



**INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

FRANCISCO TIAGO BONIFÁCIO

**A EQUAÇÃO DE PELL E SUAS APLICAÇÕES PARA A
RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS**

CAJAZEIRAS

2023

FRANCISCO TIAGO BONIFÁCIO

**A EQUAÇÃO DE PELL E SUAS APLICAÇÕES PARA A RESOLUÇÃO DE
EQUAÇÕES DIOFANTINAS**

Monografia apresentada junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Orientador(a):

Prof. Dr. Vinicius Martins Teodosio Rocha.

Cajazeiras

2023

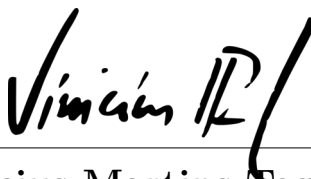
FRANCISCO TIAGO BONIFÁCIO

A EQUAÇÃO DE PELL E SUAS APLICAÇÕES PARA A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS


Monografia apresentada ao programa de **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 23/08/2023


Banca Examinadora:



Prof. Dr. Vinicius Martins Teodosio Rocha
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
 **FABIO DA SILVA DE SIQUEIRA LEITE**
Data: 04/09/2023 08:45:20-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Fábio da Silva Siqueira Leite
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
 **MARCIO ALISSON LEANDRO COSTA**
Data: 04/09/2023 10:23:38-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Márcio Alisson Leandro Costa
Instituto Federal do Amazonas - IFAM

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

B715e Bonifácio, Francisco Tiago.
A equação de Pell e suas aplicações para a resolução de equações diofantinas / Francisco Tiago Bonifácio.– 2023.
66f. : il.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2023.
Orientador(a): Prof. Dr. Vinicius Martins Teodosio Rocha.
1. Equação de Pell. 2. Equação não linear. 3. Equações diofantinas. 4. Teoria dos números. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ

CDU: 511.5(043.2)

Dedico este trabalho a minha família, por sempre acreditar nas minhas capacidades.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, sem ele nada seria possível.

À minha família, meus pais Paulo e Damiana, e meus irmãos Paulo Junior e Evaristo Neto, por todo apoio e força para que eu pudesse alcançar os meus objetivos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Vinicius Martins Teodosio Rocha, pela dedicação, paciência e sugestões para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores, Me. Fábio da Silva Siqueira Leite e Me. Márcio Alisson Leandro Costa, por aceitarem o convite para participarem da banca e pelas contribuições para esta monografia.

Aos meus colegas de turma, em especial, Emilson, Renne, Mayan, Rafael e Estefany, pelo companheirismo e as aprendizagens adquiridas durante as reuniões de estudo com esse grupo.

À toda comunidade do IFPB, campus Cajazeiras, professores e demais funcionários, por terem contribuído para a minha formação acadêmica ao longo desses quatro anos de curso.

Meu muito obrigado a Todos!

*“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender,
não é a posse, mas o ato de chegar lá, que
nos dá a maior satisfação”*

Gauss

RESUMO

No contexto educacional atual, percebe-se que o ensino das equações diofantinas muitas vezes se restringe ao estudo daquelas que são lineares, dessa forma, não sendo abordado as possibilidades que as equações diofantinas não lineares, em particular a Equação de Pell, pode apresentar para resolução de problemas diofantinos mais complexos, os quais frequentemente aparecem em olimpíadas de matemática. A Equação de Pell, tema deste trabalho, é um caso particular de equação diofantina não linear cuja forma é denotada por $x^2 - Dy^2 = 1$, onde D é um inteiro positivo que não é quadrado perfeito. Em vista disso, o presente trabalho tem como objetivo, apresentar um estudo sobre a Equação de Pell com ênfase no processo de resolução desta equação, bem como evidenciar algumas aplicações e potencialidades da teoria da Equação de Pell para a resolução de outros tipos de equações diofantinas. Dessa forma, para atingir os objetivos propostos, recorreremos à realização de uma pesquisa qualitativa de carácter exploratório, onde foram expostos os principais resultados teóricos que envolvem a resolução da Equação de Pell. Diante disso, verificamos que esta equação admite infinitas soluções inteiras, sendo assim apresentada uma fórmula explícita para obtenção de todas as suas soluções. Ademais, ao longo desta monografia, identificamos algumas aplicações da Equação de Pell para a resolução de diferentes tipos de equações diofantinas não lineares, onde foram resolvidas as equações: $x^2 - 6xy + y^2 = 1$, $a^2 + (a + 1)^2 = c^2$ e $x^4 + z^3 = t^2$, nesse processo, ficou evidente que o uso dos resultados teóricos relativos à Equação de Pell facilitou a resolução desses problemas. Por fim, exibimos um método amparado na teoria da Equação de Pell, para encontrar explicitamente todos os números triangulares que são quadrados perfeitos.

Palavras-chave: Equação de Pell; Equações diofantinas; Teoria dos números; Matemática.

ABSTRACT

In the current educational context, it is noticed that the teaching of Diophantine equations is often restricted to the study of those that are linear, thus not addressing the possibilities that nonlinear Diophantine equations, in particular the Pell Equation, can present for the resolution of more complex Diophantine problems, which frequently to appear in mathematics olympiads. The Pell Equation, the theme of this work, is a particular case of a nonlinear Diophantine equation whose form is denoted by $x^2 - Dy^2 = 1$, where D is a positive integer that is not a perfect square. Given this, the present work aims to present a study on the Pell Equation with emphasis on the resolution process of this equation, as well as to highlight some applications and potentialities of the Pell Equation theory for the resolution of other types of Diophantine equations. Thus, to achieve the proposed objectives, we resorted to carrying out qualitative research of an exploratory nature, where the main theoretical results involving the resolution of Pell Equation were exposed. Given this, we verify that this equation admits infinite integer solutions, thus presenting an explicit formula for obtaining all its solutions. Furthermore, throughout this monograph, we have identified some applications of the Pell Equation for solving different types of non-linear Diophantine equations, where the following equations were solved: $x^2 - 6xy + y^2 = 1$, $a^2 + (a + 1)^2 = c^2$ and $x^4 + z^3 = t^2$, in this process, it became evident that the use of theoretical results related to the Pell Equation facilitated the resolution of these problems. Finally, we show a method supported by Pell Equation theory to find explicitly all triangular numbers that are perfect squares.

Keywords: Pell Equation; Diophantine equations; Number theory; Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Reduzidas da representação em frações contínuas de $\sqrt{2}$	30
Figura 2.2 – Segmento de Extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$	33
Figura 2.3 – Representação cartesiana da hipérbole $x^2 - 3y^2 = 1$	35
Figura 3.1 – <i>Plimpton 322</i>	54
Figura 3.2 – Números Poligonais: Triangulares e Quadrados	60
Figura 3.3 – Números Triangulares	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	A EQUAÇÃO DE PELL	15
2.1	Aspectos Históricos	15
2.2	Conceitos Preliminares	18
2.2.1	Frações Contínuas e o Teorema de Dirichlet	19
2.2.2	Expansão de um Número Irracional em Frações Contínuas	26
2.2.3	Boas Aproximações são Reduzidas da Fração Contínua	29
2.3	A Equação de Pell: $x^2 - Dy^2 = 1$	34
2.3.1	Soluções Positivas e a Existência de Infinitas Soluções	36
2.3.2	Todas as Soluções da Equação de Pell	43
2.3.3	A Solução Fundamental da Equação de Pell via Frações Contínuas	46
3	APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE PELL	50
3.1	Equações Diofantinas	50
3.1.1	Solução da Equação $x^2 - 6xy + y^2 = 1$	51
3.1.2	Solução da Equação $a^2 + (a + 1)^2 = c^2$	54
3.1.3	Solução da Equação $x^4 + z^3 = t^2$	56
3.2	Números Poligonais	59
3.2.1	Números Triangulares-Quadrados	60
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
	REFERÊNCIAS	66

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história da matemática, as equações diofantinas vem se estabelecendo, cada vez mais, como um importante ramo de estudo da teoria dos números. Provavelmente estas equações já eram exploradas por matemáticos Gregos antes mesmo do próprio Diofanto de Alexandria (d.C. 200 - 284 d.C.) (JACOBSON; WILLIAMS, 2009).

De acordo com Eves (2011), a terminologia "equações diofantinas", deve-se em homenagem ao matemático Diofanto, em virtude de seus trabalhos na resolução de equações cujas soluções eram, por ele, restritas aos números racionais. Atualmente, essa terminologia é utilizada para se referir ao estudo das equações polinomiais de duas ou mais incógnitas com coeficientes inteiros, considerando-se somente soluções inteiras (EVES, 2011).

Historicamente, matemáticos de diferentes épocas como: Brahmagupta (d.C. 598 – 668 d.C.), Bhaskara II (1114 - 1185), Fermat (1607 - 1665), William Brouncker (1620 - 1684), Euler (1707 - 1783) e Lagrange (1736 - 1813), demonstraram interesse em resolver um tipo de equação diofantina particular, hoje conhecida como Equação de Pell.

A Equação de Pell apresenta a forma $x^2 - Dy^2 = 1$, sendo D um inteiro positivo e que não é quadrado perfeito¹ (MARTINEZ et al., 2018). Embora essa equação carregue o nome do matemático John Pell (1611 - 1685), tal atribuição foi feita equivocadamente por Euler, acreditando-se que John Pell tinha desenvolvido um método para resolvê-la, quando, na verdade, tal método foi apresentado por William Brouncker (EVES, 2011).

Segundo Jacobson e Williams (2009), no século XVII, Fermat já demonstrava ter conhecimento de como resolver a Equação de Pell, e, em 1657, desafiou a comunidade matemática, em particular Frénicle (1605 - 1675), a demonstrar que $x^2 - Dy^2 = 1$ possui infinitas soluções inteiras quando $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$. Além disso, Fermat solicita uma regra geral para a determinação das soluções, exemplificando a aplicação dessa regra nos casos em que $D = 109, 149, 433$. Ainda segundo Jacobson e Williams (2009), algum tempo depois, William Brouncker desenvolveu um método para resolver a Equação de Pell, utilizando-se desse método ele obteve uma solução para $D = 433$, na qual o valor de y era composto por 19 dígitos.

A partir dos trabalhos de Andreescu et al. (2010), percebemos uma frequência significativa de equações diofantinas sendo abordados em olimpíadas de matemática de diferentes Países. No Brasil, a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) é realizada

¹ Um inteiro positivo k não será um quadrado perfeito caso não exista um número natural n tal que, $n^2 = k$.

anualmente, sendo composta em três níveis e destinada aos estudantes dos ensinos: fundamental, médio e universitário. No ano de 2010, a prova de nível três da OBM, designada aos alunos do ensino médio, solicitou a resolução da equação $3^a = 2b^2 + 1$ em \mathbb{Z}^2 . Este problema, conforme destaca Aguirre (2020), pode ser resolvido utilizando conceitos da teoria da Equação de Pell. Contudo, no contexto educacional brasileiro, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não prevê uma abordagem da Equação de Pell na educação básica (BRASIL, 2018). Muito provavelmente em decorrência do seu grau de dificuldade, considerando que se trata de uma equação diofantina não linear de duas incógnitas.

Um fato interessante exposto por Aguirre (2020) é que toda equação quadrática com coeficientes inteiros e duas incógnitas pode ser reescrita na forma $x^2 - Dy^2 = c$, em particular, para $c \neq 1$, esta equação é conhecida como Equação de Pell generalizada. Neste trabalho estaremos interessados no caso $c = 1$. No entanto, uma solução para $x^2 - Dy^2 = c$, caso exista, pode ser obtida por meio de uma solução (x_1, y_1) da equação $x^2 - Dy^2 = 1$, com $x_1, y_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e x_1, y_1 mínimos (MARTINEZ et al., 2018).

Mediante o exposto, percebe-se que a Equação de Pell apresenta indícios de potencialidades para resolução de algumas equações diofantinas. Devido a esse conteúdo não integrar o currículo escolar, delimitam-se as possibilidades dos estudantes diante das provas em olimpíadas de matemática; contribuindo, assim, negativamente para uma possível ocorrência de baixo desempenho dos participantes. Cientes dessa problemática, pretende-se a partir desse trabalho, investigar as seguintes questões norteadoras: a Equação de Pell dispõe de um método de resolução que promova a obtenção de todas as possíveis soluções inteiras desta equação? Além da equação $x^2 - Dy^2 = 1$, existem outros tipos de equações diofantinas pelas quais é possível aplicar os conceitos teóricos da Equação de Pell para resolvê-las?

Acreditamos que esta pesquisa possa contribuir como referência para que os professores de matemática possam preparar seus alunos que participarão de olimpíadas de matemática, tendo em vista as prováveis possibilidades que a Equação de Pell pode apresentar para resolução de equações diofantinas, considerando-se também a frequência com que estas aparecem nas provas de olimpíadas de matemática. Diante disso, a motivação para o desenvolvimento do presente projeto é justificada nos interesses do autor na Análise Diofantina e problemas olímpicos de teoria dos números.

Com base nessas observações, o respectivo trabalho tem por objetivo estudar a teoria da Equação de Pell e apresentar os seus principais resultados. Por fim, pretende-se evidenciar, através de aplicações, algumas potencialidades da Equação de Pell no processo de resolução de equações diofantinas.

Na perspectiva de atingir os objetivos propostos neste projeto, recorreremos a uma pesquisa com abordagem qualitativa, e de natureza básica, pois procura-se aprofundar o conhecimento sobre pontos específicos de um determinado assunto (GIL, 2002), neste caso, a Equação de Pell: $x^2 - Dy^2 = 1$. Em vista disso, foi desenvolvida uma pesquisa exploratória de caráter bibliográfico, porque objetiva-se promover uma maior familiaridade com o problema, na pretensão de aprimorar o conhecimento sobre o assunto investigado, tendo como base materiais e estudos já existentes sobre a temática (GIL, 2002). Ademais, os dados coletados para a produção deste projeto foram obtidos a partir de trabalhos publicados no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, repositórios de universidades, livros e artigos publicados em periódicos. Sendo assim, os capítulos subsequentes encontram-se organizados da seguinte forma:

No Capítulo 2, realizamos, inicialmente, uma contextualização histórica sobre o surgimento dos primeiros estudos da Equação de Pell, e o desenvolvimento de importantes resultados matemáticos que envolvem essa equação. Para isso, centralizamos nossa atenção sobre as contribuições que diferentes matemáticos exerceram nesse processo. Em seguida, apresentamos uma abordagem sobre a teoria de frações contínuas e aproximações de números reais por racionais, objetivando os principais resultados para que pudéssemos, a partir deles, desenvolver a teoria da Equação de Pell. Posteriormente, foi feito um estudo da Equação de Pell e suas conexões com a teoria de frações contínuas, onde verificamos que esta equação admite infinitas soluções inteiras. Na oportunidade, foi exibida uma fórmula explícita para obtenção de todas as soluções.

No Capítulo 3, mostramos como a Equação de Pell pode ser uma potencial ferramenta para a resolução de problemas diofantinos. Nesse processo, sinalizamos algumas aplicações da Equação de Pell para resolução de equações diofantinas, onde foram resolvidas as equações: $x^2 - 6xy + y^2 = 1$, $a^2 + (a + 1)^2 = c^2$ e $x^4 + z^3 = t^2$. Na sequência, expomos um método, baseado na teoria da Equação de Pell, para encontrar todos os números triangulares que são quadrados perfeitos.

Por fim, o Capítulo 4 consiste em reforçar a finalidade deste trabalho, onde foi feito um breve resumo sobre os aspectos conceituais abordados ao longo dessa monografia, finalizando com o apontamento dos resultados obtidos.

2 A EQUAÇÃO DE PELL

Ao longo desse Capítulo, faremos uma exposição a respeito da Equação de Pell. Sendo assim, daremos ênfase, inicialmente, em compreender alguns aspectos históricos referentes ao desenvolvimento teórico da Equação de Pell. Em sequência, será desenvolvida uma introdução da teoria das frações contínuas, destinando nosso foco para as proposições e teoremas que serão fundamentais para que possamos demonstrar os resultados da seção 2.3. Por fim, na seção 2.3, apresentaremos um estudo bastante completo da Equação de Pell: $x^2 - Dy^2 = 1$.

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Na história da matemática não se sabe precisamente quando se originou o estudo da Equação de Pell. Contudo, conforme sinaliza Jacobson e Williams (2009), é possível que a primeira aparição explícita desta equação tenha sido feita a partir dos trabalhos do filósofo e matemático Grego, Theon de Smyrna (c. 130 AD), ao analisar duas sequências específicas, as quais em notação atual equivalem a,

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_{n+1} = 2s_n + d_n, \quad \forall n > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} s_1 = 1 \\ s_{n+1} = s_n + d_n, \quad \forall n > 1. \end{cases}$$

A partir das sequências anteriores, pode-se deduzir a seguinte identidade,

$$d_n^2 - 2s_n^2 = (-1)^n. \quad (1)$$

Dessa forma, com base na expressão (1), para n par, conseguimos uma infinidade de soluções para a Equação de Pell: $x^2 - 2y^2 = 1$. Segundo Jacobson e Williams (2009), Theon não forneceu uma prova para a identidade (1), e limitou-se somente em verificar algumas soluções.

Embora os primeiros registros que temos sobre as sequências anteriores decorram dos escritos de Theon, acredita-se que esses números tenham origem desde antes de 450 a.C (RIDENHOUR, 1986). De acordo com Ridenhour (1986), os Pitagóricos utilizavam um método baseado nos termos d_n e s_n com o propósito de conseguir aproximações para o número $\sqrt{2}$. Para isso, consideravam a razão $\frac{d_n}{s_n}$. É notável que a equação $d_n^2 - 2s_n^2 = (-1)^n$ matém uma relação direta com $\sqrt{2}$, pois, sendo d_n e s_n inteiros positivos, e (s_n) uma sequência crescente, podemos concluir que

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{d_n^2}{s_n^2} - \frac{(-1)^n}{s_n^2}} \approx \frac{d_n}{s_n}.$$

A tabela 2.1 exibe os sete primeiros termos das sequências (d_n) e (s_n) , onde os quocientes $\frac{d_n}{s_n}$ fornecem aproximações cada vez melhores para o número $\sqrt{2}$.

Tabela 2.1 – Quociente dos termos das sequências (d_n) e (s_n)

n	d_n	s_n	$\frac{d_n}{s_n}$
1	1	1	1
2	3	2	1,5
3	7	5	1,4
4	17	12	$\approx 1,416666$
5	41	29	$\approx 1,413793$
6	99	70	$\approx 1,414285$
7	239	169	$\approx 1,414201$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Os estudos sobre a Equação de Pell não foram desenvolvidos unicamente por matemáticos Gregos. Na verdade, esta equação foi também amplamente estudada na Índia, onde podemos destacar as notáveis contribuições de Brahmagupta (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002). De acordo com Eves (2011), Brahmagupta foi o matemático hindu que mais se destacou no século VII. Ele trabalhou no centro astronômico de Ujjain, localizado na Índia Central, e no ano de 628 d.C. escreveu a obra *Brāhmasphuṭa-siddhānta*, da qual os capítulos 12° e 18° se destinam a matemática (EVES, 2011).

Conforme exposto por O'Connor e Robertson (2002), em 628 d.C., Brahmagupta descobriu uma maneira de gerar soluções inteiras para a equação $x^2 - Dy^2 = kk'$. Esse artifício ficou conhecido como "método de composição". Precisamente, ele percebeu que, dados $x_1y_1 \neq 0$ e $x_2y_2 \neq 0$ tais que $x_1^2 - Dy_1^2 = k$ e $x_2^2 - Dy_2^2 = k'$, podemos conseguir várias soluções para $x^2 - Dy^2 = kk'$. Esse fato é uma consequência da identidade

$$kk' = (x_1^2 - Dy_1^2)(x_2^2 - Dy_2^2) = (x_1x_2 + Dy_1y_2)^2 - D(x_1y_2 + x_2y_1)^2,$$

donde é gerado um novo par $(x_1x_2 + Dy_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$, este por sua vez satisfaz $x^2 - Dy^2 = kk'$. Diante disso, se $k = 1$ e $k' = 1$, então o método de composição, aplicado sucessivamente, fornece uma maneira de gerar infinitas soluções para a Equação de Pell: $x^2 - Dy^2 = 1$ (STILLWELL, 2004).

Com base nesse procedimento, Brahmagupta deduziu que se (x_1, y_1) é tal que $x_1^2 - Dy_1^2 = k$, então, ao compor (x_1, y_1) e (x_1, y_1) , obtém-se $(x_1^2 + Dy_1^2, 2x_1y_1)$ como uma solução de $x^2 - Dy^2 = k^2$ e, portanto, $\left(\frac{x_1^2 + Dy_1^2}{k}, \frac{2x_1y_1}{k}\right)$ é uma solução racional da Equação de Pell: $x^2 - Dy^2 = 1$ (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002). Na pretensão de que $\frac{x_1^2 + Dy_1^2}{k}$ e $\frac{2x_1y_1}{k}$ fossem inteiros, Stillwell (2004), ressalta que:

Brahmagupta encontrou soluções inteiras de muitas equações de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$ por seu método de composição, mas ele não era capaz de aplicá-lo uniformemente para todos os valores de D . O melhor que pôde fazer foi mostrar que se $x^2 - Dy^2 = k$ tem uma solução inteira para $k = \pm 1, \pm 2$, ou ± 4 então $x^2 - Dy^2 = 1$ também possui uma solução inteira (STILLWELL, 2004, p. 74).

Em 1150 d.C., Bhaskara II desenvolveu um procedimento conhecido como método cíclico ou *chakravala*, ele expandiu o algoritmo apresentado por Brahmagupta, mostrando que a partir de uma solução de $x^2 - Dy^2 = k$, é sempre possível conseguir uma e, portanto, infinitas soluções para $x^2 - Dy^2 = k$, com $k = \pm 1, \pm 2$ ou ± 4 (STILLWELL, 2004).

Conforme destacado por Jacobson e Williams (2009), no século XVII, o estudo da Equação de Pell é retomado por diversos matemáticos europeus e, no ano de 1657, Fermat (1607 - 1665) lançou um desafio para Frénicle (1605 - 1675) e toda a comunidade matemática. Ele solicita uma prova da seguinte afirmação:

Dado qualquer número inteiro positivo D , e que não seja um quadrado, existe também um número infinito de quadrados tais que, se o quadrado for multiplicado pelo número dado e a unidade é adicionada ao produto, o resultado é um quadrado (JACOBSON; WILLIAMS, 2009, p. 36).

A afirmação acima equivale a dizer que $x^2 - Dy^2 = 1$ admite infinitas soluções (inteiras) quando o inteiro positivo D não é quadrado. Mais tarde, William Brouncker (1620 - 1684) desenvolveu uma técnica para resolver a Equação de Pell. Com base nesse método, ele forneceu soluções para diversas equações da forma $x^2 - Dy^2 = 1$ (JACOBSON; WILLIAMS, 2009). Entretanto, nem ele, nem Frénicle foram capazes de demonstrar que $x^2 - Dy^2 = 1$ sempre pode ser resolvida de forma não trivial² no caso em que D não é quadrado perfeito (JACOBSON; WILLIAMS, 2009).

Ainda no ano de 1657, Fermat desafiou Brouncker e John Wallis (1616 - 1703) a encontrarem soluções inteiras para as equações $x^2 - 151y^2 = 1$ e $x^2 - 313y^2 = -1$. Em

² Dizemos que $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ é uma solução não trivial da Equação de Pell quando $x^2 - Dy^2 = 1$ e $xy \neq 0$

resposta ao desafio, Wallis forneceu (1728148040, 140634693) como solução da primeira equação, enquanto que Brouncker apresentou (126862368, 7170685) como solução da segunda (TATTERSALL, 2005).

O matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783) também contribuiu para o estudo da Equação de Pell. Nesse processo, ele ampliou o método desenvolvido por Brouncker para resolver a Equação de Pell. Além disso, Euler percebeu que a teoria das frações contínuas poderia ser utilizada a fim de produzir um algoritmo eficaz que resolvesse tal equação (JACOBSON; WILLIAMS, 2009).

Embora a Equação de Pell venha sendo estudada desde muito tempo, sua teoria foi somente elaborada, de forma completa, por Lagrange entre 1766 e 1769 (EVES, 2011). Os resultados obtidos por ele encontram-se baseados em propriedades algébricas de números da forma $x + y\sqrt{D}$ e em frações contínuas (WIKIPEDIA, 2023).

2.2 CONCEITOS PRELIMINARES

Esta seção será dedicada em apresentar um instrumento pelo qual representaremos os números reais, sendo este as Frações Contínuas, cujo propósito é obter aproximações arbitrariamente boas para números reais a partir de racionais. Além disso, é importante que o leitor perceba que o estudo destas aproximações mantém uma relação adjacente com a Equação de Pell, pois, se $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ for uma solução de $x^2 - Dy^2 = 1$, então

$$x^2 - Dy^2 = 1 \implies D = \frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{y^2} \implies \sqrt{D} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{y^2}},$$

e se supormos y arbitrariamente grande, segue-se que

$$\sqrt{D} \approx \frac{x}{y}.$$

Assim, $\frac{x}{y}$ será uma aproximação racional para \sqrt{D} .

Ainda nesta seção, explicitaremos uma maneira de caracterizar as aproximações vindas das frações contínuas, observando-se, nesse processo, o tamanho do erro que se comete ao aproximar um número real por um racional. Contudo, nos delimitaremos apenas aos conceitos e resultados essenciais para o desenvolvimento da teoria da Equação de Pell, bem como para a compreensão das respectivas proposições e teoremas. Assim, os tópicos 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 servirão como base para a demonstração dos resultados subsequentes.

A maior parte da abordagem feita nessa seção tem como referências os autores Beskin (2001) e Martinez et al. (2018).

2.2.1 Frações Contínuas e o Teorema de Dirichlet

A representação para um número real que apresentaremos em seguida consiste em obter boas aproximações de números reais por racionais. Esse resultado é possível em decorrência do fato de que o conjunto \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} , em outras palavras, dado qualquer intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ com $a < b$, teremos que $\mathbb{Q} \cap (a, b) \neq \emptyset$ (SOUZA, 2018).

Em sequência, definiremos a função piso, a qual será necessária para que possamos compreender o conceito de frações contínuas que será exibido mais adiante.

Definição 2.2.1.1. *A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ é dita função piso quando para cada $x \in \mathbb{R}$ associa-se ao maior inteiro $\lfloor x \rfloor$ que é menor do que ou igual a x .*

Vejamos através dos próximos exemplos como aplicar a função piso.

Exemplo 2.2.1.1. *Para calcularmos a função piso para $7,65$ basta notar que $7 < 7,65 < 8$, logo, 7 é o maior inteiro menor do que ou igual a $7,65$, ou seja $f(7,65) = 7$.*

Exemplo 2.2.1.2. *De modo análogo ao exemplo anterior, para $-3,14$ temos, $-4 < -3,14 < -3$, logo $f(-3,14) = -4$.*

Exemplo 2.2.1.3. *Para aplicar a função piso para o valor $\sqrt{2}$, observe que $\sqrt{2} \approx 1,41$, assim $f(\sqrt{2}) = 1$.*

A definição a seguir nos permitirá, de forma recursiva, obter uma sequência (finita ou infinita) de números $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{Z}$ que utilizaremos para introduzir o conceito de frações contínuas.

Definição 2.2.1.2. *Seja $x \in \mathbb{R}$ e $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Se $x \notin \mathbb{Z}$, definimos $b_1 = \frac{1}{x - a_0}$. Recursivamente, para $n \in \mathbb{N}$, fixamos $a_n = \lfloor b_n \rfloor$ e caso $b_n \notin \mathbb{Z}$, definiremos $b_{n+1} = \frac{1}{b_n - a_n}$.*

Se $a_n = b_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}} \stackrel{\text{def}}{=} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Se $a_n \neq b_n$ para todo n , teremos

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \stackrel{\text{def}}{=} [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

A última notação nos diz, sem tanto rigor, que a fração contínua de $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ é infinita e ocorrerá quando x for irracional. Deixaremos a cargo do leitor consultar Martinez et al. (2018) para uma justificativa mais precisa desse fato.

A notação apresentada na definição 2.2.1.2 chama-se *representação em frações contínuas de x* . Vejamos, na prática, como expressar a representação em frações contínuas de um número real. Para isso, observe o exemplo a seguir.

Exemplo 2.2.1.4. Neste exemplo, faremos a representação em frações contínuas de $\sqrt{7}$. Para tanto, conforme a definição 2.2.1.2, calcularemos alguns termos das sequências (a_n) e (b_n) .

Inicialmente, note que $a_0 = \lfloor \sqrt{7} \rfloor = 2$ e $b_1 = \frac{1}{\sqrt{7} - a_0}$, desse modo

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{7} - \lfloor \sqrt{7} \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} \quad e \quad a_1 = \lfloor b_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{7} - 2} \right\rfloor = 1.$$

Analogamente, $b_2 = \frac{1}{b_1 - a_1}$. Daí, temos

$$b_2 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{7} - 2} - 1} = \frac{\sqrt{7} - 2}{3 - \sqrt{7}} \quad e \quad a_2 = \left\lfloor \frac{\sqrt{7} - 2}{3 - \sqrt{7}} \right\rfloor = 1.$$

Repetindo esse procedimento, encontraremos, respectivamente, os seguintes valores destacados na tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Termos das Sequências (a_n) e (b_n)

n	a_n	b_n
1	1	$\frac{1}{\sqrt{7}-2}$
2	1	$\frac{1}{3-\sqrt{7}}$
3	1	$\frac{1}{2\sqrt{7}-5}$
4	4	$\frac{1}{8-3\sqrt{7}}$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Em vista da definição 2.2.1.2, podemos utilizar os quatro primeiros termos das sequências (a_n) e (b_n) , presentes na tabela acima, para obter as seguintes expressões

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{7}-2} + \frac{1}{3-\sqrt{7}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{3-\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{7}-5}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{7}-5} + \frac{1}{8-3\sqrt{7}}}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}.$$

Portanto, a expansão em frações contínuas de $\sqrt{7}$ é denotada por $[2; 1, 1, 1, 4, \dots]$.

A partir do exemplo acima, é interessante perceber que em cada expressão, se desconsiderarmos o termo irracional, teremos aproximações racionais para $\sqrt{7}$ cada vez melhores, pois $\sqrt{7} \approx 2,645$ e

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 2,5; \quad 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 2,66\dots; \quad 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}} = 2,6428571\dots$$

Veja que se um número real x possuir uma representação em frações contínuas finita, neste caso denotado por $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, claramente x será racional, pois o mesmo seria então obtido realizando-se um número finito de operações de soma e produto no corpo \mathbb{Q} .

A seguinte proposição fornece uma fórmula de recorrência útil para o cálculo das frações contínuas de um número real dado.

Proposição 2.2.1.1. *Considere uma seqüência (finita ou infinita) $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ tal que $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}^*$.*

Sejam as seqüências (p_n) e (q_n) , definidas recursivamente por,

$$p_n = \begin{cases} a_0, & \text{se } n = 0 \\ a_0 a_1 + 1, & \text{se } n = 1 \\ a_n p_{n-1} + p_{n-2}, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

$$q_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ a_1, & \text{se } n = 1 \\ a_n q_{n-1} + q_{n-2}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Então,

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \quad \forall n \geq 0$$

e

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n \quad \forall n \geq 0.$$

Demonstração. Para demonstrarmos esse resultado usaremos o princípio de indução finita.

Desse modo, para $n = 0$, teremos $[a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$, pois nesse caso $p_0 = a_0$ e $q_0 = 1$. Se

$$n = 1, \text{ então } [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_1}{q_1}.$$

Suponha, por hipótese de indução, que a afirmação seja verdadeira para n . Assim, para $n + 1$, iremos reescrever a representação $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n+1}]$ como sendo

$\left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right]$, que por sua vez tem n termos e, portanto, a hipótese de in-

dução é válida. Logo,

$$\begin{aligned}
[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n+1}] &= \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right] = \frac{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\
&= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}} \\
&= \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Por fim, apresentaremos uma prova para a segunda afirmação da proposição 2.2.1.1. Para tanto, também recorreremos ao princípio de indução.

No caso base temos, $p_1q_0 - p_0q_1 = (a_0a_1 + 1) \cdot 1 - a_0a_1 = 1 = (-1)^0$.

Por hipótese de indução, admitiremos a validade de $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$. Agora, considerando a identidade para $n + 1$, segue-se que,

$$\begin{aligned}
p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} &= (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} - p_{n+1}(a_{n+2}q_{n+1} + q_n) \\
&= a_{n+2}p_{n+1}q_{n+1} + p_nq_{n+1} - a_{n+2}q_{n+1}p_{n+1} - q_n p_{n+1} \\
&= p_nq_{n+1} - q_n p_{n+1} \\
&= -(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}).
\end{aligned}$$

Mas, a partir da hipótese de indução, tem-se $(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}) = (-1)^n$, logo

$$p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

□

É importante perceber que o resultado acima nos fornece uma fórmula compacta para representar um número real a partir de termos das sequências (p_n) e (q_n) , conforme observamos a seguir.

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, \alpha_n] = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

No entanto, podemos restringir a proposição 2.2.1.1, considerando $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e pondo $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, definindo-os de acordo com a definição 2.2.1.2, com exceção do último termo $\alpha_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Nestas condições, podemos escrever

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, \alpha_n] = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

donde $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \in \mathbb{Q}$.

Com base na observação feita logo acima, a partir do próximo exemplo, mostraremos como obter uma expressão para representar o número $\sqrt{7}$ em função dos termos das sequências (p_n) e (q_n) correspondentes a expansão em frações contínuas de $\sqrt{7}$.

Exemplo 2.2.1.5. *Inicialmente, para calcularmos os valores $\frac{p_n}{q_n}$ relativos a fração contínua de $\sqrt{7}$, aplicamos as fórmulas de recorrência da proposição 2.2.1.1 aos termos da sequência (a_n) , obtidos no exemplo anterior. Dessa forma, podemos determinar os quatro primeiros valores das sucessões (p_n) e (q_n) , assim como mostra a tabela 2.3.*

Tabela 2.3 – Termos das Sequência $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$

n	p_n	q_n	$\frac{p_n}{q_n}$
0	2	1	2
1	3	1	3
2	5	2	$\frac{5}{2} = 2,5$
3	8	3	$\frac{8}{3} \approx 2,666$
4	37	14	$\frac{37}{14} \approx 2.6428571$

Fonte: Elaborado pelo Autor

De acordo com a tabela 2.3, conforme o valor de n aumenta, os termos da sequência $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ fornecem aproximações racionais para $\sqrt{7}$ cada vez melhores. Além disso, considerando os termos $a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1$ e $\alpha_4 = b_4 = \frac{2\sqrt{7}-5}{8-3\sqrt{7}}$ encontrados no exemplo 2.2.1.4, podemos aplicar a proposição 2.2.1.1 para recuperar o número $\sqrt{7}$ em função dos termos p_3, q_3, p_2 e q_2 , visto que

$$\sqrt{7} = [a_0; a_1, a_2, \alpha_4] = \frac{\alpha_4 p_3 + p_2}{\alpha_4 q_3 + q_2}.$$

Logo, teremos a seguinte representação para $\sqrt{7}$

$$\sqrt{7} = \left[2; 1, 1, 1, \frac{2\sqrt{7}-5}{8-3\sqrt{7}} \right] = \frac{\left(\frac{2\sqrt{7}-5}{8-3\sqrt{7}} \right) \cdot 8 + 5}{\left(\frac{2\sqrt{7}-5}{8-3\sqrt{7}} \right) \cdot 3 + 2},$$

donde $p_3 = 8$, $q_3 = 3$, $p_2 = 5$ e $q_2 = 2$.

Definição 2.2.1.3. Dado um número real $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$, seja $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tal que $\text{mdc}(p_n, q_n) = 1$ e $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$. O termo $\frac{p_n}{q_n}$ é dito n -ésima reduzida da fração contínua de α .

As observações acima nos serão úteis para desenvolvermos uma prova do resultado a seguir, conhecido como o Teorema de Dirichlet.

Teorema 2.2.1.1 (Dirichlet). Seja $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Então existem infinitos pares $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tais que $\text{mdc}(p, q) = 1$ e que satisfazem, $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.

Demonstração. A prova que faremos para o teorema 2.2.1.1 consiste em mostrar que as reduzidas das frações contínuas, apresentadas anteriormente, satisfazem a tese do Teorema de Dirichlet.

Inicialmente, vejamos que a partir da proposição 2.2.1.1, o máximo divisor comum (mdc) entre os termos p_n e q_n é sempre igual a um para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, se existisse $d \in \mathbb{Z}^+$ com $\text{mdc}(p_n, q_n) = d > 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$, teríamos que $d \mid (p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}) = (-1)^n$, um absurdo.

Agora, de acordo com a proposição 2.2.1.1 e as observações anteriores, temos

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \right| \\ &= \left| \frac{-(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \right| = \left| \frac{-(-1)^{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \right| \\ &= \frac{|(-1)^n|}{|(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n|} = \frac{1}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\alpha_{n+1}, q_n, q_{n-1} > 0 \implies (\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n > \alpha_{n+1}q_n^2 \implies \frac{1}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} < \frac{1}{\alpha_{n+1}q_n^2},$$

e

$$a_{n+1} = \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor \implies \alpha_{n+1} \geq a_{n+1} \implies \alpha_{n+1}q_n^2 \geq a_{n+1}q_n^2 \geq q_n^2 \implies \frac{1}{\alpha_{n+1}q_n^2} \leq \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Portanto,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

□

2.2.2 Expansão de um Número Irracional em Frações Contínuas

Considerando o exposto na subseção 2.2.1, vimos que a representação de um número real α em frações contínuas pode ser finito ou infinito. Contudo, adiantaremos ao leitor que estaremos particularmente interessados quando α for irracional, pois essa suposição será importante para desenvolvermos a teoria da Equação de Pell. Isto ficará claro na seção 2.3.

A seguir, faremos a representação em frações contínuas dos seguintes números irracionais: π e $\sqrt{2}$.

I. π

Notemos que, $\pi = 3,141592\dots$ e $\lfloor \pi \rfloor = 3$, dessa forma

$$\pi = 3 + \frac{1}{\frac{1}{\pi - 3}}.$$

Repetindo esse processo, agora para $\frac{1}{\pi - 3}$, temos

$$\left\lfloor \frac{1}{\pi - 3} \right\rfloor = 7 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\pi - 3} - 7 = \frac{22 - 7\pi}{\pi - 3},$$

$$\text{logo} \quad \pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\frac{\pi - 3}{22 - 7\pi}}}.$$

Analogamente,

$$\left\lfloor \frac{\pi - 3}{22 - 7\pi} \right\rfloor = 15 \text{ e } \frac{\pi - 3}{22 - 7\pi} - 15 = \frac{106\pi - 333}{22 - 7\pi}, \text{ donde } \pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{\frac{22 - 7\pi}{106\pi - 333}}}}}.$$

Portanto,

$$\pi = 3 + \frac{1}{\frac{1}{\pi - 3}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\frac{\pi - 3}{22 - 7\pi}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{\frac{22 - 7\pi}{106\pi - 333}}}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \dots}},$$

e $\pi = [3; 7, 15, \dots]$.

Ademais, conforme a proposição 2.2.1.1, segue-se que

$$\begin{aligned} p_0 &= 3, p_1 = 22 \text{ e } p_2 = 333 \\ q_0 &= 1, q_1 = 7 \text{ e } q_2 = 106 \end{aligned}$$

e

$$\pi = \left[3; 7, 15, \frac{106\pi - 333}{22 - 7\pi} \right] = \frac{\left(\frac{106\pi - 333}{22 - 7\pi} \right) p_2 + p_1}{\left(\frac{106\pi - 333}{22 - 7\pi} \right) q_2 + q_1} = \frac{\left(\frac{106\pi - 333}{22 - 7\pi} \right) \cdot 333 + 22}{\left(\frac{106\pi - 333}{22 - 7\pi} \right) \cdot 106 + 7}.$$

II. $\sqrt{2}$

Inicialmente, note que

$$\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1 \implies \sqrt{2} - \lfloor \sqrt{2} \rfloor = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \implies \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

E, se repetíssemos esse processo indefinidamente, teríamos

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Assim, a expansão de $\sqrt{2}$ em frações contínuas é dada por $[1; 2, 2, 2, \dots]$.

Calculando os termos (p_n) e (q_n) para $0 \leq n \leq 3$, decorre que

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, p_1 = 3, p_2 = 7 \text{ e } p_3 = 17 \\ q_0 &= 1, q_1 = 2, q_2 = 5 \text{ e } q_3 = 12 \end{aligned}$$

e

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \sqrt{2} + 1] = \frac{(\sqrt{2} + 1)p_3 + p_2}{(\sqrt{2} + 1)q_3 + q_2} = \frac{(\sqrt{2} + 1) \cdot 17 + 7}{(\sqrt{2} + 1) \cdot 12 + 5}.$$

Com base no exemplo II., a expansão em frações contínuas de $\sqrt{2}$ nos indica que a mesma será periódica. De modo geral, uma fração contínua infinita $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ é dita periódica quando existir $r \in \mathbb{N}$ tal que a sequência a_1, a_2, \dots, a_r forma uma sucessão periódica (BESKIN, 2001). Neste caso, denotamos $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ por $[a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_r}]$, onde a barra sobre a_1, a_2, \dots, a_r indica que esta sequência se repete indefinidamente, além disso, diremos que o seu período é r . Por exemplo, $[2; 7, 3, 7, 3, \dots]$ tem período dois e será denotada por $[2; \overline{7, 3}]$.

O fato de $\sqrt{2}$ possuir uma representação em frações contínuas periódica ($\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$) é uma consequência da seguinte identidade

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

e, além disso, fazendo $\alpha = \sqrt{2} + 1$, teremos

$$2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \alpha = 2 + \frac{1}{\alpha},$$

donde α é raiz da equação quadrática $\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$.

Em geral, todo número real que é raiz de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros apresentará uma representação em frações contínuas periódica. Ademais, a recíproca também é verdadeira (BESKIN, 2001). A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Beskin (2001) ou Martinez et al. (2018).

Na próxima seção exibiremos uma maneira para identificar a reduzida $\frac{p_n}{q_n}$ da fração contínua de \sqrt{D} tal que (p_n, q_n) será solução da Equação de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$ com $p_n, q_n \in \mathbb{N}^*$ mínimos. Para isso, constataremos na subseção 2.3.3 a necessidade de conhecermos o período da expansão em frações contínuas de \sqrt{D} .

2.2.3 Boas Aproximações são Reduzidas da Fração Contínua

O teorema que demonstraremos nessa Subseção nos garante que toda aproximação de $\alpha \in \mathbb{R}$ por $\frac{p}{q}$ ($q > 0$) e que satisfaz

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

será uma reduzida da fração contínua de α , isto é, $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Nessa perspectiva, a partir das reduzidas podemos obter indefinidamente aproximações racionais para números reais arbitrariamente boas, pois considerando

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{e} \quad q_{n+1} > q_n \geq 1 \quad (n \geq 1)$$

concluimos que

$$\left| \alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2} < \frac{1}{2q_n^2}.$$

Assim, podemos minimizar continuamente o erro da aproximação. Para tal propósito, basta considerar o próximo termo da sequência $\left(\frac{p_n}{q_n} \right)$.

A seguir, vejamos na prática como as aproximações vindas das reduzidas minimizam o erro da aproximação de um número real por um racional. Para isso, utilizaremos as reduzidas da fração contínua de $\sqrt{2}$ calculadas no exemplo II.

Observe primeiramente que $\sqrt{2} \approx 1,414$. Além disso, os termos subsequentes das reduzidas de $\sqrt{2}$ fornecem aproximações melhores que as anteriores, a saber

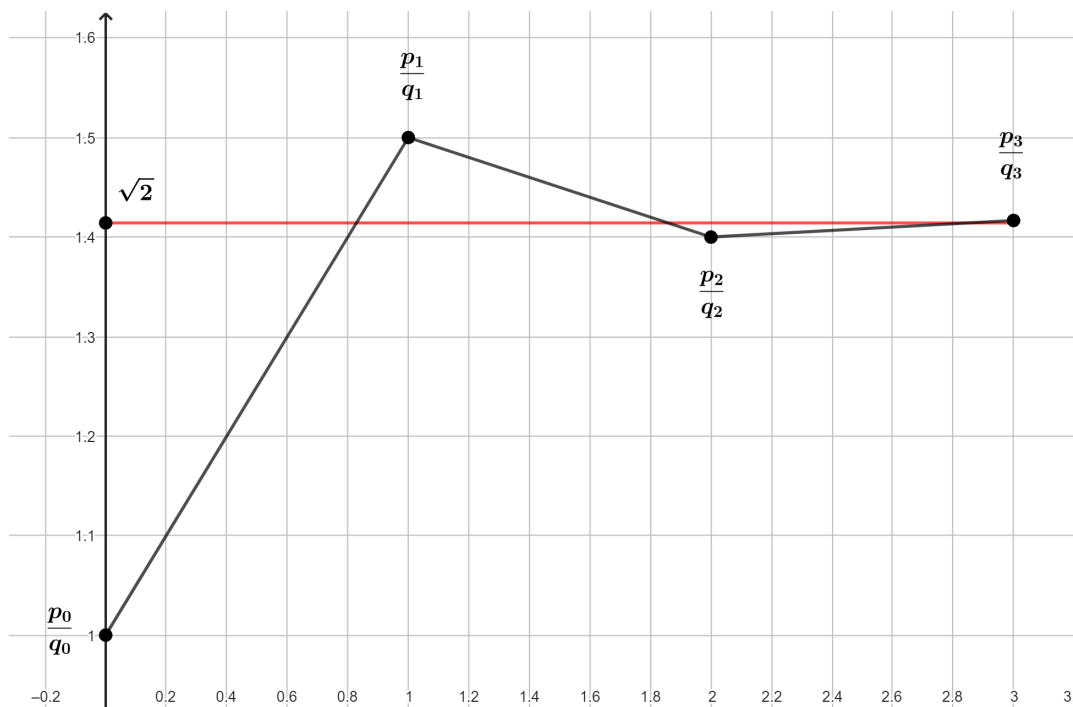
$$\frac{p_0}{q_0} = 1; \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2} = 1,5; \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{5} = 1,4; \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{17}{12} = 1,4166\dots$$

donde

$$0,0024531\dots \approx \left| \sqrt{2} - \frac{17}{12} \right| < \frac{1}{2 \cdot 12^2} = 0,0034722\dots$$

A figura 2.1 ilustra geometricamente como acontece a aproximação de $\sqrt{2}$ por suas reduzidas.

Figura 2.1 – Reduzidas da representação em frações contínuas de $\sqrt{2}$



Fonte: Elaborado pelo Autor

A partir da figura acima, percebe-se que a aproximação de $\sqrt{2}$ acontece de forma significativamente rápida, onde o termo $\frac{p_3}{q_3}$ coincide duas casas decimais com relação ao valor exato de $\sqrt{2}$.

A seguinte proposição expõe alguns resultados sobre as sequências de reduzidas de índices pares e ímpares. Estes resultados, por sua vez, fundamentaram a demonstração do teorema 2.2.3.1.

Proposição 2.2.3.1. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq \alpha \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}.$$

Demonstração. A partir da proposição 2.2.1.1, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{a_{n+2}p_{n+1} + p_n}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{a_{n+2}(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1})}{q_n(a_{n+2}q_{n+1} + q_n)}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n \quad \text{e} \quad q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n.$$

Logo,

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{n+2}(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1})}{q_n(a_{n+2}q_{n+1} + q_n)} = \frac{(-1)^n a_{n+2}}{q_n q_{n+2}}.$$

Se n for par, decorre que $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} > 0 \implies \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} > \frac{p_n}{q_n}$.

Caso contrário (n ímpar), teremos $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} < 0 \implies \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} < \frac{p_n}{q_n}$.

Anteriormente vimos que $\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}}$, que por sua vez será positivo se n for par e negativo para n ímpar.

Como consequência de tudo isso, decorre que

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq \alpha \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}.$$

□

Em particular, a proposição anterior significa dizer que a sequência das reduzidas pares da fração contínua de α é crescente, enquanto que as reduzidas de índices ímpares formam uma sequência decrescente. Ademais, $\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observação 2.2.1. Note que se n for par, então $n+1$ é ímpar e, dessa forma, segue-se da proposição 2.2.3.1 que $\frac{p_n}{q_n} \leq \alpha \leq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. De modo análogo, para n ímpar concluímos que

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \leq \alpha \leq \frac{p_n}{q_n}.$$

Exemplo 2.2.3.1. Ilustraremos a proposição 2.2.3.1 utilizando as reduzidas da representação em frações contínuas de $\sqrt{2}$ calculadas anteriormente. São elas:

$$\frac{p_0}{q_0} = 1, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{5}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{17}{12}, \dots$$

Agora, observe que tais termos verificam as seguintes desigualdades

$$1 < \frac{3}{2} < \sqrt{2} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}.$$

Teorema 2.2.3.1 (Lagrange). Sejam $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $q > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$, então $\frac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de α .

Demonstração. Com base na proposição 2.2.1.1, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de inteiros positivos e, dessa forma, deve existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$.

Sem perda de generalidade, consideremos n par. Daí, tendo em vista a observação 2.2.1, resulta que $\frac{p_n}{q_n} \leq \alpha \leq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

Agora, suponhamos por absurdo que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. Assim,

$$pq_n - qp_n \neq 0 \implies |pq_n - qp_n| \geq 1.$$

Além disso, $\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{|pq_n - p_nq|}{|qq_n|} \geq \frac{1}{qq_n}$.

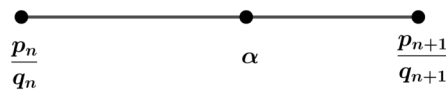
Por outro lado, $q < q_{n+1} \implies \frac{1}{q} > \frac{1}{q_{n+1}} \implies \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_{n+1}q_n} = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right|$, pois de acordo com a proposição 2.2.1.1 tem-se

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$$

e, portanto, $\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| > \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right|$, isto é $\frac{p}{q} \notin \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right]$.

Geometricamente, temos

Figura 2.2 – Segmento de Extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$



Fonte: Elaborado pelo Autor

logo, $\frac{p}{q} < \frac{p_n}{q_n}$ ou $\frac{p}{q} > \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

Se $\frac{p}{q} < \frac{p_n}{q_n}$, teríamos que $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{qq_n} \geq \frac{1}{q^2} > \frac{1}{2q^2}$, absurdo, pois contradiz a hipótese do teorema.

Caso $\frac{p}{q} > \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, dispõe-se duas possibilidades para o número q em relação a $\frac{q_{n+1}}{2}$:

i. $q \geq \frac{q_{n+1}}{2}$.

Neste caso, $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \left| \frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{|pq_{n+1} - qp_{n+1}|}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^2}$, o que gera um absurdo.

ii. $q < \frac{q_{n+1}}{2}$.

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| &\geq \left| \frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| - \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \\ &= \frac{|pq_n - qp_n|}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_{n+1}q_n} = \frac{1 - \frac{q}{q_{n+1}}}{qq_n}. \end{aligned}$$

$$\text{Mas, } q < \frac{q_{n+1}}{2} \implies -\frac{q}{q_{n+1}} > -\frac{1}{2} \implies 1 - \frac{q}{q_{n+1}} > \frac{1}{2} \implies \frac{1 - \frac{q}{q_{n+1}}}{qq_n} > \frac{1}{2qq_n} \geq \frac{1}{2q^2}.$$

Assim,

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| > \frac{1}{2q^2},$$

o que novamente contradiz a hipótese do teorema. Portanto, $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$.

□

2.3 A EQUAÇÃO DE PELL: $x^2 - Dy^2 = 1$

Conforme exposto na introdução deste trabalho, a Equação de Pell trata-se de um tipo especial de equação diofantina quadrática, cuja forma é dada por $x^2 - Dy^2 = 1$, sendo D um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito (MARTINEZ et al., 2018).

Embora estejamos interessados somente no caso em que D não seja quadrado perfeito, é importante que o leitor reconheça que, ao impormos esta restrição, não estaremos limitando nosso estudo da equação $x^2 - Dy^2 = 1$, pois, se considerarmos que D é quadrado perfeito, então existe um número natural k tal que $D = k^2$, logo $x^2 - Dy^2 = x^2 - k^2y^2 = (x - ky)(x + ky) = 1$ e, dessa forma, constatamos os seguintes casos:

1. Se $(x - ky) = (x + ky) = 1$, então $2ky = 0$, desse modo $y = 0$ e $x = 1$;
2. Analogamente, se $(x - ky) = (x + ky) = -1$, então $2ky = 0$, de modo que $y = 0$ e $x = -1$.

Assim, a Equação de Pell admitiria somente as soluções $(1,0)$ e $(-1,0)$ ditas soluções triviais, comuns a toda equação da forma $x^2 - Dy^2 = 1$.

Os exemplos a seguir representam algumas equações de Pell, as quais diferenciam-se somente pelo coeficiente da incógnita y . São elas:

$$x^2 - 2y^2 = 1 \quad (2)$$

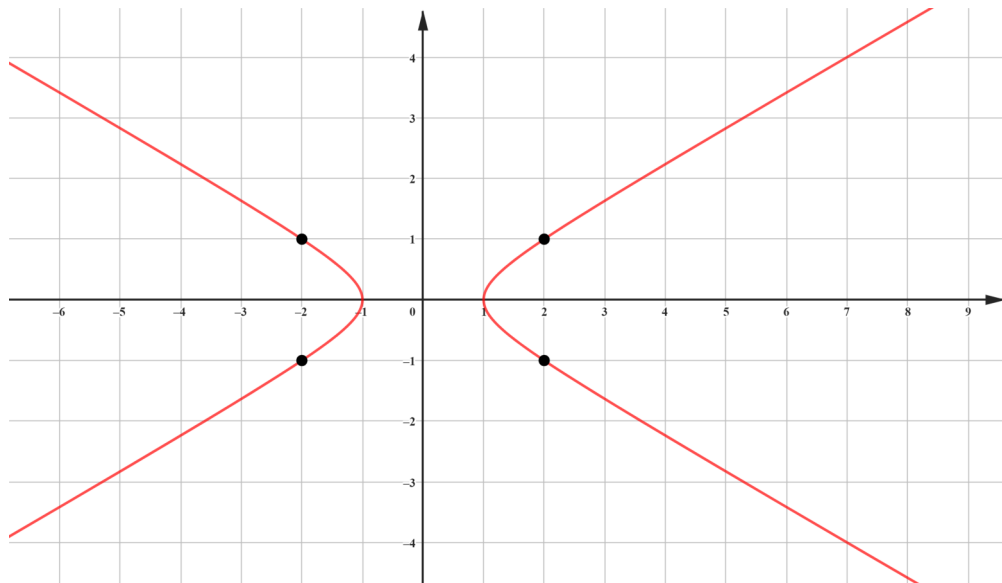
$$x^2 - 3y^2 = 1 \quad (3)$$

$$x^2 - 61y^2 = 1 \quad (4)$$

$$x^2 - 77y^2 = 1 \quad (5)$$

Efetivamente, encontrar soluções para a equação $x^2 - Dy^2 = 1$ equivale geometricamente a localizar pontos com coordenadas inteiras sobre uma hipérbole (MARTINEZ et al., 2018). A seguir, a figura 2.3 mostra a representação cartesiana da hipérbole $x^2 - 3y^2 = 1$, onde o ponto de coordenadas inteiras $(2,1)$ verifica a identidade $2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1$ e, portanto, está situado sobre a respectiva hipérbole.

Figura 2.3 – Representação cartesiana da hipérbole $x^2 - 3y^2 = 1$



Fonte: Elaborado pelo Autor

Em virtude da simetria existente no gráfico da hipérbole, percebe-se de modo geral que se (x,y) for solução da Equação de Pell, verifica-se que $(-x,y)$, $(x,-y)$ e $(-x,-y)$ também serão soluções. Por esse motivo, nos limitaremos ao estudo das soluções $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, conhecidas como soluções positivas.

Em vista disso, esta seção tem por finalidade estudar a Equação de Pell sob a ótica da Análise Diofantina. Nesse processo, explicitaremos os principais resultados

vinculados à resolução da equação $x^2 - Dy^2 = 1$. Para isso, estudaremos as relações entre as aproximações vindas das frações contínuas e a Equação de Pell. Boa parte da exposição a seguir encontra-se baseada nos autores Andreescu e Andrica (2010), Jacobson e Williams (2009) e Martinez et al. (2018).

2.3.1 Soluções Positivas e a Existência de Infinitas Soluções

Nesta subseção, investigaremos alguns resultados obtidos como consequência da definição da Equação de Pell. Em particular, veremos que a respectiva equação sempre admite solução em inteiros positivos x, y , e, a partir desta, podemos conseguir uma infinidade de outras soluções.

Vimos que a equação $x^2 - Dy^2 = 1$ é chamada de Equação de Pell quando o valor $D \in \mathbb{N}$ não é um quadrado perfeito, isto é, $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$. Vejamos abaixo uma consequência imediata dessa restrição.

Proposição 2.3.1.1. *Se $D \in \mathbb{N}$ é tal que $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$, então \sqrt{D} é irracional.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $\sqrt{D} \in \mathbb{Q}$. Dessa forma, devem existir $p, q \in \mathbb{N}$, com $q \neq 0$, tal que $\sqrt{D} = \frac{p}{q}$. Além disso, $q \neq 1$, pois, caso contrário, teríamos $\sqrt{D} = p$, um absurdo.

Sem perda de generalidade, considere que $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Notoriamente, se $\text{mdc}(p, q) = 1$ e $q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, então $\text{mdc}(p^2, q^2) = 1$ e $q^2 > 1$.

Assim

$$D = \frac{p^2}{q^2}, \text{ com } \text{mdc}(p^2, q^2) = 1 \text{ e } q^2 > 1.$$

Logo, $D \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, contradizendo o fato de que $D \in \mathbb{N}$. Portanto, \sqrt{D} é irracional. □

Antes de expormos os principais resultados que concernem a teoria da Equação de Pell, é importante situar o leitor de que faremos uma análise de $x^2 - Dy^2 = 1$ observando os elementos do corpo $\mathbb{Q}[\sqrt{D}] = \{x + y\sqrt{D}; x, y \in \mathbb{Q}\}$. Em vista disso, dado $x + y\sqrt{D} \in \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$, podemos definir seu conjugado como sendo $x - y\sqrt{D}$, e a partir disso, definimos a norma de $x + y\sqrt{D}$ via uma aplicação $N: \mathbb{Q}[\sqrt{D}] \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que para cada elemento $x + y\sqrt{D} \in \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ associamos o racional $N(x + y\sqrt{D}) = x^2 - Dy^2$. Além disso, cientes da necessidade de que

as soluções da equação $x^2 - Dy^2 = 1$ devem ser inteiras, então, delimitamos nossa atenção aos elementos do anel $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] = \{x + y\sqrt{D}; x, y \in \mathbb{Z}\}$, que por sua vez estão contidos em $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$. Assim, para cada $x + y\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ e que satisfaz $N(x + y\sqrt{D}) = x^2 - Dy^2 = 1$, conseguimos um par de inteiros (x, y) que corresponde a uma solução da Equação de Pell.

A próxima proposição mostra que a norma é uma função multiplicativa, isto é, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$, então $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$.

Proposição 2.3.1.2. *A norma $N: \mathbb{Q}[\sqrt{D}] \rightarrow \mathbb{Q}$ é uma função multiplicativa.*

Demonstração. Sejam $(x_1 + y_1\sqrt{D}), (x_2 + y_2\sqrt{D}) \in \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$.

Aplicando a norma aos elementos $(x_1 + y_1\sqrt{D})$ e $(x_2 + y_2\sqrt{D})$ teremos,

$$\begin{aligned} N((x_1 + y_1\sqrt{D})(x_2 + y_2\sqrt{D})) &= N((x_1x_2 + Dy_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\sqrt{D}) \\ &= (x_1x_2 + Dy_1y_2)^2 - ((x_1y_2 + y_1x_2)\sqrt{D})^2 \\ &= x_1(x_2^2 - Dy_2^2) - Dy_1^2(x_2^2 - Dy_2^2) \\ &= (x_1^2 - Dy_1^2)(x_2^2 - Dy_2^2) \\ &= N(x_1 + y_1\sqrt{D})N(x_2 + y_2\sqrt{D}). \end{aligned}$$

□

Considerando o fato da norma ser uma função multiplicativa, conseguimos provar a partir do princípio de indução que dado $x + y\sqrt{D} \in \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ e $n \in \mathbb{N}$, então $N((x + y\sqrt{D})^n) = (N(x + y\sqrt{D}))^n$, mais adiante faremos uso desse resultado.

Proposição 2.3.1.3. *Seja $D \in \mathbb{N}^*$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ uma solução da equação $x^2 - Dy^2 = 1$. Então, $x_0 + y_0\sqrt{D} > 1$ se, e somente se, $x_0, y_0 > 0$.*

Demonstração. Com efeito, se $x_0, y_0 > 0$ então $x_0 \geq 1$ e $y_0 \geq 1$, pois x_0, y_0 também são inteiros.

Como D é um natural não nulo, teremos $\sqrt{D} \geq 1$, ademais $x_0, y_0 \geq 1$, daí segue

$$y_0\sqrt{D} \geq \sqrt{D} \implies x_0 + y_0\sqrt{D} \geq 1 + \sqrt{D} > 1.$$

Antes de demonstrarmos a segunda parte da proposição, façamos uma observação a respeito do inverso multiplicativo de $x_0 + y_0\sqrt{D}$, tendo em vista que $x_0^2 - Dy_0^2 = 1$;

$$\begin{aligned} (x_0 + y_0\sqrt{D})^{-1} &= \frac{1}{x_0 + y_0\sqrt{D}} = \frac{x_0 - y_0\sqrt{D}}{(x_0 + y_0\sqrt{D})(x_0 - y_0\sqrt{D})} \\ &= \frac{x_0 - y_0\sqrt{D}}{x_0^2 - Dy_0^2} \\ &= x_0 - y_0\sqrt{D}. \end{aligned}$$

Agora, note que $x_0 + y_0\sqrt{D} > 1 > 0 \implies (x_0 + y_0\sqrt{D})^{-1} = x_0 - y_0\sqrt{D} > 0$, pois o inverso de um elemento positivo de um corpo ordenado (nesse caso \mathbb{Q}), é também positivo (LIMA, 2019). Dessa maneira,

$$(x_0 + y_0\sqrt{D}) + (x_0 - y_0\sqrt{D}) = 2x_0 > 0 \implies x_0 > 0.$$

Por outro lado, $x_0 + y_0\sqrt{D} > 1 \implies 0 < (x_0 + y_0\sqrt{D})^{-1} = x_0 - y_0\sqrt{D} < 1 < x_0 + y_0\sqrt{D}$, sendo assim,

$$x_0 - y_0\sqrt{D} < x_0 + y_0\sqrt{D} \implies 2y_0\sqrt{D} > 0 \implies y_0 > 0.$$

□

A fim de demonstrarmos o teorema 2.3.1.1, principal resultado desta seção, faremos uso do conceito de congruência modular. Vejamos a seguir algumas definições e observações sobre esse conceito. Para tal propósito, obtemos respaldo teórico na obra de Santos (1998).

Definição 2.3.1.1. *Sejam a e b naturais, e $m \in \mathbb{N}^*$. Dizemos que a é congruente a b módulo m se, e somente se $m \mid (a - b)$, e denotamos por*

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Quando a e b não forem congruentes módulo m , isto é, quando $m \nmid (a - b)$, denotaremos por

$$a \not\equiv b \pmod{m}.$$

Exemplo 2.3.1.1. *Com base na definição anterior, observe que $39 \equiv 11 \pmod{4}$, pois $4 \mid (39 - 11) = 28$.*

Exemplo 2.3.1.2. *Dados os números 23, 7 e 3, podemos concluir que $23 \not\equiv 7 \pmod{3}$, já que $3 \nmid (23 - 7) = 16$.*

Sejam a e m naturais, com $m > 0$ fixo, com base na definição anterior podemos representar o resto da divisão (Euclidiana) de a por m , pelo número, $a \pmod{m}$, pois a partir do Algoritmo da Divisão temos

$$\exists q, r \in \mathbb{N} \text{ \u00fanicos, tais que } a = qm + r, \text{ com } 0 \leq r < m.$$

Assim, $a \equiv qm + r \equiv r \pmod{m}$.

Diante disso, o valor a pertence ao conjunto dos n\u00fameros naturais que deixam resto r na divis\u00e3o por m . Ademais, como r \u00e9 um natural situado no intervalo $[0, m - 1]$, teremos m possibilidades para o resto da divis\u00e3o de a por m .

Exemplo 2.3.1.3. *Os n\u00fameros 25 e 31 pertencem ao conjunto dos naturais que deixam resto um na divis\u00e3o (Euclidiana) por 3. A saber, $25 = 3 \cdot 8 + 1$ e $31 = 3 \cdot 10 + 1$, ou equivalentemente $31 \equiv 25 \equiv 1 \pmod{3}$. Perceba tamb\u00e9m que as \u00fanicas possibilidades para o resto deixado na divis\u00e3o de um n\u00famero natural por 3 s\u00e3o: 0, 1 e 2.*

O pr\u00f3ximo teorema mostra que a Equa\u00e7\u00e3o de Pell sempre admite pelo menos uma solu\u00e7\u00e3o positiva.

Teorema 2.3.1.1. *A equa\u00e7\u00e3o $x^2 - Dy^2 = 1$ ($D \in \mathbb{N}$), com $\sqrt{D} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, possui ao menos uma solu\u00e7\u00e3o positiva (x_1, y_1) , ou seja, $x_1 + y_1\sqrt{D} > 1$.*

Demonstra\u00e7\u00e3o. Primeiramente, note que

$$\left| \frac{p}{q} - \sqrt{D} \right| = \left| \sqrt{D} - \frac{p}{q} \right|,$$

e pelo teorema 2.2.1.1, obtemos que a desigualdade a seguir, possui infinitas solu\u00e7\u00f5es racionais com $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$;

$$\left| \frac{p}{q} - \sqrt{D} \right| = \left| \sqrt{D} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Agora, considerando estes infinitos pares (p, q) , temos

$$p^2 - Dq^2 = q^2 \left(\frac{p}{q} - \sqrt{D} \right) \left(\frac{p}{q} + \sqrt{D} \right) \quad \text{e} \quad |p^2 - Dq^2| = q^2 \left| \left(\frac{p}{q} - \sqrt{D} \right) \left(\frac{p}{q} + \sqrt{D} \right) \right|$$

de modo que (p, q) satisfaz $\left| \frac{p}{q} - \sqrt{D} \right| < \frac{1}{q^2}$, assim

$$q^2 \left| \left(\frac{p}{q} - \sqrt{D} \right) \left(\frac{p}{q} + \sqrt{D} \right) \right| = q^2 \left| \frac{p}{q} - \sqrt{D} \right| \left| \frac{p}{q} + \sqrt{D} \right| < \left| \frac{p}{q} + \sqrt{D} \right|.$$

Utilizando a desigualdade triangular advém:

$$\left| \frac{p}{q} + \sqrt{D} \right| = \left| 2\sqrt{D} + \left(\frac{p}{q} - \sqrt{D} \right) \right| \leq 2\sqrt{D} + \left| \sqrt{D} - \frac{p}{q} \right|,$$

ademais, $\left| \sqrt{D} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$ e $q \geq 1$, dessa forma

$$|p^2 - Dq^2| < \left| \frac{p}{q} + \sqrt{D} \right| = \left| 2\sqrt{D} + \left(\frac{p}{q} - \sqrt{D} \right) \right| \leq 2\sqrt{D} + \left| \sqrt{D} - \frac{p}{q} \right| < 2\sqrt{D} + 1.$$

Assim, para infinitos pares (p, q) , o valor $|p^2 - Dq^2|$ encontra-se limitado superiormente por $2\sqrt{D} + 1$, logo teremos um número finito de possibilidades para o inteiro $p^2 - Dq^2$, e portanto deve existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $p^2 - Dq^2 = k$ para uma quantidade ainda infinita de pontos (p, q) .

Veja que o inteiro k deve ser não nulo, pois caso contrário teríamos $p^2 - Dq^2 = 0$, e, por conseguinte $\sqrt{D} = \frac{p}{q}$, contradizendo o fato de que $\sqrt{D} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Perceba que os possíveis restos da divisão de p e q por $|k|$ pertencem ao conjunto $\{0, 1, \dots, |k| - 1\}$, assim, existe exatamente $|k|^2$ possibilidades para o par $(p \bmod |k|, q \bmod |k|)$, no entanto, como existem infinitos pares (p, q) e um número finito de possibilidades para $(p \bmod |k|, q \bmod |k|)$, necessariamente devem existir uma infinidade de pares (t, u) , obtidos a partir dos pontos (p, q) , tais que

$$p \equiv t \pmod{|k|}, \quad q \equiv u \pmod{|k|} \quad \text{e} \quad t^2 - Du^2 = k.$$

Sejam (t_1, u_1) e (t_2, u_2) dois desses pares, com $t_1 \neq t_2$ e $u_1 \neq u_2$, assim

$$t_2 \equiv t_1 \pmod{|k|}, \quad u_2 \equiv u_1 \pmod{|k|} \quad \text{e} \quad t_1^2 - Du_1^2 = t_2^2 - Du_2^2 = k.$$

Observe que $t_1 \neq t_2$ e $u_1 \neq u_2$ implica que $t_1 + u_1\sqrt{D} \neq t_2 + u_2\sqrt{D}$, pois se fosse $t_1 + u_1\sqrt{D} = t_2 + u_2\sqrt{D}$, constataríamos que $|t_1 - t_2| \neq 0$ e $|u_1 - u_2| \neq 0$, logo $\frac{|t_1 - t_2|}{|u_1 - u_2|} = \sqrt{D} \in \mathbb{Q}$, um absurdo, já que \sqrt{D} é irracional.

Diante da observação acima e tendo em vista que $(t_1, u_1), (t_2, u_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, necessariamente deve ocorrer um, e somente um dos seguintes casos:

- I. $t_1 + u_1\sqrt{D} > t_2 + u_2\sqrt{D} > 0$
- II. $t_2 + u_2\sqrt{D} > t_1 + u_1\sqrt{D} > 0$.

Suponhamos sem perda de generalidade que $t_2 + u_2\sqrt{D} > t_1 + u_1\sqrt{D}$, daí segue

$$\frac{t_2 + u_2\sqrt{D}}{t_1 + u_1\sqrt{D}} > 1.$$

Com base no exposto acima, definiremos $x + y\sqrt{D} = \frac{t_2 + u_2\sqrt{D}}{t_1 + u_1\sqrt{D}}$ e afirmamos que (x, y) é uma solução positiva da Equação de Pell, com efeito:

$$\begin{aligned} \frac{t_2 + u_2\sqrt{D}}{t_1 + u_1\sqrt{D}} &= \frac{t_2 + u_2\sqrt{D}}{t_1 + u_1\sqrt{D}} \cdot \frac{t_1 - u_1\sqrt{D}}{t_1 - u_1\sqrt{D}} = \frac{(t_2t_1 - u_2u_1D) + (t_1u_2 - t_2u_1)\sqrt{D}}{t_1^2 - Du_1^2} \\ &= \frac{(t_2t_1 - u_2u_1D)}{k} + \frac{(t_1u_2 - t_2u_1)}{k} \cdot \sqrt{D}, \end{aligned}$$

e, considerando que $t_2 \equiv t_1 \pmod{|k|}$ e $u_2 \equiv u_1 \pmod{|k|}$, decorre que

$$\begin{cases} t_1t_2 - Du_2u_1 \equiv t_1^2 - Du_1^2 = k \equiv 0 \pmod{|k|} \\ t_1u_2 - t_2u_1 \equiv t_1u_1 - t_1u_1 = 0 \equiv 0 \pmod{|k|} \end{cases}$$

consequentemente, $x = \frac{(t_2t_1 - u_2u_1D)}{k}$ e $y = \frac{(t_1u_2 - t_2u_1)}{k}$ são inteiros.

Por outro lado, como $N(t_1 + u_1\sqrt{D}) = t_1^2 - Du_1^2 = t_2^2 - Du_2^2 = N(t_2 + \sqrt{D}u_2) = k$ e $(x + y\sqrt{D})(t_1 + u_1\sqrt{D}) = t_2 + u_2\sqrt{D}$, então teremos

$$N(x + y\sqrt{D})N(t_1 + u_1\sqrt{D}) = N(t_2 + u_2\sqrt{D}) \implies N(x + y\sqrt{D}) = x^2 - Dy^2 = 1.$$

Portanto, como $x + y\sqrt{D} > 1$, segue da proposição 2.3.1.3 que (x, y) é uma solução positiva para a Equação de Pell.

□

De acordo com o teorema acima, e o fato da norma ser uma função multiplicativa, podemos concluir que a Equação de Pell apresenta infinitas soluções. Pois, se (x_1, y_1) for uma solução positiva de $x^2 - Dy^2 = 1$ com $\sqrt{D} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $x_1 + y_1\sqrt{D} > 1$, conseqüentemente $(x_1 + y_1\sqrt{D})^n > 1$ donde $n \in \mathbb{N}^*$. Além disso, note que todo anel é fechado em relação às suas operações³ (GONÇALVES, 1979), em razão disso, como $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ é um anel (munido das operações usuais de soma e produto), teremos que $(x_1 + y_1\sqrt{D})^n = u + v\sqrt{D}$ com $u, v \in \mathbb{Z}$. Neste caso, sendo $(x_1 + y_1\sqrt{D})^n = u + v\sqrt{D} > 1$ $u, v \in \mathbb{Z}$, decorre da proposição 2.3.1.3 que u, v são inteiros positivos.

Calculando a norma de $u + v\sqrt{D}$, obtém-se:

$$u^2 - Dv^2 = N(u + v\sqrt{D}) = N((x_1 + y_1\sqrt{D})^n) = (N(x_1 + y_1\sqrt{D}))^n = (x_1^2 - Dy_1^2)^n = 1^n = 1.$$

Dessa forma, (u, v) é uma solução positiva de $x^2 - Dy^2 = 1$.

Por outro lado, dados n_1 e n_2 naturais distintos e não nulos, claramente $(x_1 + y_1\sqrt{D})^{n_1} \neq (x_1 + y_1\sqrt{D})^{n_2}$. Em vista disso, sejam $(x_1 + y_1\sqrt{D})^{n_1} = u_1 + v_1\sqrt{D}$ e $(x_1 + y_1\sqrt{D})^{n_2} = u_2 + v_2\sqrt{D}$ com $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{N}$, necessariamente deve-se ter que $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$. Com efeito, se fosse $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$, teríamos que $u_1 = u_2$ e $v_1 = v_2$, e portanto $u_1 + v_1\sqrt{D} = u_2 + v_2\sqrt{D}$, um absurdo, pois estamos considerando $u_1 + v_1\sqrt{D} \neq u_2 + v_2\sqrt{D}$.

Assim, para cada valor de $n \in \mathbb{N}^*$ obtemos uma solução positiva e distinta para a Equação de Pell.

Exemplo 2.3.1.4. *Considere $x^2 - 3y^2 = 1$. É fácil ver que $(7, 4)$ é uma solução da respectiva equação. Calculemos a expansão de $(7 + 4\sqrt{3})^2$, daí obtemos que*

$$(7 + 4\sqrt{3})^2 = 97 + 56\sqrt{3},$$

³ Dizemos que um conjunto (ou anel) é fechado em relação às suas operações quando o resultado da operação de dois elementos quaisquer é ainda um elemento do conjunto.

perceba que $(97, 56)$ é outra solução de $x^2 - 3y^2 = 1$, a saber: $97^2 - 3 \cdot 56^2 = 1$.

Analogamente, calculando $(7 + 4\sqrt{3})^3$:

$$(7 + 4\sqrt{3})^3 = 1351 + 780\sqrt{3}$$

onde $(1351, 780)$ satisfaz: $1351^2 - 3 \cdot 780^2 = 1$.

Com base nesse processo, podemos conseguir uma infinidade de soluções.

2.3.2 Todas as Soluções da Equação de Pell

Constatamos na subseção anterior que usando uma solução positiva da Equação de Pell podemos conseguir uma infinidade de outras soluções, contudo, é importante perceber que ao utilizarmos esse procedimento, corremos o risco de perder algumas soluções. Para verificarmos esse fato, analisemos a equação $x^2 - 3y^2 = 1$.

Note que $(7, 4)$ e $(2, 1)$ satisfazem $x^2 - 3y^2 = 1$, e $7 + 4\sqrt{3} > 2 + 1 \cdot \sqrt{3} > 1$. Logo, se tomarmos potências de $7 + 4\sqrt{3}$ verificamos que $(7 + 4\sqrt{3})^n > 2 + 1 \cdot \sqrt{3} \forall n \in \mathbb{N}^*$. Desse modo, não podemos obter o par $(2, 1)$ observando as potências de $(7 + 4\sqrt{3})$.

Nessa subseção, concluiremos que dentre todas as soluções positivas da Equação de Pell, existe uma, à qual chamaremos de solução fundamental, pela qual todas as demais podem ser adquiridas, usaremos esse fato para exibir uma fórmula explícita que descreva todas as soluções da Equação de Pell.

Definição 2.3.2.1. *Sejam x_1, y_1 inteiros positivos. O par ordenado (x_1, y_1) é dita solução fundamental (ou mínima) da Equação de Pell quando, $x_1^2 - Dy_1^2 = 1$ e x_1, y_1 forem mínimos.*

Seja (x_1, y_1) a solução fundamental da Equação de Pell: $x^2 - Dy^2 = 1$. Segue da definição 2.3.2.1, que qualquer outra solução positiva (u, v) , com $(x_1, y_1) \neq (u, v)$, deve ocorrer $u > x_1$ e $v > y_1$, por conseguinte $x_1 + y_1\sqrt{D} < u + v\sqrt{D}$ necessariamente.

Exemplo 2.3.2.1. *Considere $x^2 - 2y^2 = 1$, afirmamos que $(3, 2)$ é a solução fundamental desta equação. De fato, se existisse uma solução fundamental (x_0, y_0) com $(x_0, y_0) \neq (3, 2)$, necessariamente $x_0 + y_0\sqrt{2} < 3 + 2\sqrt{2}$. Em vista disso, todas as possibilidades são: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$ e $(3, 1)$. Estas por sua vez não satisfazem $x^2 - 2y^2 = 1$.*

A partir da proposição 2.3.2.1, veremos que toda solução da Equação de Pell é obtida a partir da solução fundamental.

Proposição 2.3.2.1. *Seja (x_1, y_1) a solução fundamental da Equação de Pell. Se $u^2 - Dv^2 = 1$ e $u, v > 0$, então $u + v\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$ para algum inteiro positivo n .*

Demonstração. Com efeito, sendo (x_1, y_1) a solução fundamental da Equação de Pell, advém que $x_1, y_1 > 0$, e pela proposição 2.3.1.3, $x_1 + y_1\sqrt{D} > 1$, logo $(x_1 + y_1\sqrt{D})^k$ ($k \in \mathbb{N}$) fica arbitrariamente grande conforme aumenta-se o valor k .

Em vista disso, deve existir $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(x_1 + y_1\sqrt{D})^n \leq u + v\sqrt{D} < (x_1 + y_1\sqrt{D})^{n+1}.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $((x_1 + y_1\sqrt{D})^{-1})^n = (x_1 - y_1\sqrt{D})^n > 0$, decorre:

$$(x_1 + y_1\sqrt{D})^n (x_1 - y_1\sqrt{D})^n \leq (u + v\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})^n < ((x_1 + y_1\sqrt{D})^{n+1})((x_1 + y_1\sqrt{D})^{-1})^n,$$

como

$$(x_1 + y_1\sqrt{D})^n (x_1 - y_1\sqrt{D})^n = (x_1^2 - Dy_1^2)^n = 1^n = 1$$

e

$$\begin{aligned} ((x_1 + y_1\sqrt{D})^{n+1})((x_1 + y_1\sqrt{D})^{-1})^n &= [(x_1 + y_1\sqrt{D})(x_1 + y_1\sqrt{D})^{-1}]^n (x_1 + y_1\sqrt{D}) \\ &= 1^n \cdot (x_1 + y_1\sqrt{D}) \\ &= (x_1 + y_1\sqrt{D}), \end{aligned}$$

resulta que

$$1 \leq (u + v\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})^n < x_1 + y_1\sqrt{D}. \quad (6)$$

Sendo $(u + v\sqrt{D}), (x_1 - y_1\sqrt{D})^n \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, então $(u + v\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})^n = u_1 + v_1\sqrt{D}$ com $u_1, v_1 \in \mathbb{Z}$.

Calculando a norma de $u_1 + v_1\sqrt{D}$, temos:

$$\begin{aligned} u_1^2 - Dv_1^2 &= N(u_1 + v_1\sqrt{D}) = N((u + v\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})^n) \\ &= N(u + v\sqrt{D})(N(x_1 - y_1\sqrt{D}))^n \\ &= (u^2 - Dv^2)(x_1^2 - Dy_1^2)^n \\ &= 1 \cdot 1^n = 1. \end{aligned}$$

Como $u_1 + v_1\sqrt{D} \geq 1$, então $0 < u_1 - v_1\sqrt{D} = (u_1 + v_1\sqrt{D})^{-1} \leq 1 \leq u_1 + v_1\sqrt{D}$, de modo que:

$$u_1 + v_1\sqrt{D} \geq u_1 - v_1\sqrt{D} \implies 2v_1\sqrt{D} \geq 0 \implies v_1 \geq 0,$$

logo

$$u_1 - v_1\sqrt{D} > 0 \text{ e } v_1 \geq 0 \implies u_1 > v_1\sqrt{D} \geq 0 \implies u_1 > 0.$$

É importante perceber que v_1 não pode ser positivo. Caso fosse $v_1 > 0$, teríamos inteiros u_1 e v_1 positivos com $u_1^2 - Dv_1^2 = 1$, e seguiria da desigualdade (6) que $u_1 + v_1\sqrt{D} < x_1 + y_1\sqrt{D}$, um absurdo, pois contradiz a minimalidade da solução fundamental (x_1, y_1) .

Em vista disso, devemos ter $u_1 > 0$ e $v_1 = 0$, e imediatamente

$$u_1^2 - D \cdot 0^2 = 1 \implies u_1 = 1 \text{ e } u_1 + v_1\sqrt{D} = (u + v\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})^n = 1,$$

consequentemente

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1\sqrt{D})^n &= (u + v\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})^n(x_1 + y_1\sqrt{D})^n \\ &= (u + v\sqrt{D})(x_1^2 - Dy_1^2)^n \\ &= (u + v\sqrt{D}) \cdot 1^n. \end{aligned}$$

Dessa maneira, $u + v\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$, como queríamos.

□

Em vista da proposição anterior, todas as soluções da Equação de Pell, com x , y inteiros positivos, podem ser enumeradas por (x_n, y_n) para todo $n \in \mathbb{N}$. Para isso, seja (x_1, y_1) a solução fundamental da Equação de Pell: $x^2 - Dy^2 = 1$, agora observe que

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n \tag{7}$$

$$x_n - y_n\sqrt{D} = (x_1 - y_1\sqrt{D})^n. \tag{8}$$

Somando as equações (7) e (8), segue-se que

$$2x_n = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n + (x_1 - y_1\sqrt{D})^n \implies x_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{D})^n + (x_1 - y_1\sqrt{D})^n}{2},$$

e, de modo análogo

$$2y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n - (x_1 - y_1\sqrt{D})^n \implies y_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{D})^n - (x_1 - y_1\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}.$$

Assim, todas as soluções da Equação de Pell são descritas explicitamente por, $(\pm x_n, \pm y_n)$.

Exemplo 2.3.2.2. Com base no exemplo 2.3.2.1 temos que $(3, 2)$ é a solução fundamental da Equação de Pell: $x^2 - 2y^2 = 1$, e pela proposição 2.3.2.1 segue que toda solução de $x^2 - 2y^2 = 1$, com x, y inteiros positivos satisfaz $x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Observação 2.3.1. De acordo com o exposto acima, as soluções triviais podem ser encontradas considerando o par $(\pm x_0, y_0)$.

2.3.3 A Solução Fundamental da Equação de Pell via Frações Contínuas

Diante do exposto nas subseções 2.3.1 e 2.3.2, concluímos que a Equação de Pell sempre apresenta infinitas soluções positivas, além disso, vimos também, que a partir da solução fundamental podemos obter todas as outras soluções, contudo, nem sempre é fácil determiná-lá, e tampouco apresentamos um método para tal. Diante dessa lacuna, nesta subseção exibiremos um procedimento para encontrar explicitamente a solução fundamental da Equação de Pell: $x^2 - Dy^2 = 1$.

Cientes sobre o fato das soluções positivas da Equação de Pell: $x^2 - Dy^2 = 1$ fornecerem aproximações para o número \sqrt{D} , torna-se natural que façamos uma análise sobre a fração contínua de \sqrt{D} , na pretensão de obter, a partir de suas reduzidas, uma solução.

Como a Equação de Pell sempre admite solução positiva, consideremos x, y inteiros positivos tais que $x^2 - Dy^2 = 1$, assim

$$\left| \frac{x}{y} - \sqrt{D} \right| \left| \frac{x}{y} + \sqrt{D} \right| = \frac{1}{y^2} |x^2 - Dy^2| = \frac{1}{y^2}.$$

Agora, vejamos que $\left| \frac{x}{y} + \sqrt{D} \right| > 2$. De fato, usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\left| \frac{x}{y} + \sqrt{D} \right| = \left| 2\sqrt{D} - \left(\sqrt{D} - \frac{x}{y} \right) \right| \geq 2\sqrt{D} - \left| \sqrt{D} - \frac{x}{y} \right| = 2\sqrt{D} - \left| \frac{x}{y} - \sqrt{D} \right|,$$

por outro lado,

$$\left| \frac{x}{y} - \sqrt{D} \right| \left| \frac{x}{y} + \sqrt{D} \right| = \frac{1}{y^2} \implies \left| \frac{x}{y} - \sqrt{D} \right| = \frac{1}{y^2 \left| \frac{x}{y} + \sqrt{D} \right|},$$

donde $\frac{x}{y} > 0$ e $\sqrt{D} \in \mathbb{N}^*$, logo $\frac{x}{y} + \sqrt{D} = \left| \frac{x}{y} + \sqrt{D} \right| > 1$,

em vista disso, concluímos que $\frac{1}{\left| \frac{x}{y} + \sqrt{D} \right|} < 1$ de modo que $\frac{1}{y^2 \left| \frac{x}{y} + \sqrt{D} \right|} < \frac{1}{y^2}$,

assim $\left| \frac{x}{y} + \sqrt{D} \right| = 2\sqrt{D} - \left| \frac{x}{y} - \sqrt{D} \right| > 2\sqrt{D} - \frac{1}{y^2}$. Com base nesta última desigualdade, analisemos os seguintes casos:

Se $D = 2$ e $y \geq 2$, teremos $\left| \frac{x}{y} + \sqrt{D} \right| > 2\sqrt{D} - \frac{1}{y^2} \geq 2\sqrt{D} - \frac{1}{4} > 2\sqrt{2} - \frac{1}{4} > 2$.

Se $D \geq 3$, concluímos que $\left| \frac{x}{y} + \sqrt{D} \right| > 2\sqrt{D} - \frac{1}{y^2} \geq 2\sqrt{D} - 1 \geq 2\sqrt{3} - 1 > 2$.

Dessa forma,

$$\left| \frac{x}{y} - \sqrt{D} \right| = \frac{1}{y^2 \left| \frac{x}{y} + \sqrt{D} \right|} < \frac{1}{2y^2},$$

e portanto, segue do teorema 2.2.3.1 que $\frac{x}{y}$ é uma reduzida $\frac{p_n}{q_n}$ da fração contínua de \sqrt{D} .

Em vista disso, qualquer solução da Equação de Pell, em particular a solução fundamental, pode ser encontrada observando as reduzidas da fração contínua de \sqrt{D} . Para identificarmos qual reduzida fornece a solução fundamental, consideremos o teorema 2.3.3.1, cuja demonstração pode ser encontrada em Martinez et al. (2018).

Teorema 2.3.3.1. Dado $D \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$, existem inteiros positivos r, a_0, a_1, \dots, a_r , com $a_r = 2a_0$ de modo que a representação em frações contínuas de \sqrt{D} é

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_r}],$$

a qual é periódica a partir de a_1 com menor período a_1, a_2, \dots, a_r . Ademais, se o período r for par, a solução fundamental da equação $x^2 - Dy^2 = 1$ é obtida considerando $(x, y) = (p_{r-1}, q_{r-1})$, e, se r for ímpar, a solução fundamental é dada por $(x, y) = (p_{2r-1}, q_{2r-1})$.

Com base no teorema anterior, considere $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$ e $\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_r}]$ onde r é o período. Nesta condições, se (x_1, y_1) é a solução fundamental de $x^2 - Dy^2 = 1$, então, se r for par, teremos

$$\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{r-1}}}}} = \frac{x_1}{y_1}$$

caso contrário,

$$\frac{p_{2r-1}}{q_{2r-1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{2r-1}}}}} = \frac{x_1}{y_1}.$$

O próximo exemplo ilustra na prática o método descrito acima.

Exemplo 2.3.3.1. Resolver a equação $x^2 - 23y^2 = 1$.

Na perspectiva de identificar o período de $\sqrt{23}$, inicialmente calculemos a sua expansão em frações contínuas, assim

$$\begin{aligned}
\sqrt{23} &= 4 + \frac{1}{\frac{\sqrt{23}+4}{7}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7\sqrt{23}+21}{14}}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{7\sqrt{23}-21}{14}}}} \\
&= 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7\sqrt{23}-21}{35-7\sqrt{23}}}}}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{\frac{\sqrt{23}+4}{7}}}}}}.
\end{aligned}$$

Note que a partir da última expressão, o procedimento começa a se repetir, consequentemente, $\sqrt{23} = [4; \overline{1, 3, 1, 8}]$, cujo período é $r = 4$. Pelo Teorema 2.3.3.1, concluímos que a solução fundamental de $x^2 - 23y^2 = 1$ é dada por (p_{r-1}, q_{r-1}) , daí segue que

$$\frac{p_3}{q_3} = [4; \overline{1, 3, 1}] = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}} = \frac{24}{5},$$

donde $24^2 - 23 \cdot 5^2 = 1$, e $(p_3, q_3) = (24, 5)$ é a solução mínima de $x^2 - 23y^2 = 1$. Além disso, conforme a proposição 2.3.2.1, todas as outras soluções são dadas, explicitamente, pelos pares $(\pm x_n, \pm y_n)$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \frac{(24 + 5\sqrt{23})^n + (24 - 5\sqrt{23})^n}{2} \quad \text{e} \quad y_n = \frac{(24 + 5\sqrt{23})^n - (24 - 5\sqrt{23})^n}{2\sqrt{23}}.$$

3 APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE PELL

Diante de tudo que foi exposto nos capítulos anteriores, finalmente exibiremos algumas aplicações e potencialidades da Equação de Pell para resolução de problemas diofantinos. Assim, a seção 3.1 tem por objetivo, a partir da teoria da Equação de Pell, resolver as equações diofantinas: $x^2 - 6xy + y^2 = 1$, $a^2 + (a + 1)^2 = c^2$ e $x^4 + z^3 = t^2$. Na seção 3.2, mostraremos como a Equação de Pell pode auxiliar na determinação de todos os números Triangulares-Quadrados⁴.

3.1 EQUAÇÕES DIOFANTINAS

As equações diofantinas constituem um importante ramo de estudo da teoria dos números, estas equações aparecem com frequência no tema de pesquisas atuais. Assim como vimos na introdução deste trabalho, a terminologia "equações diofantinas" se deve em homenagem ao matemático Diofanto de Alexandria, em razão da importância de seus trabalhos para o desenvolvimento da álgebra, bem como suas influências sobre os matemáticos europeus que mais tarde se dedicaram ao estudo da teoria dos números (EVES, 2011).

De acordo com Eves (2011), pouco se sabe sobre a vida de Diofanto, no entanto, a grande maioria dos historiadores concordam que ele tenha vivido no século III, tendo desenvolvido seus trabalhos na cidade de Alexandria.

A obra mais conhecida de Diofanto foi o livro, *Aritmética*, composto por um total de 13 livros, dos quais remanesceram somente 6 deles (BOYER, 1974). Conforme sinaliza Boyer (1974), a *Aritmética*, apresenta uma abordagem sobre a resolução de equações algébricas e a teoria dos números, onde são expostos métodos específicos para o cálculo de soluções particulares. Além disso, a parte preservada deste trabalho refere-se a resolução de 130 problemas (EVES, 2011), sendo que, "o primeiro livro se ocupa de equações determinadas em uma incógnita e os demais de equações indeterminadas de segundo grau, e às vezes de grau maior, em duas ou três incógnitas" (EVES, 2011, p. 208).

Os problemas indeterminados em que são procuradas exclusivamente soluções racionais, passaram a ser conhecidos como problemas diofantinos (EVES, 2011), estes por sua vez, possuem um número de equações inferior a quantidade de incógnitas, e, ocupam a maior parte da obra remanescente de Diofanto. Com base no trabalho de Eves (2011), destacamos alguns problemas indeterminados encontrados no livro *Aritmética*, são eles:

⁴ O termo "Triangulares-Quadrados" é uma expressão utilizada para se referir aos números triangulares que são quadrados perfeitos

Problema 28, Livro II: Determine dois números cujo produto somado de um deles resulte em um quadrado perfeito.

Problema 10, Livro IV: Obtenha dois números cuja soma tenha o mesmo valor que à soma de seus cubos.

Problema 1, Livro VI: Determine um triângulo retângulo pitagórico tal que a diferença entre a hipotenusa e cada um dos catetos resulta em um cubo.

Atualmente, os problemas diofantinas são resolvidos considerando apenas soluções inteiras. Tal como destaca Andreescu et al. (2010), na terminologia atual, chamamos de equação diofantina a toda equação do tipo

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (9)$$

pela qual, f é uma função polinomial de n variáveis, $n \geq 2$, com coeficientes inteiros, e, cujas soluções são dadas pelas n -uplas $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in \mathbb{Z}^n$ que satisfazem (9).

Nesta seção, apresentaremos resoluções para as equações diofantinas: $x^2 - 6xy + y^2 = 1$, $a^2 + (a+1)^2 = c^2$ e $x^4 + z^3 = t^2$, onde evidenciaremos algumas potencialidades da Equação de Pell para o processo de resolução. Boa parte da abordagem feita nos próximos tópicos encontra-se baseada nas referências Andreescu et al. (2010) e Martinez et al. (2018).

3.1.1 Solução da Equação $x^2 - 6xy + y^2 = 1$

A teoria da Equação de Pell, exposta neste trabalho, não se limita exclusivamente a resolver $x^2 - Dy^2 = 1$, na verdade, podemos recorrer a estes resultados para encontrarmos soluções de outros tipos de equações.

Uma das potencialidades da Equação de Pell para a resolução de problemas diofantinos justifica-se no fato de que toda equação quadrática, em duas variáveis e coeficientes inteiros pode ser reduzida à uma determinada Equação de Pell (AGUIRRE, 2020). Com efeito, a cônica

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (10)$$

pode ser reescrita como uma equação de segundo grau na variável x da seguinte maneira,

$$ax^2 + (by + d)x + (cy^2 + ey + f) = 0. \quad (11)$$

Agora, para que a equação (11) possua solução inteira, é necessário que o seu discriminante seja um quadrado perfeito, isto é, $(by + d)^2 - 4a(cy^2 + ey + f) = w^2$ para algum $w \in \mathbb{Z}^+$. Utilizando a substituição $p = b^2 - 4ac$, $q = 2bd - 4ae$ e $r = d^2 - 4af$, obtemos a equação de segundo grau em y ,

$$py^2 - qy + r - w^2 = 0. \quad (12)$$

Novamente pelo argumento anterior, uma condição necessária para que (12) tenha solução inteira é que $q^2 - 4p(r - w^2) = z^2$ com $z \in \mathbb{Z}^+$, logo

$$z^2 - (4p)w^2 = (q^2 - 4pr). \quad (13)$$

Portanto, se $q^2 - 4pr = 1$, então a igualdade (13) resulta na Equação de Pell $z^2 - (4p)w^2 = 1$ à qual sabemos resolver, e, uma vez encontradas suas soluções, basta retornarmos para as variáveis x e y . Mesmo nos casos em que $q^2 - 4pr \neq 1$, as soluções da equação $z^2 - (4p)w^2 = (q^2 - 4pr)$, caso existam, são encontradas considerando a solução fundamental de $z^2 - (4p)w^2 = 1$ (MARTINEZ et al., 2018).

Com base no exposto acima, resolveremos a equação diofantina $x^2 - 6xy + y^2 = 1$. Na perspectiva de que a expressão $x^2 + 6xy + y^2 = 1$ assumira a forma da Equação de Pell, podemos usar a técnica de completar quadrado, desse modo,

$$x^2 - 6xy + y^2 = 1$$

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 8y^2 = 1$$

$$(x - 3y)^2 - 8y^2 = 1.$$

Realizando a substituição de variável, $u = x - 3y$ e $v = y$, concluímos que

$$u^2 - 8v^2 = 1. \quad (14)$$

Feito isso, precisamos resolver (14). Para tal propósito, vimos que o primeiro passo é determinar a representação em frações contínuas de $\sqrt{8}$, em seguida, identificaremos o seu período. Desenvolvendo a expansão em frações contínuas de $\sqrt{8}$, tem-se

$$\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{8}+2}{4}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{8}-2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{\sqrt{8}+2}{4}}}}.$$

Com base nas expressões acima, constatamos que o procedimento começará a se repetir após a última igualdade, logo, o período da representação em frações contínuas de $\sqrt{8}$ é $r = 2$ (par). Em razão disso, segue do Teorema 2.3.3.1 que a solução mínima de (14) corresponde à $(p_{r-1}, q_{r-1}) = (p_1, q_1)$, pelo qual

$$\frac{p_1}{q_1} = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1},$$

e, portanto, $(p_1, q_1) = (3, 1)$.

Aplicando o resultado 2.3.2.1 para a equação $u^2 - 8v^2 = 1$, verificamos que todas as demais soluções positivas são adquiridas considerando o par (u_n, v_n) tal que

$$u_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2} \text{ e } v_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

As soluções encontradas acima, referem-se à equação (14), mas, a partir delas, podemos utilizar as igualdades, $u_n = x_n - 3y_n$ e $v_n = y_n$ afim de retornar para as variáveis originais do nosso problema, sendo assim

$$x_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2} + \frac{3[(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n]}{4\sqrt{2}}$$

$$x_n = \frac{[(2\sqrt{2} + 3)(3 + 2\sqrt{2})^n + (2\sqrt{2} - 3)(3 - 2\sqrt{2})^n]}{4\sqrt{2}}.$$

Finalmente, a solução geral da equação $x^2 - 6xy + y^2 = 1$ é dada por $(\pm x_n, \pm y_n)$, de modo que

$$x_n = \frac{[(2\sqrt{2} + 3)(3 + 2\sqrt{2})^n + (2\sqrt{2} - 3)(3 - 2\sqrt{2})^n]}{4\sqrt{2}} \text{ e } y_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}.$$

3.1.2 Solução da Equação $a^2 + (a+1)^2 = c^2$

As equações diofantinas, de modo geral, assumem representações gráficas de curvas planas, pelas quais, o objetivo principal é encontrar os pontos da curva que apresentam somente coordenadas inteiras, contudo, existem equações diofantinas que possibilitam interpretações geométricas mais elaboradas, como é o caso da equação $a^2 + b^2 = c^2$.

Encontrar soluções para $a^2 + b^2 = c^2$, pelo teorema de Pitágoras, equivale à obter os triângulos retângulos cujo comprimento dos catetos valem, respectivamente, a e b , e hipotenusa igual à c . As ternas de números inteiros (a, b, c) que verificam

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad (15)$$

são conhecidas como ternas pitagóricas (MARTINEZ et al., 2018).

No contexto histórico, à tábula matemática de origem babilônica, *Plimpton 322*, exhibe números em escrita cuneiforme, os quais possivelmente mantêm uma estreita relação com as ternas pitagóricas (EVES, 2011). Segundo Eves (2011), acredita-se que esta tábula tenha sido escrita por volta de 1900 a.C. e 1600 a.C, e está organizada em três colunas compostas por caracteres, localizadas à direita da figura 3.1.

Figura 3.1 – *Plimpton 322*



Fonte: Eves (2011)

A primeira coluna de números, à extrema direita, é posta para enumerar as linhas, enquanto que as colunas do centro e da esquerda correspondem, respectivamente, à hipotenusa e o cateto de um triângulo retângulo de lados inteiros, com exceção de quatro destas linhas, das quais não seguem este padrão (EVES, 2011).

Diante do exposto, nosso objetivo para essa subseção é, a partir da teoria da Equação de Pell, determinar todos os ternos pitagóricos (a, b, c) com catetos consecutivos e $a > b$. Para tal propósito, consideraremos a equação $a^2 + (a+1)^2 = c^2$, que é um caso particular de (15).

Antes de iniciarmos o processo de resolução, precisamos do resultado 3.1.2.1, o qual caracteriza as ternas pitagóricas primitivas.

Definição 3.1.2.1. *Sejam a, b e c inteiros. A terna (a, b, c) é dita terna pitagórica primitiva quando $a^2 + b^2 = c^2$ donde os valores a, b e c são primos relativos dois a dois.*

Proposição 3.1.2.1. *Se (a, b, c) forma uma terna pitagórica primitiva, então existem inteiros positivos m e n , tais que*

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn \quad e \quad c = m^2 + n^2$$

com $\text{mdc}(m, n) = 1$ e $m + n$ ímpar.

A princípio pode não ser claro, mas a proposição 3.1.2.1 nos diz que toda terna pitagórica é obtida por meio de alguma terna pitagórica primitiva. De fato, se fosse $\text{mdc}(a, b) = d > 1$, por exemplo, então $d \mid a^2 + b^2 = c^2$, pelo teorema fundamental da aritmética temos que existe um número primo p de modo que $p \mid c^2$, dessa maneira $p \mid c$, e portanto $(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}, \frac{c}{p})$ também é uma terna pitagórica.

Seja (a, b, c) um terno pitagórico primitivo. Com base na proposição 3.1.2.1, existem inteiros positivos m e n tais que

$$a = m^2 - n^2 \quad e \quad b = 2mn,$$

com m e n relativamente primos, e $m + n$ ímpar. Por outro lado, segue da restrição do problema que os catetos a e b devem ser consecutivos, dessa forma

$$\begin{aligned} a - b &= (m^2 - n^2) - 2mn = \pm 1 \\ &= (m - n)^2 - 2n^2 = \pm 1. \end{aligned}$$

Agora, realizando a substituição $x = m - n$ e $y = 2n$, decorre que

$$a - b = x^2 - 2y^2 = \pm 1. \quad (16)$$

De acordo com a identidade (16) acima, note que $x^2 - 2y^2 = -1$ fornece os ternos pitagóricos (a, b, c) com catetos consecutivos pelos quais $b > a$, todavia, nos delimitaremos somente ao caso em que $a > b$, isto é, $x^2 - 2y^2 = 1$ à qual corresponde a uma Equação de Pell estudada neste trabalho.

Para resolvermos $x^2 - 2y^2 = 1$, precisamos conhecer o período da representação em frações contínuas de $\sqrt{2}$, mas utilizando os resultados do exemplo II., verifica-se que $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$, e portanto, o período é $r = 1$ (ímpar). Aplicando o teorema 2.3.3.1, resulta que (p_{2r-1}, q_{2r-1}) é a solução fundamental de $x^2 - 2y^2 = 1$, e como $r = 1$, devemos ter

$$\frac{p_1}{q_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

logo, a solução mínima é $(3, 2)$.

Uma vez encontrada a solução fundamental, conforme a proposição 2.3.2.1, podemos concluir que todas as demais soluções positivas são adquiridas considerando o par (x_k, y_k) sendo k um natural positivo e,

$$x_k = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^k + (3 - 2\sqrt{2})^k}{2} \quad \text{e} \quad y_k = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^k - (3 - 2\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}}.$$

Tendo em vista que $x_k = m - n$ e $y_k = n$, conseqüentemente teremos $m = x_k + y_k$ e $n = y_k$, logo, todos os ternos pitagóricos primitivos (a, b, c) com catetos consecutivos e $a > b$ são tais que

$$a = (x_k + y_k)^2 - y_k^2 \quad \text{e} \quad b = 2(x_k + y_k)y_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3.1.3 Solução da Equação $x^4 + z^3 = t^2$

Na subseção 3.1.1, vimos como a teoria da Equação de Pell auxilia a encontrar soluções inteiras para equações de cônicas, contudo, é possível utilizar tais resultados para a resolução de equações Diofantinas mais complexas. Diante disso, verificaremos nesta subseção a existência de infinitos ternos (x, z, t) de números inteiros tais que $\text{mdc}(x, t) = 1$ e $x^4 + z^3 = t^2$, nesse processo, exibiremos uma fórmula explícita para a aquisição de infinitas soluções inteiras de $x^4 + z^3 = t^2$.

Para provarmos que a equação diofantina $x^4 + z^3 = t^2$ admite infinitas soluções, iremos descrever, algebricamente, infinitos ternos (x, z, t) de inteiros com esta propriedade, para isso, prosseguiremos isolando a incógnita z ,

$$z^3 = t^2 - x^4,$$

o lado direito da igualdade claramente se trata da diferença de dois quadrados, pela qual fatoramos da seguinte maneira,

$$z^3 = (t + x^2)(t - x^2).$$

Suponhamos que t e x tenham paridades opostas, neste caso, os fatores $(t + x^2)$ e $(t - x^2)$ são primos entre-si, pois, se existisse um inteiro $d > 1$ para o qual $\text{mdc}(t + x^2, t - x^2) = d$, teríamos que $d \mid t$ e $d \mid x^2$, um absurdo, dado que $\text{mdc}(x, t) = 1$. Em virtude disso, existem inteiros m e n satisfazendo

$$\begin{cases} m^3 = t + x^2 \\ n^3 = t - x^2. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior considerando as variáveis t e x^2 , tem-se que

$$t = \frac{m^3 + n^3}{2} \tag{17}$$

e,

$$x^2 = \frac{m^3 - n^3}{2}. \tag{18}$$

Assim, o problema inicial pode ser resolvido desde de que possamos encontrar inteiros t e x satisfazendo as igualdades (17) e (18). Inicialmente, observe que os valores t e x^2 são inteiros, de fato, como os números inteiros t e x tem paridades opostas, imediatamente resulta que m e n são ímpares, logo $2 \mid (m^3 + n^3)$ e $2 \mid (m^3 - n^3)$.

Para que possamos utilizar os resultados expostos no capítulo 2 deste trabalho, necessitamos manipular (17) e (18) de modo que seja arranjada uma Equação de Pell. Para isso, considere $m = y + 1$ e $n = y - 1$ com $y \in \mathbb{Z}$, daí segue que

$$x^2 = \frac{(y + 1)^3 - (y - 1)^3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \frac{6y^2 + 2}{2} \\
 x^2 - 3y^2 &= 1.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Na perspectiva de resolver a Equação de Pell (19), faremos a expansão em frações contínuas de $\sqrt{3}$.

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}}}.$$

De acordo as expressões acima, a última igualdade nos permite constatar que a representação em frações contínuas de $\sqrt{3}$ é periódica, dessa forma, $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$, sendo o período (r) par, e $r = 2$.

Conforme o resultado 2.3.3.1, a solução fundamental de (19) é dada por (p_{r-1}, q_{r-1}) , assim

$$\frac{p_1}{q_1} = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1},$$

logo, $(p_{r-1}, q_{r-1}) = (2, 1)$.

Uma vez conhecida a solução mínima da Equação de Pell (19), a proposição 2.3.2.1 nos permite concluir que todas suas outras soluções são obtidas considerando (x_k, y_k) tal que

$$x_k = \frac{[(2 + \sqrt{3})^k + (2 - \sqrt{3})^k]}{2} \quad \text{e} \quad y_k = \frac{[(2 + \sqrt{3})^k - (2 - \sqrt{3})^k]}{2\sqrt{3}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Retornando para as variáveis x , z e t , teremos

$$x = x_k, \quad z = y_k^2 - 1 \quad \text{e} \quad t = y_k^3 + 3y_k.$$

Portanto, $x^4 + z^3 = t^2$ admite infinitas soluções inteiras, uma vez que, os pares $(x, z, t) = (x_k, (y_k^2 - 1), y_k^3 + 3y_k)$ constituem uma família infinita de soluções.

3.2 NÚMEROS POLIGONAIS

Os números poligonais figuram entre os primeiros subconjuntos de números naturais estudados pelos antigos matemáticos (STILLWELL, 2004). Essencialmente, estes números formam sequência na qual cada termo representa uma quantidade de pontos os quais podem ser arranjados de modo a formar um polígono regular específico. De acordo com Stillwell (2004), os Pitagóricos figuram entre os primeiros a representarem os números poligonais associando-os à formas geométricas constituídas por pontos organizados em padrões.

Conforme destaca Atalaia (2009), os termos de quaisquer sequências de números poligonais podem ser obtidos da seguinte maneira:

- Por convenção, o primeiro termo é sempre igual a 1 (um ponto);
- O segundo termo da sequência corresponde ao número de vértices do polígono regular em questão;
- O n -ésimo número poligonal é igual ao termo anterior acrescido de uma fileira de pontos iniciada a partir das extremidades de dois lados adjacentes, de modo que a forma do polígono seja mantida

Uma forma mais precisa para a definição de número poligonal pode ser feita considerando um polígono regular de k ($k \geq 3$) lados, onde definimos o n -ésimo número poligonal de ordem k , como sendo

$$f(k, n) = \frac{n}{2}[(k - 2)(n - 1) + 2]. \quad (20)$$

A fórmula (20) permite calcular os números poligonais referentes a um polígono regular qualquer, a dedução deste resultado pode ser encontrada em Atalaia (2009). Na figura 3.2 foram calculados os cinco primeiros números poligonais associados a suas respectivas classes, sendo elas: Triangulares (T_n) e Quadrados (Q_n).

Figura 3.2 – Números Poligonais: Triangulares e Quadrados

n	T_n	Q_n
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	10	16
5	15	25

Fonte: Adaptado de Atalaia (2009)

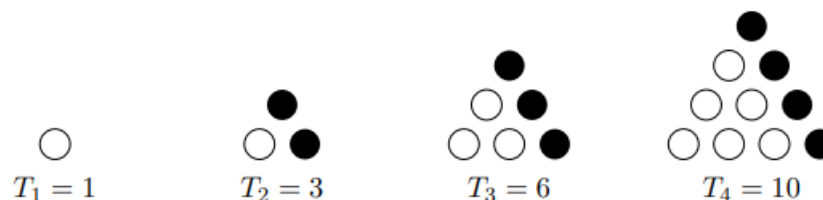
De acordo com a figura anterior, cada termo das sequências T_n e Q_n dispõe de uma representação geométrica específica. Ademais, a figura correspondente ao n -ésimo número poligonal possui uma maior quantidade de pontos em relação à representação anterior, conseqüentemente, estas sucessões são estritamente crescentes.

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades dos números triangulares. Contudo, nosso interesse principal é identificar os números triangulares que também são quadrados perfeitos. Para esse propósito, utilizaremos os resultados da Equação de Pell expostos no capítulo 2 deste trabalho.

3.2.1 Números Triangulares-Quadrados

Um inteiro positivo T_n ($n \in \mathbb{N}$) é dito número triangular se T_n pontos puderem ser organizados de modo que seja formado um triângulo equilátero (CONRAD, 2016). A figura 3.3 mostra os quatros primeiros números triangulares e suas respectivas representações geométricas.

Figura 3.3 – Números Triangulares



Fonte: Conrad (2016)

Assim como sinaliza Atalaia (2009), os valores de T_n podem ser calculados por meio da seguinte fórmula de recorrência,

$$T_1 = 1 \quad \text{e} \quad T_n = T_{n-1} + n \quad \forall n \geq 2.$$

Desse modo, a sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão geométrica de segunda ordem, pois $T_n - T_{n-1} = n$ e $(T_n - T_{n-1}) - (T_{n-1} - T_{n-2}) = n - (n-1) = 1$ para todo n maior ou igual à 2, em razão disso

$$T_n = 1 + (T_2 - 1) + (T_3 - T_2) + \dots + (T_n - T_{n-1}) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k. \quad (21)$$

Portanto, segue da expressão (21) que o termo geral T_n corresponde exatamente a soma dos n primeiros naturais, que por sua vez é calculada através da fórmula:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (22)$$

A fórmula (22) é um caso particular da expressão que calcula a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, e, sua demonstração pode ser feita tomando como referência a ideia devida à Gauss, e utilizada para calcular o somatório $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ (CARVALHO; MORGADO, 2014). Caso seja de interesse do leitor, uma prova para (22) pode ser encontrada em Carvalho e Morgado (2014).

No que tange a análise dos números triangulares, o matemático Euler desenvolveu um estudo sobre os números triangulares que são quadrados perfeitos, nesse processo, ele reduziu o problema a resolver uma Equação de Pell específica, cujas soluções fornecem todos os números Triangulares-Quadrados (TATTERSALL, 2005).

A próxima proposição exhibe o método utilizado por Euler para determinar números Triangulares-Quadrados usando a Equação de Pell. A demonstração que apresentaremos desse resultado encontra-se baseada em Conrad (2016).

Proposição 3.2.1.1. *Sejam T_n , m e n inteiros positivos. Todos os números Triangulares, T_n , tais que $T_n = m^2$, são obtidos a partir das soluções da Equação de Pell $x^2 - 2y^2 = 1$.*

Demonstração. Igualando as identidades $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ e $Q_m = m^2$, decorrem as seguintes equivalências,

$$\begin{aligned} T_n = Q_m &\iff \frac{n(n+1)}{2} = m^2 \\ &\iff n^2 + n = 2m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2m^2 \\
&\iff \frac{1}{4}(2n+1)^2 - \frac{1}{4} = 2m^2 \\
&\iff (2n+1)^2 - 1 = 2(2m)^2 \\
&\iff (2n+1)^2 - 2(2m)^2 = 1,
\end{aligned}$$

Dessa maneira, todos os pares (n, m) tais que $T_n = Q_m$, são calculados por meio das soluções da Equação de Pell $x^2 - 2y^2 = 1$, donde $x = 2n + 1$ e $y = 2m$.

□

No próximo exemplo mostraremos como a teoria da Equação de Pell auxilia na determinação de números Triangulares-Quadrados.

Exemplo 3.2.1.1. *Encontre todos os números Triangulares-Quadrados.*

Pela proposição 3.2.1.1, se $T_n = m^2$, então m e n satisfazem a Equação de Pell: $x^2 - 2y^2 = 1$ com $x = 2n + 1$ e $y = 2m$. O próximo passo é resolver a respectiva equação.

Com base no exemplo II., a representação em frações contínuas de $\sqrt{2}$ é denotada por $[1; 2, 2, 2, \dots]$, sendo o período $r = 1$ (ímpar). Agora, usando o Teorema 2.3.3.1, temos que a solução fundamental de $x^2 - 2y^2 = 1$ corresponde ao par (p_{2r-1}, q_{2r-1}) . Como $r = 1$, devemos ter

$$\frac{p_1}{q_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

donde, $(p_1, q_1) = (3, 2)$ é a solução mínima, e, portanto, segue da proposição 2.3.2.1 que a solução geral é dada por

$$x_k = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^k + (3 - 2\sqrt{2})^k}{2} \quad \text{e} \quad y_k = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^k - (3 - 2\sqrt{2})^k}{2\sqrt{2}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $x_k = 2n + 1$, segue-se que

$$\begin{aligned}
2n+1 &= \frac{(3+2\sqrt{2})^k + (3-2\sqrt{2})^k}{2} = \frac{(\sqrt{2}+1)^{2k} + (\sqrt{2}-1)^{2k}}{2} \\
2n &= \frac{(\sqrt{2}+1)^{2k} + (\sqrt{2}-1)^{2k}}{2} - \frac{2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{2} \\
n &= \left[\frac{(\sqrt{2}+1)^k - (\sqrt{2}-1)^k}{2} \right]^2.
\end{aligned} \tag{23}$$

Portanto, para cada inteiro positivo k , a fórmula (23) fornece um natural n pelo qual T_n é um quadrado. A partir de (23), listamos na Tabela 3.1, os cinco primeiros números Triangulares-Quadrados.

Tabela 3.1 – Números Triangulares-Quadrados

k	(x_k, y_k)	$T_{\frac{x_k-1}{2}}$
1	(3, 2)	1
2	(17, 12)	36
3	(99, 70)	1225
4	(577, 408)	41616
5	(3363, 2378)	1413721

Fonte: Elaborado pelo Autor

Um fato interessante verificado implicitamente no exemplo 3.2.1.1 refere-se a existência de infinitos números Triangulares-Quadrados. De fato, como $x_k^2 - 2y_k^2 = 1$ admite infinitas soluções positivas, concluímos que x_k é sempre ímpar, e para todo $k \in \mathbb{N}^*$, $2 \mid x_k - 1$, por conseguinte, existe uma infinidade de naturais n tais que T_n é um quadrado perfeito.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo geral deste trabalho consistiu-se em realizar um estudo teórico sobre a Equação de Pell, bem como sinalizar algumas aplicações e potencialidades dessa teoria para a resolução de diferentes tipos de equações diofantinas. Para atingir este propósito, iniciamos esta pesquisa expondo alguns aspectos históricos sobre o desenvolvimento de resultados que concernem a Equação de Pell, a partir dessa exposição, podemos compreender as influências que diferentes matemáticos exerceram para a completude dessa teoria ao longo do tempo. Em seguida, foi feito um estudo da Equação de Pell, considerando suas relações com a teoria de frações contínuas, diante desse processo, verificamos que esta equação admite infinitas soluções inteiras, além disso, apresentamos um método para resolvê-la.

Na pretensão de exibir algumas aplicações e potencialidades da Equação de Pell para resolução de equações diofantinas, foi investigada a seguinte questão: Além da equação $x^2 - Dy^2 = 1$, existem outros tipos de equações diofantinas pelas quais é possível aplicar os conceitos teóricos da Equação de Pell para resolvê-las? Com a finalização desta pesquisa podemos concluir que sim, existem outros tipos de equações diofantinas que podem ser resolvidas utilizando-se de resultados da teoria da Equação de Pell, na oportunidade, foram apresentadas soluções para as equações: $x^2 - 6xy + y^2 = 1$, $a^2 + (a + 1)^2 = c^2$ e $x^4 + z^3 = t^2$, bem como foi exibido um método para encontrar todos os números triangulares que são quadrados perfeitos. Contudo, é importante ressaltar que além destes, existem vários outros problemas diofantinos solúveis através dos conceitos teóricos da Equação de Pell.

Com base no processo de resolução dos problemas abordados nesta pesquisa, verificamos que a teoria da Equação de Pell apresenta-se como uma potencial ferramenta para resolver diferentes tipos de equações diofantinas, pois através de certas manipulações algébricas e substituições de variáveis, cada um destes problemas puderam ser reduzidos a uma Equação de Pell correspondente, onde algumas delas equivalem a resolver o problema original.

Ademais, neste trabalho, ficou evidente que se pudermos reduzir um problema diofantino à uma Equação de Pell equivalente, é notável a facilidade que teremos para solucionar este problema, visto que a Equação de Pell dispõe de uma fórmula explícita para aquisição de infinitas soluções inteiras, e, a partir dela, torna-se possível determinar uma outra fórmula, também explícita, para encontrar as soluções do problema inicial. Em síntese, podemos concluir que ao resolver uma equação diofantina é coerente considerar a viabilidade de utilizar os resultados teóricos da Equação de Pell, tendo em vista as possibilidades e benefícios que tal teoria apresenta diante do processo de resolução.

Assim, acreditamos que este trabalho possa ser utilizado como referência para os professores de matemática que objetivam preparar seus alunos para participarem em olimpíadas de matemática, considerando sobretudo, as possibilidades e benefícios da Equação de Pell para resolução de problemas diofantinos. Por fim, como sugestão de pesquisas futuras, recomendamos o desenvolvimento de um estudo de campo voltado para utilização dos conceitos abordados neste trabalho, visando o treinamento de estudantes que realizarão as provas em olimpíadas de matemática, observando nesse processo, as aprendizagens e os resultados obtidos por estes alunos ao utilizarem a Equação de Pell para a resolução de problemas diofantinos.

REFERÊNCIAS

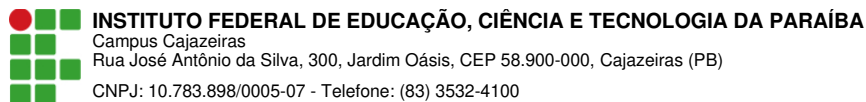
- AGUIRRE, J. R. Equações diofantinas: Um passeio pelo mundo inteiro. **Revista da Olimpíada**, p. 66–85, 2020.
- ANDREESCU, T.; ANDRICA, D. **Quadratic Diophantine Equations**. [S.l.]: Springer, 2010.
- ANDREESCU, T.; ANDRICA, D.; CUCUREZEANU, I. et al. **An introduction to Diophantine equations: a problem-based approach**. [S.l.]: Springer, 2010.
- ATALAIA, M. F. da C. À volta dos números poligonais. **Educação e Matemática**, n. 101, p. 32–33, 2009.
- BESKIN, N. **Fracções Contínuas**. [S.l.]: Ulmeiro, 2001. 103 p.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. [S.l.]: São Paulo: Edgard Blucher, 1974. 496 p.
- BRASIL. **Ministério da Educação, Base Nacional Comum Curricular**. [S.l.]: Brasília: MEC, 2018.
- CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. **Matemática discreta**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2014.
- CONRAD, K. Pell's equation, i. **Educação e Matemática**, n. 101, 2016.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Editora da Unicamp, 2011.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. [S.l.]: Atlas São Paulo, 2002. v. 4. 175 p.
- GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. v. 7.
- JACOBSON, M. J.; WILLIAMS, H. C. **Solving the Pell equation**. [S.l.]: Springer, 2009.
- LIMA, E. L. **Curso de análise**. 15. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2019. v. 1. 307 p.
- MARTINEZ, F.; MOREIRA, C.; SALDANHA, N.; TENGAN, E. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números**. [S.l.: s.n.], 2018.
- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Pell's equation**. 2002. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pell/>>. Acesso em: 08 de junho de 2023.
- RIDENHOUR, J. Ladder approximations of irrational numbers. **Mathematics Magazine**, Taylor & Francis, v. 59, n. 2, p. 95–105, 1986.
- SANTOS, J. P. de O. **Introdução à teoria dos números**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.

SOUZA, L. B. **Aproximações Diofantinas e a Teoria das Frações Contínuas**. 54 p. Dissertação (Mestrado) — IMPA, Rio de Janeiro, 2018.

STILLWELL, J. **Mathematics and its History**. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2004.

TATTERSALL, J. J. **Elementary Number Theory in Nine Chapters**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University, 2005.

WIKIPEDIA. **Pell's equation - Wikipedia, the free encyclopedia**. 2023. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Pell's_equation>. Acesso em: 23 de maio de 2023.



Documento Digitalizado Restrito

Trabalho de conclusão de curso

Assunto: Trabalho de conclusão de curso
Assinado por: Tiago Bonifacio
Tipo do Documento: Dissertação
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Restrito
Hipótese Legal: Informação Pessoal (Art. 31 da Lei no 12.527/2011)
Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- Francisco Tiago Bonifácio, ALUNO (201922020029) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS, em 04/09/2023 12:49:21.

Este documento foi armazenado no SUAP em 04/09/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 931666
Código de Autenticação: f140b2b647

