



**INSTITUTO
FEDERAL**
Paraíba

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

LILIANE MARQUES PAULO

ENSINO DE PROBABILIDADE: O MISTÉRIO DO CHOCALHO

**CAMPINA GRANDE - PB
DEZEMBRO DE 2023**

LILIANE MARQUES PAULO

ENSINO DE PROBABILIDADE: O MISTÉRIO DO CHOCALHO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Balduino Sonildo da Nóbrega



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

LILIANE MARQUES PAULO

ENSINO DE PROBABILIDADE: O MISTÉRIO DO CHOCALHO

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

07 / 12 / 2023.

BANCA EXAMINADORA:

Baldoino Sonido da Nóbrega

ORIENTADOR: Prof. Me. Baldoino Sonido da Nóbrega – IFPB

Cicero da Silva Pereira

AVALIADOR: Prof. Me. Cicero da Silva Pereira – IFPB

Jonathas Jeronimo Barbosa

AVALIADOR: Prof. Dr. Jonathas Jeronimo Barbosa – IFPB

P331e Paulo, Liliane Marques.
Ensino de probabilidade: o mistério do chocalho / Liliane
Marques Paulo. Campina Grande, 2023.
66 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior em
Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da
Paraíba, 2023.

Orientador: Prof. Me. Baldoino Sonildo da Nóbrega.

1. Probabilidade 2. Material didático manipulável 3.
Chocalho I. Nóbrega, Baldoino Sonildo da. II. Título.

CDU 519.2

Dedico este trabalho de conclusão de curso a Deus, primeiramente, pois, sem Ele nada seria possível. Aos meus pais, Dona Ivone e Seu Zezinho, à minha irmã Renata, e à minha companheira de vida, Francielly Arruda, pois, eles são sinônimo de amor em minha vida.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo sopro da vida e por Sua eterna bondade sobre mim. Aos meus pais, por toda a educação, apoio, incentivo e compreensão. Sua ajuda foi fundamental para que eu alcançasse meus objetivos, sempre respeitando e apoiando minhas decisões. Esta conquista só foi possível graças a todos os seus ensinamentos.

À minha irmã e amiga, agradeço pelo apoio, preocupação e incentivo sempre.

À minha namorada, por estar ao meu lado nos momentos mais difíceis durante esse processo e nunca permitir que eu desistisse.

Aos meus queridos professores do Instituto Federal da Paraíba, com quem aprendi muito, em especial ao meu orientador Prof. Balduino Sonildo da Nóbrega, pelas contribuições, paciência e disposição no desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus melhores amigos, Igor e Suelen, por sempre acreditarem em mim.

Por fim, aos amigos que a Instituição me proporcionou: Junior, Thais, Heloisa, João, Carlos Daniel, Iara, Janassiel, Allisson, Lucas, Isaac, Gleysom, Luciano, Fernanda, Adenilton e tantos outros.

“Educar é impregnar de sentido o que fazemos a cada momento.”
(Paulo Freire)

Resumo

O ensino de Probabilidade tem enfrentado desafios e obstáculos que impactam os estudantes em diferentes níveis. Um dos principais desafios é a natureza abstrata e teórica dos conceitos probabilísticos, que podem parecer distantes da experiência cotidiana dos alunos. A elaboração e utilização de materiais didáticos manipuláveis, como ferramenta complementar ao ensino, podem resultar em melhorias substanciais na aprendizagem. A interação ativa dos alunos com esses materiais não apenas fomenta o envolvimento, mas também se revela um recurso eficaz para superar desafios e dificuldades no contexto do ensino de matemática, inclusive para Probabilidade. Dessa forma, esta pesquisa teve como objetivo desenvolver um material didático manipulável de baixo custo para auxiliar o ensino de probabilidade. A metodologia envolveu a construção do material, seguida por testes para validar sua eficácia, explorando padrões relacionados à quantidade de bolas, a forma ideal de manipulação e o número mínimo de repetições para análise consistente. A aplicação prática ocorreu em uma oficina para estudantes do segundo ano do ensino médio. Os resultados, analisados por meio de questionários diagnósticos e de verificação, revelaram que, ao final da atividade, muitos alunos conseguiram expressar o conceito de probabilidade frequentista. Ao explorar o “mistério do chocalho” como um problema central, a oficina estimulou o pensamento crítico dos alunos e proporcionou uma aplicação prática dos conceitos teóricos, conectando a teoria à realidade. A análise dos dados sugeriu que a abordagem prática, contextualizada e interativa adotada na oficina pode ser uma estratégia eficaz para o ensino de probabilidade. As contribuições incluem melhorias na interação aluno-professor, o reconhecimento da relevância da probabilidade no cotidiano e a criação de um recurso pedagógico inovador e acessível.

Palavras-chave: Probabilidade; Material didático manipulável; Chocalho.

Abstract

The teaching of Probability has encountered challenges and obstacles that impact students at different levels. One of the primary challenges is the abstract and theoretical nature of probabilistic concepts, which may seem distant from students' everyday experiences. The development of manipulative teaching materials can be a promising solution to overcome these difficulties, enabling more effective and engaging learning in the context of Probability. Thus, this study aimed to develop a low-cost manipulative teaching material to assist in the teaching of probability. The methodology involved the construction of the material, followed by tests to validate its effectiveness, exploring patterns related to the quantity of balls, the ideal form of manipulation, and the minimum number of repetitions for consistent analysis. Practical application took place in a workshop for second-year high school students. The results, analyzed through diagnostic questionnaires and verification, revealed that, by the end of the activity, many students were able to articulate the concept of frequentist probability. By exploring the "rattle mystery" as a central problem, the workshop stimulated students' critical thinking and provided a practical application of theoretical concepts, connecting theory to reality. Data analysis suggested that the practical, contextualized, and interactive approach adopted in the workshop could be an effective strategy for teaching probability. Contributions include improvements in student-teacher interaction, the recognition of the relevance of probability in everyday life, and the creation of an innovative and accessible pedagogical resource.

Keywords: Probability; Manipulative teaching material; Rattle.

Lista de ilustrações

Figura 1 – União, interseção e complementar de eventos	24
Figura 2 – Materiais necessários.	35
Figura 3 – Passo 1 da construção.	36
Figura 4 – Passo 2 da construção.	36
Figura 5 – Passo 3 da construção.	37
Figura 6 – Passo 4 da construção.	37
Figura 7 – Passo 5 da construção.	38
Figura 8 – Passo 6 da construção.	38
Figura 9 – Passo 7 da construção.	39
Figura 10 – Passo 8 da construção.	39
Figura 11 – Passo 9 da construção.	40
Figura 12 – Passo 10 da construção.	40
Figura 13 – Passo 11 da construção.	41
Figura 14 – Passo 12 da construção.	41
Figura 15 – Passo 13 da construção.	42
Figura 16 – Passo 14 da construção.	42
Figura 17 – Movimento adequado para jogar o chocalho.	44
Figura 18 – Primeiro momento da oficina.	46
Figura 19 – Discussão sobre o contexto histórico da Probabilidade.	47
Figura 20 – Sequência dos conteúdos de probabilidade.	48
Figura 21 – Explorações de experimentos.	48
Figura 22 – Explorações do chocalho.	50
Figura 23 – Validação do experimento.	51
Figura 24 – Nuvem de palavras dos comentários dos alunos	51
Figura 25 – O que você entende por probabilidade frequentista?	52
Figura 26 – Você já teve alguma experiência anterior com conceitos de probabilidade?	53
Figura 27 – Qual é a sua percepção sobre a importância da probabilidade em situações do dia a dia?	54
Figura 28 – Qual é a probabilidade de jogar um dado justo e obter um número ímpar?	54
Figura 29 – O que é um experimento aleatório?	55
Figura 30 – Você acredita que o uso de material manipulável, como o chocalho, pode facilitar o aprendizado de probabilidade?	55
Figura 31 – Como a oficina afetou sua compreensão de probabilidade frequentista?	58
Figura 32 – Comentário 01.	63
Figura 33 – Comentário 02.	63
Figura 34 – Comentário 03.	63

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
IFPB	Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba
MD	Material Didático
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Objetivos	13
2	Os “Mistérios” Históricos e Epistemológicos do Conceito de Probabilidade	14
3	Material Didático Manipulável Representações e Analogias para o Ensino	17
4	Probabilidade: Definições e propriedades	21
4.1	Experimentos aleatórios	21
4.2	Espaço amostral e eventos	22
4.3	Operações entre eventos	23
4.4	Definições: clássica, frequentista, subjetiva e axiomática de probabilidade	25
4.4.1	Definição frequentista de probabilidade	26
4.4.2	Definição subjetiva de probabilidade	27
4.4.3	Definição axiomática de probabilidade	28
4.5	Outros significados de probabilidade	29
4.5.1	Noção intuitiva da probabilidade	30
4.5.2	Significado de propensão	30
4.5.3	Significado lógico	31
5	Materiais e Métodos	33
5.1	Locus da pesquisa	33
5.2	Participantes da pesquisa	33
5.3	Instrumentos de coletas de dados	34
5.4	Métodos da análise dos dados	34
5.5	Construção do material manipulável - O Chocalho	35
5.6	Descrição das etapas da oficina: “O Mistério do Chocalho”	44
6	Análise dos Resultados	46
6.1	Oficina: O Mistério do Chocalho	46
6.2	Análise e discussão dos dados da oficina	52
7	Considerações Finais	59
	Referências	61
	APÊNDICE A Comentários dos alunos	63
	APÊNDICE B Questionário diagnóstico	64
	APÊNDICE C Questionário de verificação	66

1 Introdução

Desde a Idade Média, os conceitos de probabilidade eram aplicados através de jogos de azar, mas não eram estudados matematicamente, sendo o resultado vinculado à divindade. De acordo com Viali (2008), as primeiras aparições probabilísticas ocorreram nos jogos de Tali (jogo do osso), onde os ossos, semelhantes aos de carneiro, eram utilizados. O Tali era praticado com o astrágalo, com semelhanças a um tetraedro irregular, ou seja, com às quatro faces distintas e diferentes possibilidades de ganho. Além da utilização para os jogos de azar, o Tali era utilizado para determinar a probabilidade nas previsões do futuro.

O enfoque matemático da probabilidade teve início com os italianos Gerolamo Cardano (1501 – 1576), Galileu Galilei (1564 – 1642) e Nicollo Tartaglia (1499 – 1557). Segundo Viali (2008), outro colaborador significativo, Luca Pacioli (1445-1517), apesar de não ter publicado oficialmente, ficou conhecido por sua obra “Suma”, que apresenta em grande parte o trabalho de Fibonacci. Ele foi pioneiro nos estudos sobre jogos de azar, tentando resolver o problema dos pontos, precursor do que Pascal e Fermat resolveriam, inaugurando a Teoria da Probabilidade.

Ao longo do tempo, a evolução da probabilidade foi impulsionada por contribuições significativas de diversos estudiosos, desempenhando papéis cruciais em nossa vida cotidiana. Atualmente pode-se destacar o papel essencial da probabilidade na recomendação de conteúdo no *Google*, notadamente em serviços como a pesquisa *Google*, *YouTube*, redes sociais e plataformas de “*streaming*”. Os sites e redes sociais geralmente realizam uma coleta extensiva de dados dos usuários, abrangendo informações sobre pesquisas anteriores, histórico de visualizações, interações em aplicativos, preferências demográficas e dados de localização (quando autorizado pelo usuário). Esses dados são de importância fundamental para compreender o comportamento e as preferências do usuário. Sob essa perspectiva, a probabilidade assume um papel relevante na análise de dados, auxiliando na determinação do quão provável um usuário tem interesse em determinados tipos de conteúdos com base em seu histórico e comportamento.

Dessa forma observa-se que o ensino da Probabilidade exerce influência nas práticas sociais dos estudantes. Contudo, mesmo com essa relevância, muitas vezes é abordado de maneira mecânica e estática, com fórmulas e resoluções de questões, ao invés de contextualizar situações cotidianas. Como afirma Santos (2019):

Trabalhar com situações que estejam presentes no dia a dia do aluno ou que sejam de fácil acesso para que o aluno a análise e a entenda pode gerar um grande enriquecimento ao ensino de probabilidade melhorando sua qualidade e, conseqüentemente, desenvolvendo no aluno o pensamento probabilístico e crítico sobre fatos ocorridos a sua volta. (Santos, 2019, p. 38).

Assim, faz-se necessário desenvolver novas estratégias para uma aprendizagem mais significativa, demonstrando que a matemática da escola está próxima da matemática do dia a dia. Uma forma de atingir essa ideia é utilizar material manipulável acessível e que desperta a curiosidade dos estudantes.

No contexto do ensino de probabilidade, os materiais manipuláveis possibilitam que os alunos experimentem eventos probabilísticos de forma prática, criando uma ponte entre o abstrato e o concreto. Segundo Batanero et al. (2016), o uso de materiais manipuláveis no ensino de probabilidade pode melhorar a capacidade de os alunos fazerem previsões e tomar decisões baseadas em dados probabilísticos. Isso é relevante em uma sociedade cada vez mais orientada por dados, em que a capacidade de avaliar riscos e incertezas é fundamental.

Além disso, a abordagem de ensino com material manipulável no contexto da probabilidade está alinhada com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esses documentos ressaltam a importância da contextualização e da prática no ensino de matemática, enfatizando a necessidade de tornar a aprendizagem matemática relevante para a vida cotidiana dos alunos.

A falta de material didático adequado e a carência de estratégias de ensino envolventes têm contribuído para a complexidade dos conceitos relacionados à probabilidade. Superar esses desafios demanda abordagens inovadoras e adaptáveis, com o objetivo de tornar a probabilidade mais tangível, conectada ao mundo real, e, dessa forma, facilitar a compreensão e o interesse dos estudantes. Diante dessa problemática o presente trabalho buscou desenvolver um material manipulável de baixo custo para auxiliar os estudantes no ensino de probabilidade.

A estrutura deste trabalho compreende sete capítulos. O primeiro capítulo serve como introdução ao tema abordado. O segundo capítulo explora os contextos históricos relacionados à probabilidade, enquanto o terceiro capítulo mostra a relevância do material manipulável na educação básica. O quarto capítulo apresenta definições e propriedades da Probabilidade. O quinto capítulo discute a metodologia empregada, seguido pela análise de dados no sexto capítulo. Por fim, no sétimo capítulo, são apresentadas as considerações finais.

1.1 Objetivos

Objetivo Geral

Desenvolver um material didático manipulável de baixo custo para auxiliar os estudantes no processo de ensino-aprendizagem.

Objetivos específicos

Compreender os contextos históricos e epistemológicos da probabilidade;

Construir o material didático manipulável, “chocalho”, utilizando materiais de baixo custo;

Compreender a definição de probabilidade frequentista através do experimento “O mistério do chocalho”;

Avaliar o desenvolvimento dos estudantes através de uma análise qualitativa e quantitativa;

Coletar “*feedbacks*” dos estudantes sobre sua experiência com o material didático manipulável.

2 Os “Mistérios” Históricos e Epistemológicos do Conceito de Probabilidade

A teoria da probabilidade possui uma rica história que remonta aos tempos antigos. Nas primeiras civilizações, a compreensão da probabilidade não era formalizada como é hoje, mas existia um entendimento rudimentar de conceitos relacionados ao acaso, chances e aleatoriedade. O “acaso” era interpretado como um conjunto de forças não controladas que desempenhavam um papel fundamental na ocorrência de diferentes resultados de experimentos ou fenômenos (Viali, 2008).

A presença do acaso pode ser observada em situações cotidianas, como no lançamento de uma moeda, onde os resultados possíveis, “cara” ou “coroa”, são conhecidos, mas o resultado específico antes do experimento é imprevisível. Esse fenômeno está presente em jogos de azar, fenômenos naturais e diversas situações do cotidiano (Viali, 2008).

A concepção de acaso remonta aos primórdios das civilizações humanas, inicialmente interpretada como resultado da vontade divina. A ideia de que o acaso é um fenômeno natural surgiu mais tarde na história, com registros em jogos como o Tali praticado pelos Babilônicos, Egípcios, Gregos e Romanos. Esse jogo, que envolvia o uso de um osso do calcanhar de um animal com formato de tetraedro irregular, era utilizado para apostas, previsões futuras e resolução de disputas (CALABRIA; CAVALLARI, 2013).

Além do Jogo de Tali, os conceitos probabilísticos podem ser encontrados nos cálculos de seguros marítimos, não há certeza sobre como os valores dos seguros eram calculados na época, mas é plausível que esses cálculos fossem influenciados pela probabilidade dos eventos, como acidentes. Se uma rota marítima tivesse um alto número de acidentes registrados, é provável que o preço do seguro cobrado fosse significativamente maior do que a média estabelecida. Sob essa ótica Viali (2008) sugere que as primeiras tentativas de quantificar os riscos ligados a eventos como naufrágios, acidentes e mortes provavelmente foram os precursores do surgimento da Teoria das Probabilidades. No entanto, uma análise matemática do acaso e do risco começou efetivamente há cerca de 500 anos.

Os primeiros cálculos probabilísticos foram realizados por acadêmicos italianos nos séculos XV e XVI, como Luca Pacioli, Niccolo Fontana (Tartaglia) e Girolamo Cardano. Embora esses estudiosos tenham ido além da simples comparação de frequências em jogos de azar, suas contribuições ainda eram limitadas a resolver problemas específicos. Frei Luca Pacioli concentrou seus estudos no problema conhecido como “o problema dos pontos” ou “divisão de apostas”, e publicou suas descobertas em 1494, na obra intitulada “Summa de arithmetica, geometria, proortinoni e proportionalità”. (VIALI, 2008; CALABRIA; CAVALLARI, 2013). Tartaglia publicou seu trabalho intitulado “*General Trattato*” (Tratado Geral) em 1556, no qual dedicou algumas páginas aos problemas de Paccioli, incluindo o problema dos pontos (VIALI, 2008).

Em 1663, Girolamo Cardano publicou a obra “*Liber de Ludo Alae*” (Livro de Jogos de Azar), um manual abordando jogos. Sendo um entusiasta de jogos, ele foi o primeiro a estudar o lançamento de dados. Viali (2008) reconhece Cardano como o pioneiro do cálculo de probabilidade, pois, ele foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória para calcular os casos possíveis de um evento, além de considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Cardano também tinha conhecimento da ideia de eventos independentes e da regra da multiplicação. No entanto, seus estudos estavam restritos a casos específicos de jogos de azar, especialmente o jogo de dados (SANTOS, 2019).

Galileu Galilei (1564 – 1642) também explorou o campo da aleatoriedade. Além de suas contribuições como físico, astrônomo, matemático e filósofo, ele escreveu um breve artigo sobre jogos de azar intitulado “Ideias sobre os jogos de dados”. Nele, Galileu pressupôs que um dado tem igual probabilidade de cair em qualquer um dos seis lados (FILHO, 2020; VIALI, 2008).

De acordo com uma perspectiva francesa, o desenvolvimento da teoria da probabilidade teve origem nas correspondências entre Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665). Pascal comunicou a Fermat uma solução para o problema proposto por Paccioli. De acordo com BOYER (2019, p.265) o problema consistia em:

Suponha que duas pessoas estão participando de um jogo, com lançamento de dados, em que ambos têm a mesma chance de vencer, e o vencedor é quem atingir primeiro uma determinada quantidade de pontos. O jogo, porém, é interrompido, por algum motivo externo, e um dos jogadores está na liderança. Qual é a maneira mais justa de dividir o dinheiro apostado? (BOYER, 2019. p. 265).

Pascal e Fermat foram os primeiros a investigar problemas de probabilidade que não eram estritamente numéricos. No entanto, para alguns estudiosos, Cardano é considerado o pai da probabilidade, pois, estudos subsequentes, embora mais detalhados e abrangentes, foram fundamentados em seu livro e em seus escritos (VIALI, 2008; FILHO, 2020)

De acordo com Viali (2008), outro matemático que se dedicou ao estudo das probabilidades foi Jacob Bernoulli (1654 – 1705). Apesar da oposição de seus pais, que desejavam que ele seguisse a filosofia e a teologia, Bernoulli optou por estudar matemática e astronomia, áreas que sempre o fascinaram. Ele acreditava que, para tomar decisões racionais, era essencial contar com um método matemático confiável para determinar probabilidades.

Em seu livro *Ars Conjectandi* (A arte da Conjectura) de 1713, publicado após sua morte, Bernoulli foi o primeiro a redigir um tratado científico dedicado à probabilidade, apresentando-a como um tema abordado matematicamente. No texto, ele também explorou conceitos como combinações, permutações e classificação binomial, enriquecendo assim o campo das probabilidades (FILHO, 2020).

No entanto, a obra fundamental desta fase, considerada clássica, foi publicada em 1812 pelo francês Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) e intitulada “*Théorie Analytique des*

Probabilités” (Teoria Analítica das Probabilidades). Neste trabalho, Laplace discutiu os princípios fundamentais da teoria de probabilidade, destacando suas aplicações em jogos de azar, filosofia natural, ciências morais, decisões judiciais e estudos sobre mortalidade.

Além de abordar a regra de Bayes e o conceito de esperança matemática, o livro também incluía métodos para calcular, probabilidades de eventos compostos quando as probabilidades dos eventos simples são conhecidas. Além disso, discutia o método dos mínimos quadrados, o problema da agulha de Buffon e tratava da probabilidade inversa (VIALI, 2008). Laplace marcou o início do período clássico da teoria probabilística, seguido por matemáticos como Poincaré, Poisson e Gauss. Este último, foi responsável por apresentar o método da distribuição das probabilidades.

3 Material Didático Manipulável Representações e Analogias para o Ensino

O uso de materiais didáticos manipuláveis é amplamente reconhecido como um elemento essencial na melhoria do processo de ensino-aprendizagem em diversas áreas de estudo. Os métodos que incorporam esse recurso aproxima a relação entre o estudante e o conhecimento, configurando um fator relevante no processo de aprendizagem. Esses materiais são recursos importantes para promover a compreensão dos alunos sobre o conhecimento matemático e melhorar sua motivação e engajamento em atividades de aprendizagem (AIRES, NETO, VISEU, 2023).

Todo material utilizado pelo docente durante a aula deve ter como objetivo primordial a contribuição para estabelecer uma conexão entre uma concretude imediata, frequentemente representada de maneira simplificada e limitada, e a construção de conceitos que, em grande parte, residem no campo da abstração. Esta consideração deveria ser refletida em todas as áreas do conhecimento, não se limitando apenas ao domínio matemático.

Embora o último propósito do processo educativo seja atingir o nível da abstração, sustentamos a ideia de que o ponto de partida deve ser, sempre que possível, a concretude imediata. Isso pode ser alcançado mediante o uso de objetos reais, analogias ou representações. De acordo com Fauzi et al. (2022), no contexto do ensino de matemática, os professores podem usar materiais manipuláveis para desenvolver a proficiência matemática dos alunos e facilitar a construção de modelos cognitivos para ideias matemáticas abstratas. Iniciar um conceito com experiências interessantes permite que os estudantes estabeleçam uma base sólida antes de se aventurarem em territórios mais abstratos do conhecimento.

Os materiais didáticos manipuláveis representam um valioso recurso para o professor em sala de aula, possibilitando uma significativa diversificação em suas práticas pedagógicas e, conseqüentemente, aproximando a teoria da prática por meio da manipulação ativa. Um material didático manipulável (MD) pode ser qualquer objeto destinado a facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Conforme destacado por Lorenzato (2019), o MD abrange qualquer instrumento útil ao processo educacional, como cadeiras, garrafas, lápis, vídeos, quadros, entre outros.

Apesar de oferecer diversas possibilidades para o ensino, o MD não deve ser considerado o principal instrumento de aprendizagem do aluno, tampouco deve ter a função de substituir o professor. Em vez disso, deve ser compreendido como um auxiliar para atingir os objetivos da aula, um facilitador no entendimento do conteúdo.

O professor deve se perguntar-se para que ele deseja utilizar o MD: para apresentar um assunto, para motivar os alunos, para auxiliar a memorização de resultados, para facilitar a redescoberta pelos alunos?

São as respostas a essas perguntas que facilitarão a escolha do MD mais conveniente à aula. (LORENZATO, 2019, p.18).

Portanto, o material didático deve ser escolhido com base no objetivo a ser alcançado, uma vez que a falta de clareza nessa definição durante a realização da aula pode resultar em perda de significado. De acordo com Santos e Sobrinho (2016), é essencial que os professores forneçam supervisão e orientação quando os alunos usam materiais manipuláveis para garantir uma aprendizagem eficaz. É importante considerar que o MD pode ser utilizado de maneira inadequada quando não alinhado com os objetivos pedagógicos. Dessa forma é importante ressaltar que ao usar esses materiais, os professores precisam atuar como mediadores na construção do conhecimento matemático, orientando os alunos a refletirem sobre suas ações e experiências.

Outros pesquisadores como D'Ambrosio (1998) ressaltam a importância de materiais manipuláveis no ensino de matemática. Eles ajudam a promover a construção do conhecimento matemático, permitindo que os alunos explorem e testem suas hipóteses, desenvolvendo assim um pensamento matemático mais sólido. Para Rodrigues e Garize (2012), o uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática pode levar a uma mudança dos métodos tradicionais de ensino e promover uma abordagem mais centrada no aluno.

No contexto do ensino de probabilidade, o material manipulável, pode ser utilizado para criar situações práticas em que os alunos possam fazer previsões, coletar dados e verificar suas suposições. Essa abordagem concreta ajuda os estudantes a entender a incerteza e a variabilidade inerente aos eventos probabilísticos. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugere que:

(...) todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos (BRASIL, p.274 2018).

De acordo com Batanero et al. (2016), a utilização de recursos manipuláveis no contexto do ensino de probabilidade tem o potencial de aprimorar as habilidades dos estudantes na formulação de previsões e na tomada de decisões fundamentadas em dados probabilísticos. Essa competência revela-se essencial em uma sociedade progressivamente direcionada por dados, na qual a avaliação de riscos e incertezas desempenha um papel fundamental.

Chapin et al. (2002) realizou um estudo comparando o uso de materiais manipuláveis, como blocos padrões, com o uso de tecnologia digital, como miniaplicativos, na resolução de tarefas matemáticas envolvendo padrões de repetição. Os resultados mostraram que não houve diferenças estatisticamente significativas entre os dois grupos em termos dos resultados alcançados.

Em outro estudo, Afonso, Santos e Gil (2017) se concentraram no impacto dos métodos baseados no sistema interativo de álgebra computacional (CAS), com materiais de educação complementar, nos resultados educacionais na teoria da probabilidade. O estudo descobriu que o grupo de estudantes que recebeu materiais interativos e novas variantes de tarefas demonstrou resultados significativamente maiores em comparação com o grupo que só teve palestras e seminários.

Roberto (2019) desenvolveu um jogo probabilístico de dominó para alunos do ensino fundamental, enfatizando o caminho metodológico no ensino educacional da probabilidade. O autor destacou a importância de os alunos participarem de atividades mentais e cultivarem o pensamento racional por meio da formulação adequada de problemas e da manipulação de informações.

Diniz (2022) desenvolveu propostas de ensino de probabilidade usando materiais manipuláveis e resolução de problemas, enfatizando a necessidade de uma abordagem mais didática e centrada no aluno da educação matemática. Os recursos manipuláveis utilizados nesta pesquisa referem-se aos materiais concretos, mais precisamente ao conjunto de Peças Retangulares (PR). Esse conjunto é constituído por 24 peças de formato retangular, as quais apresentam variações em três atributos distintos: cor, tamanho e largura.

Andrade (2021) desenvolveu uma proposta de sequência didática voltada para o ensino de probabilidade, empregando materiais manipuláveis para a resolução de problemas. O autor enfatiza a importância de os alunos desenvolverem a capacidade de interpretar e avaliar problemas. O material manipulável escolhido foi a roleta da probabilidade, com o propósito de explorar os conceitos relacionados ao Espaço Amostral e Evento, Eventos Certos, Impossíveis e Mutuamente Exclusivos, assim como o Cálculo de Probabilidades.

Lozada et al. (2021) apresentam resultados parciais de uma pesquisa que avalia materiais didáticos para o ensino de probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A pesquisa abrange jogos, um manipulável concreto e um digital, com uma análise das potencialidades desses recursos. Os materiais examinados incluem “A travessia do Rio” de Constantino e Verrengia (2019), bem como jogos digitais como “*Basic Probability Practice*”, “*Pulling Objects from Bag*”, “*Probability Fair*” e “*Probability Quis*”, todos disponíveis na plataforma “*online*” “*Free Training Tutorial Online Education for Kids*”. Os autores enfatizam a importância da seleção criteriosa de recursos didáticos para explorar conceitos probabilísticos, ressaltando que os jogos analisados são recursos potencialmente significativos que contribuem para o desenvolvimento do pensamento probabilístico.

Farias et al. (2015) conduz uma análise sobre a utilização do Quincunx, também denominado Tábua de Galton, como recurso no ensino de Probabilidade e Estatística. Através da aplicação do Quincunx, evidencia-se sua eficácia para aprimorar a compreensão de conceitos probabilísticos, abrangendo a média (esperança matemática), variância, distribuições de probabilidade e a transição de uma distribuição discreta para uma contínua.

Nos últimos anos, ocorreu um notável avanço nas pesquisas voltadas para o ensino

de probabilidade. Esse desenvolvimento reflete um crescente reconhecimento da importância dessa área no currículo educacional, tanto em níveis básicos quanto avançados. Pesquisadores e educadores têm se dedicado a explorar abordagens inovadoras, estratégias pedagógicas e recursos didáticos que possam tornar o ensino de probabilidade mais acessível, envolvente e eficaz.

Na educação básica, o Ensino de Probabilidade, quando ocorre, ainda está atrelado a fórmulas e associações com situações familiares e repetitivas. Isso geralmente ocorre fora do contexto da realidade do aluno, o que pode resultar em falta de interesse por parte dele (FERREIRA et al 2011). Dessa forma é essencial procurar alternativas para conter esses obstáculos, uma vez que percebemos que o ensino de Probabilidade é de suma importância para a formação integral do indivíduo na sociedade contemporânea. Suas implicações reverberam diretamente na interpretação de informações, na tomada de decisões profissionais e pessoais, bem como na instauração de uma postura crítica e reflexiva diante de situações do cotidiano.

Uma alternativa é o uso dos materiais manipuláveis, que incluem objetos físicos, jogos e simulações interativas. Esse modelo têm se revelado instrumentos valiosos para promover a compreensão ativa e prática dos conceitos de probabilidade. Esses recursos oferecem aos alunos a oportunidade de visualizar, explorar e experimentar, proporcionando uma compreensão mais significativa dos conceitos probabilísticos, preparando-os para enfrentar os desafios de uma sociedade cada vez mais orientada pela análise e interpretação de dados.

4 Probabilidade: Definições e propriedades

4.1 Experimentos aleatórios

Atualmente há uma crescente nas apostas esportivas brasileiras, a loteria esportiva nasceu do interesse dos brasileiros pelo futebol e da paixão pelo jogo (DANTAS, 2013). Para que um torcedor decida apostar em um clube ou não se deve analisar as hipóteses de vitória como: Quais jogadores estarão em campo? Qual será o seu adversário? Qual será o local do jogo? Quantas vitórias anteriormente os dois clubes possui? Entre outras.

A probabilidade é uma área fundamental nas ciências matemáticas e é amplamente aplicada em diversos campos nos dias atuais. Por exemplo, os algoritmos de aprendizado de máquinas e inteligência artificial frequentemente utilizam conceitos probabilísticos para fazer previsões e tomar decisões, os estudos clínicos, epidemiológicos e genéticos para entender padrões, avaliar a eficácia de tratamentos e prever o risco de doenças.

Temos um grande grupo de experimentos que, produzem resultados diferentes quando repetidos nas mesmas condições. Em outras palavras, o experimento é conduzido sem resultados previsíveis com antecedência.

Definição 4.1.1. *Experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições não produzem o mesmo resultado são denominados experimentos aleatórios.*

Exemplo 4.1.1. *Ao lançarmos um dado sobre uma superfície plana e observarmos o número que surge na face superior, não conseguimos antecipar qual será esse número.*

Exemplo 4.1.2. *Se escolhermos um casal de um conjunto de casais e observarmos o sexo do primogênito, não conseguiremos determiná-lo antecipadamente, variando de casal para casal.*

Definição 4.1.2. *Os experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições conduzem ao mesmo resultado são denominados determinísticos.*

Quando pretendemos medir a temperatura da água congelante, é um exemplo de um evento determinístico, pois a temperatura em que a água congela a uma pressão atmosférica normal é de 0 graus Celsius (ou 32 graus Fahrenheit), desde que a pressão atmosférica seja mantida constante. Quando queremos determinar a aceleração de um objeto em queda livre que é soltado a uma certa altura na Terra, a aceleração devido à gravidade fará com que ele caia em direção ao solo a uma taxa constante. A trajetória e a velocidade do objeto durante sua queda são determinísticas e podem ser calculadas com precisão usando as leis da física.

4.2 Espaço amostral e eventos

Definição 4.2.1. *Denominaremos espaço amostral associado a um experimento o conjunto de seus resultados possíveis.*

O espaço amostral será representado por um conjunto S . Ao realizar um experimento aleatório, o espaço amostral é o conjunto completo de todos os resultados que podem ocorrer.

Exemplo 4.2.1. *Uma moeda é lançada duas vezes sobre uma superfície plana. Em cada um dos dois lançamentos pode ocorrer cara (C) ou coroa (\bar{C}). O espaço amostral é o conjunto:*

$$S = \{CC, C\bar{C}, \bar{C}C, \bar{C}\bar{C}\}.$$

Exemplo 4.2.2. *Três peças são retiradas de uma linha de produção. Cada peça é classificada em boa (B) ou em defeituosas (D). O espaço amostral associado a esse experimento é:*

$$S = \{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB, DDD\}.$$

Veja que nos exemplos 4.2.1 e 4.2.2 o espaço amostral é finito. Apontaremos a seguir, exemplos de experimentos aleatórios, onde seu espaço amostral é infinito.

Exemplo 4.2.3. *Uma moeda é lançada sucessivamente até que apareça cara pela primeira vez. Se cara surgir no primeiro lançamento, o experimento é encerrado. Se coroa surgir no primeiro lançamento, realiza-se um segundo lançamento, e o experimento termina se cara aparecer. Caso cara não surgir nos dois primeiros lançamentos, realiza-se um terceiro lançamento. Na condição de não aparecer cara nesses três lançamentos, faz-se um quarto lançamento, e assim por diante, até que a primeira cara ocorra, momento em que o lançamento é encerrado. O espaço amostral é o conjunto:*

$$S = \{C, C\bar{C}, C\bar{C}\bar{C}, C\bar{C}\bar{C}\bar{C}, \dots\}.$$

Observe que os pontos deste espaço amostral podem corresponder um a um ao conjunto dos números naturais, portanto, é infinito, mas enumerável. (Dantas, 2013, p. 18)

Exemplo 4.2.4. *A umidade do ar pode ser medida através de um higrômetro. Esse dispositivo pode ser conectado a um mecanismo que possui um ponteiro deslizante sobre papel milimetrado, registrando a umidade do ar em cada momento. Se as leituras são feitas no intervalo de tempo $[0, T]$ o resultado é uma curva que associa, para cada instante $t \in [0, T]$ a variável $x(t)$ que representa a umidade do ar. É razoável assumir que $x(t)$ é uma função contínua de t , no intervalo $[0, T]$. O espaço amostral nesse caso é o conjunto:*

$$S = \{x : x \text{ é uma função contínua em } [0, T]\}$$

Note que no exemplo 4.2.4 o espaço amostral é infinito não enumerável.

Definição 4.2.2. *Denominaremos de evento a todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento.*

Os eventos serão representados por subconjuntos do espaço amostral. Eventos que são representados por conjuntos unitários, ou seja, que contêm apenas um ponto no espaço amostral, são chamados de eventos simples. O evento A ocorre quando o resultado de um experimento é um evento simples que pertence a A (Dantas, 2013, p.19).

Exemplo 4.2.5. *No exemplo 4.2.2 consideremos o evento A : duas peças são boas. Tem-se:*

$$A = \{BBD, BDB, DBB\}.$$

Então A ocorre se ocorrer um dos três eventos simples BBD , BDB , OU DBB .

Exemplo 4.2.6. *No exemplo 4.2.3 consideramos o evento A : a primeira cara ocorre em um lançamento que é um múltiplo de 3. Temos então:*

$$A = \{\bar{C}\bar{C}C, \bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}C, \dots\}.$$

Os eventos simples de A têm $3n - 1$ coroas que precedem a ocorrência da primeira cara na posição $3n$, para $n = 1, 2, \dots$

4.3 Operações entre eventos

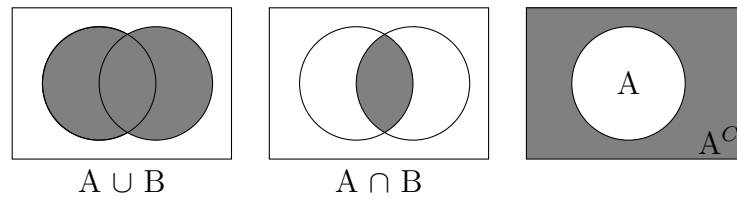
Definição 4.3.1. *A reunião de dois eventos A e B , denotada de $A \cup B$, é o evento que ocorre se pelo menos um deles ocorre.*

Definição 4.3.2. *A interseção de dois eventos A e B , denotada $A \cap B$, é o evento que ocorre se ambos ocorrem.*

Definição 4.3.3. *O complementar do evento A , denotado A^c , é o evento que ocorre quando A não ocorre.*

Dado que os eventos são subconjuntos do espaço amostral, podemos expressar a união, a interseção de dois eventos e o complemento de um evento por meio dos diagramas comumente usados para representar subconjuntos de um conjunto específico.

Figura 1 – União, interseção e complementar de eventos



Fonte: Dantas (2013)

Exemplo 4.3.1. *Uma urna contém bolas numeradas de um a quinze. Uma bola é retirada e seu número é registrado. Sejam A e B os seguintes eventos: A : o número da bola retirada é par, B : o número da bola retirada é múltiplo de 3. Vamos determinar os eventos A , $A \cup B$, $A \cap B$ e A^c .*

O espaço amostral S associado a esse experimento é o conjunto:

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$$

Para A , B , $A \cup B$, $A \cap B$ e A^c temos:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \quad B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$$

$$A \cap B = \{6, 12\} \quad A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

Dizemos que o evento A implica o evento B , que denotamos $A \subset B$, se para todo $\omega \in A$ tivermos $\omega \in B$. Isto corresponde à situação em que a ocorrência de A garante inevitavelmente a ocorrência de B . (Dantas p. 21)

Os eventos A e B são iguais se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Os eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos, se eles não podem ocorrer simultaneamente. Isto equivale a $A \cap B = \emptyset$.

Apresentamos no próximo lema algumas propriedades dessas operações entre eventos.

Lema 4.3.1. *Sejam A , B e C eventos do espaço amostral S , temos:*

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
4. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Vamos demonstrar as propriedades 1, 2, 3, e 4. Para essas demonstrações, precisamos mostrar que todo elemento que pertence ao lado esquerdo, pertence ao lado direito e vice-versa.

Demonstração. (Propriedade 1) Se $\omega \in (A \cup B) \cap C$ então $\omega \in (A \cup B)$ e $\omega \in C$. Daí decorre que $(\omega \in A \text{ ou } \omega \in B)$ e $\omega \in C$ e portanto $(\omega \in A \text{ e } \omega \in C)$ ou $(\omega \in B \text{ e } \omega \in C)$, ou seja, $(\omega \in (A \cap C))$ ou $(\omega \in (B \cap C))$, que implica $\omega \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Podemos percorrer estas implicações de trás para frente e verificar que são verdadeiras, donde decorre a igualdade dos conjuntos. ■

Demonstração. (Propriedade 2) Seja $\omega \in (A \cap B) \cup C$, então $\omega \in (A \cap B)$ ou $\omega \in C$. Daí temos $(\omega \in A \text{ e } \omega \in B)$ ou $\omega \in C$ portanto, $(\omega \in A \text{ ou } \omega \in C)$ e $(\omega \in B \text{ ou } \omega \in C)$, ou seja, $(\omega \in (A \cup C))$ e $(\omega \in (B \cup C))$, isso implica que $\omega \in (A \cup B) \cap (B \cup C)$. Partindo de $\omega \in (A \cup B) \cap (B \cup C)$ e fazendo o percurso inverso obtemos a igualdade. ■

Demonstração. (Propriedade 3) Considere $\omega \in (A \cup B)^c$, então $\omega \notin (A \cup B)$ que implica $\omega \notin A$ e $\omega \notin B$, que por sua vez implica que $\omega \in A^c$ e $\omega \in B^c$, isto é, $\omega \in (A^c \cap B^c)$. Se partirmos de $\omega \in (A^c \cap B^c)$ e percorrer o caminho inverso vamos obter a igualdade. ■

Demonstração. (Propriedade 4) Seja $\omega \in (A \cap B)^c$, então $\omega \notin (A \cap B)$ que implica $\omega \notin A$ e $\omega \notin B$, que por sua vez implica que $\omega \in A^c$ ou $\omega \in B^c$, isto é, $\omega \in (A^c \cup B^c)$. Se partirmos de $\omega \in (A^c \cup B^c)$ e percorrer o caminho inverso vamos obter a igualdade. ■

Definição das operações de uma reunião e de uma interseção enumerável de eventos.

Definição 4.3.4. O evento $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ é o evento que ocorre quando pelo menos um dos eventos A_i , para $i = 1, 2, \dots$ ocorrerem.

Definição 4.3.5. O evento $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ é o evento que ocorre quando todos os eventos A_i , $i = 1, 2, \dots$ ocorrerem.

4.4 Definições: clássica, frequentista, subjetiva e axiomática de probabilidade

Na idade média surge as primeiras tentativas de atribuir probabilidades a eventos. Segundo [Vialli \(2008\)](#), p. 144) os primeiros indícios de probabilidade foram através de jogos de dados, denominado na época por Tali. A definição que chamamos de clássica tem como base em sua essência os eventos igualmente possíveis determinados por Galileu.

Vamos analisar um experimento com um número finito de eventos simples. Suponhamos que, por alguma razão, podemos atribuir a mesma probabilidade de ocorrência a cada um dos eventos simples desse experimento. Nessas circunstâncias, adotaremos a seguinte definição de probabilidade.

Definição 4.4.1. Consideremos um espaço amostral S com N eventos simples, que suporemos igualmente possíveis. Seja A um evento de S composto de m eventos simples. A probabilidade de A , que denotaremos $P(A)$, é definida por:

$$P(A) = \frac{m}{N}$$

Observemos que a probabilidade definida dessa maneira é uma função estabelecida em uma classe de eventos, ou, de maneira equivalente, uma função estabelecida em uma classe de subconjuntos do espaço amostral. Além disso, ela atende às propriedades estabelecidas no seguinte lema:

Lema 4.4.1. *Seja S um espaço amostral finito satisfazendo as condições da definição 4.4.1. A probabilidade definida por $P(A)$ satisfaz:*

i $P(A) \geq 0$, para todo $A \subseteq S$;

ii Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

iii $P(S) = 1$.

Demonstração. *i*) como $N > 0$ e $m \geq 0$ segue que $P(A) \geq 0$. Suponha que A tem m_1 eventos simples e que B tem m_2 eventos simples. Como A e B são mutuamente exclusivos segue-se que eles não têm eventos simples comuns, logo o número de eventos simples de $A \cup B$ é $m_1 + m_2$. Usando a definição obtemos *ii*).

Como o número de eventos simples de S é N , segue da definição que $P(S) = 1$. ■

Exemplo 4.4.1. No experimento de lançar um dado, assumindo que seja balanceado, podemos atribuir a probabilidade $\frac{1}{6}$ a cada um dos eventos simples 1, 2, 3, 4, 5, 6. O evento "o número obtido ao lançar o dado é par" tem uma probabilidade de 0,5.

4.4.1 Definição frequentista de probabilidade

Uma abordagem alternativa para calcular a probabilidade de um evento envolve a reprodução do experimento aleatório, realizando-o, por exemplo, n vezes, e registrando quantas vezes ocorre o evento associado a esse experimento. Seja $n(A)$ o número de vezes que o evento A ocorreu nas n repetições do experimento. A razão:

$$f_{n,A} = \frac{n(A)}{n} \tag{4.1}$$

é denominada frequência relativa de A nas n repetições do experimento.

A convergência de frequências relativas a um valor constante após um grande número de tentativas aleatórias e independentes em um experimento aleatório é um conceito

fundamental na teoria das probabilidades e na estatística. Isso está relacionado à Lei dos Grandes Números, que é um resultado importante na teoria da probabilidade. Segundo (BATANERO et al., 2016) ao buscar ampliar a aplicação da teoria da probabilidade para questões relacionadas à expectativa de vida e ao setor de seguros, Bernoulli (1713-1987) declarou uma versão inicial da Lei dos Grandes Números.

No século XVIII, Buffon realizou 4.040 lançamentos de uma moeda, registrando 2.048 ocorrências de caras, resultando em uma frequência relativa observada de 0,5064. Posteriormente, Karl Pearson converteu 24.000 lançamentos da mesma moeda, obtendo uma frequência relativa de 0,5005 para a face de cara (Dantas, 2013).

Seja S o espaço amostral associado a um experimento aleatório. Considerando-se n repetições desse experimento nas mesmas condições, observemos que a frequência relativa está definida na classe dos eventos de S e suas propriedades são dadas no seguinte lema:

Lema 4.4.2. *A frequência relativa $f_{n,A}$ definida na classe dos eventos do espaço amostral S satisfaz as seguintes condições:*

1. Para todo evento A , $0 \leq f_{n,A} \leq 1$;
2. Se A e B são dois eventos de S mutuamente exclusivos, temos: $f_{n,A \cup B} = f_{n,A} + f_{n,B}$;
3. $f_{n,S} = 1$.

Demonstração. A parte (1) decorre do fato que $n(A) \geq 0$. Como os eventos A e B são mutuamente exclusivos, toda vez que um deles ocorre o outro não ocorre e, portanto, o número de ocorrências de $A \cup B$ é igual a soma do número de ocorrência de A com o número de ocorrências de B , isto é: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Dividindo-se por n obtemos (2). Como em toda realização do experimento algum ponto de S ocorre, segue-se que (3) é verdadeira. ■

De acordo com (Dantas (2013)) foram feitas tentativas de definir a probabilidade como o limite da frequência relativa $f_{n,A}$, que se estabiliza em uma constante à medida que n se aproxima do infinito. Essas tentativas não obtiveram sucessos, dessa forma, no momento, limitamos nossa discussão ao fato de que as propriedades atendidas pela definição clássica (lema 4.4.1) também são satisfeitas pela frequência relativa (lema 4.4.2). Estas propriedades fornecem uma base intuitiva para a definição axiomática que será apresentada posteriormente, após a introdução da definição subjetiva.

4.4.2 Definição subjetiva de probabilidade

Nas abordagens discutidas anteriormente, a probabilidade é considerada um valor “objetivo” atribuído a cada evento. Porém, isso nem sempre é possível. Vejamos alguns exemplos:

a) Um paciente é submetido a um novo tipo de cirurgia e desejamos saber se ele ficará bom.

b) Desejamos saber se haverá tremor de terra no Rio Grande do Norte no próximo ano.

c) Desejamos saber quem vencerá o próximo jogo entre São Paulo e Palmeiras.

No primeiro exemplo, não é seguro falar em repetição do experimento, uma vez que se trata de uma nova técnica cirúrgica que está sendo empregada. No segundo exemplo, temos relatos de ocorrências pouco frequentes de tremores de terra no Rio Grande do Norte. Quanto ao jogo entre São Paulo e Palmeiras, sabemos que existem estatísticas de um grande número de partidas entre essas equipes, mas as opções variam consideravelmente de um jogo para outro.

O teorema de Bayes, divulgado em 1763, declarou que a probabilidade de um evento pode ser reavaliada à luz de novos dados disponíveis.

Teorema 4.4.1. *Teorema de Bayes* Seja A_1, A_2, \dots, A_n uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer em Ω . Então:

$$\Pr(A_i | B) = \frac{\Pr(A_i) \Pr(A_i | B)}{\sum_{j=1}^n \Pr(A_j) \Pr(B | A_j)}$$

Ao empregar esse teorema, a probabilidade inicial (anterior) pode ser convertida em uma probabilidade posterior mediante a incorporação de novos dados, resultando na perda de seu caráter objetivo. Nesta perspectiva, alguns matemáticos, como Keynes, Ramsey e de Finetti, conceberam a probabilidade como um grau pessoal de crença, influenciado pelo conhecimento ou experiência individual. Entretanto, Batanero et al. (2006) afirma que a validade da distribuição a priori nesse enfoque foi alvo de críticas por sua natureza subjetiva, embora o impacto dessa distribuição tenda a diminuir com a incorporação de dados objetivos.

Uma corrente de probabilistas considera a probabilidade de um evento como sendo a medida da crença que o observador possui na ocorrência do evento. Desse modo, a probabilidade será em geral diferente para distintas pessoas em decorrência das diferentes opiniões que elas têm sobre a ocorrência do evento (DANTAS, 2013, p. 26).

De Finetti, em 1937, propôs um sistema de axiomas como uma base formal para justificar essa visão, buscando proporcionar uma fundamentação mais sólida à abordagem subjetiva da probabilidade. Nessa visão subjetiva há situações em que a repetição do experimento não pode ser realizada e outras em que não pode ser realizadas nas mesmas condições.

4.4.3 Definição axiomática de probabilidade

Apesar das intensas publicações filosóficas sobre os fundamentos, as aplicações da probabilidade em todas as áreas da ciência e na atividade humana expandiram-se de maneira

significativa. De acordo com Batanero et al. (2006) ao longo do século XX, vários matemáticos se esforçaram para formalizar a teoria matemática da probabilidade. Inspirado no trabalho de Borel sobre a teoria dos conjuntos e da medida, Kolmogorov (1933 – 1950) desenvolveu uma teoria axiomática que sustentava a perspectiva frequentista.

Definição 4.4.2. *Probabilidade é uma função definida numa classe \mathcal{F} de eventos de S que satisfaz as seguintes condições:*

a) $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$;

b) Se $(A_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de eventos de \mathcal{F} , que são mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n);$$

c) $P(S) = 1$.

Veja que a propriedade (ii) do lema 4.4.1 foi substituída pela condição *b* desta definição. A seguir vamos considerar espaços amostrais enumeráveis ou que são intervalos ou reunião de intervalos de reta. Em algumas situações consideraremos subconjuntos do R^n que são generalizações de intervalos.

Se o espaço amostral S é enumerável, podemos definir a probabilidade na classe de todos os subconjuntos de S que é denominado também conjunto das partes de S e denotado por $\mathcal{P}(S)$. Representemos nesse caso o espaço amostral S da seguinte forma $S = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$. Associemos a cada $\omega_n, n = 1, 2, \dots$, um número $P(\omega_n) \geq 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega_n) = 1$.

Denominaremos $P(\omega_n)$ de probabilidade do evento simples $\omega_n, n = 1, 2, \dots$

Definição 4.4.3. *Seja S um espaço amostral enumerável e seja A um subconjunto de S . A probabilidade de A é definida da seguinte maneira:*

$$P(A) = \sum_{n:\omega_n \in A} P(\omega_n).$$

Podemos observar que a probabilidade, quando definida dessa forma, atende aos axiomas específicos na definição 4.4.3.

4.5 Outros significados de probabilidade

Uma pesquisa em qualquer campo da educação matemática necessita de respaldo por meio de uma reflexão epistemológica sobre os objetos que estão sendo investigados (Batanero et al. (2016)). Essa reflexão torna-se particularmente relevante ao abordar a probabilidade, dado que diversas perspectivas sobre o conceito, que impactam tanto a prática estatística quanto os currículos escolares, ainda estão em discussão na comunidade científica.

Conforme Hacking (1975 apud BATANERO, 2016), a probabilidade foi conceitualizada a partir de duas perspectivas principais desde os seus primórdios, embora distintas. A perspectiva estatística da probabilidade está associada à necessidade de identificar regras matemáticas objetivas que regem os processos aleatórios e uma abordagem epistêmica que concebe a probabilidade como um grau pessoal de crença. Por outro lado a perspectiva epistêmica concebe a probabilidade como um nível individual de convicção, influenciado pela informação acessível à pessoa que está atribuindo tal probabilidade.

A partir destas duas perspectivas principais, que se refletem nos trabalhos dos principais autores que contribuíram para o progresso da probabilidade, diferentes visões de probabilidade foram sustentadas ao longo da história (Batanero 2015; Batanero e Díaz 2007; Batanero et al. 2005; Borovcnik e Kapadia 2014; Chernoff e Russell 2012). Atualmente, as principais interpretações primárias são intuitivas, clássicas, frequentistas, subjetivas, lógicas, de propensão e axiomáticas (BATANERO et al. 2016, p. 2)

Cada uma dessas perspectivas suscita algumas questões filosóficas se é mais incluída para modelar especificidades específicas do mundo real ou estar incluídas em currículos de estudos específicos. Na seção anterior, discutimos os significados e as definições de probabilidade Clássica, Frequentista, Subjetiva e Axiomática. Nesta subseção, apresentaremos outras interpretações fundamentais da probabilidade.

4.5.1 Noção intuitiva da probabilidade

A essência da teoria da probabilidade reside, fundamentalmente, na formalização de intuições sobre o acaso, conduzindo à ideia principal de associar números a eventos incertos. De acordo com Batanero et al. (2016), as concepções intuitivas sobre o acaso emergiram nos estágios iniciais da história em diversas culturas, estando intrinsecamente ligadas a questões relacionadas à definição de apostas equitativas em jogos. Concepções intuitivas sobre acaso e probabilidade também são observáveis em crianças pequenas, pois utilizam expressões qualitativas, como os termos “provável” ou “improvável”, para manifestar seus níveis de crença na ocorrência de eventos aleatórios.

4.5.2 Significado de propensão

Essa abordagem está especialmente associada à interpretação propensionista da probabilidade, que a considera como uma medida da propensão inerente de um evento ocorrer, em contraste com abordagens mais tradicionais que veem a probabilidade como uma medida subjetiva ou frequentista. Segundo Batanero et al. (2016), Popper (1959) introduziu o conceito de tendência como uma medida da tendência de um sistema se comportar de uma maneira aleatória e de uma tendência física para produzir um tipo específico de resultado.

Na interpretação propensionista, a probabilidade é vista como uma característica objetiva e real do mundo, refletindo a propensão inerente de um evento ocorrer sob condições específicas. Por exemplo, se um dado tem uma propensão de $1/6$ para mostrar um número específico em cada lançamento, isso significa que, sob condições apropriadas, espera-se que ocorra esse resultado em aproximadamente $1/6$ das vezes, em média.

No entanto, essa interpretação da probabilidade baseada em propensão é controversa. Na abordagem de longo prazo, a propensão não é formulada em termos de outras quantidades empiricamente verificáveis, o que significa que não dispomos de nenhum método empírico para determinar o valor de uma propensão. Além disso, não está claro se as teorias de propensão para casos individuais seguem ou não os cálculos tradicionais de probabilidade.

4.5.3 Significado lógico

O significado lógico na probabilidade refere-se à interpretação da probabilidade dentro do contexto da lógica. Enquanto as abordagens frequentista, propensionista e subjetiva abordam a probabilidade de diferentes maneiras, a perspectiva lógica se concentra em entender a probabilidade em termos de raciocínio lógico e inferência.

Conforme (BATANERO et al., 2016), Keynes (1921) e Carnap (1950) foram importantes contribuintes para as teorias lógicas da probabilidade. Essas teorias sustentam a ideia clássica de que as probabilidades podem ser estabelecidas a priori por meio da análise do espaço de possibilidades. No entanto, uma distinção crucial nessas teorias é a permissão para atribuir pesos desiguais às diferentes possibilidades. Isso significa que, ao contrário da visão clássica que presume igualdade de pesos para todas as possibilidades, as teorias lógicas de Keynes e Carnap reconhecem a possibilidade de que algumas possibilidades sejam mais prováveis do que outras, refletindo uma avaliação lógica das circunstâncias.

No entanto, segundo Batanero et al. (2016), um problema nesta abordagem é a existência de várias funções de confirmação possíveis, o que depende das escolhas potenciais de medidas iniciais e da linguagem em que a hipótese é formulada. Outra dificuldade é a seleção objetiva da evidência adequada (E), dado que a quantidade de evidência pode variar de uma pessoa para outra.

As diversas perspectivas sobre a probabilidade descritas implicam diferenças específicas. De acordo com Batanero et al. (2016), essas diferenças não se limitam apenas à definição da probabilidade em si, mas também abrangem os conceitos, propriedades e procedimentos associados que surgiram para abordar vários problemas relacionados a cada perspectiva.

Atualmente, diante do crescente interesse em estatísticas e avanços tecnológicos, a abordagem frequentista está sendo favorecida. Muitos currículos e documentos padronizados sugerem uma introdução experimental à probabilidade como um limite de frequências relativas (BATANERO et al., 2016).

Tabela 1 – Elementos que caracterizam as diferentes visões de probabilidade

Visualizações de probabilidade	Procedimentos	Propriedades	Alguns conceitos relacionados
Clássico	<ul style="list-style-type: none"> - Combinatória - Proporções - Análise a priori da estrutura experimental 	<ul style="list-style-type: none"> - Proporção de favorável para todos os casos possíveis - Equiprobabilidade de eventos elementares 	<ul style="list-style-type: none"> - Expectativa - Justiça
Frequentista	<ul style="list-style-type: none"> - Coleta a posteriori de dados estatísticos - Análise estatística de dados - Ajuste de curva 	<ul style="list-style-type: none"> - “Limite” de relativas frequências a longo prazo - Objetivo; baseado em fatos empíricos - Experiência repetível 	<ul style="list-style-type: none"> - Frequência relativa - Distribuição de dados - Convergência - Independência de julgamentos
Propensão	<ul style="list-style-type: none"> - Análise a priori da configuração experimental 	<ul style="list-style-type: none"> - Disposição ou tendência física - Aplicável a casos únicos - Relacionados às condições experimentais 	<ul style="list-style-type: none"> - Propensão - Tendência casual probabilística
Lógico	<ul style="list-style-type: none"> - Análise a priori do espaço de possibilidades - Lógica proposicional - Lógica indutiva 	<ul style="list-style-type: none"> - Grau objetivo de crença - Relações entre duas afirmações, generaliza a implicação 	<ul style="list-style-type: none"> - Evidência - Hipótese - Grau de implicação
Subjetivo	<ul style="list-style-type: none"> - Teorema de Bayes. - Probabilidade condicional 	<ul style="list-style-type: none"> - Caráter subjetivo - Revisável com experiência 	<ul style="list-style-type: none"> - Probabilidade - Trocabilidade - Probabilidade (ou distribuição) a priori - Probabilidade (ou distribuição) a posteriori
Axiomático	<ul style="list-style-type: none"> - Teoria de conjuntos - Definir álgebra 	<ul style="list-style-type: none"> - Função mensurável 	<ul style="list-style-type: none"> - Espaço amostral - Certo evento - Álgebra de eventos - Medir

Fonte: Adaptado de (BATANERO et al., 2016, p. 7)

5 Materiais e Métodos

A abordagem metodológica adotada neste estudo segue uma perspectiva qualitativa, buscando uma compreensão aprofundada da utilização de materiais didáticos manipuláveis no ensino de Matemática. Optou-se pelo estudo de caso como estratégia de pesquisa principal, viabilizando uma análise das experiências dos participantes envolvidos na oficina dedicada ao ensino de Probabilidade.

Inicialmente, realizou-se uma revisão da literatura com o propósito de compreender os fundamentos teóricos e epistemológicos da probabilidade. Exploraram-se os estudos vinculados ao processo de aprendizado subjacente à definição de probabilidade frequentista, bem como investigaram-se casos anteriores que abordaram os impactos do uso de materiais didáticos manipuláveis no ensino de probabilidade.

5.1 Locus da pesquisa

O locus da pesquisa foi a Escola Normal Estadual Padre Emídio Viana Correia, uma instituição pública de ensino médio localizada na cidade de Campina Grande-PB.

A Escola Normal Estadual Padre Emídio Viana Correia foi fundada em abril de 1960, sendo reconhecida pela lei estadual n.º. 2.229. Inicialmente, tornou-se uma referência na formação de professores, operando das 07h às 12h, com cerca de 275 alunas. Somente em 1970, mudou-se para um prédio próprio em Campina Grande - PB. Em 2014, implementou o Ensino Médio Regular, seguindo a Lei de Diretrizes de Bases da Educação Brasileira. Em 2016, introduziu o curso Integrado à Informática e, em 2023, o curso de Formação Inicial Continuada em Logística. Atualmente, abriga 740 alunos, com a maioria cursando o Ensino Médio Regular, 131 no Curso Integrado à Informática e 32 no Curso Fic de Logística.

A escola atende a alunos de diversos bairros e cidades circunvizinhas, buscando promover práticas educacionais, resgate da cidadania, cultura regional e contribuindo para a formação docente na Paraíba, além de preparar os alunos para o ensino superior e o mercado de trabalho.

5.2 Participantes da pesquisa

Os integrantes desta investigação consistiram em estudantes do segundo ano do ensino médio da instituição analisada, que demonstraram interesse em participar de uma oficina voltada para a exploração do emprego de materiais didáticos manipuláveis no ensino de probabilidade. A escolha dos participantes foi realizada por amostra intencional em

três turmas do segundo ano, considerando critérios como disponibilidade de horários e participação ativa em atividades.

5.3 Instrumentos de coletas de dados

O instrumento de coleta de dados consistiu em dois questionários impressos, disponibilizados aos estudantes: um no início da oficina e outro ao seu término. No início, aplicou-se um questionário diagnóstico com o propósito de avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre probabilidade. Ao término da oficina, um segundo questionário foi aplicado para verificar a aprendizagem dos estudantes e compreender se ocorreram mudanças em suas perspectivas sobre o ensino de probabilidade. Entre esses dois questionários, os estudantes participaram de uma atividade prática envolvendo o uso de material manipulável, explorando a definição de probabilidade frequentista por meio de um experimento.

Ambos os questionários eram compostos por seis perguntas. No questionário diagnóstico, todas as questões eram objetivas, enquanto no questionário de verificação, quatro eram objetivas e duas eram abertas. Nessas questões abertas, os participantes tinham a oportunidade de fazer comentários adicionais sobre a oficina e a dinâmica oferecida. Além disso, foram realizadas observações diretas das atividades durante a oficina.

5.4 Métodos da análise dos dados

Realizou-se uma análise sistemática dos questionários diagnóstico e de verificação, buscando compreender as alterações nas percepções, conhecimentos e atitudes dos participantes, tanto antes quanto depois da aplicação do material didático manipulável no ensino de probabilidade. Os dados foram devidamente organizados no *software Microsoft Excel*, permitindo a condução de estudos comparativos destinados à identificação de padrões.

As respostas das perguntas abertas foram categorizadas e examinadas quanto à recorrência de temas e conceitos que envolve probabilidade, fornecendo uma visão mais abrangente das percepções dos participantes. Além disso, foi adotada uma abordagem qualitativa para interpretar as respostas, considerando detalhes que podem não ser capturados apenas por análises quantitativas.

5.5 Construção do material manipulável - O Chocalho

O material didático manipulável foi elaborado com base no modelo concebido pelo Prof. Dr. Cláudio Possani, conforme demonstrado em um vídeo disponível em seu canal. Este vídeo pode ser acessado na plataforma de mídia social youtube. Foram realizadas modificações e adaptações com o objetivo de ampliar as possibilidades de exploração desse material manipulável.

Figura 2 – Materiais necessários.



Fonte: Autor (2023).

Para a construção do chocalho, são necessários os seguintes materiais: um mini arco de serra com corpo injetado de 12 polegadas (R\$ 9,70), um sifão tubo extensivo (R\$ 9,80), uma válvula plástica para pia (R\$ 1,50), duas semiesferas de isopor com 150 mm de diâmetro (R\$ 10,90), meio metro de cano de 32 mm (R\$ 8,00), um tampão de 32 mm (R\$ 3,00), uma bola de isopor de 25 mm (R\$ 1,00), tinta spray para isopor (R\$ 26,99) a cor fica a critério, quatro lixas para parede e massa grão 100 (R\$ 2,00 cada), cola de isopor (R\$ 4,19), um adesivo híbrido (fixa tudo) (R\$ 9,50), meio metro de plástico adesivo (R\$ 12,99 rolo), a cor fica a critério e 20 bolas acrílicas (R\$ 1,20 cada), com mais de quatro bolas por cor. É importante que essas bolas possam percorrer a válvula e o cano livremente. Algumas quantidades dos materiais mencionados estão em excesso devido a possíveis erros durante o processo de construção. Além disso, incluímos um objeto cortante e um isqueiro, ficando a critério do leitor decidir se deseja utilizá-los ou optar por outro objeto.

¹ Atualmente professor da Universidade de São Paulo e doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo (1989).

² <https://www.youtube.com/watch?v=9wQyHP5Q3Tk>

Passemos ao passo-a-passo da construção do chocalho:

Passo 1: Primeiramente, é necessário serrar o cano em um comprimento de 8cm e o sifão em um comprimento de 6cm, conforme ilustrado na figura 3.

Figura 3 – Passo 1 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Passo 2: Após essa etapa, utilizando um isqueiro, aqueça a parte de menor diâmetro do sifão até que seja possível encaixá-lo no cano. Para unir o cano à seção do sifão, aplique o adesivo híbrido (fixa tudo), encaixe as partes e pressione por alguns segundos. Deixe a junção descansar para permitir uma fixação adequada do adesivo (figura 4).

Figura 4 – Passo 2 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Passo 3: Agora, realizaremos ajustes na válvula plástica. Primeiramente, é essencial assegurar que o tubo da válvula esteja desobstruído, permitindo a passagem da bola.

Esse procedimento requer o uso da ponta de uma faca previamente aquecida, conforme demonstrado na figura 5. Deixamos a critério do leitor a decisão sobre o uso do material perfurante que considerar mais adequado.

Figura 5 – Passo 3 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Passo 4: Nesta etapa, faremos o lixamento da parte interna da válvula plástica até que a bola plástica consiga percorrê-la sem encontrar qualquer resistência (figura 6).

Figura 6 – Passo 4 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Passo 5: Retire a rosca do sifão, obtendo a peça de acordo com a primeira foto indicada na figura abaixo. Amplie o diâmetro da peça lixando na área demarcada em vermelho, para permitir a passagem das bolas sem encontrar resistência (figura 7).

Figura 7 – Passo 5 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Passo 6: Serre tronco da válvula de plástico até que tenha 2,5 cm de comprimento (ou um pouco mais, se necessário). Posteriormente, crie uma abertura na meia esfera de isopor, preferencialmente no local pré-marcado. Em seguida, prossiga serrando gradualmente até que a válvula se encaixe (figura 8).

Figura 8 – Passo 6 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Passo 7: Após isso, utilize lixa na parte lisa da válvula (inferior e superior) até que ela esteja o mais nivelada possível, garantindo que sua espessura não afete o percurso da bola (figura 9).

Figura 9 – Passo 7 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Passo 8: Crie duas aberturas no cano de 8 cm, cada uma com um diâmetro de 0,6 cm e uma distância de 0,8 cm entre elas. A partir da primeira abertura, em direção ao topo, mantenha uma distância de 0,5 cm até o sifão, e a partir da segunda abertura, em direção à base, mantenha a mesma distância até o encaixe do tampão. Faça os acabamentos necessários no cano (figura 10).

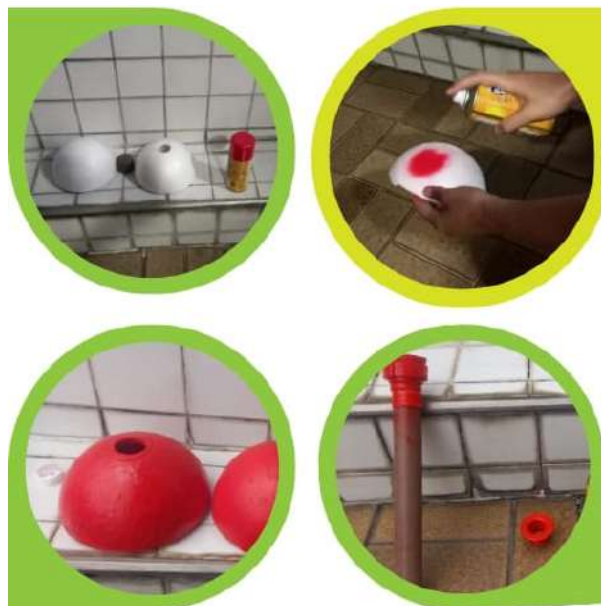
Figura 10 – Passo 8 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Passo 9: Utilize tinta spray para pintar as semiesferas de isopor tanto na parte externa quanto na interna. A pintura da válvula e da parte do sifão conectada ao cano é opcional (figura 11).

Figura 11 – Passo 9 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Passo 10: Após a secagem completa da tinta, una a válvula à abertura da meia esfera. Utilize o adesivo híbrido (fixa tudo) para fixar firmemente no isopor, aplicando na parte da válvula que entrará em contato com o isopor (figura [12](#)).

Figura 12 – Passo 10 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Passo 11: Aplique uma quantidade considerável de adesivo híbrido (fixa tudo) ao redor de toda a circunferência de uma das meias esferas e una as duas. Pressione firmemente por algum tempo para garantir uma fixação mais eficaz (figura [13](#)).

Figura 13 – Passo 11 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Passo 12: Observe que as semiesferas não se uniram perfeitamente, resultando em algumas imperfeições ao redor. Para corrigir esse problema, utilize o adesivo híbrido preenchendo essas fissuras e realize todos os ajustes necessários para um acabamento adequado. Após a secagem do adesivo, aplique a tinta spray (figura 14).

Figura 14 – Passo 12 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Passo 13: Para o cabo do chocalho, é opcional aplicar um plástico adesivo. No tampão do cano, é necessário fazer um preenchimento para ajustar o nível da bola, tornando-o compatível com as aberturas no cano. No processo de preenchimento, foram utilizados algodão e metade de uma bola de isopor de 25mm. A escolha dos materiais para o preenchimento é livre e fica a critério do leitor, podendo utilizar materiais disponíveis em casa (figura 15).

Figura 15 – Passo 13 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Passo 14: Por fim, conecte o cabo à válvula inserida na esfera e rosqueie para garantir que as peças estejam firmemente fixas. Em seguida, realize testes para verificar se as bolas são visíveis nas aberturas ou se são necessários ajustes (figura 16).

Figura 16 – Passo 14 da construção.



Fonte: Autor (2023).

Após a construção do chocalho, três testes foram conduzidos buscando a validação do instrumento. O primeiro pela autora, o segundo por uma turma do ensino superior do Instituto Federal da Paraíba e o terceiro por uma turma do 8º ano do ensino fundamental. O propósito desses testes foi identificar a técnica ideal para "jogar" o chocalho o menor número possível de repetições do experimento para evitar cansar os participantes da oficina.

No primeiro teste, reproduzimos o experimento conforme demonstrado pelo Prof. Dr. Claudio Possani. Realizamos 100 repetições e registramos os resultados obtidos. Em seguida, contabilizamos as ocorrências semelhantes, agrupando os dados. Posteriormente, calculamos a probabilidade associada a cada resultado e armazenamos esses dados. Uti-

lizamos o diagrama de árvore, uma representação gráfica comumente empregada em probabilidade e estatística, para visualizar distintos cenários e calcular probabilidades condicionais.

Como não tínhamos informações sobre a quantidade de bolas de cada cor, iniciamos o cálculo considerando a suposição correta de 4 bolas rosas e 2 verdes para validar o experimento. Vamos decodificar toda a sequência a partir do diagrama de árvore.

Experimento com 100 Repetições:

$$V = \text{VERDE}$$

$$R = \text{ROSA}$$

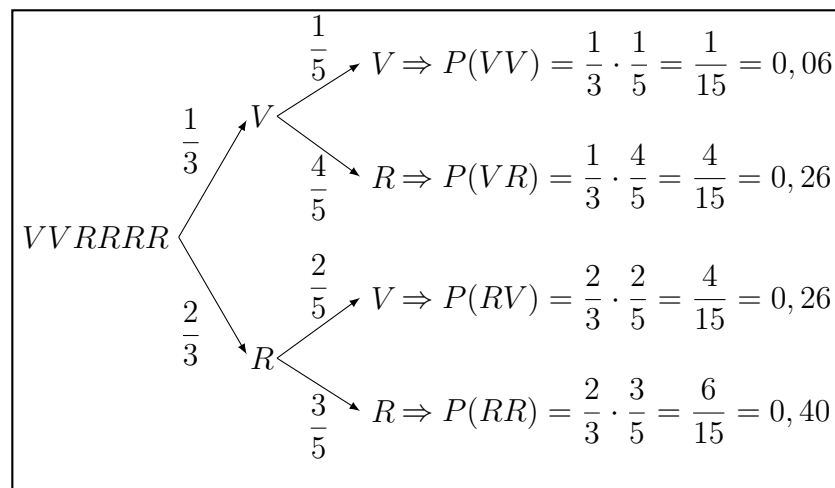
Ensaaios:

$$VV = 12 \quad P(VV) = \frac{12}{100} = 0,12$$

$$VR = 22 \quad P(VR) = \frac{22}{100} = 0,22$$

$$RV = 26 \quad P(RV) = \frac{26}{100} = 0,26$$

$$RR = 40 \quad P(RR) = \frac{40}{100} = 0,40$$



No segundo teste, realizamos o experimento com uma turma de ensino superior, seguindo todas as instruções observadas no primeiro teste. Cada participante jogou o chochalho em trinta repetições sob as mesmas condições, resultando na segunda validação do experimento.

No terceiro teste, conduzimos o experimento com uma turma do 8º ano do ensino fundamental, seguindo todas as observações, mais uma vez confirmamos a validade do experimento.

Figura 17 – Movimento adequado para jogar o chocalho.



Fonte: Autor (2023).

Com base nos testes realizados, identificamos um movimento mais adequado para manipular o chocalho indicado na figura 17. Um padrão observado ocorreu quando inserimos 6 bolas no chocalho, organizadas em duas cores (4 e 2). Nessa condição, determinamos que a quantidade mínima de repetições do experimento é 30, o que possibilita uma avaliação mais ágil da incerteza em relação à quantidade de bolas de cada cor e, conseqüentemente, o total. Além disso, observamos que, ao aumentar a quantidade de bolas no chocalho, seria necessário aumentar o número de repetições.

5.6 Descrição das etapas da oficina: “O Mistério do Chocalho”

A execução da oficina “O Mistério do Chocalho” ocorreu no Laboratório de Ciências da escola, demandando um período de 2 horas e 45 minutos. Os materiais necessários para a execução incluíram um notebook, uma TV, um recipiente transparente utilizado para simular uma urna, 15 dados, uma ampulheta, um chocalho e bolas. O principal objetivo da oficina foi aprimorar a compreensão da probabilidade frequentista por meio de um experimento.

Primeira etapa: Iniciamos uma breve conversa abordando a pergunta “O que vocês entendem sobre probabilidade?” com o objetivo de resgatar eventuais conhecimentos prévios dos alunos.

Segunda etapa: Realização do questionário diagnóstico com a finalidade de avaliar o conhecimento prévio dos alunos sobre o tema da probabilidade.

Terceira etapa: Investigamos a origem histórica da probabilidade, estabelecendo conexões com o contexto contemporâneo e enfatizando as contribuições de teóricos eminentes, tais como Cardano (1501-1576), Pascal (1623-1662), Fermat (1607-1665) e Bernoulli (1655-1705).

Quarta etapa: Exploramos os conceitos básicos da probabilidade e suas definições por meio de experimentos envolvendo dados, moedas e urnas, seguindo a sequência descrita

na figura [20](#).

Quinta etapa: Iniciamos a investigação do experimento "O mistério do chocalho". No início, concedemos a cada aluno a oportunidade de explorar o chocalho usando o tato por 2 minutos. Após esse período, solicitamos estimativas sobre a quantidade de bolas dentro do chocalho. Com as estimativas em mãos, realizamos trinta repetições do experimento e registramos os resultados. Em seguida, contabilizamos as ocorrências semelhantes, agrupando os dados. Utilizando as estimativas dos participantes, calculamos as probabilidades associadas a cada resultado, empregando o diagrama de árvore.

Sexta etapa: Realizamos um segundo questionário (verificação da aprendizagem) para avaliar as percepções dos alunos após a experiência prática e a aplicação de definições matemáticas. No último questionário, incluímos um espaço livre para comentários sobre a oficina. Todos esses dados foram coletados, fornecendo um profundo conhecimento sobre a eficácia do material manipulável.

6 Análise dos Resultados

6.1 Oficina: O Mistério do Chocalho

A oficina aconteceu no Laboratório de Ciências da Escola com a participação de 24 alunos. Iniciamos a atividade apresentando a oficina juntamente com seu roteiro. Posteriormente, conduzimos uma breve discussão com a pergunta: "O que você compreende sobre probabilidade?" Essa abordagem tinha como objetivo estimular a memória dos alunos e resgatar conhecimentos prévio (figura 18). Os estudantes participaram de forma significativa, fornecendo respostas interessantes:

Estudante A: “É a chance de obter um resultado específico.”

Estudante B: “É a possibilidade de obter um resultado aleatório em um experimento.”

Embora as respostas dos Estudantes A e B tenham sido consideradas adequadas, algumas respostas do tipo “Não sei” foram manifestadas, e alguns estudantes optaram por não se expressar verbalmente, indicando com um gesto de cabeça que não desejavam falar. Imediatamente após essa breve discussão, iniciamos a implementação do questionário diagnóstico, com o objetivo de avaliar o nível de conhecimento dos alunos em relação à probabilidade (figura 18). Buscamos também verificar se, após a oficina, alguns conceitos e ideias sobre probabilidade foram construídos ou aprimorados.

Figura 18 – Primeiro momento da oficina.



Fonte: Autor (2023).

Na segunda etapa, apresentamos alguns questionamentos motivadores para incentivar os alunos a identificar a aplicação da probabilidade no dia a dia. Por exemplo, propusemos a questão: “Como se calcula a possibilidade de um candidato 'A' ou um candidato 'B' vencer uma eleição?”. Neste momento, alguns alunos fizeram referências ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), embora a resposta tenha sido considerada

adequada, os estudantes não conseguiram estabelecer a relação entre a situação descrita e a probabilidade. Outros participantes deram as seguintes respostas:

Estudante C: “Uma semana ou um dia antes das eleições, eles vão de porta em porta oferecendo dinheiro ou um milheiro de telhas.”

Estudante D: “Eles realizam uma pesquisa, semelhante à do Data Folha, com algumas perguntas.”

A partir dessa discussão, os estudantes compreenderam como criar uma pesquisa, primeiramente precisamos determinar o público-alvo da pesquisa e posteriormente uma amostra que precisa ser representativa. Após a realização da pesquisa, deve-se elaborar um perfil com base nos resultados obtidos com o objetivo de identificar frequências. Porque, mesmo considerando uma margem de erro, é provável que outras pessoas que se enquadram nesse perfil compartilhem do mesmo pensamento. Com isso os alunos identificaram a relação da probabilidade com as pesquisas estatísticas.

No terceiro momento, exploramos os aspectos históricos fundamentais relacionados ao surgimento da probabilidade, estabelecendo conexões com a atualidade (figura 19). Destacamos o ancestral do dado, conhecido como astrágalo, utilizado no jogo de tali ou jogo de ossos, além de abordar a cobrança de seguros marítimos e as contribuições de importantes teóricos. As explorações históricas foram conduzidas de maneira descontraída e envolvente.

Figura 19 – Discussão sobre o contexto histórico da Probabilidade.



Fonte: Autor (2023).

No quarto momento iniciamos a parte teórica da probabilidade, seguindo a sequência apresentada na figura 20.

Exploramos os conceitos de experimentos, espaço amostral e eventos por meio da introdução de três experiências distintas: uma ampulheta (experimento determinístico), dados e uma urna contendo bolinhas rosas e verdes (experimentos aleatórios). Para esclarecer as ideias relacionadas ao espaço amostral e aos eventos, utilizamos os experimentos com dados e a urna (figura 21). Mantivemos constantemente uma conexão com o contexto histórico discutido anteriormente, referente à Lei do Espaço Amostral de Cardano e à perspectiva de Bernoulli sobre a "Lei dos Grandes Números". Essa lei postula que, à

Figura 20 – Sequência dos conteúdos de probabilidade.



Fonte: Autor (2023).

medida que o número de experimentos repetidos aumenta, a média dos resultados tende a se aproximar da probabilidade real do evento.

Figura 21 – Explorações de experimentos.



Fonte: Autor (2023).

No quinto momento, abordamos as definições de probabilidade, começando pela teoria clássica da probabilidade, o que nos levou de volta aos experimentos com urna, moeda e dado (figura 21). Distribuímos cinco dados para cada mesa e iniciamos a exploração.

A professora questionou: “Qual é a probabilidade de obter a face 3 em um dado justo?”

Os participantes responderam: “Uma chance em seis.”

A professora então indagou: “Certo, então o que esse número representa em relação à execução do experimento?”

Os participantes admitiram: “Não sei.”

Observou-se que, embora os alunos tenham respondido corretamente, não compreendiam o significado desse número para o evento em questão. Parece que a resposta foi dada de

forma mecânica e superficial. Diante disso, solicitou-se que os participantes realizassem o experimento seis vezes e registrassem quantas vezes a face três aparecia.

Após isso, a professora perguntou ao estudante E:

Professora: “E então, quantas vezes a face três apareceu?”

Estudante E: “Nenhuma.”

A professora complementou: “Então, isso significa que, você executou o experimento seis vezes, nenhuma vez a face três foi obtida?”

O estudante E: “Sim.”

Após esse diálogo, alguns estudantes começaram a compartilhar seus resultados, e uma manifestação em particular despertou atenção.

Estudante F: “Professora, o meu caiu uma vez o três então se eu joguei o dado seis vezes e caiu uma vez a face três o meu está certo?”

Professora: “O que quer dizer está certo?”

Estudante F: “Por que deu igual ao que a gente tinha feito antes.”

O estudante F referia-se ao resultado da probabilidade de obter a face 3 em um dado justo.

Professora: “Vou retomar uma pergunta que ficou sem resposta: o que representa $1/6$ para esse experimento?”

Estudante F: “Que eu vou jogar seis vezes e vai sair três uma vez “olhai ta vendo que o meu deu certo”.

Embora o estudante F estivesse parcialmente correto, ele acreditava que, devido ao fato de seu experimento corroborar com o resultado teórico probabilístico, isso indicava uma validação. No entanto, ela não sabia que era apenas uma coincidência, uma obra do acaso. Aproveitei o momento para iniciar a discussão sobre o motivo pelo qual a maioria dos experimentos executados não se igualava a esse valor teórico de probabilidade. Assim, voltamos ao que havíamos investigado no contexto histórico com Jakob Bernoulli e chegamos à conclusão de que quanto maior a frequência da repetição do experimento, maior seria a aproximação do valor teórico.

A última etapa da oficina foi dedicada à execução do experimento "O mistério do Chocalho". Inicialmente, permiti que os alunos explorassem o objeto de formação empírica enquanto eu explicava como tudo iria acontecer (figura 22). Um dos estudantes ficou um pouco inquieto com a ideia de tentar descobrir a quantidade de bolas presentes no interior do chocalho através de duas aberturas. Assim, ele comentou:

Estudante H: “tem como não, professora, só se for na sorte”.

Após esse comentário, iniciamos as explorações. Foram formados 3 grupos, e cada grupo tinha 3 minutos para explorar o chocalho a partir do senso comum. Cada grupo deveria estimar através dessa exploração quantas bolas havia. Após isso, apresentamos

Figura 22 – Explorações do chocalho.



Fonte: Autor (2023).

como iria decorrer nosso experimento e como seria o jeito mais adequado de jogar o chocalho para não haver interferências nas probabilidades.

Como naquele momento havia 24 participantes, solicitei que 6 pessoas jogassem duas vezes para completar as 30 repetições. Ao anotar os resultados a mostra no punho do chocalho, alguns participantes fizeram algumas observações. Uma delas foi:

Estudante I: “professora, saiu mais rosa do que verde, então tem mais rosa”.

Verificou-se que através da exposição dos dados obtidos no experimento os estudantes começaram a obter evidências respaldadas sobre a quantidade de bolas dentro do chocalho. Após calcularmos cada probabilidade, começamos a verificar os palpites dos grupos através do diagrama de árvore.

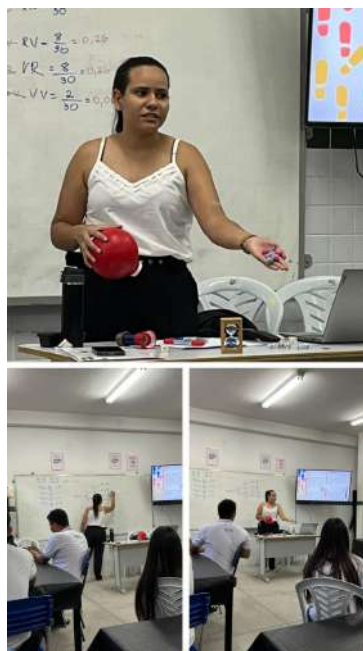
Observou-se que nenhum dos grupos acertou a quantidade de bolas presente no chocalho nos palpites, mas um dos grupos chegou próximo, segundo eles havia 5 bolas, 3 rosas e 2 verdes dentro do chocalho. Exploramos através desse palpite, calculamos a probabilidade de haver 5 bolas nessas condições, e percebemos que as probabilidades deram um pouco distantes, porém menores (figura 23). Então, um dos alunos falou:

Estudante J: “Se com cinco o resultado é menor, então tem seis”.

Identificou-se o palpite e, então, verificou-se através dos cálculos probabilísticos. Eles perceberam que os resultados foram muito próximos, alguns até iguais. Todos se convenceram de que a probabilidade de ter 6 bolas, 4 rosas e 2 verdes era muito alta. Nesse momento, abri o chocalho e, de fato, comprovamos que havia essa quantidade de bolas

(figura 23). Todos os estudantes se mostraram surpresos de realmente conter as 6 bolas (4 rosas e 2 verdes). Posteriormente, procedemos à aplicação do questionário de verificação da aprendizagem, com o objetivo de identificar qualquer alteração, seja positiva ou negativa, nos conceitos sobre Probabilidade.

Figura 23 – Validação do experimento.



Fonte: Autor (2023).

No questionário de verificação, foi disponibilizado um espaço para que os estudantes pudessem expressar seus comentários sobre a experiência vivenciada. Criamos uma nuvem de palavras utilizando as palavras-chave extraídas desses comentários (figura 24).

Figura 24 – Nuvem de palavras dos comentários dos alunos



Fonte: Autor (2023).

Com base na figura 24, podemos destacar que a importância do material manipulável nas aulas de matemática é indiscutível. Esses recursos proporcionam uma abordagem prática e envolvente, facilitando a compreensão dos conceitos, estimulando a participação

ativa dos alunos, conectando a teoria à prática e fomentando a colaboração. Ao integrar esses materiais de maneira eficaz, os educadores criam um ambiente propício para o desenvolvimento sólido e significativo das habilidades matemáticas dos estudantes.

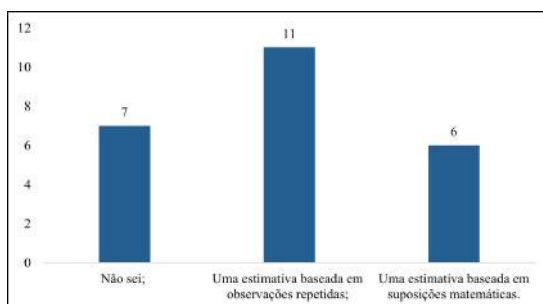
6.2 Análise e discussão dos dados da oficina

No primeiro momento utilizamos um questionário diagnóstico para investigar o nível de conhecimento dos 24 estudantes sobre probabilidade, com seis questões de múltiplas escolhas. O número de alternativas em cada questão varia entre três e quatro. As perguntas foram organizadas de forma alternada onde obtinham-se questões sobre noções básicas de probabilidade, a importância da probabilidade no cotidiano, as experiências anteriores com os conceitos de probabilidade e sobre o uso de material manipulável na aula de probabilidade.

Os alunos foram questionados sobre o que eles entendiam por probabilidade frequentista, 11 alunos (45,83%) concordaram que probabilidade frequentista é uma estimativa baseada em observações repetidas. Outros 6 alunos (25%) marcaram que “a probabilidade frequentista é uma estimativa baseada em suposições matemáticas. Porém, tivemos 7 alunos (29,2%) que afirmaram não saber o conceito de probabilidade frequentista. Na figura 25 podemos observar que mais da metade dos estudantes marcaram a alternativa de forma incorreta. É fato os conceitos da probabilidade devem ser explorados desde o Ensino Fundamental, conforme a BNCC sugere:

Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável. Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista) (BRASIL, 2018, p.304)

Figura 25 – O que você entende por probabilidade frequentista?

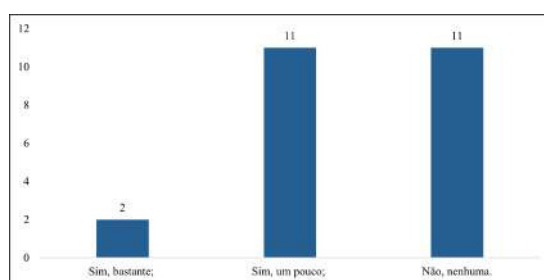


Fonte: Autor (2023).

A probabilidade frequentista é uma interpretação da probabilidade que se baseia na ideia de repetição de experimentos. De acordo com Dantas (2013), nessa abordagem, a probabilidade de um evento é definida como a frequência relativa com que o evento ocorre em muitas repetições idênticas ou similares de um experimento.

Na segunda pergunta os alunos foram questionados sobre suas experiências anteriormente com os conceitos de probabilidade, podemos observar na figura 26 que 11 estudantes (45,83%) responderam que não tiveram nenhuma experiência com esses conceitos. Outros 2 estudantes (8,33%) afirmaram que tiveram bastante experiências anteriores com os conceitos de probabilidade. Mas tiveram 11 estudantes (45,83%) que afirmaram ter tido pouca experiência com esses conceitos. Apesar de 13 estudantes confirmar suas experiências com probabilidade, obtivemos um número considerável de estudantes do segundo ano do ensino médio que marcaram a opção "Não, nenhuma".

Figura 26 – Você já teve alguma experiência anterior com conceitos de probabilidade?



Fonte: Autor (2023).

A discussão sobre probabilidade na sala de aula prepara os alunos para um mundo cada vez mais orientado por dados. Em uma era em que a informação é abundante e a capacidade de interpretar dados é uma habilidade essencial, entender a probabilidade oferece uma vantagem significativa.

Segundo Batanero et al. (2016), para se integrarem efetivamente na sociedade, os cidadãos necessitam transcender um pensamento determinista e reconhecer a presença fundamental do acaso na natureza. Da mesma forma, devem desenvolver estratégias e modos de raciocínio que os auxiliem na tomada de decisão apropriada em contextos tanto do dia a dia quanto profissionais, nos quais a aleatoriedade desempenha um papel significativo.

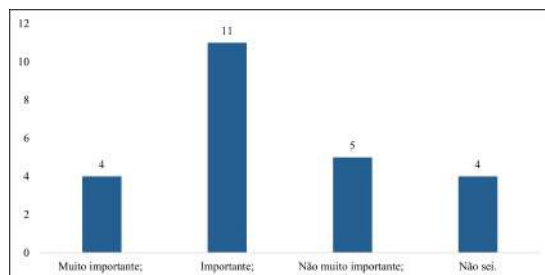
Na figura 27 podemos observar que 15 estudantes (62,5%) concordam sobre a importância da probabilidade em situações do dia a dia. Contudo, ao serem indagados sobre os motivos dessa relevância, as respostas ainda se limitam, em sua maioria, a jogos de azar.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN Matemática determina o principal objetivo para o estudo de probabilidade:

É a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória, onde é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifesta intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (BRASIL, 1997, p.40).

Explorar os conteúdos probabilísticos de forma estática e mecânica induz o estudante apenas a reprodução de procedimentos e não a compreensão de acontecimentos do cotidi-

Figura 27 – Qual é a sua percepção sobre a importância da probabilidade em situações do dia a dia?



Fonte: Autor (2023).

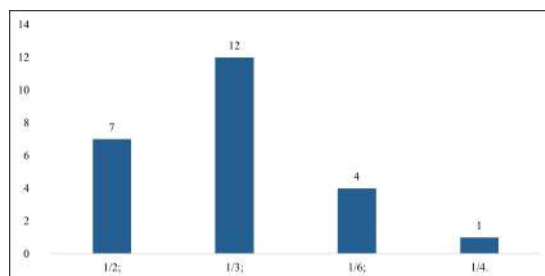
ano. Conforme Santos et al (2019) documentos oficiais como a BNCC e os PCN orientam os professores a conduzirem processos de pesquisa com seus alunos, explorando temas sociais, relacionados ao cotidiano e interdisciplinares.

Os resultados expostos na figura 28 evidenciam uma situação a ser investigada, pois, 12 estudantes (50%) afirmaram que a probabilidade de jogar um dado justo e obter um número ímpar é igual a $1/3$. Ao serem questionados pela resposta incorreta da grande maioria, um dos estudantes tentou explicar o raciocínio.

Comentário do estudante K: “Professora, tem 3 faces “ímpar” no dado, então pode cair uma dessas três”.

Verificou-se, através da resposta do estudante K, uma confusão na definição de espaço amostral. Outros 7 estudantes (29,37%) assinalaram a alternativa correta $1/2$, enquanto 4 estudantes (16,7%) marcaram a alternativa que a probabilidade de jogar um dado justo e obter um número ímpar é igual a $1/6$, e apenas 1 estudante (4,16%) assinalou a alternativa $1/4$.

Figura 28 – Qual é a probabilidade de jogar um dado justo e obter um número ímpar?

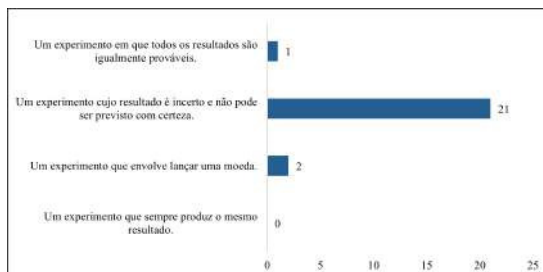


Fonte: Autor (2023).

Observou-se na figura 29 que a maioria dos estudantes responderam corretamente a pergunta “o que é um experimento aleatório?”, onde 21 estudantes (87,5%) responderam corretamente concordando que um experimento aleatório o seu resultado é incerto e não pode ser previsto com certeza. Apenas 3 estudantes (12,5%) responderam essa questão

de forma equivocada. Dessa forma, constatou-se que a maioria dos alunos presentes têm compreensão sobre o que é um experimento aleatório.

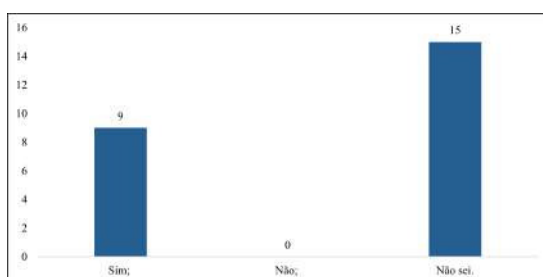
Figura 29 – O que é um experimento aleatório?



Fonte: Autor (2023).

Na última pergunta do questionário diagnóstico (figura 30) exploramos a possibilidade do uso do material manipulável, como o chocalho, pode facilitar o aprendizado de probabilidade. Diante disso, verificou-se que 9 estudantes (37,5%) acreditam que pode facilitar e outros 15 estudantes (62,5%) optaram pela alternativa "Não sei". Entretanto, nenhum dos estudantes desacredita que o uso do material manipulável pode facilitar o aprendizado sobre probabilidade.

Figura 30 – Você acredita que o uso de material manipulável, como o chocalho, pode facilitar o aprendizado de probabilidade?



Fonte: Autor(2023).

O material didático manipulável, por si só, não pode garantir a ocorrência de aprendizagem. Segundo Lorenzato (2019), apenas o material didático não assegura um ensino eficaz, nem uma aprendizagem significativa, e não substitui a presença do professor.

No término da oficina aplicamos outro questionário, com o objetivo de verificar a aprendizagem dos estudantes. O questionário era composto por seis questões, quatro eram objetivas e duas abertas. Das seis questões elaboradas, vamos nos deter apenas a primeira, quinta e sexta questão, pois elas estão diretamente ligadas aos objetivos presentes na oficina e na perspectiva da pesquisa que estávamos querendo analisar.

A escolha de duas questões abertas tem o objetivo de identificar de forma mais precisa os conceitos construídos na oficina. A análise dessas respostas será de forma qualitativa e apenas para a questão um foi estabelecido classificações para as respostas como

adequadas, parcialmente adequadas e inadequadas. Consideramos “adequadas” as perguntas que foram respondidas de acordo com as instruções em sala sobre as definições de probabilidade. “Parcialmente adequadas”, avaliamos as respostas que se encaixam no contexto, embora possam não utilizar as palavras corretas para expressar o conceito. E sobre “inadequada”, julgamos as respostas que se afastam das ideias apresentadas na sala de aula.

Questão 1: Você pode explicar o conceito de probabilidade frequentista após a oficina?

Dos 24 estudantes, apenas um deles deixou essa questão em branco. Das respostas à essa questão 10 foram adequadas ao que buscávamos do ponto de vista conceitual, por exemplo:

Estudante L: “É o conceito de repetição até obter o valor aproximado ao valor da probabilidade”.

Estudante M: “É a situação nas mesmas condições que acontece com uma frequência”.

Estudante N: “É a probabilidade de algo acontecer após uma série de repetições, ou seja, com frequência”.

Todas as outras respostas consideradas adequadas, circundaram as respostas dos estudantes citados acima.

Fazendo uma comparação entre a primeira pergunta do questionário diagnóstico e a primeira pergunta do questionário de verificação podemos verificar algumas mudanças. Podemos verificar na figura 25 que sete estudantes marcaram a alternativa “não sei” na primeira pergunta do questionário diagnóstico, desses 7 estudantes, cinco conseguiram responder adequadamente a primeira pergunta do questionário de verificação de aprendizagem após a oficina, dos 6 estudantes que marcaram equivocadamente na primeira pergunta do questionário diagnóstico, dois, também conseguiram responder de forma adequada a primeira pergunta do questionário de verificação de aprendizagem.

Portanto, os dados apresentam que, antes a oficina alguns estudantes não apresentavam nenhum conhecimento prévio sobre a definição da probabilidade frequentista e após a oficina conseguiram expor respostas adequadas sobre esse conceito no questionário de verificação.

Ainda sobre a primeira pergunta do questionário de verificação, quatro respostas foram consideradas parcialmente adequadas, pois, apresentavam afirmações que se afastavam um pouco dos conceitos explorados em sala de aula. Como por exemplo:

Estudante O: “Você usa um objeto que possa dar o mesmo resultado várias vezes”.

Estudante P: “É quando algo ocorre com frequência depois de ser feita várias vezes”.

Estudante Q: “É a probabilidade de uma frequência onde a probabilidade é frequente”.

Verificamos a partir das análises acima que houve uma evolução sobre o conceito de probabilidade frequentista nas respostas dos estudantes a partir das discussões e dos experimentos executados na oficina. A aprendizagem fundamenta-se "na experiência, sendo a construção de conceitos matemáticos um processo longo que exige o envolvimento ativo do aluno, progredindo do concreto para o abstrato"(SERRAZINA, 1990). A utilização do material didático manipulável na oficina teve uma função fundamental no processo de aprendizagem dos estudantes, atuando como um auxiliar de ensino.

Iremos utilizar a figura 27, na qual se refere a questão 3 do questionário diagnóstico para fazer o comparativo de como a oficina afetou a perspectiva dos estudantes sobre a importância da probabilidade em situações do dia a dia. Observa-se na figura 27 que, cinco estudantes classificaram a importância da probabilidade no dia a dia como "não muito importante". Entretanto, no questionário de verificação da aprendizagem após a oficina todos os cinco estudantes mudaram de opinião:

Estudante R: "A probabilidade estar mais presente no nosso dia a dia do que imaginamos."

Estudante S: "Mostrando como usamos frequentemente a probabilidade em situações simples".

Estudante T: "A importância da probabilidade é enorme eu achava desnecessário, mas a oficina mudou minha opinião."

Durante a oficina discutimos sobre a presença da probabilidade no dia a dia a partir do seu contexto histórico, os jogos de azar, pesquisas eleitorais, pesquisa sobre eficácia de remédios ou vacinas, seguros e entre outros. Essa abordagem corrobora para que o estudante comece a identificar a aplicação da probabilidade com mais facilidade e a sua importância nas nossas vidas.

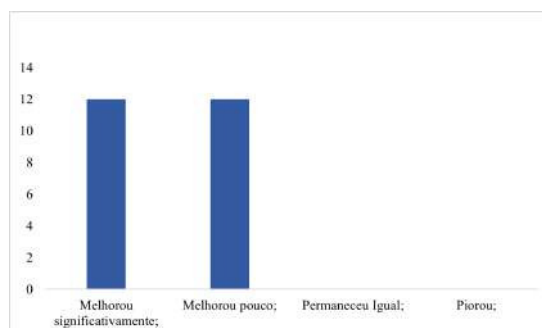
Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL,1997) a principal questão do estudo da Probabilidade é permitir que os alunos compreendam que muitos eventos cotidianos são de natureza questionada, e que seja possível identificar os resultados prováveis desses eventos. Ao adquirir conhecimento em Probabilidade, os alunos desenvolvem a capacidade de análise de incertezas, de tomar decisões baseadas em probabilidades.

A compreensão da Probabilidade oferece uma estrutura para lidar com a incerteza inerente a muitos aspectos da vida cotidiana. Isso se aplica a diversas áreas, desde as decisões financeiras até as escolhas pessoais e avaliação de riscos. Ao considerar a aleatoriedade em torno de eventos, os indivíduos estão mais bem preparados para interpretar informações, tomar decisões fundamentadas e enfrentar situações em que a incerteza desempenha um papel crucial.

Ao analisarmos os dados da figura 31, verificou-se que 12 estudantes (50%) concordaram que a oficina melhorou significativamente a sua compreensão de probabilidade frequentista e os outros 12 estudantes (50%) marcaram a opção "melhorou um pouco".

Nenhum dos estudantes afirmou que a sua compreensão piorou ou permaneceu igual após a oficina.

Figura 31 – Como a oficina afetou sua compreensão de probabilidade frequentista?



Fonte: Autor(2023).

Através da oficina “O Mistério do Chocalho”, os estudantes tiveram a oportunidade de desenvolver habilidades e competências alinhadas à BNCC. Isso inclui a capacidade de resolver situações-problema do cotidiano, analisar riscos e oportunidades presentes em situações do dia a dia. Além disso, esses dados ressaltam a importância do uso de material manipulável no ensino da probabilidade no Ensino Médio.

O objetivo da aplicação da oficina foi confrontar as definições clássica e frequentista da probabilidade por meio de contextos históricos e experimentos. Isso permitiu que os estudantes não apenas discernissem as diferenças entre essas definições, mas também compreendessem a completude que as envolve.

7 Considerações Finais

A pesquisa teve como objetivo desenvolver um material didático manipulável de baixo custo para auxiliar o ensino de probabilidade. Esse material foi inspirado no chocalho apresentado pelo Prof. Dr. Cláudio Possani em seu canal no *youtube*. Nosso recurso incorpora adaptações significativas que ampliam as possibilidades de exploração em sala de aula.

A concepção do material manipulável levou em consideração não apenas a eficácia pedagógica, mas também a acessibilidade financeira. O baixo custo de produção torna este recurso acessível a diversas instituições educacionais, contribuindo para a democratização do acesso ao ensino de probabilidade.

Após a construção do material, realizamos testes para validar sua eficácia, aprofundando o entendimento sobre o chocalho. Esses testes visaram identificar padrões relacionados à quantidade de bolas, determinar a forma adequada de jogar o chocalho e estabelecer um número mínimo de repetições para análise consistente.

Dessa maneira, constatou-se a viabilidade de aplicar esse recurso em uma turma de segundo ano do ensino médio por meio de uma oficina, com o intuito de avaliar as contribuições que o material poderia proporcionar para o ensino de probabilidade. Observou-se ao examinarmos as respostas dos questionários diagnósticos e de verificação que, ao final da oficina, vários alunos foram capazes de expressar, com suas próprias palavras, o conceito de probabilidade frequentista.

A aplicação do “mistério do chocalho”, como um problema central para a exploração das visões clássica e frequentista, mostrou-se particularmente eficaz. Este enigma desafiador não apenas estimulou o pensamento crítico dos estudantes, mas também proporcionou uma oportunidade única para a aplicação prática dos conceitos teóricos, aproximando a teoria da realidade do cotidiano dos aprendizes.

Outros pontos positivos que merecem destaque ao empregar um material manipulável estão associados a melhora da interação entre aluno e professor, bem como ao reconhecimento da relevância da probabilidade no dia a dia. Diante disso, essa abordagem conferiu significado prático ao que está sendo estudado.

Nos comentários dos alunos, é perceptível que muitos deles apontaram para a diversão proporcionada pela atividade. Durante toda a oficina, os alunos demonstraram interesse constante em participar e mantiveram uma curiosidade contínua em relação ao chocalho. Essa abordagem revela a capacidade de tornar as aulas mais envolventes e interessantes para os alunos.

A principal contribuição deste estudo está no desenvolvimento de um material manipulável, testado e aplicado no ensino médio para explorar o conceito de probabilidade, com ênfase na abordagem frequentista. Embora tenha se originado a partir de um mo-

delo inicial, o material foi adaptado para permitir que os professores explorem diversas situações, tudo utilizando um único recurso manipulável de fácil construção.

Apesar dos pontos positivos, reconhecemos limitações, como o conhecimento prévio dos alunos e as dificuldades no ensino de probabilidade que se mostra recorrente na educação básica e isso pode afetar diretamente no tempo indicado para a execução da oficina. Dessa forma, recomendamos dividir a oficina em dois dias, dedicando o primeiro ao contexto histórico e conceitos fundamentais, e o segundo às definições mais aprofundadas e ao experimento do chocalho.

Em conclusão, enfatizamos a importância de recursos pedagógicos inovadores e acessíveis. O material manipulável criado não apenas preenche uma lacuna no ensino de probabilidade, mas também representa um ponto de partida para pesquisas e aprimoramentos futuros no âmbito da educação matemática. Sugere-se a realização de oficinas destinadas a professores ou alunos da educação básica. Durante essas oficinas, os participantes teriam a oportunidade de construir individualmente seus próprios chocalhos. Além disso, poderiam ser exploradas pesquisas sobre a construção do chocalho utilizando materiais recicláveis, bem como a investigação da eficácia do material ao modificar o número de aberturas no punho do chocalho.

Referências

- AFONSO, P.; GIL, H.; SANTOS, N. Structured manipulable material versus applet in the development of algebraic thinking at the 1st cycle of basic education. 2017.
- AIRES, A. P.; NETO, T.; VISEU, F. Revisiting manipulatives in the learning of geometric figures. *Frontiers in Education*, 2023.
- ANDRADE, E. C. d. S. O ensino de probabilidade: uma proposta didática com o uso de materiais manipuláveis. Universidade Federal do Tocantins, 2021.
- BATANERO, C. et al. *Research on Teaching and Learning Probability*. [S.l.]: SprigerOpen, 2016.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.
- BRASIL, M. Parâmetros curriculares nacionais. *Ministério da educação e do desportosecretaria*, 1997.
- _____. Base nacional comum curricular. *Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica*, 2018.
- CALABRIA, A. R.; CAVALARI, M. F. Um passeio histórico pelo início da teoria das probabilidades. *Campinas: SBHMAT*, 2013.
- CHAPIN, S. et al. Navigating through data analysis and probability in grades. 2002.
- DANTAS, C. A. B. *Probabilidade: Um Curso Introdutório Vol. 10*. [S.l.]: Edusp, 2013.
- DINIZ, J. V. D. S. Uso de materiais didáticos no ensino de probabilidade. 2022.
- D'AMBOSIO, U. *Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer*. [S.l.]: Ática, 1998.
- FARIAS, T. A.; NOGUEIRA, D. A.; SILVA, N. R. O uso do quincunx como recurso para o ensino de probabilidade e estatística. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 3, n. 1, 2015.
- FAUZI, I. et al. Persepsi guru matematika dalam penggunaan media manipulatif materi perbandingan pada karakter siswa. *Buana Matematika: Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika*, 2022.
- FERREIRA, A. C.; REZENDE, F. M. d. C. O ensino de probabilidade na educação básica: Análise da produção de um grupo de estudos de professores de matemática. 2011.
- FILHO, A. D. S. V. Probabilidades e suas aplicações. *Porto Velho: PROFMAT*, 2020.
- GAZIRI, E. S.; RODRIGUES, F. C. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão reflections on use of material in school teaching of mathematics manipulable: trial of action to ponder. 2012.

LORENZATO, S. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. [S.l.]: Autores Associados, 2019.

LOZADA, C. de O. et al. Recursos didáticos para a formação de conceitos de probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental. *Diversitas Journal*, v. 6, n. 1, p. 1638–1647, 2021.

Professor Possani. *O mistério do chocalho*. 2022. Disponível em : <https://www.youtube.com/watch?v=9wQyHP5Q3Tk> . Acesso em: 04 de Dezembro 2023.

RESOLUÇÃO, C. Ceb nº 4, de 13 de julho de 2010. define diretrizes curriculares nacionais gerais para a educação básica. *Diário Oficial da União*.

ROBERTO, D. A. Dominó probabilístico: uma concepção no ensino de matemática/probabilidade por meio dos jogos. Universidade Federal da Paraíba, 2019.

SANTOS, L. C. d. *Situações cotidianas sob o olhar da probabilidade*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2019.

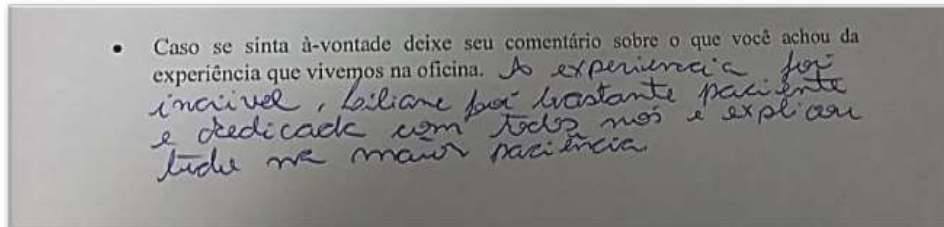
SANTOS, N. P.; SOBRINHO, J. A. d. C. M. Materiais manipuláveis no âmbito do ensino de matemática: Contribuições para a prática pedagógica manipulable material in the context of math teaching: Contributions to pedagogical practice. *Revista FSA*, 2016.

SERRAZINA, M. d. L. Os materiais e o ensino da matemática. *Educação e Matemática*, n. 13, p. 1–1, 1990.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 8, n. 16, p. 143–153, 2008.

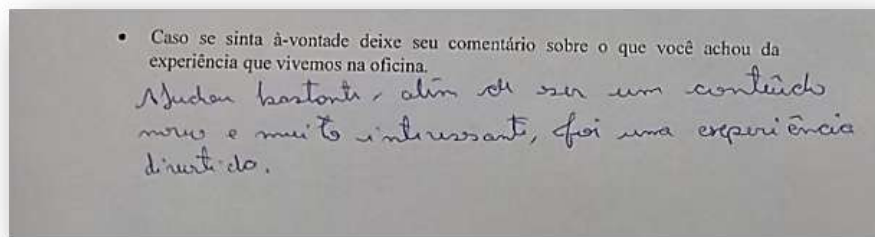
APÊNDICE A – Comentários dos alunos

Figura 32 – Comentário 01.



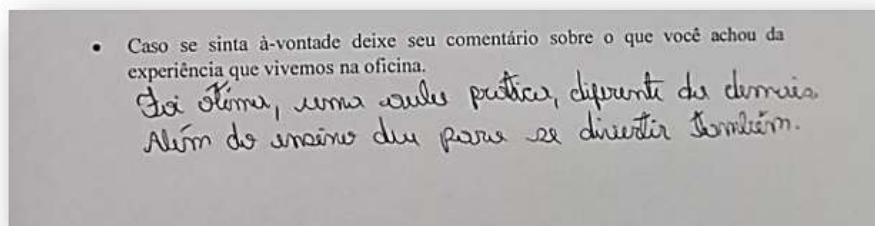
Fonte: Autor (2023).

Figura 33 – Comentário 02.



Fonte: Autor (2023).

Figura 34 – Comentário 03.



Fonte: Autor (2023).

APÊNDICE B – Questionário diagnóstico

Questionário Inicial de Sondagem Oficina: O Mistério do Chocalho – Conteúdo explorado: Probabilidade Prof.^a Liliane Marques

1. O que você entende por probabilidade frequentista?
 - Não sei;
 - Uma estimativa baseada em observações repetidas;
 - Uma estimativa baseada em suposições matemáticas.

2. Você já teve alguma experiência anterior com conceitos de probabilidade?
 - Sim, bastante;
 - Sim, um pouco;
 - Não, nenhuma.

3. Qual é a sua percepção sobre a importância da probabilidade em situações do dia a dia?
 - Muito importante;
 - Importante;
 - Não muito importante;
 - Não sei.

4. Qual é a probabilidade de jogar um dado justo e obter um número ímpar?
 - 1/2
 - 1/3
 - 1/6
 - 1/4

5. O que é um experimento aleatório?
 - Um experimento que sempre produz o mesmo resultado.
 - Um experimento que envolve lançar uma moeda.
 - Um experimento cujo resultado é incerto e não pode ser previsto com certeza.
 - Um experimento em que todos os resultados são igualmente prováveis.

6. Você acredita que o uso de material manipulável, como o chocalho, pode facilitar o aprendizado de probabilidade?

Sim;

Não;

Não sei.

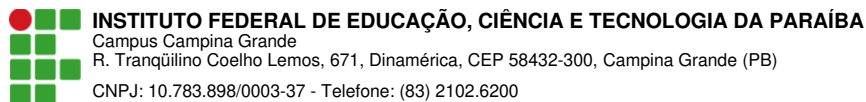
APÊNDICE C – Questionário de verificação

Oficina: O Mistério do Chocalho – Conteúdo explorado: Probabilidade

Prof.^a Liliane Marques

1. Você pode explicar o conceito de probabilidade frequentista após a oficina?
2. Você se sente mais confiante em calcular probabilidades agora?
 - Sim;
 - Não;
 - Um pouco.
3. Qual é a probabilidade de obter um número maior que 4 ao lançar um dado justo?
 - 1/2
 - 1/3
 - 1/4
 - 1/6
4. Como você descreveria sua compreensão atual de probabilidade?
 - Muito boa.
 - Boa.
 - Regular.
 - Alta, melhorou após a oficina.
5. Como a oficina afetou sua perspectiva sobre a importância da probabilidade em situações do dia a dia?
6. Como a oficina afetou sua compreensão de probabilidade frequentista?
 - Melhorou significativamente.
 - Melhorou um pouco.
 - Permaneceu igual.
 - Piorou.

- Caso se sinta à-vontade deixe seu comentário sobre o que você achou da experiência que vivemos na oficina.



Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega da versão final do TCC

Assunto: Entrega da versão final do TCC
Assinado por: Liliane Paulo
Tipo do Documento: Anexo
Situação: Finalizado
Nível de Acesso: Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência: Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Liliane Marques Paulo, ALUNO (201811230028) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 18/12/2023 08:15:44.

Este documento foi armazenado no SUAP em 18/12/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1026515
Código de Autenticação: cf15e45239

