solving and how this methodology can contribute to a more understanding teaching-learning process. The present work intends to continue a research carried out as a graduated degree level, which had investigated the potential of Problem Solving and its contributions to the teaching-learning process of mathematics. In this context, a qualitative investigation in the form of pedagogical research is proposed in this work, witch is divided as follows: historical aspects and the researchers conception of mathematics teaching-learning through Problem Solving; some historical aspects and the importance of Geometry teaching; some historical aspects and the importance of teaching probability; methodological procedures; description and analysis of the results of applying the problem. After investigating the students' prior knowledge, the application of the problem had started and difficulties were noticed by the students while solving the applied problem. However, with the help of methods such as the use of steps from the WGSPS (Working Group and Studies in Problem Solving) script and mediation-rebuttal, it was possible to minimize and remedy these limitations. In addition, a factor that could be noticed was the socialization of knowledge and the explanation of concepts from the perspective of the students themselves. In this way, it is possible to conclude that Problem Solving offers numerous possibilities that help and improve the teaching and learning of mathematics, making the student understand mathematical concepts in a satisfactorily way.
Key-words: Mathematics education. Teaching-learning. Classification of triangles. Multiplicative principle.

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

GEPEP – Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-modernidade

GPRPEM – Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas e Educação Matemática

GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Desde a infância sempre tive muito interesse pela matemática e facilidade com números. Em 2015, cursando o terceiro ano do ensino médio, escolhi como primeira opção de curso a Engenharia Civil e como segunda opção a Licenciatura em Matemática, não sendo aprovada na primeira chamada para cursar Engenharia decidi iniciar o segundo curso escolhido. Assim, em 2016, iniciei o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Campina Grande, campus Cuité.

Ao ter contato com a disciplina de Metodologia I, o desejo de prosseguir na licenciatura aumentou. Eu tinha certeza do que queria, no entanto, lecionar ainda me causava medo e nervosismo, as disciplinas de Metodologia II e III, foram para mim um verdadeiro desafio, porém me fizeram amadurecer.

No período 2018.1, fui selecionada para o Programa de Residência Pedagógica, o qual me proporcionou experiências únicas em sala de aula. As atividades realizadas no programa me fizeram perder o medo, o nervosismo e as dúvidas que ainda me restavam em relação a escolha de ser professora. No período seguinte, ao cursar a disciplina de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, conheci melhor a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e isso despertou em mim bastante interesse.

Com o amadurecimento no Programa Residência Pedagógica surgiram alguns questionamentos sobre as metodologias tradicionais comumente utilizadas nas aulas de matemática e como metodologias alternativas poderiam influenciar no ensino significativo da disciplina, que causa nos alunos tanto desinteresse e repulsa. Levando em consideração isso, comecei a pensar sobre o tema do meu Trabalho de Conclusão de Curso, então decidi que queria estudar mais sobre a Resolução de Problemas como metodologia de ensino.

Por outro lado, algo sempre me causou certa inquietação é o modo como o Ensino de Geometria é tratado no ensino básico, pois durante meu Ensino Médio percebia a falta da Geometria e de como o ensino era superficial, o que me gerou consequências. No Ensino Superior, senti dificuldades em conceitos básicos. Quando tive contato com a sala de aula percebi a mesma coisa, que o ensino de Geometria, na maioria das vezes, é deixado de lado. Desta forma, considerando meu interesse, decidimos desenvolver um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado como "A Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino: Possibilidades no Ensino de Geometria" (Albuquerque, 2019) com o objetivo de investigar e compreender o processo de ensino-aprendizagem de conceitos geométricos através da resolução de problemas.

Após concluir a graduação fui selecionada e ingressei no Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia da Paraíba, campus Campina Grande, onde pude aprender muito mais sobre a docência, através principalmente de discussões sobre o ensino da Matemática e as metodologias e métodos que podemos utilizar. Muito me interessa continuar estudando sobre a Resolução de Problemas e o Ensino de Geometria e por este motivo decidimos desenvolver esta Monografia, no entanto, incluindo também o Ensino de Probabilidade, tendo em vista a importância dos conceitos probabilísticos para a vida cotidiana dos alunos e as diversas aplicações de tais conceitos nas mais diversas áreas do conhecimento.

Deste modo, com o objetivo de verificar como alunos do 2º ano aplicam o conceito de probabilidade a partir de temas geométricos através da Resolução de Problemas e como essa metodologia pode contribuir para um ensino-aprendizagem com mais compreensão desenvolvemos esta pesquisa que se caracteriza como uma investigação qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica.

Assim, apresentamos no segundo capítulo deste trabalho os aspectos históricos sobre a Resolução de Problemas no ensino de matemática, as principais concepções sobre o ensino-aprendizagem através da Resolução de Problemas baseando-se em autores como Polya (1945), Onuchic (1999) e Andrade, S. (1998, 2017), tendo em vista compreender as principais potencialidades dessa metodologia de ensino.

Posteriormente, apresentamos no terceiro capítulo, discutimos sobre a importância e os desafios do ensino de Geometria, apresentando, embora de forma breve, aspectos históricos sobre o processo de desvalorização sofrido pela Geometria ao longo dos anos, tendo em vista compreender as consequências geradas, para então compreendamos a importância da Geometria no ensino de matemática.

No quarto capítulo, apresentamos brevemente aspectos históricos sobre a Probabilidade e a importância do seu ensino segundo os documentos oficiais e também na perspectiva de alguns autores. No quinto capítulo relacionamos o ensino de Geometria e Probabilidade e mostramos algumas vantagens elucidadas por Mary Montgomery Lindquist e Alberto P. Shulte (1994).

Em seguida, no sexto capítulo, são discutidos os aspectos metodológicos, o tipo de pesquisa, o problema, os conceitos abordados, a caracterização do campo e dos sujeitos. Por fim, no sétimo capítulo, apresentamos a descrição e análise dos dados de nossa pesquisa.

2. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O ENSINO DA MATEMÁTICA

2.1. SITUANDO HISTORICAMENTE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Matemática e a Resolução de Problemas caminham juntas há muito tempo, Onuchic (1999) menciona que existem registros de problemas encontrados desde a história antiga egípcia, chinesa e grega, e de fato, o Papiro de Rhind e o Papiro de Moscou, escritos por volta de 1850 a.C. são compostos por diversos problemas envolvendo fatos da vida cotidiana dos povos egípcios.

Na matemática os problemas também tiveram papel importante para o surgimento e desenvolvimento de muitos conceitos e teorias, uma vez que, os problemas motivavam as investigações e a busca por técnicas que os solucionassem. Polya (1945, p. v) afirma que "uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema".

No entanto, a perspectiva que se tem atualmente e a maneira como relacionamos a Matemática e Resolução de Problemas demorou muito para surgir e se consolidar. O matemático húngaro George Polya foi um dos primeiros e principais matemáticos a apresentar a Resolução de Problemas de maneira mais consistente no Ensino da Matemática.

> A primeira vez em que a resolução de problema é tratada como um tema de interesse para professores e alunos, nos níveis superiores, foi a partir do livro How to solve it, de Pólya, cuja primeira edição data de 1945. Antes desse período, entretanto, houve algumas experiências e alguns estudos enfatizando os produtos da resolução de problemas. As experiências mais remotas e significativas podem ser creditadas a Dewey, entre 1896 e 1904. Nessas experiências, as crianças estudavam através de projetos que reproduziam as situações socioeconômicas (estudo/resolução de problemas de interesse da comunidade). (ANDRADE, 1998, p. 7).

Embora a Teoria de Gestalt, que orientou os currículos escolares de 1930 à 1950, tenha utilizado como método de ensino a aplicação da matemática em problemas do mundo real, foi a obra publicada por Polya em 1945 que de fato marcou de maneira significativa a Resolução de Problemas no Ensino da Matemática, sendo esta uma das mais importantes, se não a mais importante, para a Resolução de Problemas e seu desenvolvimento.

A obra traz uma reflexão sobre a importância do professor na construção do conhecimento dos alunos, com indagações e sugestões que, inicialmente, auxiliam na resolução de alguns problemas e que, posteriormente, leva o aluno a desenvolver a capacidade de resolver problemas por si próprio.

No livro Polya apresenta quatro passos para a resolução de um problema. O primeiro consiste na compreensão do problema, ou seja, interpretar o problema, seus dados e entender o que se procura, a incógnita. Segundo, estabelecer um plano, encontrar uma relação entre os dados e a incógnita e idealizar a resolução do problema. O terceiro passo é a execução do plano, colocar em prática o que foi idealizado. Quarto, retrospecto, que consiste em analisar a solução e discutir sobre.

Em meados da década de 1950, até o início da década de 1970 o currículo escolar no Brasil e em outros países foi orientado pelo Movimento da Matemática Moderna, que tinha como foco a compreensão da estrutura da disciplina através da lógica dedutiva, porém, não obteve os resultados esperados e o currículo escolar voltou a basear-se no Conexionismo, que havia orientado os currículos na década de 1920.

Com isso, durante a década de 1980, a Resolução de Problemas se apoiando principalmente no Construtivismo e na teoria sociocultural que tem Vygotsky como principal teórico, conquistou espaço no currículo escolar dos Estados Unidos e logo depois em outros países do mundo, tendo como foco o retorno à aprendizagem por descoberta através da Resolução de Problemas.

Todavia, faltaram a coerência e a direção necessária para atingir bons resultados, isto é, não existia concordância quanto à forma pela qual esse objetivo seria alcançado. Onuchic (1999, p. 206) esclarece que “essa falta de aceitação ocorreu, provavelmente, pelas diferenças de concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de resolução de problemas ser o foco da matemática escolar”.

Com base nas diferentes concepções existentes para o assunto na época, Schroeder e Lester (1989, p. 32-33) elencaram três abordagens de ensino que corresponde à Resolução de Problemas, a saber: i) Ensinando sobre Resolução de Problemas; ii) Ensinando para Resolução de Problemas; iii) Ensinando através da Resolução de Problemas.

Os autores explicam essas formas de abordagem da Resolução de Problemas da seguinte forma:

i) Ensinando sobre Resolução de Problemas – nessa concepção o professor destaca o modelo de solução de problemas de Polya, ou alguma pequena variação dele. De modo geral, este modelo descreve um conjunto de quatro fases interdependentes no processo de resolução de problemas de matemática: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e retrospecto. Os alunos são explicitamente ensinados sobre as fases que, de acordo com Polya, os solucionadores de problemas especialistas usam quando resolvem problemas de matemática, e são encorajados a se conscientizarem de sua própria evolução até quando eles próprios resolvem problemas.

Além disso, eles aprendem uma série de heurísticas, ou estratégias, a partir das quais podem escolher ou usar as ferramentas que devem usar para planejar e executar seus planos de solução de problemas. Algumas das estratégias normalmente ensinadas incluem procurar padrões, resolver um problema mais simples e discutir o resultado obtido. Na melhor das hipóteses, ensinar sobre solução de problemas também inclui experiências com a solução de problemas, mas sempre envolve muita discussão explícita e como os problemas são resolvidos.

ii) Ensinando para Resolução de Problemas – nessa concepção o professor concentra-se em maneiras pelas quais a matemática ensinada pode ser aplicada na solução de problemas rotineiros e não-rotineiros. Embora a aquisição de conhecimento matemático seja de importância primordial, o propósito essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-lo. Consequentemente, os alunos recebem muitos exemplos dos conceitos matemáticos e estruturas que estão estudando e muitas oportunidades para aplicar essa matemática na resolução de problemas.

Além disso, o professor que ensina para resolver problemas está muito preocupado com a capacidade dos alunos de transferir o que aprenderam de um contexto problemático para outros. Um forte adepto dessa abordagem pode argumentar que a única razão para aprender matemática é poder aplicar o conhecimento adquirido para resolver problemas.

iii) Ensinando através da Resolução de Problemas – nessa concepção, os problemas são valorizados não apenas como um propósito para aprender matemática, mas também como um meio primário de fazê-lo. O ensino de um conceito matemático se dá com uma situação-problema que incorpora aspectos-chave do tópico. Um objetivo de aprender matemática é transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado da matemática dessa maneira pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como uma instância do conceito ou técnica matemática) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com estes símbolos).

Sintetizando as concepções de Schroeder e Lester (1989), podemos afirmar que ensinar sobre a resolução de problemas refere-se ao modelo de Polya, ou seja, a utilização do roteiro de quatro fases proposto por ele. Ensinar para a resolução de problemas consiste em como a matemática pode ser ensinada para que se aplique na resolução de problemas, sejam eles do cotidiano ou não. Ensinar através da resolução de problemas é algo mais amplo, pois considera o problema como o ponto de partida e como um meio para fazer e ensinar matemática.

No entanto, Onuchic (1999, p. 207) ressalta que “embora na teoria as três concepções de ensinar resolução de problemas possam ser separadas, na prática elas se superpõe e acontecem em várias combinações e sequências”. Allevato (2014, p. 215) afirma que quando o professor trabalha a terceira concepção, isto é, a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, “os alunos aprendem tanto sobre resolução de problemas, quanto aprendem Matemática para resolver novos problemas, enquanto aprendem Matemática através da resolução de problemas”.

Em 1989, deram início as discussões a respeito das perspectivas didático-pedagógicas da Resolução de Problemas que então passa a ser analisada como metodologia de ensino. Em 1990 admite-se a Resolução de Problemas como um meio de ensinar matemática, considerando o problema como principal contribuinte na construção do conhecimento.

Em 1998, a Resolução de Problemas apareceu no documento oficial Brasileiro - Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Este foi um grande avanço para Resolução de Problemas no currículo brasileiro, uma vez que em muitos momentos o documento enfatiza a importância e a contribuição desta nas aulas de matemática e no desenvolvimento dos alunos como protagonistas na construção da sua aprendizagem.

Os PCN (BRASIL, 1998) consideram que a resolução de problemas deve ser o ponto de partida da atividade matemática. “Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemática ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.” (BRASIL, 1998, p. 40)

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), o Problema pode ser resumido nos seguintes princípios:

- Como ponto de partida da atividade matemática e não como definição;
- Deve levar o aluno a interpretar o enunciado e assim estruturar a situação apresentada;
- Deve proporcionar aproximações sucessivas de um conceito que pode ser utilizado também em um outro momento, em um outro problema;
- Precisa articular um conceito matemático com outros conceitos, proporcionado assim a construção de um campo de conceitos;

- Não pode ser visto como atividade paralela, mas como uma orientação para a aprendizagem;

Atualmente os currículos brasileiros são orientados pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a Resolução de Problemas é abordada nas diversas unidades temáticas, tanto na área do ensino fundamental como na área do ensino médio, como meio importante para aprendizagem e desenvolvimento do aluno, nas diversas áreas da vida dele onde a matemática pode ser aplicada. "Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações". (BNCC, 2018, p 265).

Em especial aos alunos do ensino fundamental a BNCC (2018) destaca que:

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade Matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2017, p. 264).

Ao longo desses anos e desse processo de desenvolvimento da Resolução de Problemas como metodologia de ensino foram criados no Brasil alguns grupos de estudos que desenvolvem pesquisas e trabalhos em Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática, como o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), o Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-modernidade (GEPEP) e o Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas e Educação Matemática (GPRPEM).

A existência destes grupos de pesquisas é de grande importância, sobretudo para fortalecer esta linha de pesquisa nas determinadas regiões e impulsionar o aumento destas investigações, contribuindo para que a Resolução de Problemas permaneça presente na formação de professores e principalmente nas salas de aula, ganhando cada vez mais espaço.

2.2. EXERCÍCIO E PROBLEMA

Allevato e Onuchic (2014) mencionam que embora haja muitas pesquisas desenvolvidas sobre a resolução de problemas e apesar de sua importância na formação escolar em todos os níveis de escolaridade seja inquestionável, a forma de incorporá-la, de modo a promover uma aprendizagem com compreensão, parece ainda não está clara para alguns professores de Matemática.

De fato, ainda que o ensino da Matemática através da Resolução de Problemas tenha uma relevância inquestionável e desempenhe um importante papel na Educação Matemática, é comum encontrar professores que afirmem ter dificuldades para trabalhá-la em sala de aula de forma efetiva, e uma das principais dificuldades refere-se à diferença entre exercício e problema e sobre o significado que os professores atribuem ao termo “problema”, diante disso, se faz necessário especificar os termos exercício e problema, sob a perspectiva da resolução de problemas.

De acordo com Dante (2007) o exercício, serve para praticar determinado algoritmo, processo ou habilidade, por outro lado, o problema é uma busca por algo desconhecido e que não se tem de antemão nenhum algoritmo que garanta a solução. A definição dada por Dante (2007) é semelhante a definição de Echeverría e Pozo (1998, p. 16) que afirmam que “um problema diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata à solução”.

Frequentemente, é possível perceber a maneira equivocada de alguns professores utilizarem os problemas nas aulas de matemática. Os problemas são utilizados para fixar conhecimentos já adquiridos pelos alunos ou avaliar se a capacidade de aplicar os conceitos, técnicas ou executar alguma habilidade que lhe foi ensinado. Consideramos essa maneira como equivocada, por compreendermos que esta é uma perspectiva antiga de Resolução de Problemas, que de acordo com a literatura, já foi superada. Uma vez que, de acordo com as concepções estudadas a respeito do ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas, podemos compreender que a principal finalidade do problema no ensino da matemática é de auxiliar o aluno na construção do seu conhecimento, sendo o problema o início de todo esse processo.

Entre autores e pesquisadores que defendem o ensino da matemática através da resolução de problemas existem diferentes definições para problema. Segundo Onuchic (1999, p. 215) “problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”, essa concepção abrange outras concepções como a de Hiebert et al (1997 *apud* VAN DE WALLE, 2009, p. 57) que reconhece um problema como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra prescrita, nem a percepção de que haja um método correto específico para obter à solução.

Dentro do estudo da Resolução de Problemas, além das distintas definições de problema, alguns autores classificam os problemas em vários tipos. Classificar os problemas não é algo simples, como afirma Echeverría e Pozo:

> Existem inúmeras classificações das possíveis estruturas dos problemas, tanto em função da área à qual pertencem e do conteúdo dos mesmos como do tipo de operações e processos necessários para resolvê-los, ou de outras características. Assim, por exemplo, seria possível diferenciar entre problemas do tipo dedutivo ou do tipo indutivo, dependendo dos raciocínios que o sujeito precisasse realizar. (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 20).

Echeverría e Pozo (1998) classificam os problemas em dois tipos, problemas bem definidos ou estruturado e problema mal definido ou mal estruturado. No primeiro tipo facilmente pode-se identificar se uma solução foi obtida. Um problema bem definido ou estruturado caracteriza-se pela clareza que apresenta tanto na proposição como na solução e no tipo de operação a ser utilizado para resolver o problema.

Por outro lado, um problema mal definido ou mal estruturado não tem tanta clareza, e neste tipo de problema possivelmente encontre-se várias soluções diferentes, todas válidas, utilizando métodos diferentes e também válidos. Assim, em um problema mal definido ou mal estruturado é difícil determinar o momento em que foi obtida uma solução clara, diferentemente do problema bem resolvido ou estruturado.

A classificação apresentada por Echeverría e Pozo (1998) é mais geral, não se tratando especificamente de problemas matemáticos. No entanto, alguns autores classificam de maneira mais específica problemas matemáticos, como por exemplo, Polya (1945), Dante (2007) e Stancanelli (2007).

Polya (1945) classifica os problemas matemáticos em quatro tipos: problema rotineiro, problemas de determinação, problemas de demonstração e problemas práticos. Polya (1945, p.142) explica que "um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pelo surgimento, passo a passo, de algum exemplo muito batido".

O problema de determinação caracteriza-se por ter como objetivo encontrar a incógnita do problema, Polya (1945, p.142) esclarece ainda que "os problemas de determinação podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas" e que "as partes principais são a incógnita, os dados e a condicionante".

O problema de demonstração, classificado pelo autor, tem por objetivo mostrar se determinada afirmativa, enunciada claramente no problema, é verdadeira ou falsa. Deve-se responder de maneira conclusiva, provando se a afirmativa é verdadeira ou falsa. Segundo o autor um problema de demonstração matemático é formado por duas partes principais, a hipótese e a conclusão do teorema que deve ser provado ou refutado.

Por último, Polya (1945) classifica os problemas práticos, o autor explica que esses problemas são muito diferentes de problemas puramente matemáticos, apesar de que os principais motivos e processos são basicamente os mesmos em ambos. O autor esclarece que:

> Num problema matemático perfeitamente formulado, todos os dados e todas as cláusulas da condicionante são essenciais e têm de ser levado em conta. Nos problemas práticos, temos uma grande multiplicidade de dados e de condicionante; tomamos em consideração tantos quanto pudermos, mas somos forçados a desprezar alguns. (POLYA, 1945, p. 147)

As classificações feitas por alguns autores são semelhantes à de outros, embora recebam nomes diferentes, qualificam-se por características similares. Na classificação feita por Polya (1945), o que ele chamou de problema rotineiro vai ao encontro da classificação feita por Dante (2007), nomeado problema-padrão. O problema-padrão envolve em sua resolução a aplicação direta de um ou mais algoritmos previamente aprendido sem exigir do aluno nenhuma estratégia, pois a solução já está contida no enunciado do problema, de modo geral este tipo de problema não desperta a curiosidade do aluno.

Dante (2007) classifica os problemas-padrão em dois tipos, os problemas-padrão simples e os problemas-padrão compostos. O primeiro caracteriza-se por permitir que a solução seja obtida a partir da utilização de uma única operação, por outro lado, os problemas-padrão compostos exigem que sejam utilizadas duas ou mais operações. Além de classificar os problemas-padrão, Dante (2007) classifica o problema em mais três tipos, problemas-processo ou heurísticos, problemas de aplicação e problemas de quebra-cabeça.

Os problemas-processo ou heurísticos, diferentemente do problema-padrão, caracterizam-se principalmente por desafiar e despertar a curiosidade do aluno. Este tipo de problema exige tempo, pois para chegar a solução é necessário ter tempo para pensar e elaborar um plano, uma vez que o enunciado não traz nenhum direcionamento da operação a ser utilizada ou da solução a ser obtida, desta forma, permite que o aluno desenvolva sua criatividade e seu espirito explorador.

Dante (2007) classifica como problemas de aplicação os problemas também conhecidos como situação-problema, que são aqueles que apresentam situações reais do cotidiano e exige o uso de conceitos ou técnicas matemáticas para serem resolvidos. Por último, Dante (2007, p.21) classifica os problemas de quebra-cabeça como "problemas que envolvem e desafiam grande parte dos alunos. Geralmente constituem a chamada Matemática recreativa, e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque, que é a chave da solução".

Stancanelli (2007) discute os tipos de problemas, no entanto, explica que não pretende classificá-los, mas fazer uma reflexão sobre os diferentes tipos de problemas que podem ser aplicados nas aulas de matemática. A autora caracteriza problema convencional, problema não-convencional, problemas sem solução, problemas com mais de uma solução, problemas com excesso de dados, problemas de lógica e outros problemas não-convencionais.

A definição que a autora faz a respeito de problemas convencionais é semelhante as classificações de Dante (2007) e Polya (1945), problemas-padrão e problema rotineiro, respectivamente. Aos problemas que possuem várias soluções possíveis a autora deu o nome de problemas não-convencionais. Os problemas sem solução, segundo Stancanelli (2007), são responsáveis por romper a concepção de que todo problema tem solução, ajudando o aluno a desenvolver a habilidade de duvidar, o que faz parte do pensamento crítico.

De acordo com a autora os problemas com mais de uma solução são os responsáveis por romper com a concepção de que todo problema tem uma única solução, ou que há sempre uma maneira correta de resolver determinado problema. Os problemas com excesso de dados são caracterizados por não necessitarem de todos os dados disponíveis para serem resolvidos, esse tipo de problema permite a dúvida e ensina o aluno a selecionar os dados relevantes, tendo em vista que, a maioria dos problemas do cotidiano não são propostos de maneira objetiva e concisa.

O penúltimo problema descrito por Stancanelli (2007) são os problemas de lógica, que de acordo com a autora são os problemas do qual a resolução não tem base numérica e, exige raciocínio dedutivo. Por fim a autora descreve outros problemas não-convencionais como problemas mais favoráveis à problematização, ou seja, problemas que podem ser transformados em outros com alteração de alguns dados ou com questionamentos que o professor pode fazer de acordo com o objetivo da aula.

Se faz necessário que apresentemos estas diferentes classificações apresentadas sobre problema ao longo dos anos, para embasarmos teoricamente este trabalho de um modo mais profundo, como também para situarmos o leitor nesta pesquisa. No entanto, atualmente não se discute mais a respeito disso. Os pesquisadores da área, atualmente, trabalham apenas com problema, sem classificações.

Neste sentido, apresentamos a concepção de problema de acordo com Andrade, S. (2017), perspectiva a qual mais se aproxima da que consideramos o problema nesta pesquisa.

O autor esclarece que problema é entendido como um projeto, uma questão, tarefa ou situação, na qual: i) o aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução; ii) o aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo; iii) introduz e/ou leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo.

Neste trabalho iremos considerar essa concepção sobre o que se entende de problema, considerando-o como o ponto de partida para a construção do conhecimento do aluno. No tópico a seguir discutiremos com mais clareza e profundidade sobre como o problema é visto na Resolução de problemas como metodologia de ensino.

2.3. ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

As reformas ocorridas no ensino de Matemática no século XX ocasionaram mudanças nas concepções de estudiosos e pesquisadores da área de Resolução de Problemas, que passaram a questionar e pesquisar sobre suas possibilidades como metodologia de ensino. A partir de então, a Resolução de Problemas passa a ser vista como um meio para ensinar a matemática. Onuchic (1999) esclarece que essa metodologia visa utilizar tudo o que as reformas anteriores tinham de bom, como a repetição, compreensão, o uso da linguagem matemática da teoria dos conjuntos, resolver problemas e até o ensino tradicional.

A partir dessa concepção muitas pesquisas e estudos foram desenvolvidos. Neste tópico discutiremos sobre a metodologia de ensino-aprendizagem através da Resolução de Problemas e como ela é utilizada por alguns pesquisadores.

Andrade, S. (1998, 2017) denominou essa metodologia, inicialmente, em suas primeiras publicações, por "Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula" e atualmente utiliza-se "Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução, Proposição e Exploração de Problemas".

A metodologia proposta por Andrade, S. (1998, 2017) admite o problema como ponto de partida para a construção do conhecimento, porém, admite também que um problema é capaz de trazer sempre algo novo a explorar, um questionamento diferente dos já esperados e até mesmo um novo problema, assim como, permite a exploração de conteúdos transversais.

Essa metodologia defende que através da codificação e descodificação, os alunos compreendem conceitos matemáticos explorando, resolvendo e propondo problemas.

O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução, Proposição e Exploração de Problemas propõe que “a exploração e a resolução de um problema são desenvolvidas a partir de um movimento aberto, não fechado, embora não solto, que temos denominado de Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado (P-T-RS-R)”. (ANDRADE, S., 2017, p. 365). Esse movimento denominado pelo autor de Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado primeiramente propõe um problema e após os alunos resolverem o problema, professor e alunos debatem as resoluções num processo denominado reflexões e sínteses, chegando assim a solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas e novas reflexões.

A proposta dessa metodologia é que o aluno construa seus conhecimentos partindo de um problema, mas que a partir desse problema surjam novos problemas ou questionamentos que também contribuam para a aprendizagem dos alunos, ou seja, quando um problema é solucionado outros problemas surgem. A metodologia idealizada por Andrade, S. (1998, 2017) objetiva desenvolver a aprendizagem de modo que a compreensão de conceitos seja mais ampla e profunda, não se limitando apenas na busca de solução, mas indo além, explorando outros conceitos e propondo novos problemas.

A metodologia utilizada e desenvolvida pelos participantes do GTERP, liderado pela Profa. Lourdes de La Rosa Onuchic (1992), é intitulada como “Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas”. Essa concepção, assim como a utilizada por Andrade, S. (1998, 2017), considera o problema como ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e juntos, professor e alunos, constroem o conhecimento no decorrer da resolução.

Andrade, C. e Onuchic (2017) esclarecem que nessa metodologia:

> O ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como construtores desse conhecimento. Além disso, essa metodologia integra uma concepção mais atual de avaliação. Ela, a avaliação, é construída durante a resolução de problema, integrando-se ao ensino como vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando sua aprendizagem e reorientando as práticas em salas de aula quando for necessário. (ANDRADE, C.; ONUCHIC, 2017, p. 438-439).

Inicialmente, antes de adotarem a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, na década de noventa, o grupo passou a utilizar o termo ensino-aprendizagem, visto que, diante das reformas e estudos posou-se a compreender que o ensino e a aprendizagem devem ocorrer de forma simultânea. Posteriormente, o conceito de avaliação e sua posição no processo de ensino-aprendizagem passou a ser repensado. Após estudos compreendeu-se a importância da avaliação durante o processo de ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas e a necessidade de incorporar concepções da avaliação contínua neste processo, assim sendo, o GTERP passou a utilizar o termo ensino-aprendizagem-avaliação.

O ensino da matemática através da Resolução de Problemas não impõe regras ou formas para que seja trabalhada em sala de aula, no entanto, o GTERP elaborou um roteiro para auxiliar o professor aplicar tal metodologia. A primeira versão desse roteiro foi elaborada com a participações de professores do projeto "Ensinando Matemática através da Resolução de Problemas" desenvolvido entre os anos 1997 e 1998. Esta versão apresentada explica as seguintes etapas: formar grupos-entregar uma atividade, o papel do professor, resultados na lousa, plenária, análise de resultados, consenso e formalização. (ONUCHIC, 1999, p. 216-217).

Mais tarde esse roteiro foi reestruturado, a ele foram adicionados novos elementos e então foi proposto um segundo roteiro composto pelas seguintes etapas: preparação do problema, leitura individual, leitura em conjunto, resolução do problema, observar e incentivar, registro das resoluções na lousa, plenária, busca do consenso e formalização do conteúdo. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p. 7-8). No entanto, após pesquisas realizadas com a aplicação desse roteiro o grupo observou a necessidade de modificá-lo novamente e então elaborou um terceiro roteiro, o qual foi acrescentado alguns elementos que vem sendo utilizado com o intuito de orientar os professores para a condução de suas aulas.

Andrade, C. e Onuchic (2017) apresentam o roteiro proposto pelo GTERP que é composto pelas seguintes etapas:

1. Formar grupos.
2. Preparação do problema – O professor deve elaborar ou escolher o problema gerador, ou seja, o problema que será o ponto de partida para construção do novo conteúdo ou procedimento. É importante que o conteúdo necessário para a resolução do problema proposto não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula.
3. Leitura individual – Distribuir ou expor o problema para os alunos e solicitar que realizem a leitura.
4. Leitura em conjunto – Solicitar que realizem a leitura do problema em grupo. O professor pode auxiliar os alunos nessa etapa realizando a leitura junto com eles, caso

sintam dificuldade em interpretar o problema ou exista no enunciado algum termo ou palavra que os alunos não compreendam.

5. Resolução do problema – Após realizarem a leitura e interpretação do enunciado do problema os alunos, em conjunto, buscam resolvê-lo. Através do problema gerador o aluno irá construir seu conhecimento.
6. Observar e incentivar – O professor observa, analisa e estimula os alunos enquanto resolvem o problema. O professor deve mediar o processo de resolução fazendo questionamentos que façam com que os alunos a pensem e organizem suas ideias, provocando também a toca de ideias do grupo.
7. Registro das resoluções na lousa – Um aluno de cada grupo é convidado a registrar sua resolução na lousa. Todas as resoluções devem ser apresentadas para que os alunos analisem e discutam sobre os caminhos e resultados obtidos, sejam eles certos ou errados.
8. Plenária – Todos os alunos são convocados para discutir as resoluções registradas na lousa, para que possam expor suas opiniões e esclarecer possíveis dúvidas. O professor deve mediar as discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos. Este é um momento importante para a aprendizagem dos alunos, no qual realizam a troca de conhecimentos.
9. Busca de consenso – Após discutirem e analisar as resoluções e soluções, e tirarem suas dúvidas o professor motiva os alunos a chegar a um consenso sobre o resultado correto.
10. Formalização do conteúdo – Nesta etapa, denominada “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal” da resolução, escrita em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos, dando destaque as técnicas e demonstrações.
11. Proposição de problemas – Nesta etapa tanto o professor como os alunos podem propor novos problemas. Para os professores, propor e estender os problemas enriquecesse a aprendizagem dos alunos, por outro lado, para o aluno propor seus próprios problemas aprofunda e amplia sua habilidade de resolver e compreender ideias matemáticas. A proposição de problemas é uma ferramenta importante para o ensino da matemática através da resolução de problemas.

A metodologia e o roteiro aplicados pelo grupo desenvolvem a concepção de Onuchic (1999) que estabelece problema como tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver, ou seja, o problema passa a ser um ponto de partida para a aprendizagem e que, através da resolução de problema, surgem conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

É importante ressaltar que as metodologias propostas por Andrade, S. (1998, 2017) e pelo GTERP não vão contra a linha de pesquisa Resolução de Problemas ou são linhas distintas, é que algumas abordagens se limitam apenas na busca da solução e o que podemos compreender das metodologias aqui abordadas é que elas vão além disso, buscando explorar novos conceitos e propor novos problemas a partir de um outro inicialmente proposto. Para o desenvolvimento desse trabalho consideramos contribuições das duas concepções discutidas anteriormente, no entanto, o roteiro proposto pelo GTERP foi o que mais embasou nossa pesquisa.

3. GEOMETRIA

3.1. O ENSINO DE GEOMETRIA

A matemática é subdividida em algumas áreas, dentre elas a Geometria, uma das primeiras áreas a ser teorizada, uma vez que, teve origem ainda na Babilônia principalmente pela necessidade de medir e demarcar terras. Eves (2011) afirma que muitos exemplos concretos babilônios datam o período entre 2000 a.C. a 1600 a.C. e que neste período estes povos já deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles entre outros conceitos.

No entanto, foi na Grécia, por volta de 600 a.C. que Tales de Mileto deu início a Geometria demonstrativa. Este matemático grego foi responsável por grandes descobertas e muito importante para Geometria. Por volta de 300 a.C., dando continuidade aos trabalhos desenvolvidos por Tales de Mileto, Euclides com a contribuição de outros estudiosos escreve a obra "Elementos".

> Tão logo o trabalho apareceu, ganhou o mais alto respeito e, dos sucessores de Euclides até os tempos modernos, a mera citação do número de um livro e o de uma proposição de sua obra-prima é suficiente para identificar um teorema ou construção particular. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos Elementos já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria. (EVES, 2011, p. 167-168)

Com o passar do tempo outros matemáticos também contribuíram de maneira significativa para a Geometria, como Pitágoras (570 - 496 a.C.) que fez inúmeras descobertas, entre elas destaca-se a relação entre os lados do triângulo, que conhecemos hoje como o Teorema de Pitágoras. Platão (427 a.C – 347 a.C.) também fez sua contribuição para o desenvolvimento da Geometria, iniciou o estudos dos sólidos geométricos: cubo, tetraedro octaedro, dodecaedro e icosaedro e demonstrou que esses são os únicos poliedros regulares, os quais ficaram conhecidos como "os poliedros de Platão".

Ao longo dos anos outros estudiosos contribuíram para o desenvolvimento da Geometria, com isso surgiram outras vertentes da Geometria, como a analítica, por exemplo, no entanto, Euclides e sua obra "Elementos" influenciaram e ainda influencia o ensino da Geometria escolar, presente em todos os níveis de ensino básico.

Embora, o ensino de Geometria seja importante no processo de ensino-aprendizagem de matemática e no desenvolvimento de habilidades de outras áreas do conhecimento humano e em várias situações do cotidiano, por muito tempo a Geometria foi deixada de lado, costumava ser ignorada ou empurrada para final do ano letivo.

Pavanello (1989, 1993) esclarece que o processo que acarretou a desvalorização do ensino de Geometria no Brasil está ligado a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases de 1971 (Lei 5692/71), para o ensino de 1º e 2º graus, que concedeu a liberdade para que as escolas elaborassem seus currículos, fazendo com que os professores que tinham dificuldade ou insegurança em trabalhar a Geometria, não a incluíssem no currículo, dando ênfase ao ensino da Álgebra, assim a maioria dos alunos passou a estudar a Geometria apenas no 2º grau.

A autora ainda esclarece que o abandono do ensino de Geometria relaciona-se ao processo denominado por ela de processo de deterioração da escola pública, na qual, o acesso das classes menos favorecidas da sociedade a escola pública, implicou a transição das classes mais favorecidas para as escolas particulares, que preservavam o ensino de Geometria, assim como as academias militares, elitizando o ensino desta disciplina.

Para Lorenzato (1995) muitas são as causas da desvalorização da Geometria no ensino da Matemática, no entanto, considera duas as principais causas: a falta de conhecimento por parte dos professores e a importância exagerada dada ao livro didático. A falta de domínio por parte dos professores fez com que muitos omitissem a Geometria ou a ensinassem de forma superficial, seguindo o livro didático, que a apresentava como um conjunto de definições e propriedades no final do livro.

Por outro lado, o movimento da Matemática Moderna também contribuiu para a desvalorização da Geometria. Nesse contexto, Lorenzato (1995) esclarece que:

> O movimento da Matemática Moderna também tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria: antes de sua chegada ao Brasil, nosso ensino geométrico era marcantemente lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos o detestavam. A proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje. (LORENZATO, 1995, p. 4).

Esses acontecimentos, como descritos pelos autores, ocasionaram o abandono do ensino de Geometria, que abriu uma grande lacuna no aprendizado do aluno, no entanto, em 1998 com a implantação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), ela passou a ser vista sob outra perspectiva, no qual considera que os conceitos geométricos são parte importante do currículo de Matemática, pois proporcionam ao aluno o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

Recentemente, com a homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 2018, o currículo escolar passou por uma reforma, que evidenciou ainda mais a Geometria, uma vez que, aparece como unidade temática. Essa reforma vem salientar um dos principais pontos que, segundo Lorenzato (1995), contribuiu para a desvalorização da Geometria.

Nesse sentido, acreditamos que por meio da BNCC pode haver um avanço no ensino da Geometria, sobretudo no que diz respeito a sua presença com mais frequência nas aulas de Matemática. Esperamos que isso aconteça por diversos fatores, mas, em especial, pelos livros didáticos que devem ser elaborados de acordo com o que é proposto pela BNCC (2018), assim, eles devem dar uma maior atenção a Geometria, o que pode ser também considerado pelo professor e que, consequentemente, venha tornar este ensino mais presente e significativo.

O ensino significativo da Geometria é importante para a aprendizagem da matemática como um todo. Segundo Van de Walle (2009) a rica compreensão da Geometria tem implicações para outras áreas curriculares e apresenta algumas conexões entre a Geometria e outras áreas da matemática.

Diante do campo vasto em que a Geometria se insere e de tantas possibilidades a serem consideradas em seu ensino, salientamos a necessidade de um ensino significativo, de modo que venha proporcionar ao aluno uma conexão das ideias existentes com novo conceitos, relacionando o abstrato ao mundo real. Pois, como destacado nos PCN, “o estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente”. (BRASIL, 1998, p. 51).

4. PROBABILIDADE

4.1. O ENSINO DE PROBABILIDADE

Sabemos que a Probabilidade está diretamente ligada à aleatoriedade e a analise de incertezas de eventos futuros, e esta questão incluem a compreensão e análise do acaso, que era vista pelas civilizações antigas como algo relacionado à sorte, aos deuses e a entidades místicas ou sobrenaturais. Assim, “quando as sociedades primitivas precisavam fazer algum tipo de escolha, recorriam frequentemente a aleatorizadores por três razões básicas: garantir a justiça, evitar discórdia e obter orientação divina”, defende Bennett (2003, p.14).

Bennett (2003) explica que diversos dados, feitos de ossos de animais, foram descobertos por arqueólogos entre objetos de várias civilizações primitivas. O hábito de tirar a sorte ‘jogando ossos’, por exemplo, é retratado em escrituras de antigas religiões. O uso desses e de outros objetos serviam como forma de adivinhação, para buscar inspiração divina, para tomada de decisão e também para jogos de azar, que eram largamente utilizados na antiguidade, foram encontrados em toda Mesopotâmia, no vale Indo, no Egito, na Grécia e no Império Romano.

Mesmo com o passar do tempo à humanidade continuou a usar a aleatoriedade para os mais diversos fins, porém ainda não havia se formulado uma teoria que explicasse a quantificação dos resultados incertos gerados pelo uso desses objetos ou jogos. Assim sendo, Silva (2021, p. 23) explica que a Probabilidade é a área da Matemática que surgiu por último na história e, por isto, foi teorizada e vista como ciência muito depois que outras áreas, como Aritmética, Álgebra e Geometria.

Eves (2011) elucida que:

> Embora os filósofos gregos da Antiguidade discutissem necessidade e contingência longa e detalhadamente, talvez seja correto dizer que não houve nenhum tratamento matemático da probabilidade até por volta do final do século XV e início do século XVI, quando alguns matemáticos italianos tentaram avaliar as possibilidades em alguns jogos de azar, como o de dados.(...) Cardano escreveu um breve manual do jogador que envolvia alguns aspectos da probabilidade matemática. Mas em geral se concorda que a questão à qual está ligada a origem da ciência da probabilidade é o problema dos pontos. Esse problema pede que se determine a divisão das apostas de um jogo de azar interrompido, entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecida a contagem no momento da interrupção e o número de pontos necessários para se ganhar o jogo. Pacioli, em sua Sūma,

> de 1494, foi um dos primeiros autores a introduzir o problema dos pontos num trabalho de matemática. O problema foi também discutido por Cardano e Tartaglia. Mas só se verificou um avanço efetivo quando, em 1654, o Chevalier de Méré, um hábil e experiente jogador, cujo raciocínio teórico sobre o problema não coincidia com suas observações, o propôs a Pascal. Este se interessou pelo problema e o levou ao conhecimento de Fermat. Seguiu-se uma notável correspondência entre os dois matemáticos, na qual o problema foi resolvido correta mas diferentemente por cada um deles. Pascal resolveu o caso geral, obtendo muitos resultados através do uso do triângulo aritmético. Essa correspondência lançou os fundamentos da moderna teoria das probabilidades. (EVES, 2011, p. 365-366).

Após a contribuição de Pascal-Fermat, Eves (2011) afirma que somente em 1657 Christian Huygens escreveu o primeiro tratado formal, o que gerou grande impulso para o desenvolvimento da Probabilidade, posteriormente, destacam-se a obra de Jacob Bernoulli denominada Ars Conjectandi (1713) e a de Abraham de Moivre intitulada The Doctrine of Chances (1718). Estes trabalhos potencializaram os estudos da Probabilidade e a colocaram em um patamar de campo da Matemática.

Após esses esforços pioneiros, o assunto foi levado à frente por matemáticos como Abraham De Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), entre outros. No século XX, Jean Piaget (1896-1980), Barbel Inhelder (1913-1997) e Efrain Fischbein (1920-1998) contribuíram significativamente com obras que se destacam no campo educacional e são referencias em pesquisas e estudos da área.

Com o passar dos anos estudos evidenciaram ainda mais a importância da Probabilidade, desse modo, pesquisadores e organizações educacionais passaram a defender sua inclusão nos currículos escolares desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e assim aconteceu. No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), defendem “a importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no fundamental, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos” (BRASIL, 1998, p. 20).

Carvalho e Pietropaolo (2018, p.2) explicam que as características da vida contemporânea exigem constantemente a mobilização de conhecimentos estatísticos, combinatórios e probabilísticos. Assim, tomar decisões coerentes na vida cotidiana e interpretar informações com mais fidedignidade para a tomada de decisão levam em conta, muitas vezes, o raciocínio probabilístico, como elucidado nos PCN (1998, p. 70), que cita que o ensino da probabilidade permite que os alunos se familiarizem com o modo como a Matemática é usada para fazer previsões e perceber sua importância na vida cotidiana.

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018. p. 274), por sua vez, explica que "todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos."

No que se refere às habilidades específicas inerentes à Probabilidade voltada para o Ensino Fundamental, a BNCC (2018) aponta que:

> a finalidade, no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos. Para isso, o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral. No Ensino Fundamental – Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem. (BRASIL, 2018, p.274)

A probabilidade possui importantes aplicações, em diversos campos, além de garantir a validade nos procedimentos de inferência estatística. Como evidenciado nos documentos oficiais citados acima, é necessário entender probabilidades na vida cotidiana assim como parte de nossa compreensão intelectual do mundo. Diante disso, constata-se a importância do ensino da probabilidade desde os anos iniciais da Educação Básica, seja para instruir o sujeito para tomada consciente de decisões, seja por servir de base para conhecimentos mais avançados ou para ampliar compreensão do raciocínio matemático de uma maneira mais geral.

5. PROBABILIDADE E GEOMETRIA

A Probabilidade e a Geometria são duas áreas matemáticas que por diversas vezes não recebem a atenção necessária em sala de aula, embora sejam muito importantes não só para a vida acadêmica dos alunos, mas como para a vida prática, tendo em vista que, a Probabilidade não está apenas ligada a aleatoriedade de moedas ou baralhos e dados, como normalmente é apresentado em sala de aula. Assim como a Geometria também tem muitos conceitos aplicados no nosso cotidiano. A BNCC (2018) elucida que:

> No caso da resolução e formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho. (BNCC, 2018, p. 535)

Mary Montgomery Lindquist e Alberto P. Shulte (1994, p. 214-215) pontuam vantagens de unirmos a Probabilidade e a Geometria nas aulas de matemática:

> 1. É fácil formular problemas de geometria envolvendo probabilidade.
> 2. Os problemas de geometria que incluem probabilidade são, com frequência, intrinsicamente interessantes e podem servir de motivação.
> 3. Os alunos terão oportunidade de aplicar, de modo diferente e surpreendente, conceitos de geometria já aprendidos.
> 4. O mais importante é que os alunos terão uma compreensão melhor da probabilidade ao verem conceitos importantes aplicados no contexto da geometria.

A BNCC (2018), por sua vez, apresenta como uma das competências específicas para o Ensino Médio que o aluno compreenda e utilize, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representações matemáticas na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

A BNCC (2018) ainda elucida que:

> Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e

argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. (BRASIL, 2018, p. 538)

6. METODOLOGIA

A seguir, serão explanados os procedimentos metodológicos de nossa pesquisa, a qual caracteriza-se como uma investigação qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica. Optou-se por essa modalidade de pesquisa, tendo em vista sua contribuição para o âmbito escolar.

Segundo Lankshear e Knobel (2008), uma das finalidades da pesquisa pedagógica é melhorar a formação dos alunos, uma vez que, permite aos professores pesquisadores investigar seus métodos de ensino e testar a eficácia de intervenções ou abordagens que acreditam que possam melhorar a aprendizagem. Diante disso, os professores têm a possibilidade de fazer mudanças e buscar alternativas para melhorar seu ensino e, consequentemente, a aprendizagem de seus alunos.

É importante ressaltar que essa modalidade de pesquisa não beneficia apenas o professor pesquisador, pois os conhecimentos e experiências adquiridos podem ser divulgados cientificamente e dessa forma, compartilhar o conhecimento e colaborar no processo de ensino-aprendizagem mediados por outros profissionais.

Dessa forma, tendo em vista nosso objetivo de investigar e compreender o processo de ensino-aprendizagem de conceitos geométricos através da resolução de problemas, entendemos que a investigação qualitativa é a mais adequada, uma vez que investiga o fenômeno como um todo, isto é, como se dá o processo e não meramente o resultado.

Bogdan e Biklen (1994) caracterizam a investigação qualitativa da seguinte forma:

> 1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; 2. A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números; 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (BOGDAN E BIKLEN, 1994, p. 47-51).

Na modalidade de pesquisa escolhida para o desenvolvimento dessa pesquisa identificamos essas características, uma vez que, a pesquisa pedagógica possibilita que os professores pesquisadores investiguem as salas de aula e os métodos de ensino de forma direta e imediata, permitindo que os dados sejam coletados de forma natural, sendo o pesquisador o principal instrumento da pesquisa.

Os dados de nossa pesquisa foram coletados por meio de observações, anotações, áudios e imagens. As observações feitas foram descritas logo após a aplicação que realizamos para a coleta de dados, tendo em vista, a importância que o processo como o todo tem para o nosso trabalho. A partir da descrição analisamos os dados de forma indutiva.

6.1. O PROBLEMA

Durante o levantamento bibliográfico e elaboração do referencial teórico dessa pesquisa, ao explorar o livro "Aprendendo e ensinando geometria" (Mary Montgomery Lindquist e Alberto P. Shulte,1994, p. 217), o seguinte problema nos chamou atenção e então resolvemos utiliza-lo para o desenvolvimento da nossa pesquisa.

Problema: Sejam A={3, 5}, B={4, 5, 12} e C={5, 13}. Suponhamos que x seja escolhido aleatoriamente em A, y em B e z em C. Qual a probabilidade de que:

a) Se possa formar um triângulo de lados de comprimento x, y e z?
b) Se possa formar um triângulo isósceles (não equilátero) com lados de comprimento x, y e z?
c) Se possa formar um triângulo equilátero com lados de comprimento x, y e z?
d) Se possa formar um triângulo retângulo com lados de comprimento x, y e z?

Ao trabalharmos com esse problema abordamos o conceito probabilístico do Principio Multiplicativo ou Principio Fundamental da Contagem e conceitos geométricos sobre Triângulos. Para solucionar este problema se faz necessário que o aluno utilize os seguintes conhecimentos prévios:

"Se um evento é composto de 2 etapas sucessivas e independentes de maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é *m* e, para cada possibilidade da 1ª etapa, o número de possibilidades na 2ª etapa é *n*, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto *m.n*." (DANTE, 2018, p.221)

"Condição de existência de um triângulo: em todo triângulo, a medida de comprimento de um lado é sempre menor do que a soma das medidas de comprimento dos outros 2 lados." (DANTE, 2018, p. 157)

Ao que diz respeito a classificação Dante (2018) classifica os triângulos quanto aos lados e ângulos. O equilátero possui três lados de medidas iguais, o isósceles possui dois lados de medidas iguais e o retângulo é caracterizado por seus ângulos internos, no entanto, para esse problema é mais adequado que se utilize o Teorema de Pitágoras para verificar se o triângulo é retângulo.

A BNCC (2018, p. 535) apresenta como competência específica para a etapa do ensino médio a utilização de estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos a fim de interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Com a aplicação desse problema possibilitamos o desenvolvimento da competência especifica citada acima assegurando as seguintes habilidades indicadas na BNCC (2018, p. 536-537):

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

6.2. CARACTERIZAÇÃO DO CAMPO E DOS SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada em uma Escola Estadual de Ensino Médio Integral, localizada no município de Lagoa Seca, região metropolitana de Campina Grande, Paraíba. A atividade foi aplicada em duas turmas de 2º ano, uma composta por 28 alunos e outra por 26, com idades entre 15 e 18 anos. A aplicação aconteceu em 4 aulas de 50 minutos cedidas pelo professor titular da turma no dia 06 de outubro de 2022.

Para a descrição dessa atividade iremos identificar a professora-pesquisadora apenas como pesquisadora e para preservar a identidade dos alunos iremos identificá-los como A1 (aluno 1), A2 (aluno 2), e assim sucessivamente.

7. DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE E ANÁLISE DOS DADOS

Para realizar a aplicação da atividade de pesquisa utilizamos principalmente o roteiro proposto pelo GTERP apresentado no capítulo 2, que é composto pelas seguintes etapas: 1 - Formar grupos; 2 - Preparação do problema; 3 - Leitura individual; 4 - Leitura em conjunto; 5 - Resolução de problemas; 6 - Observar e incentivar; 7 - Registro das resoluções na lousa; 8 - Plenária; 9 - Busca de consenso; 10 - Formalização do conteúdo; 11 - Proposição de problemas. No entanto, não seguimos de forma assídua, tendo em vista a situação na qual foi aplicada a atividade.

Inicialmente, o professor titular da turma fez uma breve apresentação da pesquisadora e comunicou que as aulas seriam ministradas com o objetivo de contribuir para nossa pesquisa, após isso foi apresentada aos alunos a pesquisa, sua finalidade e explicando também que ela se desenvolve na área da Resolução de Problemas, uma metodologia já conhecida pelos alunos, uma vez que, o professor titular é adepto desta metodologia nas suas aulas.

Posteriormente, iniciamos a aplicação pedindo que os alunos se organizassem em duplas, trios ou grupos, como preferissem e realizassem a leitura individual do problema.

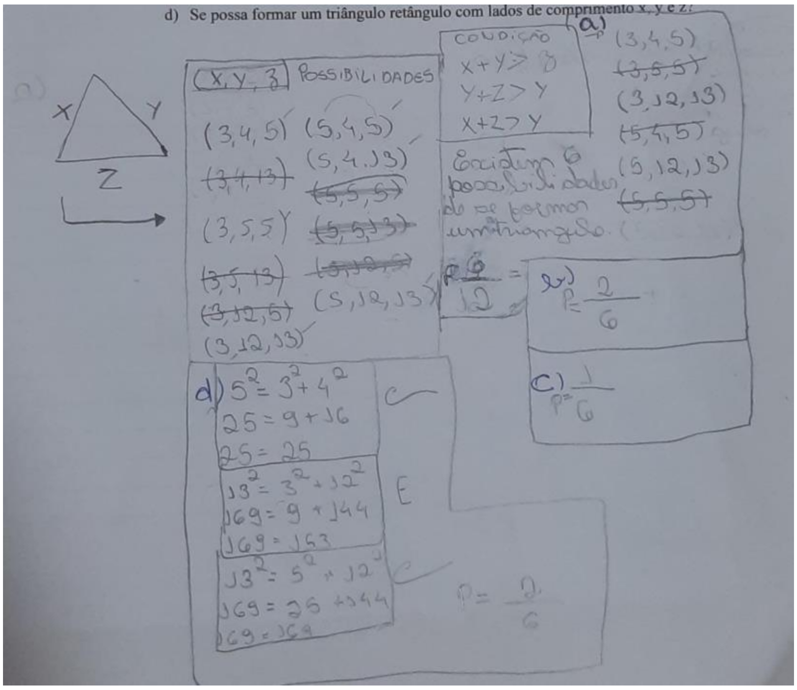
Em seguida, realizamos a leitura em conjunto e então seguimos a aplicação fazendo alguns questionamentos breves sobre a os conceitos que seriam abordados na atividade. Conforme as respostas iam surgindo outros questionamentos eram feitos fazendo com que os alunos já fossem refletindo sobre o problema e refletindo sobre os conceitos e procedimentos que seriam necessários para resolução. Além dos questionamentos fomos fazendo alguns registos na lousa conforme as respostas dadas pelos alunos.

Foram feitos questionamentos tais como: Alguém sabe quais conceitos matemáticos esse problema aborda?; Vocês já estudaram sobre Probabilidade?; Sobre a Geometria, os Triângulos?; O que é um Triângulo?; Como podemos classificá-los?; Mas alguém lembra qual a condição de existência de um Triângulo?; E sobre Probabilidade, o que já vocês lembram?; E nesse problema o que vocês acham que se aplica?. Esses questionamentos foram feitos com o intuito de investigar os conhecimentos prévios dos alunos sobre conceitos matemáticos que seriam utilizados no problema, pois como destaca Van de Walle (2009), o professor deve estar seguro que o aluno compreendeu o problema antes de trabalhar nele.

Em seguida, após essa discussão inicial partimos para a quinta etapa do roteiro, a resolução do problema, explicamos que seria dado a eles um tempo para que iniciassem a resolução e que podiam solicitar assistência se achassem necessário, porém, mesmo sem que solicitassem, após alguns minutos começamos a observar as duplas e grupos de perto, executando a etapa "observar e incentivar".

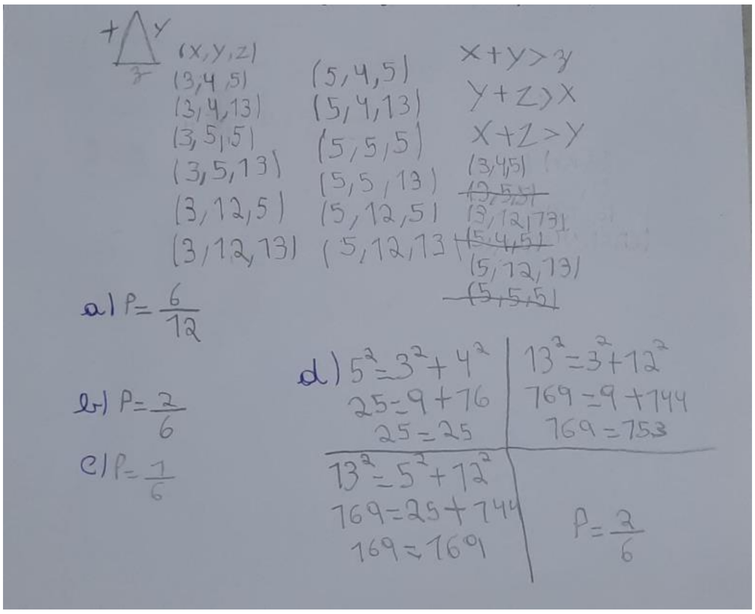
Alguns alunos não tiveram maiores dificuldades em resolver o problema, e como podemos observar nas figuras 1, 2 e 3 logo conseguiram compreender o problema, identificar e aplicar os conceitos necessários, estabelecer seu plano de resolução e executá-lo.

Figura 1: Resolução do A1



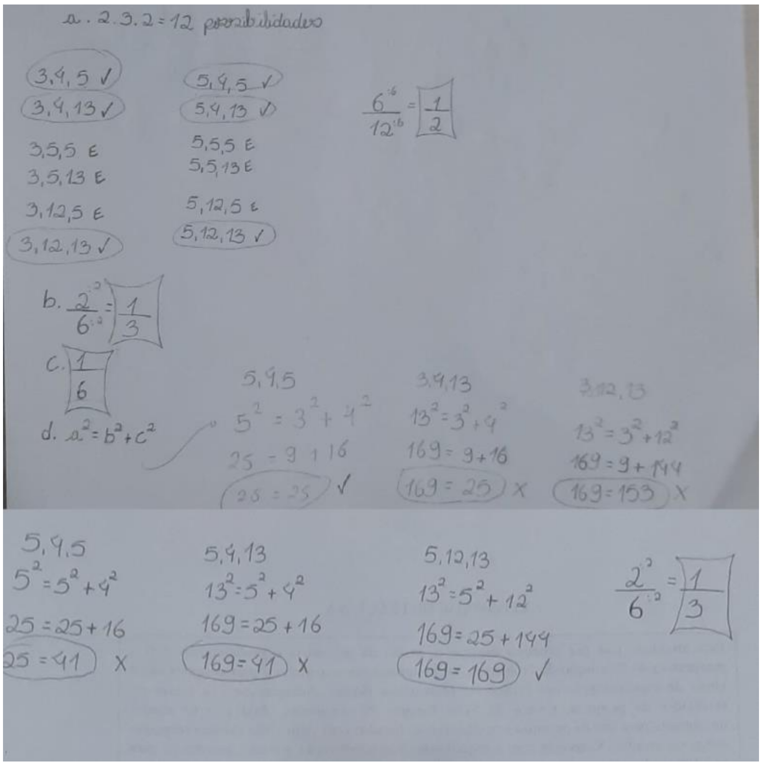
Fonte: Arquivo pessoal

Figura 2: Resolução do A2



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 3: Resolução do A3



Fonte: Arquivo pessoal

Podemos observar que alguns alunos realizaram o cálculo de possibilidades e outros não, partindo diretamente para combinação dos termos x, y, z sem saber previamente quantas possibilidades seriam estabelecidas, porém, mesmo não tendo calculado a quantidade de possibilidades, o aluno conseguiu obter o resultado esperado.

Durante a aplicação, percebemos certas dificuldades por parte dos alunos, destes alguns não resolveram o problema, nem quiseram nenhum tipo de auxílio, apenas alegaram que leram, mas não compreenderam, e no fim copiaram dos colegas. Contudo, outras limitações nos chamaram mais atenção. Diversos alunos compreenderam o problema, mas tiveram bastante dificuldade na parte inicial, com o Principio Multiplicativo, isso mostra como a Probabilidade precisa ser mais explorada em sala.

Para desenvolver as possibilidades, fazendo as combinações, os alunos fizeram algumas relações interessantes, abaixo apresentamos um diálogo no qual podemos perceber isso:

A4: Como aqui tem x, y e z, isso como se fosse um par ordenado?
Pesquisadora: Como assim?
A4: Eu vou ter que colocar um número em x, um em y e um em z?
Pesquisadora: Isso

O aluno parece ter compreendido, porém, não associou da forma esperada, pegando os números de forma aleatória e ao verificar com outros colegas voltou a questionar a pesquisadora.

A4: Se eu preciso de um x, um y e um z, por que dessa forma não está certo?
Pesquisadora: E qual seria a forma certa?
Nesse momento o outro aluno explicou da sua maneira
A5: É porque você tem que fazer um chuveirinho, parecido com o chuveirinho, pega um número em A e faz um chuveirinho só que só pega um número em B e outro em C.

Aqui podemos ver a importância de desenvolver atividades em grupo, uma vez que, o conhecimento pode ser compartilhado entre os próprios alunos, sem contar que, algumas vezes os colegas de classe têm uma visão e uma forma de explicar que facilita o entendimento do colega e o professor pode apenas reforçar e formalizar o conceito já discutido por eles entre si.

Os PCN (1998, p. 39) elucida que deve proporcionar aos seus alunos situações que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar ideias, e trabalhar coletivamente, por sua vez, favorece o desenvolvimento de capacidades como:

- Perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso;
- Saber explicitar o próprio pensamento e procurar compreender o pensamento do outro;
- Discutir as dúvidas, supor que as soluções dos outros podem fazer sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias ideias;
- Incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender.

Além disso, os PCN (1998, p. 41), explica que resolver um problema pressupõe que o aluno:

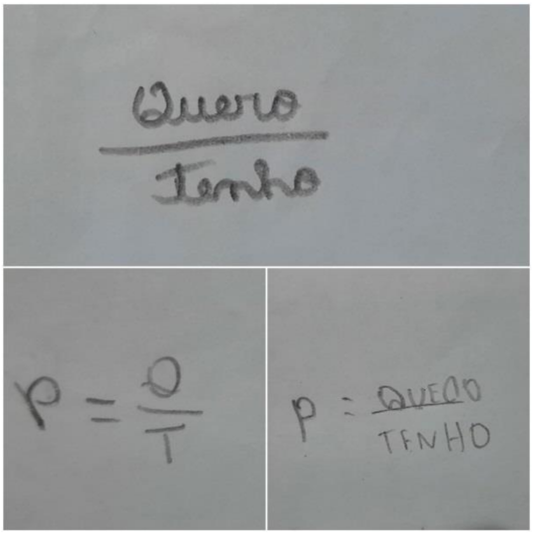
- Elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
- Compare seus resultados com os de outros alunos;
- Valide seus procedimentos.

O conceito probabilístico necessário para a resolução do problema já havia sido estudado em sala e algo que contribuiu muito para nossa atividade foi a relação estabelecida pelos alunos para fórmula da probabilidade,

$$p(A) = \frac{número\ de\ resultados\ favoráveis}{número\ de\ resultados\ possíveis},$$

como podemos observar na figura abaixo.

Figura 4: Relação associada pelos alunos a fórmula da probabilidade



Fonte: Arquivo pessoal

Com essa relação "quero e tenho" os alunos conseguiram compreender melhor as alternativas do problema. A professora pesquisadora pediu para que os alunos explicassem com suas palavras como entendiam essa relação, o que gerou uma discussão interessante, e que mais uma vez ressalta a importância do diálogo e da troca de conhecimento entre os próprios alunos.

Segundo a interpretação dos turma, uma vez que boa parte dos alunos fez essa relação, o "número de resultados" se associa ao termo "tenho", no sentido da quantidade de possibilidades encontradas para se formar um triângulo, e por sua vez, o termo "quero" associa-se ao "número de resultados favoráveis" pois são apenas as possibilidades favoráveis ao que a alternativa pede.

Os alunos que conseguiram aplicar o conceito de Princípio Multiplicativo sem muita dificuldade e utilizaram a fórmula do "quero e tenho" conseguiram solucionar o problema com mais facilidade, apresentando alguma dificuldade apenas na última alternativa, onde deviria utilizar o Teorema de Pitágoras, no entanto, resolveram o problema sem muita complicação.

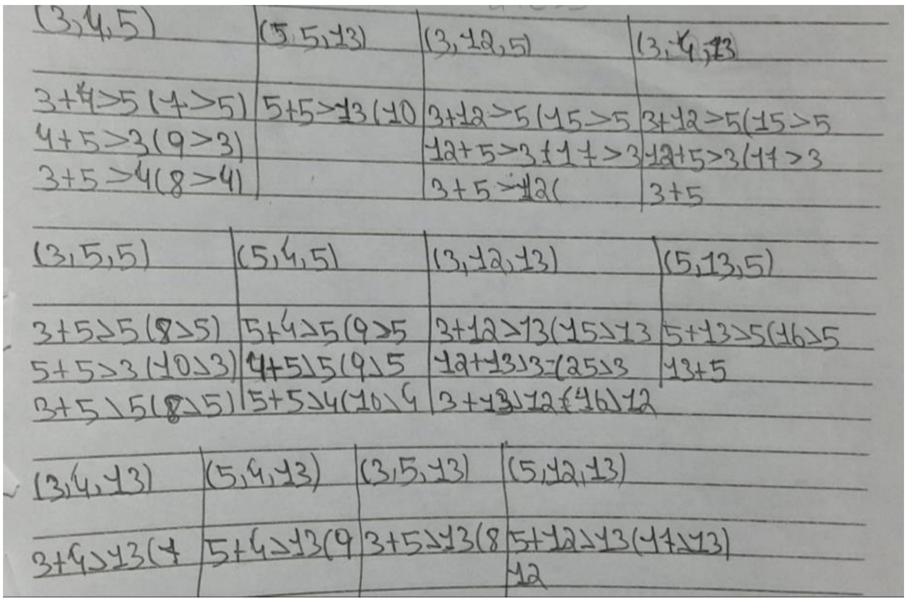
Por outro lado, alguns alunos tiveram mais dificuldades relação a interpretação do problema e consequentemente na resolução. A interpretação é uma das principais dificuldades que os alunos sentem diante da resolução de problemas, embora o professor titular venha introduzindo a Resolução de Problemas como metodologia nessas turmas, acreditamos que esta dificuldade é um reflexo de séries anteriores e de métodos tradicionais, no qual, o professor sugere sempre qual técnica ou conceito utilizar para resolver as atividades propostas, fazendo com que os alunos não precisem se esforçar para determinar que procedimento utilizar.

Para o bom entendimento da matemática e seus conceitos é fundamental que os alunos desenvolvam certo nível de abstração, a BNCC (2018) explica que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos.

Embora para muitos o triângulo pareça um figura geométrica simples, essa aplicação nos fez perceber que muitos alunos tem considerável dificuldade em compreender figuras geométricas e suas propriedades, e que mesmo compreendendo técnicas matemáticas como a de verificação da condição de existência, é complicado relacionar à parte algébrica a parte geométrica.

Muitos alunos após recordarem como verificar a condição de existência do triangulo analisando a soma de seus lados prosseguiu com a resolução do problema sem maiores dificuldades, por outro lado, outros alunos tiveram bastante dificuldade nessa parte. O aluno que desenvolveu a resolução mostrada na figura abaixo, por exemplo, mesmo calculando de forma escrita teve bastante dificuldade em relacionar e compreender essa relação.

Figura 5: Resolução do A6



Fonte: Arquivo pessoal

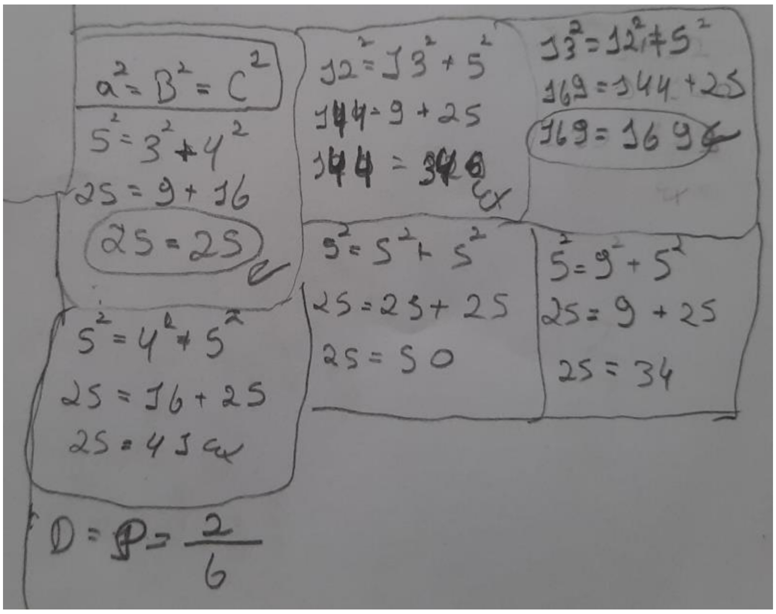
Os PCN (1998) ressalta a importância de:

> explorar o potencial crescente de abstração, fazendo com que os alunos descubram regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas.

> Com isso criamse condições para que o aluno perceba que a atividade matemática estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p. 63)

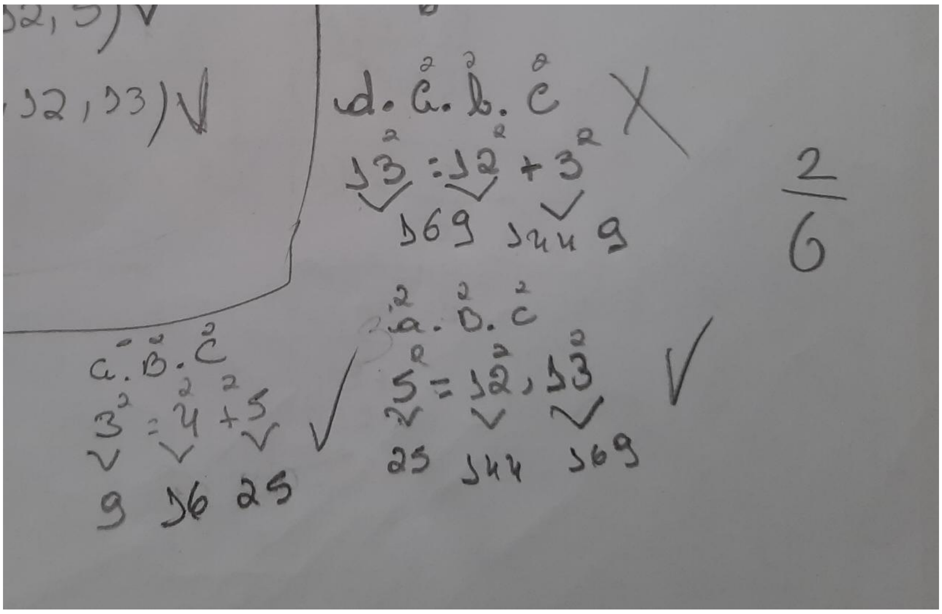
Nas alternativas B e C os alunos não sentiram dificuldades em responder, tendo em vista a discussão que tivemos inicialmente sobre a classificação dos triângulos e a aplicação da fórmula “quero e tenho”, em contrapartida, a última alternativa fez com alguns alunos sentissem um pouco de dificuldade, pois como já citado, era necessário a utilização do Teorema de Pitágoras para verificar se a combinação de números formava um triângulo retângulo ou não.

Figura 6: Resolução do A7



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 7: Resolução do A8



Fonte: Arquivo pessoal

Como podemos observar nas figuras 6 e 7 os alunos tiveram dificuldade na posição dos números. Na figura 6 o aluno refez posicionando o maior número do primeiro lado da igualdade, o outro aluno, da resolução mostrada na figura 7, não refez, porém analisou melhor e mentalmente reorganizou a igualdade constatando assim quais combinações formavam um triângulo retângulo. O que podemos perceber é que muitas vezes o aluno somente memoriza a fórmula, exercita de maneira mecânica e sente dificuldade em aplica-la em outra perspectiva.

Isso nos faz perceber a importância da Resolução de Problemas na construção do conhecimento do aluno. Pois quando trabalhamos apenas exercícios, estamos apenas aplicando e memorizando a fórmula a partir da repetição, por outro lado, um problema como esse aplicado em nossa pesquisa, faz com que o aluno compreenda e perceba diferentes maneiras de usar uma fórmula.

Sabemos que cada professor e cada sala de aula são únicos, e que toda metodologia deve ser adaptada a essa particularidade. Diante disso, mesmo tendo como principal base o roteiro proposto pelo GTERP, não seguimos de forma assídua, tomando algumas de suas fases e adaptando outras, tendo em vista o nosso tempo de intervenção e a forma qual foi aplicado o problema.

Assim, nesse último momento da nossa aplicação, discutimos sobre o problema, os resultados e sua resolução, porém, como já havíamos feito alguns registos na lousa, os resultados foram compartilhados apenas de maneira oral e os conceitos não foram formalizados, tendo em vista a discussão inicial. Posteriormente, discutimos sobre a atividade buscando investigar a percepção dos alunos sobre essa metodologia de ensino, e como esta já é utilizada pelo professor titular, ouvimos muitos comentários positivos por parte dos alunos.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa propôs verificar como alunos do 2º ano aplicam o conceito de probabilidade a partir de temas geométricos através da Resolução de Problemas e como essa metodologia pode contribuir para um ensino-aprendizagem com mais compreensão. A pesquisa ocorreu por meio da aplicação de uma atividade em duas turmas de segundo ano de uma Escola Estadual de Ensino Médio Integral, localizada em Lagoa Seca – PB.

No decorrer do desenvolvimento da atividade, percebemos que a maioria dos alunos teve um bom desempenho, obtendo o resultado esperado. No entanto, alguns alunos tiveram dificuldades na resolução do problema. As principais dificuldades notadas se referem à compreensão do problema. A pesar disto, com discussões e a mediação-refutação, estas dificuldades foram sanadas. Baseando-se nos estudos que realizamos sobre o auxílio do roteiro proposto pelo grupo GTERP e da importância da mediação-refutação proposta por Andrade, S. (1998, 2017).

Diversos alunos compreenderam o problema, mas tiveram bastante dificuldade na parte inicial, com o Principio Multiplicativo. Entretanto, algo que contribuiu muito para nossa atividade foi a relação estabelecida pelos próprios alunos para fórmula da probabilidade, “quero e tenho”, que fez com que os alunos conseguissem realizar a atividade.

Outro ponto importante é a formação de grupos, pois a socialização do conhecimento auxilia bastante a resolução do problema, e consequentemente o aprendizado do aluno, pois, quando o aluno explica o conteúdo da forma que entende ela reforça seu aprendizado ao mesmo tempo que auxilia outros alunos.

Quanto a classificação dos triângulos percebemos que alguns alunos tem considerável dificuldade em compreender figuras geométricas e suas propriedades, e que mesmo compreendendo técnicas matemáticas como a de verificação da condição de existência, é complicado relacionar à parte algébrica a parte geométrica.

Muitos alunos, após recordarem como verificar a condição de existência do triangulo, analisando a soma de seus lados prosseguiu com a resolução do problema sem maiores dificuldades, por outro lado, outros alunos tiveram bastante dificuldade nessa parte.

A verificação do triângulo retângulo foi outro ponto delicado para os alunos, no entanto, com a ajuda dos colegas e a mediação-refutação, a maioria conseguiu aplicar a fórmula de forma satisfatória.

Diante das análises e das observações que realizamos, percebemos o quanto a Resolução de Problemas pode contribuir para o ensino-aprendizagem da matemática, proporcionando ao aluno autonomia na construção do conhecimento, e permitindo a conexão com as mais diversas áreas do conhecimento, além de proporcionar o ensino prazeroso, uma vez que, possibilita ao aluno investigar, explorar e reconhecer propriedades, discutir sobre e comprovar suas afirmações.

Tendo em vista ainda que esta pesquisa se trata de uma espécie de continuidade de uma outra, podemos concluir ainda que, a Resolução de Problemas como metodologia de ensino-aprendizagem pode ser aplicada de diversas maneiras em sala de aula, seja como ponto de partida para um conceito novo, seja para fixar o conteúdo ou até mesmo reforçar e verificar o aprendizado.

Entendemos que nossa pesquisa é limitada diante a vasta área de ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas, no entanto, os resultados podem contribuir com pesquisas posteriores e mais amplas, assim como o trabalho em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Brenda Silva Martins de. **A Resolução de Problemas como metodologia de ensino: Possibilidades no ensino de geometria.** Trabalho de conclusão de curso – Universidade Federal de Campina Grande, Cuité, 2019.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Trabalhar através da Resolução de Problemas: Possibilidades em dois diferentes contextos. **VIDYA**, v. 34, n. 1, p. 209-232, jan./jun., 2014.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. **BOLETIM DO GEPEM**, n. 55, p. 3-19, jul./dez., 2009.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino – Aprendizagem - Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas. *In:* ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner; JUSTULIN, Adresa Maria (org.). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p, 35-52.

ANDRADE, Cecília Pereira de. ONUCHUIC, Loudes de La Rosa. Perspectivas para a Resolução de Problemas no GTERP. *In:* ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; JUNIOR, Luiz Carlos Leal; PIRONEL, Márcio (org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p, 433-466.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

ANDRADE, Silvanio. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. *In:* ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; JUNIOR, Luiz Carlos Leal; PIRONEL, Márcio (org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p, 355- 393.

BENNETT, D.J. **Aleatoriedade.** São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).** Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).** Matemática. Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BOGDAN, Robert C; BIKLEN Sari Knopp**. Investigação Qualitativa em Educação**. Portugal: Porto Editora, 1994. p, 47-51.

CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de; PIETROPAOLO, Ruy Cesar. **Trajetórias didáticas em uma experiência formativa sobre probabilidade com professores de**

Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Foz do Iguaçu, Paraná, 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 12. ed. São Paulo: Editora Ática, 2007. p, 16-21.

DANTE, Luiz Roberto. Teláris matemática, 8º ano : ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2018. p. 221.

DANTE, Luiz Roberto. Teláris matemática, 7º ano : ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2018. p. 157.

ECHEVERRÍA, Maria Del Puy pérez; POZO, Juan Ignacio. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. *In:* POZO, Juan Ignacio (org.). **A solução de problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998. p. 13-43.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

http://www.curingao.com.br/curingao/faculment.htm. Acesso em: 13 dez. 2019.

https://pisicosophia.webnode.com/vertentes-pisicologicas2/behaviorismo/edward-lee-thorndike-/. Acesso em: 13 dez. 2019.

LANKSHEAR, Colin; KNOBEL, Michele. **Pesquisa Pedagógica**: do projeto à implementação. Tadução de Magda França Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (orgs.) **Aprendendo e ensinando geometria.** São Paulo, 1994.

LORENZATO, Segio Apparecido. Porque não ensinar geometria? *In:* A Educação Matemática em Revista. Blumenau: **SBEM**, ano III, n. 4, 1995, p. 3-13.

LORENZATO, Sergio (org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores).

MORAIS, Rosilda Santos dos; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. *In:* ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner; JUSTULIN, Adresa Maria (org.). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p, 17-34.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In:* BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções & Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p, 199-220.

PAVANELLO, Regina Maria. **O Abandono do Ensino de Geometria: Uma Visão Histórica.** 1989. 201 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1989.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Revista Zetetiké**, n. 1, p. 7-17, 1993.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. / G. Polya (1945); tradução Heitoe Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SILVA, Rita de Cássia Batista da. **Justiça em jogos: compreensões de estudantes (crianças e adultos) e professores à luz de demandas cognitivas da probabilidade.** Tese – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2021.

SCHRODER, Thomas L.; LESTER, Frank K., Jr. ***Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving.*** *In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). New directions for elementary school mathematics. Reston: NCTM,* 1989.

STANCANELLI, Renata. **Conhecendo diferentes tipos de problemas.** *In*: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. (Orgs.). Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed Editora, 2007. *E-book.*

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

LISTA DE APÊNDICES

APÊNDICE A – PROBLEMA APLICADO PARA A COLETA DE DADOS DA PESQUISA

ATIVIDADE DE PESQUISA

Esta atividade tem por objetivo analisar o ensino da geometria e probabilidade sob a perspectiva da Resolução de Problemas. Os pesquisadores responsáveis pela pesquisa são a aluna de especialização em Ensino de Matemática Brenda Albuquerque e a professor, orientador da pesquisa, Cícero da Silva Pereira. As resoluções obtidas serão usadas unicamente para fins de pesquisa e os dados serão tratados com sigilo. Não existem respostas certas ou erradas. Responda com tranquilidade. Sua colaboração é muito importante para nós. Obrigada pela sua participação!

Sejam A={3, 5}, B={4, 5, 12} e C={5, 13}. Suponhamos que x seja escolhido aleatoriamente em A, y em B e z em C. Qual a probabilidade de que:

a) Se possa formar um triângulo de lados de comprimento x, y e z?
b) Se possa formar um triângulo isósceles (não equilátero) com lados de comprimento x, y e z?
c) Se possa formar um triângulo equilátero com lados de comprimento x, y e z?
d) Se possa formar um triângulo retângulo com lados de comprimento x, y e z?

ANEXO

Figura 8: Leitura coletiva da atividade

Fonte: Arquivo pessoal

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Monografia de Conclusão de Curso

Assunto:	Monografia de Conclusão de Curso
Assinado por:	Brenda Albuquerque
Tipo do Documento:	Dissertação
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Brenda Silva Martins de Albuquerque**, **DISCENTE (202111280019) DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 16/01/2023 08:49:46.

Este documento foi armazenado no SUAP em 16/01/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 719827
Código de Autenticação: 73730542b4