

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA  
*CAMPUS CAJAZEIRAS*

ADENILDA TIMÓTEO SALVIANO

**PROJETOS DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM ABERTURAS NA  
ALMA UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS ENRIQUECIDOS E O MÉTODO  
DE BIELAS E TIRANTES**

Cajazeiras-PB  
2023

ADENILDA TIMÓTEO SALVIANO

**PROJETOS DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM ABERTURAS NA  
ALMA UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS ENRIQUECIDOS E O MÉTODO  
DE BIELAS E TIRANTES**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba-*Campus* Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil, sob Orientação do Prof. Sebastião Simão da Silva.

Cajazeiras-PB  
2023

IFPB / Campus Cajazeiras  
Coordenação de Biblioteca  
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva  
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S184p Salviano, Adenilda Timóteo.  
Projetos de vigas de concreto armado com aberturas na alma utilizando elementos finitos enriquecidos e o método de bielas e tirantes / Adenilda Timóteo Salviano.– 2023.  
  
12f. : il.  
  
Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2023.  
  
Orientador(a): Prof<sup>ª</sup>. Dr. Sebastião Simão da Silva.  
  
1. Construção civil. 2. Concreto armado. 3. Vigas de sustentação. 4. Análise estrutural. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ

CDU: 624.07(043.2)

## **CURSO SUPERIOR DE BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL**

Artigo apresentado à coordenação do curso como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil

### **PROJETOS DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM ABERTURAS NA ALMA UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS ENRIQUECIDOS E O MÉTODO DE BIELAS E TIRANTES**

**Adenilda Timóteo Salviano**  
adenilda.salviano@academico.ifpb.edu.br  
**Sebastião Simão da Silva**  
sebastiao.silva@ifpb.edu.br

#### **RESUMO**

A necessidade de reduzir o tempo de execução das obras civis tem acarretado em negligências no processo de compatibilização de projetos. Uma das consequências é a necessidade da realização de furos nas vigas para passagem de dutos e tubulações. Esta prática ocorre sem critérios de análise e projeto estrutural. Aberturas em vigas realizadas sem uma precisão na análise resultam em redução da resistência considerada no projeto, instabilidade e segurança comprometida. Nas regiões com aberturas, geralmente chamadas de “Regiões D”, a hipótese de Bernoulli torna-se inválida e, portanto, o modelo de bielas e tirantes associado ao método dos elementos finitos tem sido utilizado para fins de projeto. Este trabalho se propõe a analisar a distribuição de tensões em vigas com abertura por meio de elementos finitos clássicos e enriquecidos com modos incompatíveis. Resultados precisos dos esforços internos permitem determinar uma adequada disposição das armaduras e, dessa forma, o cumprimento da segurança nos estados limites últimos e de serviço. A fim de validar a performance dos elementos implementados para a análise de estruturas com descontinuidades, os resultados obtidos são comparados com os encontrados na literatura e calculados utilizando um pacote comercial. Os projetos resultantes atestam a qualidade da formulação implementada.

**Palavras-Chave:** concreto armado, elementos de modo incompatível, modelo de bielas e tirantes.

#### **ABSTRACT**

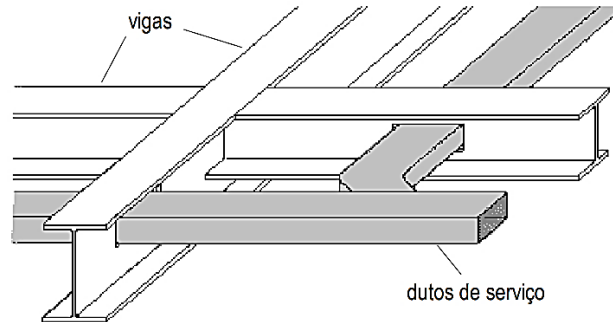
The need to reduce the execution time has led to the negligence in the process of compatibility project. One of the consequences is the need to drill holes in beams for the passage of ducts and piping. This practice occurs without criteria for analysis and structural design. Openings in beams performed without an accurate analysis result in reduced strength considered in the design, instability and compromised safety. In the regions of openings, usually called “Regions D”, the Bernoulli hypothesis becomes invalid and, therefore, the strut-and-ties model associated with the finite element method has been used. This work proposes to analyze the distribution of stresses in beams with opening using classical finite elements and enhanced with incompatible modes. Precise results of internal efforts allow an adequate arrangement of reinforcements and fulfillment of safety in the ultimate and service limit states. In order to validate the performance of the elements implemented for the analysis of structures with discontinuities, the results obtained are compared with those found in the literature and calculated using a commercial package. The results obtained attest to the quality of the implemented formulation.

**Keywords:** reinforced concrete, incompatible mode elements, strut-and-ties model.

## 1 INTRODUÇÃO

As construções modernas precisam de muitos dutos para acomodar tubulações de serviços essenciais como abastecimento de água, redes de esgoto, sistemas de refrigeração, instalações elétricas, sistemas de informação, etc. – Figura 1. É comum que essas tubulações de serviços sejam dispostas em aberturas realizadas em vigas de concreto armado. Ocorre também que, com frequência, a falta de compatibilização de projetos acarreta na necessidade de execução dessas aberturas de forma não racional e sem o devido conhecimento técnico podendo gerar riscos à segurança dos usuários, além de implicar em aumento de custos.

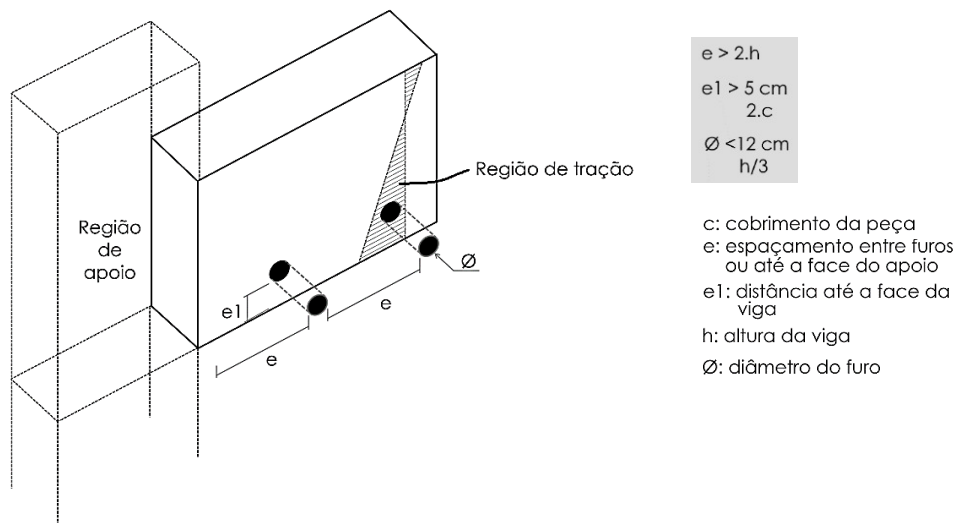
Figura 1– Vigas com aberturas na alma para a passagem de dutos.



Fonte: Veríssimo (1996) - Adaptado.

A NBR 6118:2014, no seu item 13.2.5, estabelece quais são as condições favoráveis para furos e aberturas em vigas de concreto armado, na direção da sua largura – Figura 2. Ainda de acordo com a norma antes citada, de maneira geral, os furos têm dimensões pequenas em relação ao elemento estrutural enquanto as aberturas não. Por sua vez, um conjunto de furos muito próximos deve ser tratado como uma abertura. Em muitas situações, as características dessas aberturas (dimensões e posição na alma) não atendem as prescrições normativas para que sejam desprezadas análises mais elaboradas dos efeitos das mesmas no comportamento estrutural das vigas.

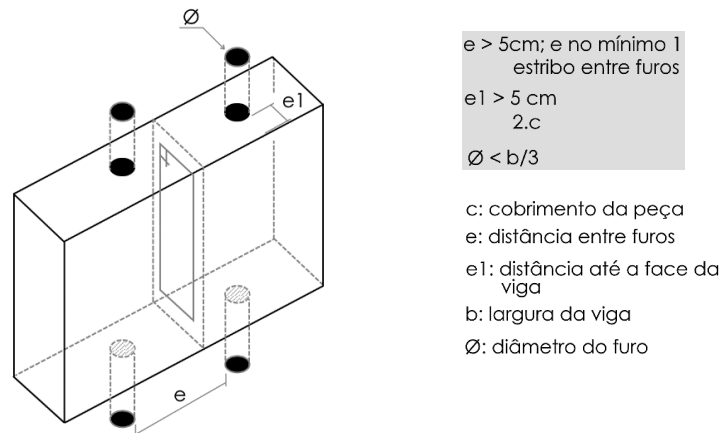
Figura 2 – Condições para dispensa de verificação dos efeitos dos furos e aberturas na direção da largura.



Fonte: Pintos (2022).

Na Figura 3 são ilustradas as condições estabelecidas pela NBR 6118:2014 para que se dispense uma avaliação mais criteriosa quando os furos são projetados na direção da altura das peças.

Figura 3 – Condições para dispensa de verificação dos efeitos dos furos e aberturas na direção da vertical.



Fonte: Pintos (2022).

As regiões de vigas esbeltas com aberturas e vigas paredes (com e sem aberturas) são consideradas perturbadas visto que, nas suas proximidades, o campo de deformações é significativamente não linear. Portanto, não é adequado projetar essas regiões usando teoria de flexão ou as formulações convencionais de dimensionamento ao cisalhamento. Assim, é fundamental contar com um método racional, como os modelos de bielas e tirantes (*Strut-and-tie models* - STMs).

De acordo com Schlaich, Schafer e Jennewein (1987), se o engenheiro projetista ainda não tem experiência suficiente com modelagem, ele primeiro empregará um programa de elementos finitos para realizar uma análise linear-elástica; plotará as trajetórias de tensões para dessa forma se orientar na construção do modelo de bielas e tirantes. Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo principal o estudo de projeto de vigas esbeltas e de vigas paredes com aberturas através da avaliação do campo de tensões elásticas usando elementos finitos enriquecidos com modos incompatíveis e o método de bielas e tirantes.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

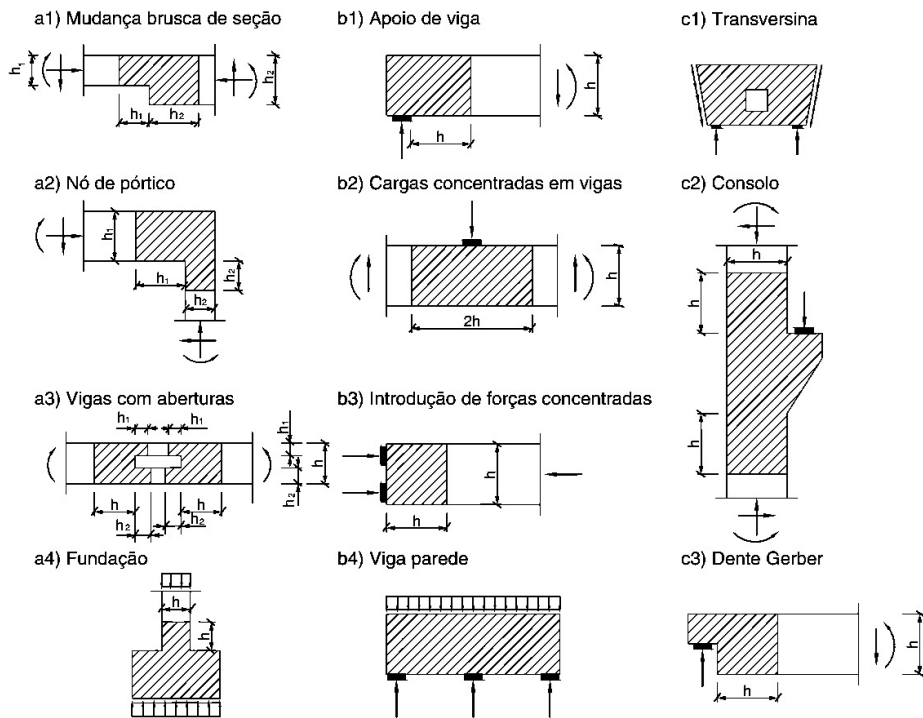
### 2.1 Modelo de bielas e tirantes

Os modelos STMs são derivados do método de analogia da treliça oriundo das pesquisas de Ritter (1899) e Mörsch (1909). Posteriormente, Schlaich, Schafer e Jennewein (1987) expandiu os conceitos para avaliar as condições de descontinuidade de vários elementos estruturais. Os modelos de bielas e tirantes são baseados em representações discretas de campos de tensão causados por cargas aplicadas e condições de contorno presentes em elementos estruturais de concreto armado. As estruturas podem ser divididas em dois tipos de regiões: a região B é uma parte da estrutura para a qual a hipótese de Bernoulli é válida; regiões D ou descontínuas são regiões onde a distribuição das deformações não é linear devido a descontinuidades estáticas ou geométricas e, portanto, a hipótese de Bernoulli não é válida.

Um modelo STM precisa ser usado quando o elemento estrutural em consideração possui a presença de descontinuidades geométricas ou estáticas. De acordo com Xia, Langelaar, Hendriks (2020), o método STM é uma ferramenta eficaz para os engenheiros dimensionar regiões perturbadas (as chamadas regiões D) de estruturas de concreto armado. A Figura 4 ilustra situações típicas de regiões D (nas áreas hachuradas) com distribuição de deformações não linear devido à a) descontinuidade geométrica; b) descontinuidade estática e c) descontinuidade geométrica e estática.

De acordo com Santos *et al.* (2019), embora o modelo clássico seja da década de 1980, e códigos normativos apresentem uma metodologia com a aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF), o STM continua a ser aplicado em inúmeros trabalhos científicos atuais. Segundo Herranz *et al.* (2012), o projeto do STM deve obedecer a três recomendações: (i) respeitar o equilíbrio estático, (ii) ter resistência suficiente em tirantes, bielas e nós, e (iii) ser um modelo isostático.

Figura 4 – Situações típicas de regiões "D".



Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

### 2.1.1 Verificação das bielas

A verificação das bielas depende da resistência do concreto e da largura atribuída a elas. A determinação da resistência do concreto é influenciada pelo estado de tensões na região avaliada, principalmente por causa da fissuração.

### 2.1.2 Dimensionamento dos tirantes

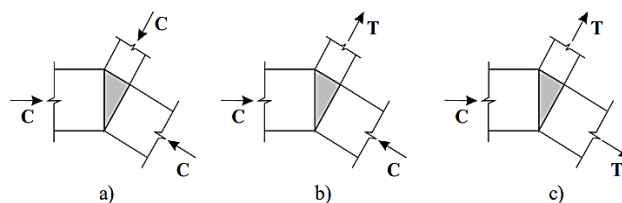
Conforme a ABNT NBR 6118:2014, a área da armadura de aço pode ser calculada através Equação (1), na qual  $F_{sd}$  é a força de tração atribuída ao tirante. A disposição das barras de ligação deve ser representativa no STM proposto e estar bem ancorados nas regiões nodais.

$$A_s = \frac{F_{sd}}{f_{yd}} \quad (1)$$

### 2.1.3 Verificação das regiões nodais

A norma brasileira avalia o estado de tensão presente na região nodal para a definição da resistência à compressão do concreto. Seguindo a proposta de Schlaich, Schafer e Jennewein (1987), são utilizados os conceitos de nós CCC, CCT e CTT os quais são ilustrados na Figura 5.

Figura 5 – Zonas nodais: (a) nó CCC; (b) nó CCT; (c) nó CTT.

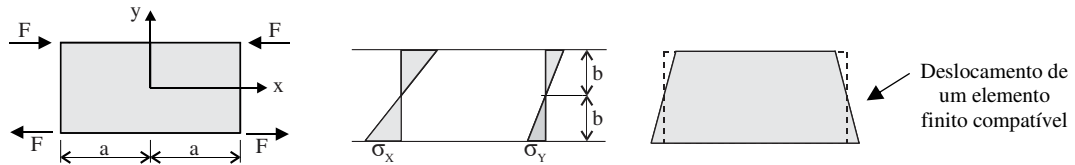


Fonte: Santos *et al.* (2019).

## 2.2 Elemento finito quadrilátero bilinear incompatível

O método dos modos incompatíveis foi introduzido por Wilson *et al.* (1973) para melhorar o desempenho elementos de baixa ordem. O elemento isoparamétrico simples de quatro nós não produz resultados precisos para muitas aplicações. Para ilustrar essa deficiência, considere o elemento retangular submetido a um estado de flexão pura mostrado na Figura 6. Verifica-se uma rigidez na resposta quando comparado com o comportamento esperado analiticamente. Essa deficiência pode ser compensada com a adição dos deslocamentos do tipo quadrático.

Figura 6 – Erros básicos de equilíbrio em um elemento quadrilátero de quatro nós.



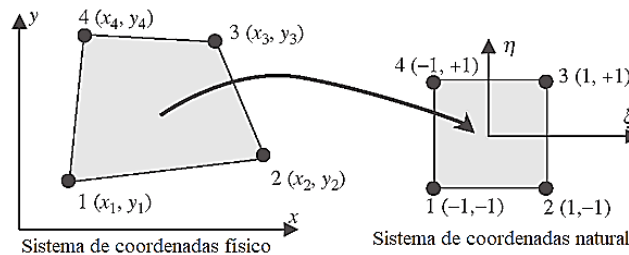
### 2.2.1 Campo de deslocamentos

Seja o elemento finito quadrilátero de quatro nós mostrado na Figura 7. Os deslocamentos em qualquer ponto no interior do elemento podem ser interpolados fazendo o emprego da Equação 2.

$$\mathbf{u}_u = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (2)$$

em que  $\mathbf{N}$  é a matriz das funções de forma;  $\mathbf{u}_u$  são os deslocamentos compatíveis em qualquer ponto do elemento; e  $\mathbf{d}$  são os deslocamentos nodais.

Figura 7 – Elemento isoparamétrico quadrilátero bilinear de 4 nós.



As funções de interpolação do elemento quadrilátero são dadas por meio da Equação 3.

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi\xi_i)(1 - \eta\eta_i) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3)$$

Na formulação do elemento incompatível, acrescenta-se aos deslocamentos no interior do elemento uma parcela de deslocamentos não conforme  $\mathbf{u}_\alpha$  resultando assim na Equação 4.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_u + \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{N}\mathbf{d} + \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \quad (4)$$

em que  $\mathbf{M}$  é a matriz que contém as funções de interpolação para os modos incompatíveis, sendo expressa pela Equação 5.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & M_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

em que as funções de interpolação  $M_i$  são dadas por meio da Equação 6,

$$M_1 = 1 - \xi^2 ; \quad M_2 = 1 - \eta^2 \quad (6)$$



O vetor  $\alpha$  contém os deslocamentos generalizados da formulação incompatível sendo dado por:

$$\alpha^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4] \quad (7)$$

Uma vez que se está trabalhando com coordenadas naturais, é necessário realizar um mapeamento entre estas coordenadas e o sistema cartesiano. Isto é feito por meio da Equação 8.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8)$$

em que  $J$  é a matriz Jacobiana, a qual é dada pela Equação 9.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 2.2.2 – Relação deformação-deslocamento

As relações entre as deformações e os deslocamentos são expressas pela Equação 10.

$$\varepsilon = \varepsilon_u + \hat{\varepsilon} = B d + G \alpha \quad (10)$$

em que  $\varepsilon$  é o vetor de deformação;  $\varepsilon_u$  é a parcela compatível do vetor de deformação;  $\hat{\varepsilon}$  é a parcela incompatível;  $B$  é a matriz deformação-deslocamento convencional que contém as derivadas cartesianas das funções de forma; e  $G$  é a matriz que contém as derivadas cartesianas das funções de interpolação dos modos incompatíveis. Como as coordenadas naturais também são utilizadas na definição das funções de forma para os modos incompatíveis, é necessário fazer o mapeamento deste sistema para o cartesiano. Para tanto, a inversa da matriz Jacobiana avaliada no centroide do elemento será utilizada:

$$J_0^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{J}_0^{-1}{}_{11} & \bar{J}_0^{-1}{}_{12} \\ \bar{J}_0^{-1}{}_{21} & \bar{J}_0^{-1}{}_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Pode-se facilmente deduzir a matriz deformação-deslocamento para os modos incompatíveis  $G$ . Esta é apresentada na Equação 12.

$$G = \begin{bmatrix} -2\xi\bar{J}_0{}_{11} & -2\eta\bar{J}_0{}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\xi\bar{J}_0{}_{21} & -2\eta\bar{J}_0{}_{22} \\ -2\xi\bar{J}_0{}_{11} & -2\eta\bar{J}_0{}_{12} & -2\xi\bar{J}_0{}_{21} & -2\eta\bar{J}_0{}_{22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

### 2.2.3 – Matrizes de rigidez

A energia de deformação de um corpo elástico é dada pela Equação 13.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T C \varepsilon dV \quad (13)$$

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais na Equação 13 obtém-se o sistema matricial expresso pela Equação 14.

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\alpha} \\ K_{\alpha u} & K_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

em que  $\mathbf{q}$  é o vetor das forças nodais equivalentes. As submatrizes de rigidez do sistema são dadas pela Equação 15.

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV; \quad \mathbf{K}_{u\alpha} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{G} dV; \quad \mathbf{K}_{\alpha u} = \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV; \quad \mathbf{K}_{\alpha\alpha} = \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{C} \mathbf{G} dV \quad (15)$$

Aplicando a condensação estática na Equação 14, obtém-se os modos incompatíveis e a matriz de rigidez equivalente do elemento os quais são expressos na Equação 16.

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u} \mathbf{d} \quad (16a)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\alpha\alpha} - \mathbf{K}_{\alpha u} \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u} \quad (16b)$$

### 2.2.4 – Tensões e forças internas

As tensões avaliadas em cada ponto de Gauss são determinadas por meio da Equação 17.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (17)$$

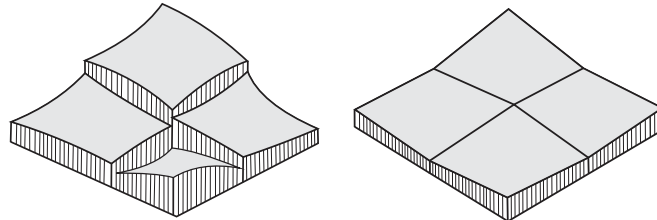
Por sua vez, as forças internas são dadas pela Equação 18.

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (18)$$

A matriz de rigidez e o vetor de forças internas do elemento são calculados por meio de integração numérica usando quadratura de gaussiana.

Numa análise com elementos finitos formulados em deslocamento, as tensões são descontínuas entre os elementos – Figura 8a. Assim, um processo de suavização de tensão foi implementado neste trabalho tal como apresentado em Durand (2014) e ilustrado na Figura 8b.

Figura 8 – Suavização local das tensões: (a) distribuição não suavizada; (b) distribuição após suavização.



## 3 MÉTODO DA PESQUISA

Neste artigo as formulações clássicas do método dos elementos finitos para o estado plano de tensão foram implementadas utilizando a linguagem de programação Julia. Esse código contempla uma rotina capaz de gerar os dados necessários para a visualização das trajetórias de tensões principais nas estruturas sob análise por meio do software Paraview. Dois modelos de vigas 2D (um de viga esbelta e outro de viga parede) com aberturas foram discretizados fazendo uso de elementos quadriláteros de baixa ordem (Q4 padrão e Q4-INC incompatível) e elementos triangulares (CST).

A partir das trajetórias de tensões principais elásticas obtidas para as vigas, foram estabelecidos os respectivos modelos de bielas e tirantes e, por conseguinte, realizado o dimensionamento dos elementos estruturais modelados. Posteriormente, os detalhamentos das armaduras das estruturas são realizados e apresentados.

Compara-se os resultados obtidos nessa pesquisa com aqueles encontrados na literatura e calculados por meio de softwares comerciais, a fim de validar a formulação implementada. Finalmente, avaliações são realizadas acerca da utilização do código desenvolvido para análise de vigas com aberturas e sobre a performance dos elementos enriquecidos implementados.

## 4 RESULTADOS DA PESQUISA

### 4.1 Viga simplesmente apoiada com abertura

Com o objetivo de validar o potencial de utilização dos elementos implementados na avaliação do comportamento de vigas de concreto armado com abertura, inicialmente utilizou-se um modelo proposto por Silva e Giongo (1991). Trata-se de uma viga simplesmente apoiada contendo uma abertura na alma. As características de geometria e das condições de contorno é apresentada na Figura 9. Uma carga uniformemente distribuída de 14,00 kN/m é aplicada. O valor de projeto da resistência à compressão do concreto é  $f_{cd} = 15 \text{ MPa}$  e o limite de escoamento da armadura é  $f_{yd} = 434 \text{ MPa}$ . Os modelos numéricos foram analisados utilizando o algoritmo implementado. A viga foi discretizada com 237, 948 e 3792 elementos quadriláteros bilineares de quatro nós (Q4 e Q4-INC), com dimensões de  $10 \times 10 \text{ cm}$ ,  $5 \times 5 \text{ cm}$  e  $2,5 \times 2,5 \text{ cm}$ , respectivamente. A Figura 10 mostra a distribuição de tensões  $\sigma_{xx}$  em duas seções do vão da viga.

Figura 9 – Viga simplesmente apoiada com abertura submetida a uma carga uniformemente distribuída.

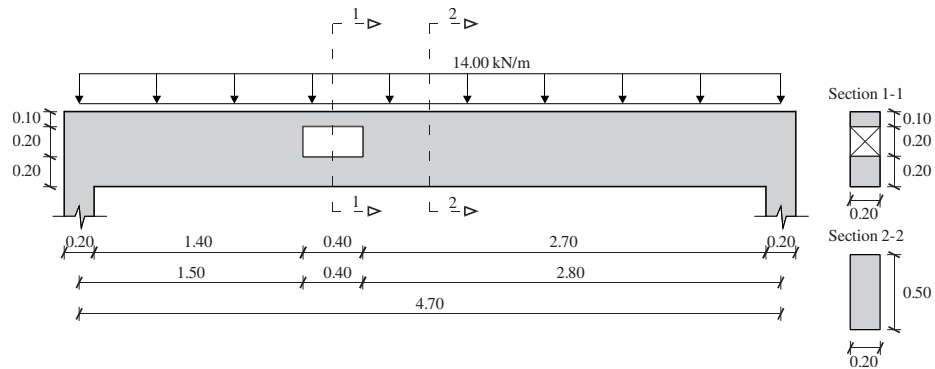
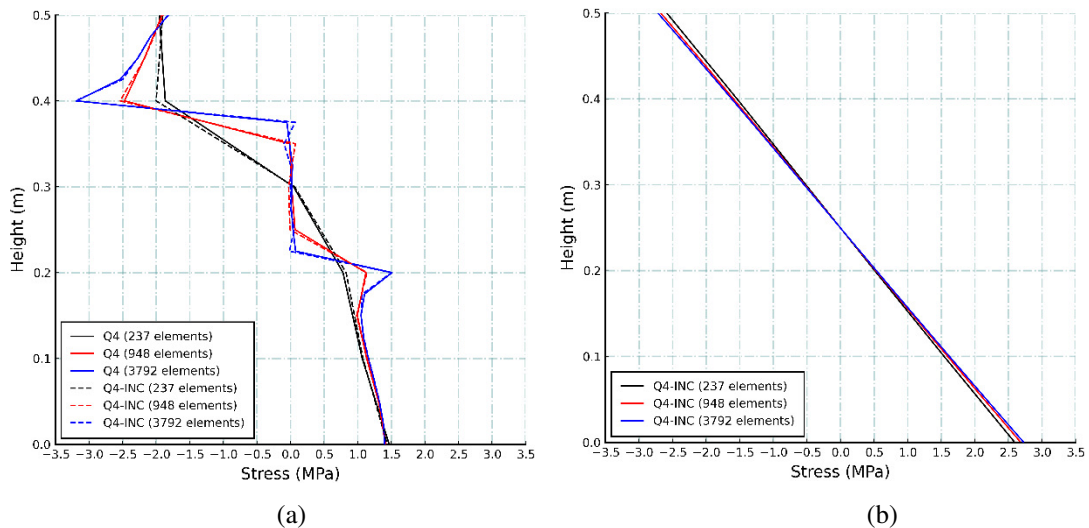


Figura 10 – Distribuição de tensões em seções localizadas à (a) 1,50 m e (b) 2,40 m do centro do apoio esquerdo.



As tensões situadas a 1,50 m do centro do apoio esquerdo têm distribuição não linear enquanto as tensões situadas a 2,40 m têm distribuição linear. Isso acontece porque na primeira seção o campo de tensões é perturbado pela presença da abertura (região D). Por outro lado, na seção após a abertura está localizada numa região B. Ambos os elementos têm a capacidade de representar o comportamento das tensões ao longo da altura da viga. A Figura 11a mostra linhas de contorno para distribuição de tensão  $\sigma_{xx}$  perto da abertura. Observa-se a existência de concentração de tensões nos cantos. A Figura 11b mostra o modelo de bielas e tirantes. Finalmente, a Figura 12 apresenta o detalhamento da armadura resultante do modelo STM. A geometria do modelo é de fato orientada para os campos de tensões elásticas. Os resultados do projeto estão de acordo com aqueles apresentados por Silva e Giongo (1991).

Figura 11 – (a) Linhas de contorno para a distribuição de tensões  $\sigma_{xx}$ . (b) Modelo de escoras e tirantes.

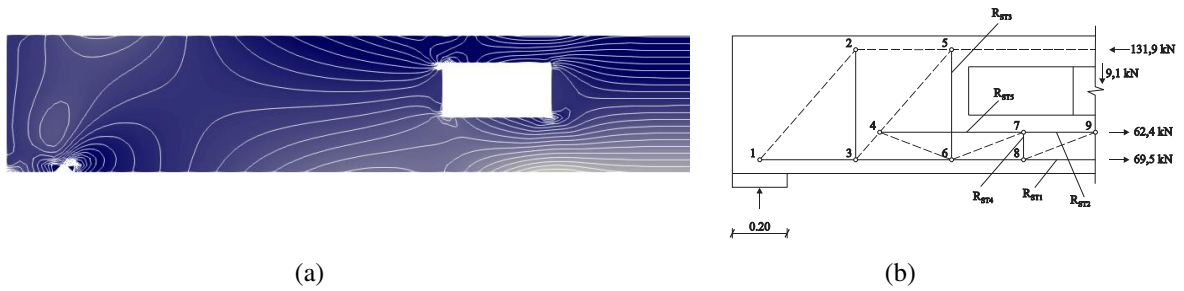
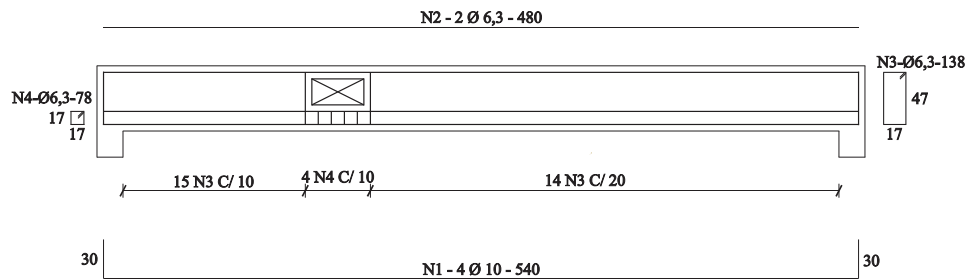


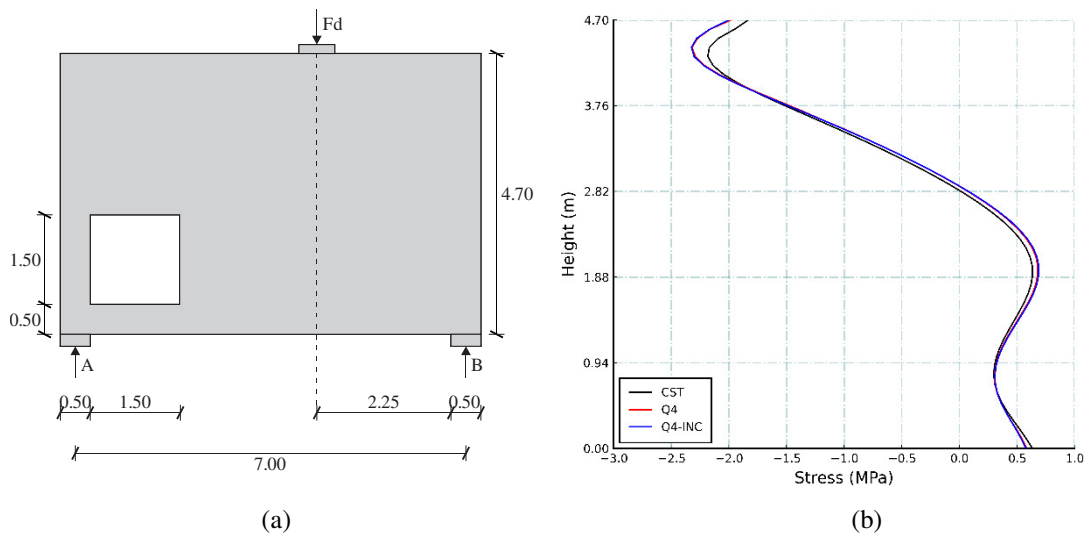
Figura 12 – Layout das armaduras.



#### 4.2 Viga parede com uma grande abertura

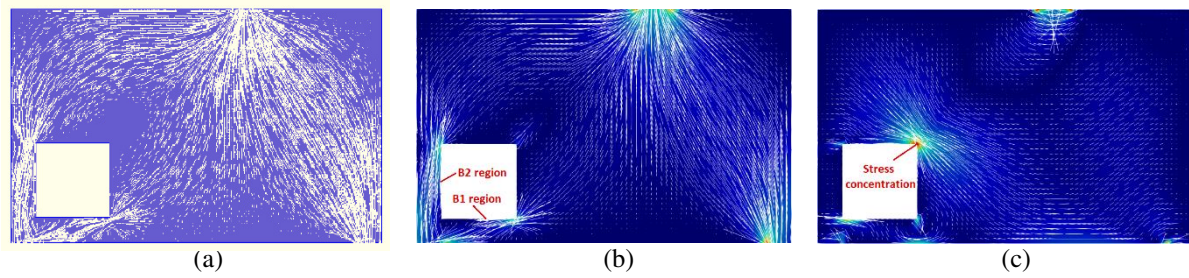
Esta aplicação foi estudada por Schlaich, Schafer e Jennewein (1987). Trata-se de uma viga parede simplesmente apoiada submetida a uma carga concentrada  $F_d$  de 3,0 MN. A geometria e as condições de contorno são mostradas na Figura 13a. A resistência de projeto do concreto é  $f_{cd} = 17 \text{ MPa}$  e a resistência de projeto da armadura  $f_{yd} = 434 \text{ MPa}$ . Como apontado na Figura 4, praticamente toda a estrutura é uma região D devido à descontinuidade geométrica. A Figura 13b mostra a distribuição de tensões  $\sigma_{xx}$  no meio do vão. Os modelos numéricos foram discretizados utilizando 3307 (tamanho  $10 \times 10 \text{ cm}$ ) elementos quadrilaterais bilineares de quatro nós (Q4 e Q4-INC) e 6614 (tamanho  $10 \times 10 \text{ cm}$  – base e altura, respectivamente) elementos triangulares CST de três nós.

Figura 13 – (a) Dimensões (m) e carregamento. (b) Distribuição das tensões  $\sigma_{xx}$  no meio do vão.



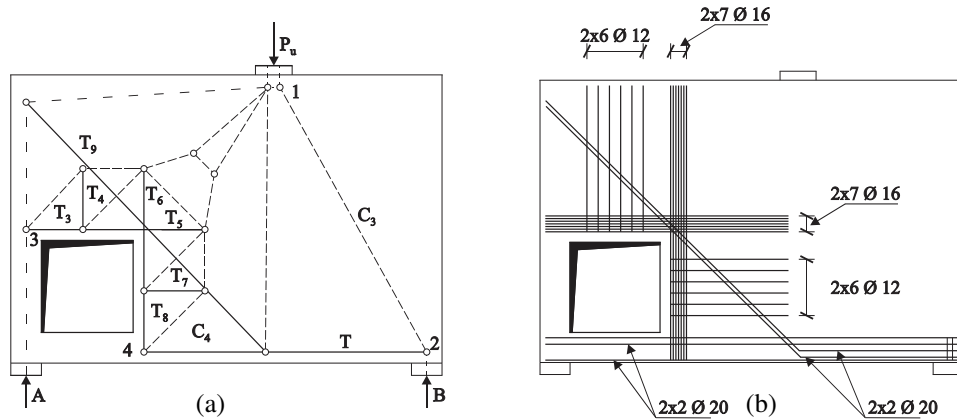
A viga parede mostrada na Figura 13a foi analisada por meio do programa de elementos finitos implementado neste trabalho. A partir das trajetórias de tensões principais elásticas avaliadas e mostradas nas Figuras 14b e 14c, o modelo de bielas e tirantes é desenvolvido e apresentado na Figura 15a.

Figura 14 – Trajetórias de tensões principais: (a)  $\sigma_2$  Abaqus. (b)  $\sigma_2$  presente trabalho. (c)  $\sigma_1$  presente trabalho.



A partir das trajetórias das tensões principais elásticas mostradas nas Figuras 14b e 14c, pode-se notar que a abertura afeta drasticamente as trajetórias das tensões da viga, onde zonas de tensão de tração são formadas em torno do canto superior direito da abertura (lado da carga) e no outro canto na mesma diagonal. Por sua vez, zonas de compressão são formadas em torno dos outros dois cantos. A reação A entra verticalmente na estrutura e permanece nesse sentido até passar pelo furo. A região B2 é, portanto, uma coluna axialmente carregada. De fato, parte da reação A também pode ser transferida através da região B1 por momentos fletores e forças de cisalhamento. Porém, comparando a rigidez axial de B1, com a rigidez de flexão de B2, esta parte é desprezível. Finalmente, as trajetórias de tensões de tração e compressão na Figura 14b e Figura 14c foram seguidas para desenvolver o modelo STM mostrado na Figura 15a. As trajetórias de tensão de compressão são substituídas por elementos de compressão (bielas/*struts*) e as trajetórias de tensão de tração são substituídas por elementos de tração (tirantes/*ties*). A Figura 15b mostra as armaduras principais do projeto por meio do modelo STM. Estes resultados estão coerentes com aqueles apresentados por Schlaich, Schafer e Jennewein (1987). Salienta-se que é clara a necessidade de se fornecer barras adicionais como uma malha em toda a superfície da parede, armaduras na coluna à esquerda do furo e estribos abaixo do furo.

Figura 15 – (a) Modelo de bielas e tirantes. (b) Disposição das armaduras.



## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudou-se a influência da presença de abertura em vigas esbeltas e vigas paredes de concreto armado. As formulações clássicas do método dos elementos finitos para análise linear-elástica do estado plano de tensão foram implementadas utilizando a linguagem Julia. Dois modelos numéricos clássicos foram construídos usando o algoritmo implementado. As vigas foram discretizadas com elementos quadriláteros bilineares de quatro nós (Q4 e Q4-INC) e elemento triangular CST. As vigas foram analisadas por meio do programa de elementos finitos implementado. A abertura afeta drasticamente as trajetórias de tensão da viga. O campo de tensão é perturbado pela presença da abertura (região D). A partir das trajetórias de tensões principais elásticas obtidas a partir do código numérico implementado neste trabalho é possível projetar com segurança elementos estruturais com descontinuidades por meio do modelo de bielas e tirantes. Os resultados obtidos atestam a qualidade da formulação implementada.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS-ABNT. NBR 6118: **Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

DURAND, R.M.M. Farias. A local extrapolation method for finite elements. **Advances in Engineering Software**. v. 67, p. 1–9, 2014.

HERRANZ, U. P.; MARÍA, H. S.; GUTIÉRREZ, S.; RIDDELL, R. Optimal Strut-and-Tie Models Using Full Homogenization Optimization Method. **ACI Structural Journal**, 2012.

MÖRSCH, E. **Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung**, 2nd ed. concrete-steel construction. New York: Good rich, McGraw Hill; 1909.

PINTOS, F. M. Prescrições de cálculo e detalhamento de vigas segundo a NBR 6118 (2014). **Altoqi**, 2022. Disponível em: <https://suporte.altoqi.com.br/hc/pt-br/articles/115004377114-Prescri%C3%A7%C3%B5es-de-c%C3%A1lculo-e-detalhamento-de-vigas-segundo-a-NBR-6118-2014->. Acesso em: 26 jun. 2023.

RITTER, W. Die Bauweise Hennbique, **Schweizerische Bauzeitung**. 1899.

SANTOS, D. P; FERNANDES NETO, J. A. D; REGINATO, L; CARRAZEDO, R. Optimized design of RC deep beams based on performance metrics applied to strut and tie model and in-plane stress conditions. **Latin American Journal of Solids and Structures**. 2019; 16(7):e212. Available from: <https://doi.org/10.1590/1679-78255633>

SCHLAICH, J; SCHAFER, K; JENNEWEIN, M. Toward a consistent design of structural concrete. **PCI-Journal**, vol. 32, nr.3, p. 74 – 150, May/June, 1987.

SILVA, R. C.; Giongo, J. S. **Concreto armado: aplicações de modelos de bielas e tirantes**. Dissertação de Mestrado – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

VERÍSSIMO, G. S. **Análise e comportamento de vigas de aço e vigas mistas com aberturas na alma**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 1996.

WILSON, E.L., TAYLOR, R.L., DOHERTY, W.P., Ghaboussi, J.: Incompatible displacement models, In Fenves, S.J., Perrone, N., Robinson, A.R., Schnobrich, C. (editors), **Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics**, Academic Press, pp. 43-57, 1973, <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-253250-4.50008-7>

YI, X.; LANGELAAR, M. ; HENDRIKS, M. A. N. Automated optimization-based generation and quantitative evaluation of Strut-and-Tie models, **Computers & Structures**, Volume 238, 2020, 106297, ISSN 0045-7949, <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2020.106297>.




ADENILDA TIMÓTEO SALVIANO

**PROJETOS DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM ABERTURAS NA ALMA UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS ENRIQUECIDOS E O MÉTODO DE BIELAS E TIRANTES**

Trabalho de Conclusão de Curso, sob forma de artigo, submetido à Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, *Campus* Cajazeiras, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.


Aprovado em 06 de julho de 2023.

**BANCA EXAMINADORA**

Documento assinado digitalmente  
 SEBASTIAO SIMAO DA SILVA  
Data: 24/07/2023 23:43:17-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Sebastião Simão da Silva – IFPB-*Campus* Cajazeiras  
Orientador

Documento assinado digitalmente  
 CARLA CAVALCANTE ARAUJO  
Data: 03/08/2023 14:56:21-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

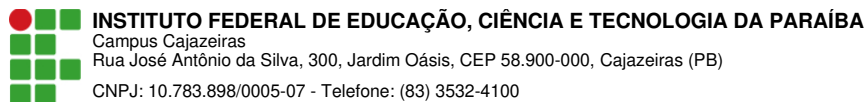
---

Carla Cavalcante Araújo – IFPB-*Campus* Cajazeiras  
Examinador 1

Documento assinado digitalmente  
 RAMON SALENO YURE RUBIM COSTA SILV.  
Data: 25/07/2023 18:47:46-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Ramon Saleno Yure Rubim Costa Silva – UnB-*Campus* Darcy Ribeiro  
Examinador 2



## Documento Digitalizado Restrito

### TCC com Ficha Catalográfica

**Assunto:** TCC com Ficha Catalográfica  
**Assinado por:** Sebastiao Simao  
**Tipo do Documento:** Anexo  
**Situação:** Finalizado  
**Nível de Acesso:** Restrito  
**Hipótese Legal:** Informação Pessoal (Art. 31 da Lei no 12.527/2011)  
**Tipo do Conferência:** Documento Original

Documento assinado eletronicamente por:

- Sebastiao Simao da Silva, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 20/10/2023 12:35:54.

Este documento foi armazenado no SUAP em 20/10/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 975871

Código de Autenticação: 25516bcb11

