INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FRANKLIN FEITOSA BARBOSA

O TEOREMA DE STOLZ-CESÀRO E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES

CAJAZEIRAS - PB
2023

FRANKLIN FEITOSA BARBOSA

O TEOREMA DE STOLZ-CESÀRO E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada junto ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.
Orientador:
Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza.

CAJAZEIRAS - PB

2023

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

B238t Barbosa, Franklin Feitosa.
O teorema de stolz-cesàro e algumas de suas aplicações / Franklin Feitosa Barbosa.– 2023.

62f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2023.

Orientador(a): Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza.

1. Teorema de Stolz-Cesàro. 2. Sequências numéricas. 3. Limites. 4. Funções reais. 5. Aritmética. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ CDU: 511(043.2)

FRANKLIN FEITOSA BARBOSA

O TEOREMA DE STOLZ-CESÀRO E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao programa de **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 12/12/2023

Banca Examinadora:

João Paulo de Araújo Souza.

Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Prof. Dr. Vinicius Martins Teodosio Rocha
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Diego Dias Felix

Prof. Dr. Diego Dias Felix
Secretaria Municipal de Educação - Santa Teresinha (PB)

CAJAZEIRAS - PB
2023

Este trabalho é dedicado a toda minha família. Em particular, ao meu avô Chico Camilo (in-memoriam) que sempre me incentivou a estudar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, criador de todas as coisas, por me proporcionar a oportunidade de estudar e por me fortalecer todas as vezes que tive vontade de desistir.

Agradeço também a meus pais, Antônio e Deuzani, a meus irmãos, Kerly, José Neto, Sadrak e Isaías, que sempre me incentivaram a estudar.

Não posso deixar de agradecer a minha amada esposa, Maiane e meus filhos Yasmin e Pedro Lucas por todo o apoio e por entenderem todas as vezes que precisei estar ausente em virtude dos estudos.

Ao meu orientador, Prof. Me. João Paulo de Araújo Souza, pela paciência, dedicação, empenho e sugestões para que este trabalho viesse a se concretizar.

Aos professores Prof. Dr. Vinícius Martins Teodósio Rocha e Prof. Dr. Diego Dias Félix por aceitarem participar desta banca, pelas sugestões e contribuições para este trabalho.

A todos os meus colegas de curso pelo companheirismo durante esse processo. Em particular, agradeço a Marcos, Pablo, Rafael, Tiago e Nágila pelos conhecimentos trocados durante a graduação.

Agradeço ao IFPB - Campus Cajazeiras e todos os seus funcionários, em especial, a todos os professores que contribuíram com a minha formação.

Por fim, meu muito obrigado a todos que participaram direta e indiretamente da elaboração desse trabalho.

Se te mostrares fraco no dia da angústia, a tua força será pequena.

Bíblia, Provérbios 24:10

RESUMO

Este trabalho apresenta uma pesquisa sobre o Teorema de Stolz-Cesàro, também chamado de uma versão discreta da Regra de L'Hopital para funções reais. Tal teorema é um resultado importante da teoria das sequências numéricas e limites, pois permite encontrar o valor de convergência de certas sequências numéricas de maneira bastante eficaz. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é apresentar um material abrangendo o Teorema de Stolz-Cesàro que possa servir de consulta para professores e estudantes. Para tanto, ao longo do texto, são apresentados alguns resultados da teoria de sequências numéricas bem como um estudo teórico sobre o Teorema de Stolz-Cesàro e algumas de suas consequências, em particular, prova-se a relação existente entre o limite das médias aritmética e geométrica, além disso são apresentadas várias aplicações imediatas ao teorema que permite constatar a sua aplicabilidade e eficácia. O percurso metodológico deste trabalho passa por uma pesquisa de procedimento bibliográfico, natureza básica, abordagem qualitativa e objetivos exploratórios. Diante do que é apresentado nessa pesquisa, é possível verificar a praticidade e aplicabilidade do Teorema de Stolz-Cesàro, o que nos leva à constatação de que sua utilização por alunos e professores pode ser uma boa alternativa para aprofundar os conhecimentos sobre limites de sequências numéricas.

Palavras-chave: Sequências numéricas; Limites; Teorema de Stolz-Cesàro.

ABSTRACT

This work presents research on the Stolz-Cesàro Theorem, also called a discrete version of L'Hopital's Rule for real functions. This theorem is an important result of the theory of numerical sequences and limits, as this theorem allows finding the convergence value of certain numerical sequences in a very effective way. Therefore, the objective of this work is to present material covering the Stolz-Cesàro Theorem that can serve as a reference for teachers and students. To this end, throughout the text, some results from the theory of numerical sequences are presented as well as a theoretical study on the Stolz-Cesàro Theorem and some of its consequences, in particular, the relationship between the limit of arithmetic and geometric means is proved, in addition, several immediate applications of the theorem are presented, which allows us to verify its applicability and effectiveness. The methodological path of this work involves a bibliographical research procedure, basic nature, qualitative approach and exploratory objectives. Given what is presented in this research, it is possible to verify the practicality and applicability of the Stolz-Cesàro Theorem, which leads us to the conclusion that its use by students and teachers can be a good alternative to deepen knowledge about the limits of numerical sequences.

Keywords: Numerical sequences; Limits; Stolz-Cesàro Theorem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Gráfico da sequência $a_n = \frac{1}{n}$ 17
Figura 3.2 – Interpretação Geométrica de uma sequência convergente 20
Figura 4.1 – Os pontos da curva $a_n = f(b_n)$ se aproximam de uma reta 37
Figura 4.2 – Os pontos (b_n, a_n) estão entre duas retas 38

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11

2 METODOLOGIA 14

3 LIMITES DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS 16

3.1 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS 16

3.2 LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA NUMÉRICA 20

3.2.1 Propriedades algébricas dos limites de sequências convergentes 26

3.2.2 Limites Infinitos 32

4 TEOREMA DE STOLZ-CESÀRO 35

4.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA E APRESENTAÇÃO DO TEOREMA DE STOLZ-CESÀRO 35

4.1.1 Interpretação Geométrica do Teorema de Stolz-Cesàro 36

4.1.2 Teorema de Stolz-Cesàro 38

4.2 ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA DE STOLZ-CESÀRO 45

5 APLICAÇÕES 49

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 59

REFERÊNCIAS 60

1 INTRODUÇÃO

Não há dúvida de que o conceito que representa a essência da Análise Real é a definição de limite e o estudo das sequências numéricas permite-nos apresentar o conceito de limite na sua forma mais simples. Além disso, muitos fenômenos da natureza são modelados com base em sequências de números reais. Por conseguinte, a importância deste tema é evidente tanto em aplicações práticas em engenharia e física quanto em matemática pura (ARANTES; RODRIGUES, 2023).

Segundo Avila (2002), Arquimedes (287-212 a.C) já lidava com ideias que envolvem a Análise Real em seus estudos sobre áreas e volumes, porém tais conceitos não se desenvolverem na antiguidade e uma das razões pela qual essas ideias não se desenvolveram com Arquimedes ou seus sucessores imediatos foi, principalmente, evitar o infinito a todo custo. Nesse sentido, só depois de dezoito séculos essas ideias começaram a frutificar e foi se desenvolvendo aos poucos a partir do século XVII com a invenção do Cálculo, contudo vale salientar que os matemáticos tratavam esses conceitos de maneira quase cega, muitas vezes, guiados apenas pela intuição o que acarretava algumas inconsistências nos seus resultados.

Destarte, alguns matemáticos sentiram-se compelidos a tentar a difícil tarefa de estabelecer uma base rigorosa para os conceitos do Cálculo. Dessa forma, Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1783) foi o primeiro a propor uma solução para o estado insatisfatório dos fundamentos do Cálculo, quando em 1754 ele muito bem apontou que era necessário estabelecer uma teoria dos limites. A partir disso, vários matemáticos contribuiram com essa teoria, dos quais podemos citar: Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Karl Weierstrass (1815-1897), assim, aos poucos o Cálculo foi sendo posto em bases sólidas. (EVES, 2011)

Ademais, a partir desses estudos sobre limites outros conceitos mais complexos do Cálculo como derivadas, integrais e continuidade puderam ser definidas através de limites. Vale destacar que, como dito anteriormente, um objeto matemático que possui muitas aplicações são as sequências de números reais e ao longo do tempo alguns matemáticos também desenvolveram estudos nessa área de modo que foram descobertos alguns critérios que permitem avaliar o comportamento de certas sequências numéricas. Por exemplo, existem situações que podemos garantir a convergências de certas sequências sem nem mesmo saber para que valor estar convergido.

No entanto, conforme aponta Oliveira (2019), as pesquisas sobre sequências são menos exploradas, de modo que não existe um critério único dominante de convergência que se aplique a qualquer sequência. Ademais, desenvolver estudos sobre o comportamento de uma sequência e analisar sua convergência nem sempre é uma tarefa fácil. Assim, fica evidente a necessidade de desenvolver-se estudos eficientes sobre critérios convergência para tal objeto matemático.

Dessa forma, o presente estudo tem como foco abordar o Teorema de Stolz-Cesàro. Segundo Oliveira (2019), em meados dos séculos XIX e XX, os matemáticos Otto Stolz e Ernesto Cesàro realizaram estudos sobre Análise Real e criaram um teorema que nos permite avaliar se uma sequência é convergente ou divergente. Tal teorema é bastante útil para a Análise Matemática, pois permite avaliar limites que relacionam o quociente entre duas sequências de números reais de maneira bastante prática. Além disso, este critério se assemelha bastante com a Regra de L'Hôpital, pois trata, na maioria das vezes, de indeterminações do tipo ∞/∞, por isso há quem o chame de uma versão discreta da Regra de L'Hôpital (FRANCO; HIDALGO, 2019).

Este trabalho surge inicialmente pelo contato do autor com a disciplina de Introdução a Análise Real, disciplina obrigatória do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Ciências e Tecnologia da Paraíba (IFPB) - Campus Cajazeiras, esta disciplina é desafiadora, pois apresenta problemas interessantes, porém na sua maioria não são problemas imediatos, isto é, que demanda bastante dedicação e esforço para resolvê-los. Nesse sentido, o Teorema de Stolz-Cesàro é um resultado que simplifica a solução de muitos problemas, contudo tal teorema é negligenciado por muitos autores de livros que abordam os conteúdos da disciplina de Análise Real, quando muito, o encontramos na forma de um exercício a ser resolvido, consequentemente, tal teorema, em geral, não é abordado nesta disciplina causando, assim, uma perda significativa para os estudantes.

Tendo em vista esta problemática, o objetivo geral desta monografia é apresentar um material abrangendo o Teorema de Stolz-Cesàro que possa servir de consulta para estudantes e professores. De forma específica, buscou-se contemplar os seguintes objetivos específicos: compreender os principais conceitos de sequências numéricas, realizar um estudo teórico sobre o Teorema de Stolz-Cesàro e apresentar algumas de suas aplicações.

A metodologia utilizada compreendeu uma pesquisa de natureza básica, de abordagem qualitativa e de caráter exploratório, a partir de um procedimento bibliográfico. Nessa perspectiva, os dados coletados para essa pesquisa foram obtidos a partir de obras publicados no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES[1], livros, artigos publicados em periódicos e repositórios de universidades, a fim de buscarmos embasamento teórico e aplicações práticas que ilustram o tema deste trabalho.

1 Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

Outrossim, esta monografia está organizada em 6 capítulos. No Capítulo 2, apresentamos o percurso metodológico abordado nesta pesquisa, já no Capítulo 3 apresentamos alguns resultados da teoria de sequências numéricas, tais como: as principais definições sobre sequências numéricas e limite, alguns teoremas destacando as suas demonstrações com a maior riqueza de detalhes possível, trazemos também algumas propriedades algébricas dos limites das sequências convergentes e finalizamos com uma discussão sobre limites infinitos.

No Capítulo 4, trazemos uma discussão teórica sobre o Teorema de Stolz-Cesàro. Iniciando com a sua interpretação geométrica a fim de compreendermos os seus conceitos fundamentais. Em seguida, trazemos três demonstrações diferentes para tal teorema, além de uma discussão sobre a sua recíproca e alguns exemplos de aplicação imediata. Por fim, finalizamos com algumas consequências imediatas do Teorema de Stolz-Cesàro como, por exemplo, a relação entre o limite das médias aritmética e geométrica dos n primeiros termos de uma sequência convergente.

No Capítulo 5, apresentamos algumas aplicações envolvendo o Teorema de Stolz-Cesàro donde podemos observar a sua vasta aplicabilidade, de modo que são resolvidos problemas desde os mais simples a alguns mais sofisticados apresentados em olimpíadas de matemática nacionais e internacionais. Finalmente, o Capítulo 6 consiste nas considerações finais que busca reforçar os objetivos deste trabalho e sinalizar os resultados obtidos.

2 METODOLOGIA

Para o desenvolvimento de uma pesquisa faz-se necessário que o pesquisador disponha de um método que o permita alcançar os objetivos traçados para a pesquisa. Nessa perspectiva, o método científico é “um conjunto de procedimentos lógicos e técnicos operacionais que permitem o acesso às relações causais constantes entre os fenômenos” (SEVERINO, 2013, p. 102). Tendo isso em mente, sistematizamos o nosso trabalho a partir de procedimentos metodológicos que, agora, passamos a descrevê-los.

Em relação a finalidade recorremos a uma pesquisa de natureza básica. Segundo Moresi (2003, p. 8) tais pesquisas “objetivam gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência sem aplicação prática prevista”. Em outras palavras, procura-se aprofundar o conhecimento sobre pontos específicos de um determinado assunto, mais especificamente, nesse trabalho estamos interessados em aprofundar o conhecimento sobre o Teorema de Stolz-Cesàro.

No que diz respeito aos objetivos temos uma pesquisa exploratória. Segundo Gil (2008, p. 27) “Pesquisas exploratórias são desenvolvidas com o objetivo de proporcionar visão geral, de tipo aproximativo, acerca de determinado fato. Este tipo de pesquisa é realizado especialmente quando o tema escolhido é pouco explorado”. Neste caso, estamos interessados em trazer uma visão geral acerca do Teorema de Stolz-Cesàro e assim nos aproximarmos de uma teoria que para muitos é desconhecida.

Ademais, temos uma abordagem qualitativa, uma vez que essa

> considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. (MORESI, 2003, pp. 8-9)

Dessa forma, está abordagem adéqua-se aos propósitos dessa pesquisa já que estamos interessados em fazer uma interpretação dos dados colhidos e tirar conclusões sobre elas sem a necessidade de métodos estatísticos. Além disso, do ponto de vista metodológico este trabalho caracteriza-se como hipotético-dedutivo, pois esse método “inicia-se com um problema ou uma lacuna no conhecimento científico, passando pela formulação de hipóteses e por um processo de inferência dedutiva”(PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 32).

Conforme Marconi e Lakatos (2003, p. 158), “a pesquisa bibliográfica, ou de fontes secundárias, abrange toda bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo, desde publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses, material cartográfico *etc.*” Nesse sentido, justifica-se o procedimento adotado para essa pesquisa ser o bibliográfico, já que buscamos embasamento teórico e aplicações práticas que ilustram o tema deste trabalho na literatura existente. Em particular, os dados coletados para essa pesquisa foram obtidos a partir de obras publicados no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, livros, artigos publicados em periódicos e repositórios de universidades.

Vale salientar que os Capítulos organizados a partir do método hipotético-dedutivo foram os capítulos 3, 4 e 5. Dessa forma, no Capítulo 3 trazemos alguns resultados da teoria de sequências numéricas que dão sustentação aos resultados apresentados nos Capítulos 4 e 5. Além disso, este capítulo foi fundamentado, principalmente, na leitura de três livros, a saber: Tópicos de Matemática Elementar Volume 3: Introdução à análise do professor Antônio Caminha Muniz Neto, Análise Matemática para Licenciatura do professor Geraldo Ávila e, finalmente, o consagrado livro Curso de Análise Volume 1 do professor Elon Lajes lima que trata a teoria de Sequências numéricas com bastante detalhes.

No capítulo 4 trazemos a teoria que envolve o Teorema de Stolz-Cesàro, esse foi embasado, principalmente, na leitura do livro Putnam and Beyond dos professores Titu Andreescu e Razvan Gelca, na monografia O Teorema de Stolz-Cesàro e suas Aplicações do autor Ademir Martins de Oliveira e no artigo dos autores Diego Veloso Uchôa e Renato Purita Paes Leme intitulado O Teorema de Stolz. Os resultados apresentados nesses trabalhos são bastante interessantes para o que nos propomos a apresentar nessa pesquisa.

Por fim, no Capítulo 5, trazemos algumas aplicações do Teorema de Stolz-Cesàro, que nos permitem contemplar a beleza e aplicabilidade do referido teorema. Além disso, alguns dos problemas que foram apresentados nesse capítulo foram retirados dos livros: Um Curso de Análise e Problems in Mathematical Analysis I: Real numbers, sequences and series das professoras Wieslawa J. Kaczor e Maria T. Nowak. Temos também problemas interessantes apresentados em competições de matemático nacionais como é o caso da Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária (OBMU) e internacionais como a Romanian mathematical competition.

3 LIMITES DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos importantes da teoria de sequências numéricas. Inicialmente, trazemos o conceito e alguns exemplos de sequência numérica bem como a definição de sequências monótonas e limitadas. Em seguida, é feita uma discussão sobre a definição de limites e algumas propriedades algébricas e, por fim, exibimos a definição de limites infinitos e algumas de suas propriedades. Os resultados apresentados nesse capítulo servirão de base para os Capítulos 4 e 5 sendo baseados, principalmente, em (ABBOTT, 2010), (MUNIZ NETO, 2022), (LIMA, 2022) e (AVILA, 2006).

3.1 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Sequências numéricas possuem muitas aplicações em vários campos da matemática, em particular, este conceito é fundamental no estudo de Análise Real. Nessa perspectiva, Abbott (2010) enfatiza que uma compreensão clara da teoria das sequências é muito importante, pois a maioria dos conceitos em análise pode ser reduzida a declarações sobre o comportamento de sequências.

De maneira geral, podemos definir sequências como um conjunto de elementos ou objetos que estão dispostos em uma certa ordem, por exemplo,

$$(a, e, i, o, u)$$

é a sequência formada pelas vogais, já

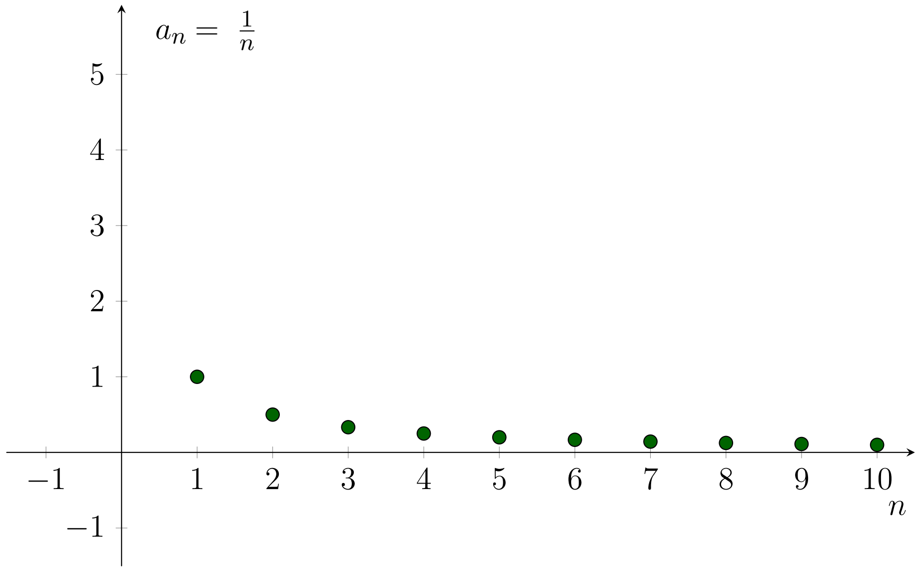
$$(0, 2, 4, \ldots, 2n, \ldots)$$

é a sequências formada pelos inteiros pares e não negativos. Neste trabalho, iremos fazer uso apenas de sequências infinitas de números reais, a qual traremos sua definição a seguir:

Definição 1. *Uma sequência numérica é uma função $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa cada número natural n a um número real $a(n) = a_n$, chamado de n-ésimo termo (ou termo geral) da sequência.*

Para representarmos uma sequência, cujo n-ésimo termo é a_n nós utilizamos as notações $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, simplesmente, (a_n). Já o conjunto $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ ou de forma abreviada $\{a_n\}$ representa o conjunto dos termos da sequência (a_n). Além disso, uma sequência de números reais é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais então seu gráfico é uma sequência ordenada de pontos do plano veja a Figura 3.1 para um exemplo.

Figura 3.1 – Gráfico da sequência $a_n = \frac{1}{n}$



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Vejamos alguns exemplos de sequências numéricas a seguir.

Exemplo 1. *A sequência cujo n-ésimo termo é dado por $a_n = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é representada por $(a_n) = (2,4,6,8,\ldots,2n,\ldots)$ e o conjunto dos seus termos é $\{a_n\} = \{2,4,6,8,\ldots,2n,\ldots\}$.*

Exemplo 2. *Observamos que a sequência dada por $(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ tem como n-ésimo termo $a_n = \frac{1}{n}$ e $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ é o conjunto do seus termos.*

Mais adiante introduziremos o conceito de sequências limitadas, mas antes vamos trazer as definição de conjunto limitado superiormente e inferiormente, e os conceitos de elemento máximo e mínimo de um conjunto de números reais não vazio.

Definição 2 (Conjunto limitado superiormente)**.** *Dado um conjunto de números reais X não vazio e admitindo a existência de um número real k tal que*

$$x \leq k, \quad \forall x \in X.$$

Dizemos então que o conjunto X é limitado superiormente por k.

O número k é chamado um limite superior (ou cota superior) para o conjunto X pois qualquer número real maior que k será também um limite superior para X. Se um limite superior $k \in X$ dizemos que o conjunto X possui um elemento máximo e denotamos por $k = \max X$. Dessa forma, se um conjunto não possui limite superior, dizemos que ele é não limitado superiormente.

Definição 3 (Conjunto limitado inferiormente)**.** *Dado um conjunto de números reais S não vazio e admitindo a existência de um número real k tal que*

$$x \geq k, \quad \forall x \in S.$$

Dizemos então que o conjunto S é limitado inferiormente por k.

O número k é chamado um limite inferior (ou cota inferior) para o conjunto S pois qualquer número real menor que k será também um limite inferior para X. Se um limite inferior $k \in S$ dizemos que o conjunto S possui um elemento mínimo e denotamos por $k = \min S$. De forma análoga, se um conjunto não possui limite inferior, dizemos que ele é não limitado inferiormente.

Definição 4. *Uma sequência (a_n) é:*

(i) limitada inferiormente se existir $b \in \mathbb{R}$, tal que $b \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) limitada superiormente se existir $c \in \mathbb{R}$, tal que $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iii) limitada se existirem $b, c \in \mathbb{R}$, tal que $b \leq a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, caso contrário dizemos que (a_n) é ilimitada.

Em outras palavras, podemos dizer que uma sequência (a_n) é limitada se o conjunto dos seus termos é limitado, ou seja, o fato de $b \leq a_n \leq c$ nos diz que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[b, c]$. Além disso, uma condição necessária e suficiente para que uma sequência (a_n) seja limitada é a existência de um número real $k > 0$ tal que $|a_n| \leq k$. Pois,

(i) se $|a_n| \leq k$, então $-k \leq a_n \leq k$, assim podemos fazer $b = -k$ e $c = k$;

(ii) se $b \leq a_n \leq c$, tomando $k = \max\{|b|, |c|\}$, então

$$-k \leq b \leq a_n \leq c \leq k \Rightarrow |a_n| \leq k.$$

É importante mencionar que uma classe de sequências muito importante são as que são limitadas e também monótonas, veremos, mais adiante, que sequências que possuem essa propriedade são convergentes. Dessa forma, trazemos a seguir a definição de sequências monótonas.

Definição 5 (Monotonicidade)**.** *Uma sequência (x_n) é dita:*

(i) crescente se $x_{n+1} > x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) decrescente se $x_{n+1} < x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) não-crescente se $x_{n+1} \leq x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iv) não-decrescente se $x_{n+1} \geq x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Em qualquer um desses casos, (x_n) é dita monótona. Vejamos um exemplo que ilustra as Definições 4 e 5 a seguir:

Exemplo 3. *A sequência* (x_n)*, dada por* $x_n = 1/\sqrt{n}$*, é monótona e limitada.*

Solução. Note que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\sqrt{n(n+1)} \neq 0$ e:

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow x_{n+1} < x_n.$$

Ou seja, (x_n) é decrescente. Logo, é monótona. Por outro lado, podemos observar que se $n \in \mathbb{N}$, vale $\sqrt{n} \neq 0$ e:

$$n > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2}} > \frac{0}{\sqrt{n^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} > 0 \Rightarrow x_n > 0,$$

$$n \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow x_n \leq 1.$$

Isto é, $0 < x_n \leq 1$. Portanto, (x_n) é limitada.

Outro fato importante da teoria de sequências é que se desprezarmos um ou vários termos de uma sequência (a_n) formamos, então, uma subsequência de (a_n). Dessa forma, encerraremos essa seção trazendo a definição formal de subsequência.

Definição 6. *A restrição de uma sequência* (a_n) *a um subconjunto infinito* $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 \cdots < n_k < \cdots\}$*, do conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais, é chamada subsequência de* (a_n)*. Em outras palavras, a cada* $n_k \in \mathbb{N}'$ *a subsequência associa o termo* a_{n_k} *e representamos por* $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots, a_{n_k}, \cdots)$ *ou, simplesmente,* (a_{n_k}) *em que* $k \in \mathbb{N}$*.*

A fim de ilustrarmos essa definição, observe que no Exemplo 1 a sequência $(x_n) = (2n)$ *é uma subsequência de* $(a_n) = (n)$*. Além disso, se definirmos* $(c_n) = (2n-1)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*, teremos também uma subsequência de* (a_n)*.*

Observação 1. *Devemos notar que como* $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ *é infinito, então* $\mathbb{N}'$ *é ilimitado, ou seja, para qualquer* $n_0 \in \mathbb{N}$*, existe* $n_k \in \mathbb{N}'$ *tal que* $n_k > n_0$*.*

3.2 LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA NUMÉRICA

Um conceito muito importante dentro da matemática é o de limite, não por acaso o professor Elon enfatiza que “todos os conceitos e resultados importantes da Análise Matemática se referem, quer explícita quer indiretamente, a limites. Daí, o papel central que esta noção desempenha” (LIMA, 2022, p. 67). Tendo isso em mente nos motivamos a trazer a definição do que venha a ser limite de uma sequência, mas antes vamos apresentar o conceito de vinhança de um ponto em $\mathbb{R}$.

Definição 7. *Sejam $a, \epsilon \in \mathbb{R}$, com $\epsilon > 0$ o conjunto*

$$V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : a-\epsilon < x < a+\epsilon\} = (a-\epsilon, a+\epsilon)$$

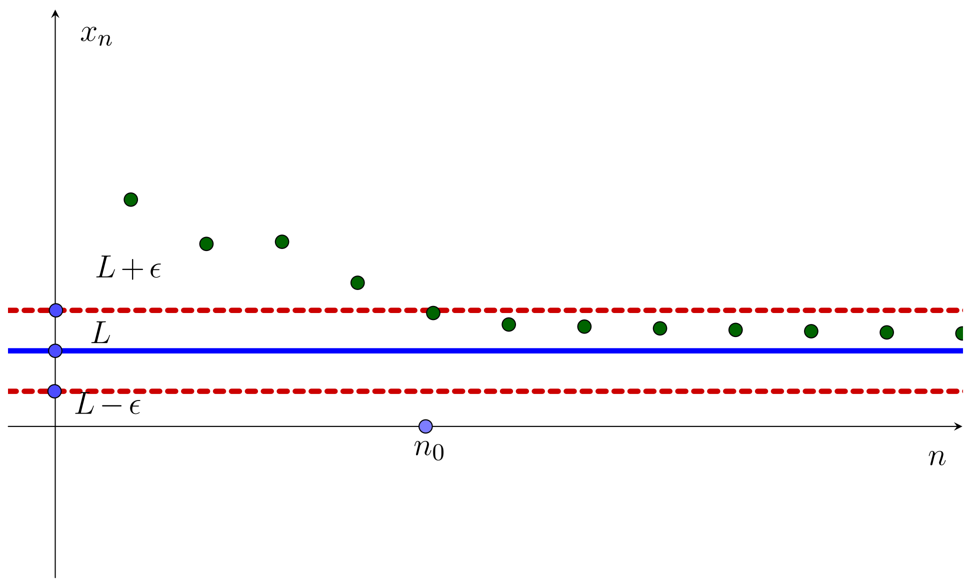
chama-se ϵ-vizinhança de centro a e raio ϵ ou simplesmente vizinhança de a.

Definição 8. *Seja (x_n) uma sequência de números reais. Dizemos que o número real L é limite de (x_n) se para todo número real $\epsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, vale*

$$|x_n - L| < \epsilon \tag{1}$$

Em outras palavras a Definição 8 nos diz que, caso a sequência convirja para L, uma vez fixado um $\epsilon > 0$, precisamos ser capazes de exibir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a distância entre x_n e L seja sempre menor do que ϵ para todo $n > n_0$, ou ainda, podemos observar que $x_n \in V_\epsilon(L)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n > n_0$, significa que $V_\epsilon(L)$ contém todos os termos x_n, com exceção de um número finito de índices n. Veja a Figura 3.2 para ter uma ideia geométrica dessa definição.

Figura 3.2 – Interpretação Geométrica de uma sequência convergente



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Ademais, se (x_n) é uma sequência que tem limite L costumamos denotar este fato por $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, $x_n \to L$ ou, simplesmente, $\lim x_n = L$ e dizemos que (x_n) converge, caso contrário dizemos que a sequência é divergente.

A fim de fixarmos essa ideia vejamos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 4. *Seja a um número real. A sequência de números reais (x_n) que satisfaz $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ converge para a.*

Solução. De fato, podemos notar que para qualquer número real $\epsilon > 0$, teremos para todo $n \in \mathbb{N}$ que:

$$|x_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon.$$

Logo, pela definição de limite, nos resta que $\lim x_n = a$.

Exemplo 5. *A sequência de n-ésimo termo dado por $a_n = 1/n$ converge para zero.*

Solução. Intuitivamente, percebemos que quando n cresce indefinidamente a tendência é que a_n, de fato, se aproxima de zero. Para formalizarmos essa ideia, neste caso, basta tomarmos $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$, temos que, se $n > n_0$ então $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$ e

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim a_n = 0$.

Exemplo 6. *A sequência (a_n), dada por $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, converge para zero.*

Solução. Queremos provar que, dado $\epsilon > 0$, teremos $\left|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0\right| < \epsilon$ a partir de um certo índice $n_0 \in \mathbb{N}$. Perceba que ainda não dispomos deste índice para encontrá-lo vamos proceder da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\left|\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 0\right| &= \left|\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right| \\
&= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&< \frac{1}{2\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon \Leftrightarrow 2\sqrt{n} > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{4\epsilon^2}.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ basta tomarmos $n_0 > \frac{1}{4\epsilon^2}$ nos restando que:

$$n > n_0 > \frac{1}{4\epsilon^2} \Rightarrow \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0\right| < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon.$$

Assim, $\lim\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$.

Observação 2. *O processo que fizemos no exemplo anterior foi encontrarmos n_0 em função de ϵ fazendo a demonstração de trás para frente, ou seja, sabendo que devemos obter $|a_n - L| < \epsilon$, investigamos a magnitude de $|a_n - L|$. Esse processo pode ser feito sempre que a sequência (a_n) for convergente para L, contudo vale salientar que, dependendo da sequência, este procedimento pode ser uma tarefa bastante complicada mais adiante veremos resultados que simplificam o cálculo de limites.*

Curiosamente, a Definição 8 não deixa claro se o limite de uma sequência convergente é único, o teorema a seguir trata de esclarecer essa questão.

Teorema 1. *Se a sequência (x_n) é convergente, então seu limite é único.*

Demonstração. Suponha por absurdo que a sequência converge ao mesmo tempo para os números reais e distintos a e b. Neste caso, dado $\epsilon = \frac{1}{2}|b-a| > 0$ a Definição 8 garante a existência de $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ para os quais,

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon,$$

$$n > n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \epsilon.$$

Pela desigualdade triangular e tomando $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} |b-a| & = & |b - a + x_n - x_n| \\ & = & |(x_n - a) + (b - x_n)| \\ & \leq & |x_n - a| + |x_n - b| \\ & < & 2\epsilon = |b-a|. \end{array}$$

Absurdo. Logo, se uma sequência é convergente, de fato, seu limite é único. ■

Teorema 2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente, com $a = \lim x_n$. Dessa forma, a definição de sequência convergente garante que dado $\epsilon = 1 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, temos:

$$|x_n - a| < 1.$$

Daí, pela desigualdade triangular segue

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|,$$

sempre que $n > n_0$. Agora, seja $m = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|\}$, então tomando $M = \max\{m, 1 + |a|\}$, temos que:

$$|x_n| < M.$$

Portanto, (x_n) é limitada. ■

Teorema 3. *Seja (x_n) uma sequência convergente, com $\lim x_n = a$. Então, toda subsequência de (x_n) converge para a.*

Demonstração. Por hipótese $\lim x_n = a$, então dado qualquer $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon.$$

Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n), cujos índices pertencem ao conjunto

$$\mathbb{N}' = \{n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > n_k \cdots\}.$$

Assim, pela Observação 1, existe $n_p \in \mathbb{N}'$ tal que $n_p > n_0$. Logo, para todo $n_k > n_p$, segue-se que:

$$n_k > n_0 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \epsilon.$$

Em outras palavras $\lim x_{n_k} = a$. ■

Uma consequência imediata do Teorema 3 é que se $\lim x_n = a$ então para todo $p \in \mathbb{N}$ teremos $\lim x_{n+p} = a$, pois

$$(x_{1+p}, x_{2+p}, x_{3+p}, \dots, x_{n+p}, \dots)$$

é uma subsequência de (x_n). Além disso, os resultados apresentados nos Teoremas 1 e 3 nos fornecem um critério que nos permite garantir que uma sequência não converge, sendo, para isso, suficiente que encontremos duas subsequências de (x_n) convergido para valores distintos. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 7. *A sequência (x_n) dada por $x_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ é divergente.*

Solução. *De fato, se tomarmos as subsequência (x_{2n}) e (x_{2n-1}), respectivamente, subsequências de ordem par e ímpar, temos:*

$$x_{2n} = \frac{1-(-1)^{2n}}{2} = \frac{1-\left[(-1)^2\right]^n}{2} = \frac{1-1^n}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Portanto, $x_{2n} = 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, o que implica* $\lim x_{2n} = 0$*. Por outro lado,*

$$x_{2n-1} = \frac{1-(-1)^{2n-1}}{2} = \frac{1+(-1)(-1)^{2n-1}}{2} = \frac{1+(-1)^{2n}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Logo, $x_{2n-1} = 1$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, nos restando que* $\lim x_{2n-1} = 1$*. Dessa forma,* (x_n) *é divergente já que possui duas subsequências convergindo para valores distintos.*

O teorema que traremos mais adiante consiste num resultado muito importante, pois nos permite concluir que uma sequência numérica converge, mesmo que não saibamos o seu limite previamente. Mas, antes de apresentá-lo, precisaremos trazer os resultados a seguir:

Definição 9 (Supremo)**.** *Um número* k *diz-se supremo de um conjunto de números reais* X *não vazio e denotamos por* $k = \sup X$*, se* k *possui as seguintes propriedades:*

(i) k *é uma cota superior para* X*;*

(ii) Nenhum número menor que k *é cota superior para* X*.*

Observação 3. *Se o conjunto* X *tem elemento máximo (veja a Definição 2), este também será o seu supremo, porém se* X *não possui elemento máximo tal conjunto pode, ainda, ter supremo. Dessa forma, o supremo de um conjunto de números reais não vazio é a menor das cotas superiores. Por exemplo, o conjunto* X *de todos os números reais* x *tal que* $0 \leq x < 1$ *não possui elemento máximo, mas tem supremo igual a* 1*, pois* 1 *é uma cota superior para o conjunto* X *e nenhum número* $a \in X$ *com* $a < 1$ *é cota superior para* X *.*

Temos, ainda, alguns resultados importantes sobre a teoria de supremo os quais trazemos a seguir:

Axioma 1. *Qualquer conjunto* X *de números reais não vazio, que é limitado superiormente, possui supremo.*

Propriedade 1. *Seja* X *um conjunto de números reais não vazio e limitado superiormente, com* $a = \sup X$*. Então, para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $x \in X$ *tal que* $a - \epsilon < x \leq a$*.*

Demonstração. Suponha que um número real $\epsilon > 0$ é dado. Como $a = \sup X$, então $a - \epsilon$ não é cota superior para X, uma vez que $a - \epsilon < a$. Logo, existe algum $x \in X$ tal que $x > a - \epsilon$. Assim, temos que $a - \epsilon < x \leq a$.

■

Além disso, dois números reais distintos não podem ser supremos de um mesmo conjunto X. De fato, supondo que os números reais distintos s e k são supremos do conjunto X. Daí, $s \geq k$ uma vez que k é supremo de X, analogamente, $k \geq s$ já que s é supremo de X. Logo, $s = k$ em outras palavras o supremo de um conjunto X é único.

As definições para ínfimo de um conjunto de números reais não vazio podem ser formuladas de forma semelhante ao que fizemos anteriormente e podem ser encontradas em (LIMA, 2022).

De posse desses resultados traremos o enunciado e a demonstração de um teorema de bastante importância teórica.

Teorema 4 (Bolzano)**.** *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Suponha que a sequência (c_n) é monótona não-decrescente e limitada. Seja

$$X = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\} \quad \text{e} \quad a = \sup X.$$

Dado qualquer número real $\epsilon > 0$, $a - \epsilon$ não é cota superior de X. Portanto, pela Propriedade 1 existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$a - \epsilon < c_{n_0} \leq a.$$

Pois, $a = \sup X$. Como (c_n) é não-decrescente, então $c_{n+1} \geq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, temos que para $n > n_0$, segue-se que:

$$a - \epsilon < c_{n_0} \leq c_n \leq a < a + \epsilon.$$

Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$ teremos $|c_n - a| < \epsilon$ e esse procedimento pode ser feito para qualquer $\epsilon > 0$. Logo, $\lim c_n = a = \sup X$. Os outros casos podem ser demonstrados analogamente.

■

Vejamos, a seguir, um exemplo de aplicação desse teorema.

Exemplo 8. *A sequência (a_n), dada por:*

$$a_1 = 0 \text{ e } a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}, \quad \forall n \geq 1,$$

é convergente.

Solução. Vamos mostrar que (a_n) é monótona e limitada.

(i) (Monótona) Vamos mostrar que (a_n) é crescente. Para isso, faremos uso da indução matemática sobre n. Note que $a_1 = 0$ e $a_2 = \sqrt{6}$ isso implica $a_2 > a_1$ que é o caso inicial. Agora, suponha por hipótese de indução que $a_{n+1} > a_n$ para algum natural $n \geq 2$. Consequentemente, $a_{n+1} + 6 > a_n + 6$. Daí,

$$a_{n+2} = \underbrace{\sqrt{a_{n+1} + 6} > \sqrt{a_n + 6}}_{\text{Hipótese de indução}} = a_{n+1} \Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1}.$$

Ou seja, a validade de $a_{n+1} > a_n$ implica a validade de $a_{n+2} > a_{n+1}$ e, por indução matemática, segue-se que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, (a_n) é monótona crescente.

(ii) (Limitada) Como (a_n) é crescente e $a_1 = 0$, então $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto limitada inferiormente. Agora, vamos usar indução matemática sobre n para mostrar que $a_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, para $n = 1$ temos $a_1 = 0 < 3$ que é o caso inicial. Suponha por hipótese de indução que $a_n < 3$ para algum natural $n > 1$. Assim,

$$a_{n+1} = \underbrace{\sqrt{a_n + 6} < \sqrt{6 + 3}}_{\text{Hipótese de indução}} = 3 \Rightarrow a_{n+1} < 3.$$

Isto é, a validade de $a_n < 3$ implica a validade $a_{n+1} < 3$. Logo, por indução matemática $a_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $0 \leq a_n < 3$ então (a_n) é limitada.

Portanto, como (a_n) é monótona e limitada, o Teorema de Bolzano garante a sua convergência mesmo que não saibamos o seu valor de convergência.

Até aqui, estamos lidando apenas com a definição de limite, porém existem casos que trabalhar com tal definição pode ser bem complexo. Dessa forma, na próxima subseção traremos alguns resultados importantes que nos ajudam a descobrir o limite de sequências que saibamos ser convergente.

3.2.1 Propriedades algébricas dos limites de sequências convergentes

Nessa subseção, nosso objetivo é trazer algumas propriedades das sequências convergentes que facilitam o cálculo de limites os quais, muitas vezes, pela definição seria complicado. Faremos uso dessas propriedades com bastante frequência, principalmente, no Capítulo 5.

Propriedade 2. *Suponha que (a_n) seja uma sequência de números reais com limite L. Se $a_n \geq a$ (respectivamente $a_n \leq a$), para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$, então $L \geq a$ (respectivamente $L \leq a$).*

Demonstração. Provaremos o caso em que $a_n \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o caso $a_n \leq a$ prova-se analogamente. Neste caso, suponha por absurdo que $L < a$, como $\lim a_n = L$ então tomando $\epsilon = a - L > 0$ existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

ou, equivalentemente, $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$. Como $\epsilon = a - L$ temos, em particular, que $a_n < L + a - L = a$, o que nos conduz a uma contradição. Logo, $L \geq a$.

■

Propriedade 3. *Seja (x_n) uma sequência que converge para zero e (y_n) uma sequência limitada, então $\lim(x_n y_n) = 0$.*

Demonstração. Como (y_n) é limitada então existe um número real $k > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ teremos $|y_n| \leq k$. Por outro lado, como $\lim x_n = 0$, então dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ implica que $|x_n - 0| = |x_n| < \frac{\epsilon}{k}$. Daí, para todo $n > n_0$, obtemos:

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n||y_n| < \frac{\epsilon}{k} \cdot k = \epsilon.$$

Logo,

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n y_n| < \epsilon.$$

Ou seja, nas condições dadas teremos, de fato, que $\lim(x_n y_n) = 0$.

■

Teorema 5 (Teorema do confronto)**.** *Sempre que $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n \leq c_n \leq y_n$, para todo n suficientemente grande, teremos que $\lim c_n = a$.*

Demonstração. Por hipótese temos que $\lim x_n = \lim y_n = a$, então dado $\epsilon > 0$ existem índices $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que,

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon,$$

$$n > n_2 \Rightarrow |y_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < y_n < a + \epsilon.$$

Agora, tomando $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_3$ tenhamos $x_n \leq c_n \leq y_n$ e fazendo $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, segue-se que para todo $n > n_0$ temos

$$a - \epsilon < x_n \leq c_n \leq y_n < a + \epsilon.$$

Logo, $a - \epsilon < c_n < a + \epsilon$. Ou seja, $\lim c_n = a$.

■

Propriedade 4. *Seja* (a_n) *uma sequência de números reais convergente, com* $\lim a_n = a$ *e* b *um número real qualquer, então* $\lim ba_n = ba$.

Demonstração. Se $b = 0$, então $ba_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e pelo Exemplo 4 segue que $\lim ba_n = 0 = ba$. Agora, suponha que $b \neq 0$, então dado $\epsilon > 0$ a definição de sequência convergente garante a existência de um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, teremos $|a_n - a| < \epsilon/|b|$. Assim,

$$n > n_0 \Rightarrow |ba_n - ba| = |b(a_n - a)| = |b||a_n - a| < |b| \cdot \frac{\epsilon}{|b|} = \epsilon$$

Logo, $\lim ba_n = ba$.

■

Propriedade 5. *Sejam* (a_n) *e* (b_n) *duas sequências de números reais convergentes com* $\lim a_n = a$ *e* $\lim b_n = b$, *então* $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$.

Demonstração. Provaremos o caso $a_n + b_n$ o caso $a_n - b_n$ prova-se analogamente. Como $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$, então dado $\epsilon > 0$ existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e usando a desigualdade triangular, segue-se que:

$$n > n_0 \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ou seja,

$$n > n_0 \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim(a_n + b_n) = a + b$. ■

Propriedade 6. *Sejam* (a_n) *e* (b_n) *duas sequências de números reais convergentes com* $\lim a_n = a$ *e* $\lim b_n = b$, *então* $\lim(a_n b_n) = ab$.

Demonstração. Como $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$ iniciaremos notando, pela desigualdade triangular, que:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n b_n - ab_n) + (ab_n - ab)| \\ &\leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| \\ &\leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|. \end{aligned}$$

Como (b_n) é convergente, o Teorema 2 garante a existência de um número real $k > 0$ tal que $|b_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, considerando $a \neq 0$ e como $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$, dado $\epsilon > 0$ existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2k},$$

$$n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|}.$$

Daí, fazendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e tomando $n > n_0$, nos resta que:

$$|a_n b_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| < k\frac{\epsilon}{2k} + |a|\frac{\epsilon}{2|a|} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Daí,

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n b_n - ab| < \epsilon.$$

Portanto, teremos $\lim a_n b_n = ab$. Para o caso em que $a = 0$ temos que $\lim a_n = a = 0$, além disso a sequência (b_n) é convergente por hipótese, então o Teorema 2 garante que (b_n) é limitada. Logo, pela Propriedade 3 segue-se que $\lim a_n b_n = 0 = ab$.

■

Propriedade 7. *Se uma sequência (a_n) converge para $L \neq 0$, então, a partir de um certo índice n, teremos $|a_n| > |L|/2$.*

Demonstração. Como $\lim a_n = L \neq 0$, dado $\epsilon = |L|/2 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, temos:

$$|a_n - L| < \frac{|L|}{2}.$$

Lembrando que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ vale que $|b| - |a| \leq |a - b|$. Então, para todo $n > n_0$, temos que:

$$|L| - |a_n| \leq |a_n - L| < \frac{|L|}{2}.$$

Daí, temos, em particular, que:

$$|L| - |a_n| < \frac{|L|}{2} \Rightarrow |a_n| > |L| - \frac{|L|}{2} = \frac{|L|}{2}.$$

Portanto, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$, teremos $|a_n| > |L|/2$.

■

Propriedade 8. *Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências de números reais convergentes com $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$, além disso suponha que $b_n \neq 0$ para n suficientemente grande e $b \neq 0$. Então $\lim a_n/b_n = a/b$.*

Demonstração. Observe que $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, então em face da Propriedade 6, já demonstrada, basta que tenhamos $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Daí,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{bb_n}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|}.$$

Como $b \neq 0$, a Propriedade 7 nos garante que a partir de um certo $n_1 \in \mathbb{N}$ teremos $|b_n| > |b|/2$ e isso implica que $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$. Além disso, como $\lim b_n = b$ então dado $\epsilon > 0$ existe um índice $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_2$ teremos $|b_n - b| < \frac{\epsilon|b|^2}{2}$. De sorte que, fazendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ nos restará que:

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} < \frac{2 \cdot \frac{\epsilon|b|^2}{2}}{|b| \cdot |b|} = \frac{\epsilon|b|^2}{|b|^2} = \epsilon.$$

Em outras palavras, $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Logo, teremos $\lim a_n/b_n = a/b$.

$\blacksquare$

Vamos finalizar essa subseção analisando alguns exemplos.

Exemplo 9. *A sequência dada por* $a_n = \frac{2n^2}{n^2+7}$ *converge para* 2.

Solução. De fato, começaremos observando que:

$$a_n = \frac{2n^2}{n^2+7} = \frac{2}{1 + \frac{7}{n^2}} = \frac{2}{1 + 7\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)}.$$

Como $\lim 2 = 2, \lim 1 = 1$ e $\lim 1/n = 0$, então pelas propriedades que acabamos de demonstrar segue-se que:

$$\lim \frac{2n^2}{n^2+7} = \lim \frac{2}{1 + \frac{7}{n^2}} = \frac{\lim 2}{\lim 1 + \lim \frac{7}{n^2}} = \frac{2}{1+0} = 2.$$

Observe que calculamos o limite desejado com certa facilidade por meio das propriedades, o que nos mostra como estas podem ser, bastante, úteis na hora de analisar certos limites. Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 10. *A Sequência* (Q_n) *cujo n-ésimo termo é dado por* $Q_n = \frac{1+\sqrt{n}}{3-\sqrt{n}}$ *converge para* -1.

Solução. Podemos notar que:

$$Q_n = \frac{1+\sqrt{n}}{3-\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}+1}{\frac{3}{\sqrt{n}}-1}.$$

Pois, $\sqrt{n} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $\lim 1 = 1$, $\lim a/\sqrt{n} = 0$ para qualquer número real a, então segue das propriedades que:

$$\lim \frac{1+\sqrt{n}}{3-\sqrt{n}} = \frac{\lim \frac{1}{\sqrt{n}} + \lim 1}{\lim \frac{3}{\sqrt{n}} - \lim 1} = \frac{0+1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

O próximo exemplo é um pouco mais sofisticado e nos permite analisar o limite de uma sequência formada pelas raízes n-ésimas de um número real $a > 0$.

Exemplo 11. *Dado um número real* $a > 0$, *então* $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Solução. Se $a = 1$, então $\sqrt[n]{a} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e neste caso $\lim \sqrt[n]{a} = 1$. Agora, suponha que $a > 1$ isso implica que $\sqrt[n]{a} > 1$, então para algum $b_n > 0$, teremos:

$$\sqrt[n]{a} = 1 + b_n \Rightarrow a = (1+b_n)^n.$$

Como $n \in \mathbb{N}$ e $b_n > 0$ então todos os termos de $(1+b_n)^n$ pela expansão do binômio de Newton são positivos de sorte que:

$$a = (1+b_n)^n = 1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2}b_n + \cdots + b_n^n > 1 + nb_n > nb_n.$$

Assim, $a > nb_n$ e $\frac{a}{n} > b_n$. Por outro lado,

$$\sqrt[n]{a} = 1 + b_n \Rightarrow b_n = \sqrt[n]{a} - 1 = \underbrace{|\sqrt[n]{a} - 1|}_{\sqrt[n]{a} > 1}.$$

Donde,

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = b_n < \frac{a}{n}.$$

Então, dado qualquer $\epsilon > 0$, podemos tomar $n_0 > a/\epsilon$ de modo que,

$$n > n_0 \Rightarrow n > \frac{a}{\epsilon} \Rightarrow \frac{a}{n} < \epsilon.$$

Assim, para todo $n > n_0$, nos resta que:

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ se $a > 1$. Por fim, suponha que $0 < a < 1$. Daí, $1/a > 1$ e recaímos no caso anterior, ou seja

$$1 = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Dessa forma, sabendo que $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$, então $\lim \sqrt[n]{a}$ existe e vale $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Logo, também temos $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ se $0 < a < 1$ e isso finaliza o nosso exemplo.

Podemos observar com esses exemplos que as propriedades algébricas dos limites são bastante úteis desde problemas mais simples ou até mesmo em problemas mais sofisticados.

3.2.2 Limites Infinitos

Até aqui, demos ênfase a sequências convergentes, no entanto existem sequências divergentes que merecem a nossa atenção a saber as que são ilimitadas em um certo sentido. Vejamos a definição formal:

Definição 10. *Dizemos que a sequência (x_n) diverge para $+\infty$ ou, simplesmente, tende para $+\infty$ e escrevemos $\lim x_n = +\infty$ se, para qualquer número real $A > 0$, existir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tenhamos $x_n > A$. Semelhantemente, dizemos que a sequência (x_n) diverge para $-\infty$ ou tende para $-\infty$ se, para qualquer número real $A < 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tenhamos $x_n < A$ e, neste caso, denotamos $\lim x_n = -\infty$.*

A fim de ilustrarmos está definição vejamos dois exemplos.

Exemplo 12. *A sequência (x_n), dada por $x_n = n^2 + 1$, diverge para $+\infty$.*

Solução. Neste caso, queremos provar que dado um número real $A > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ temos $x_n > A$. Dessa forma, suponha que um $A > 0$ é dado, daí basta tomarmos $n_0 > \sqrt{A}$, então sempre que $n > n_0$, temos:

$$n > \sqrt{A} \Rightarrow n^2 > A \Rightarrow n^2 + 1 > A \Rightarrow x_n > A.$$

Portanto, temos, de fato, que $\lim x_n = +\infty$.

Exemplo 13. *A sequência de números reais (x_n), cujo n-ésimo termo é dado por $x_n = 6 - \sqrt{n}$, diverge para $-\infty$.*

Solução. Agora, queremos provar que dado qualquer número real $A < 0$ exite $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ temos $x_n < A$. Assim, dado $A < 0$, tome $n_0 > (6 - A)^2$, neste caso sempre que $n > n_0$, temos:

$$n > (6 - A)^2 \underbrace{\Rightarrow}_{A<0} \sqrt{n} > 6 - A \Rightarrow -\sqrt{n} < A - 6 \Rightarrow 6 - \sqrt{n} < A \Rightarrow x_n < A.$$

Logo, $\lim x_n = -\infty$.

Agora, passemos a analisar algumas proposições importantes que tratam de limites infinitos e também nos permite fazer algumas operações algébricas com tais limites.

Proposição 1. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *duas sequências de números reais tais que* $\lim x_n = +\infty$ *e* (y_n) *é limitada inferiormente, então* $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

Demonstração. Suponha que um número real $A > 0$ é dado. Como (y_n) é limitada inferiormente então, existe um número real c tal que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, podemos obter um $n_0 \in \mathbb{N}$ que satisfaz $x_n > A - c$, já que por hipótese $\lim x_n = +\infty$. Consequentemente, segue que para todo $n > n_0$, teremos:

$$x_n + y_n > A + c - c = A.$$

Portanto, $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

■

Proposição 2. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *duas sequências de números reais. Dado um número real* $c > 0$ *tal que* $y_n > c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, além disso* $\lim x_n = +\infty$*, então* $\lim x_n y_n = +\infty$.

Demonstração. De fato, dado um número real $A > 0$ podemos obter um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ isso implica $x_n > \frac{A}{c}$, já que A e c são maiores que zero e $\lim x_n = +\infty$, além disso $y_n > c > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, para todo $n > n_0$, temos:

$$x_n y_n > c \cdot \frac{A}{c} = A.$$

Assim, conclui-se que $\lim x_n y_n = +\infty$.

■

Proposição 3. *Se* (x_n) *é uma sequência de números reais positivos, tal que* $\lim x_n = +\infty$*, então* $\lim 1/x_n = 0$.

Demonstração. Se $\lim x_n = +\infty$, então dado o número real $A > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, vem que,

$$x_n > A \Rightarrow \frac{1}{x_n} < \frac{1}{A} \Rightarrow \left| \frac{1}{x_n} - 0 \right| < \frac{1}{A}.$$

Como $A > 0$, então pela Propriedade Arquimediana existe $\epsilon > 0$ tal que $A > 1/\epsilon$ e isso implica que $1/A < \epsilon$. Daí,

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{x_n} - 0 \right| < \epsilon.$$

Logo, teremos, de fato, $\lim 1/x_n = 0$.

$\blacksquare$

Proposição 4. *Se* $x_n > 0$ *para todo* n *e* $\lim x_n = 0$*, então* $\lim 1/x_n = +\infty$*.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $\lim x_n = 0$, então dado qualquer $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < x_n < \epsilon.$$

Note que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, temos que:

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < x_n < \epsilon.$$

Em particular, $1/x_n > 1/\epsilon$. Então dado $A > 0$, pela Propriedade Arquimediana, existe $\epsilon > 0$ tal que $A > 1/\epsilon$. Logo, para todo $n > n_0$ temos que $1/x_n > 1/\epsilon > A$, donde segue que $\lim 1/x_n = +\infty$. $\blacksquare$

Finalizaremos essa subseção e esse capítulo fazendo uma observação sobre as Proposições 3 e 4. Observe que se (x_n) e (y_n) são duas sequências de números reais positivos e $\lim x_n/y_n = +\infty$ a Proposição 3 garante que:

$$\lim \frac{1}{\frac{x_n}{y_n}} = \lim \frac{y_n}{x_n} = 0.$$

De maneira análoga, se tivermos $\lim x_n/y_n = 0$ pela Proposição 4 podemos garantir que:

$$\lim \frac{1}{\frac{x_n}{y_n}} = \lim \frac{y_n}{x_n} = +\infty.$$

Com isso, já temos ferramentas teóricas suficientes para passarmos ao próximo capítulo, no qual falaremos do Teorema de Stolz-Cesàro e algumas de suas consequências. Vale salientar, porém, que nos Capítulos 4 e 5 assumiremos que $\lim e^{a_n} = e^{\lim a_n}$ e $\lim \ln a_n = \ln \lim a_n$ para tornar possível algumas soluções, esses resultados são válidos sempre que a sequência (a_n) for convergente, contudo para demonstrá-los precisaríamos da teoria sobre funções contínuas e isso foge do objetivo do nosso trabalho.

4 TEOREMA DE STOLZ-CESÀRO

No presente capítulo, apresentamos alguns fatos sobre o Teorema de Stolz-Cesàro, uma interpretação geométrica, bem como três demonstrações diferentes da sua validade, com a maior riqueza de detalhes possível, sempre buscando deixar claro para o leitor todas as passagens da demonstração. Além disso, fazemos uma discussão sobre a recíproca de tal teorema e apresentamos alguns exemplos. Finalizamos o capítulo apresentando algumas consequências do Teorema de Stolz-Cesàro, em particular, mostramos como ele nos permite provar a relação existente entre o limite das médias aritmética e geométrica dos n primeiros termos de uma sequência convergente.

Vale salientar que os resultados apresentados neste capítulo foram baseados nas referências (GUIDORIZZI, 2013), (LIMA, 2022), (OLIVEIRA, 2019), (GELCA; ANDREESCU, 2007), (UCHÔA; LEME, 2006) e (MUNIZ NETO, 2022).

4.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA E APRESENTAÇÃO DO TEOREMA DE STOLZ-CESÀRO

A Regra de L'Hôpital é um importante teorema matemático, bastante conhecido de estudantes que cursaram um curso de Cálculo Diferencial e Integral. Resumidamente, este teorema permite avaliar o limite do quociente de duas funções por meio de suas derivadas. O que poucas pessoas sabem é que existe um teorema muito semelhante à Regra de L'Hôpital, mas que é aplicado a sequências numéricas que é chamado Teorema de Stolz-Cesàro. Este teorema relaciona o limite do quociente de duas sequências, mais especificamente se tivermos duas sequências (a_n) e (b_n) a implicação a seguir é valida

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = L$$

se L é um número real, (b_n) é estritamente crescente e $b_n \to +\infty$.

Segundo Oliveira (2019), tal teorema foi criado em meados do século XIX pelo matemático austríaco Otto Stolz (1842-1905), baseado nos primeiros estudos desenvolvidos pelo matemático italiano Ernesto Cesàro (1859-1906). Este teorema mostra-se muito útil e eficaz para avaliar muitos tipos diferentes de limites que envolvem sequências, em particular qualquer tipo de limite que envolve médias aritméticas e geométricas como veremos na Seção 4.2.

Conforme apresenta Muniz Neto (2022, p. 77) "o conceito de sequência convergente tem um apelo geométrico bem forte, qual seja, a ideia de que os termos da sequência aproximam-se mais e mais de um certo número real à medida que seus índices aumentam.” Nessa perspectiva, na próxima subseção nos motivamos a pensar no Teorema de Stolz-Cesàro de maneira geométrica.

4.1.1 Interpretação Geométrica do Teorema de Stolz-Cesàro

Segundo Lima (2022, p. 50) “interpretações geométricas não devem intervir nas demonstrações mas constituem um auxílio valiosíssimo para o entendimento dos conceitos e teoremas”. Dessa forma, antes de fazermos uma prova algébrica para o teorema de Stolz-Cesàro nos concentraremos em desenvolver uma discussão sobre a sua natureza geométrica, a fim de entendermos os seus conceitos basilares. Nessa perspectiva, considere duas sequências de números reais (a_n) e (b_n), donde (b_n) é estritamente crescente, além disso, $\lim b_n = +\infty$ e (a_n) é uma sequência arbitrária. Dessa forma, Suponha que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \tag{2}$$

Observe que, geometricamente, podemos analisar (b_n, a_n) como uma sequência de pontos do plano cartesiano pertencente a uma curva do tipo $a_n = f(b_n)$, pois (b_n) é estritamente crescente e isso nos garante que não teremos problemas de domínio. Nessas condições, o quociente $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ representa a razão incremental entre dois pontos consecutivos da curva $a_n = f(b_n)$.

Por outro lado, a Expressão (2) nos diz que se fizermos n crescer indefinidamente a razão incremental torna-se arbitrariamente próxima do valor L. Isso significa que para n suficientemente grande a curva $a_n = f(b_n)$ se aproxima de uma reta, ou seja, se a curva em questão possuir uma assíntota, então ela será da forma $a_n = L\,b_n + k$ para algum $k \in \mathbb{R}$ (Veja a Figura 4.1). Logo, se tomarmos n suficientemente grande teremos $a_n \approx Lb_n + k$. Daí,

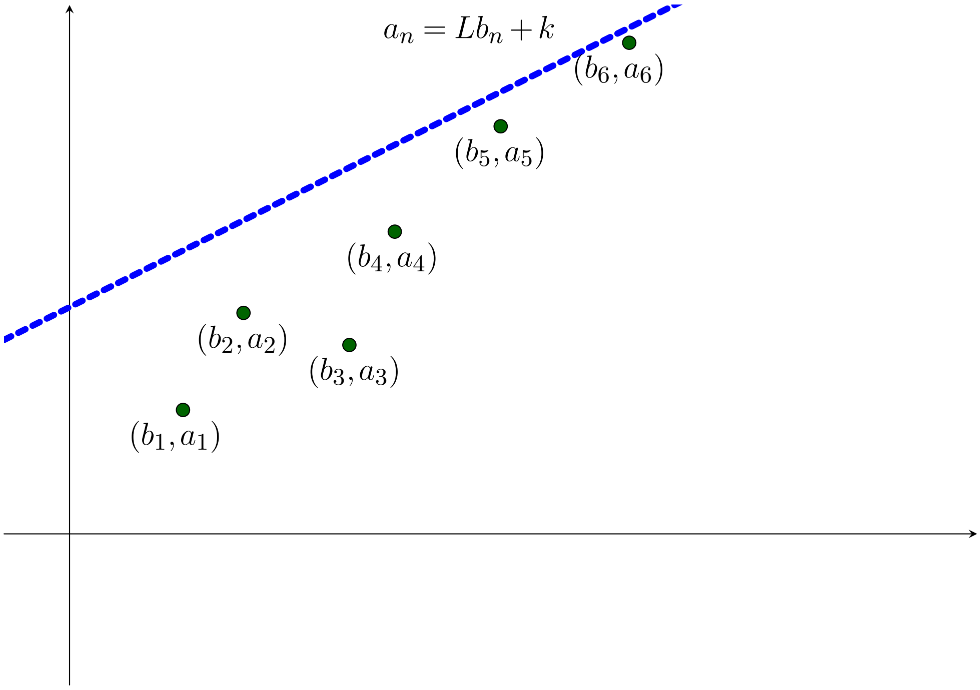
$$\frac{a_n}{b_n} \approx \frac{Lb_n + k}{b_n} = L + \frac{k}{b_n}$$

Portanto, fazendo $n \to +\infty$ nos resta que:

$$\frac{a_n}{b_n} \to L$$

Por exemplo, se tomarmos as sequências (a_n) e (b_n), tais que $a_n = 2n+1$ e $b_n = n$ é fácil ver que $\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = 2$ e os pontos (b_n, a_n) pertencem a curva $a_n = 2b_n+1$. Assim,

Figura 4.1 – Os pontos da curva $a_n = f(b_n)$ se aproximam de uma reta



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{2b_n + 1}{b_n} = \lim \left(2 + \frac{1}{b_n}\right) = 2.$$

Além disso, a Expressão (2) também nos diz que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ todos os termos da razão incremental pertencem ao intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$, ou seja,

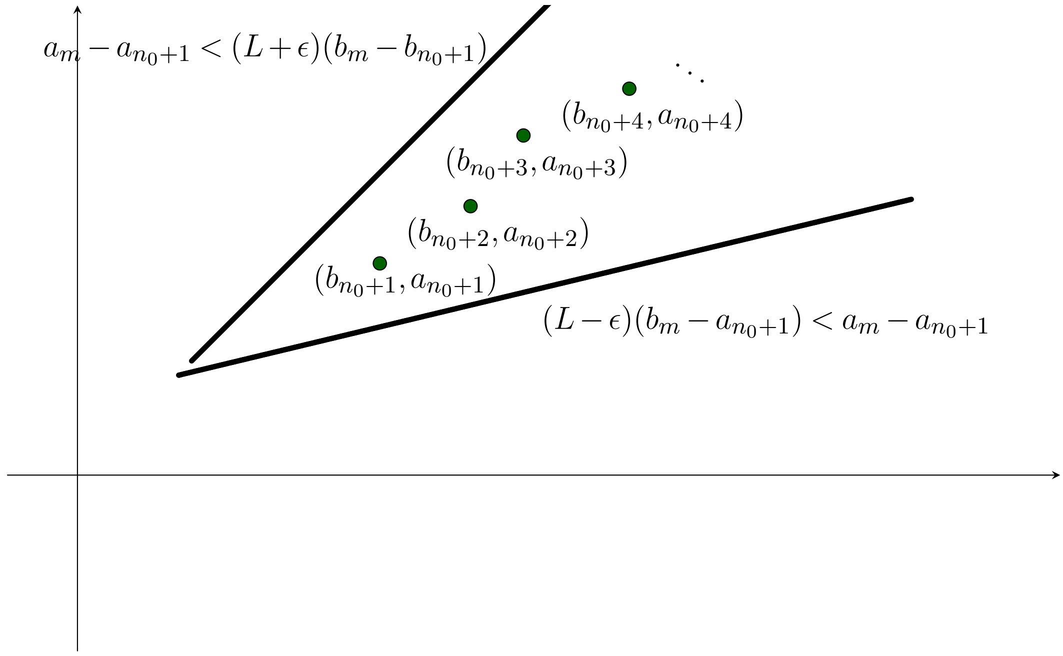
$$(L - \epsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (L + \epsilon)(b_{n+1} - b_n).$$

Consequentemente, se tomarmos $m \in \mathbb{N}$ com $m > n_0$ segue-se que:

$$(L - \epsilon)(b_m - b_{n_0+1}) < a_m - a_{n_0+1} < (L + \epsilon)(b_m - b_{n_0+1}).$$

Então, geometricamente, podemos concluir que para n suficientemente grande todos os pontos (b_n, a_n) estão entre duas retas (veja a Figura 4.2). No exemplo que tomamos, percebemos que dado $\epsilon > 0$, para n suficientemente grande, todos os termos da razão incremental pertencem ao intervalo $(2 - \epsilon, 2 + \epsilon)$ e, consequentemente, para n suficientemente grande todos os pontos (b_n, a_n) estão entre duas retas.

Figura 4.2 – Os pontos (b_n, a_n) estão entre duas retas



Fonte: Elaborada pelo autor (2023).

Vale salientar, porém, que pode acontecer de a_n não se aproximar de uma reta $Lb_n + k$ a medida que n cresce, em outras palavras, nem sempre teremos que a sequência (x_n), dada por $x_n = a_n - Lb_n = K$, converge. Para nos convencermos disso, basta tomar $a_n = 2n + \ln(n)$ e $b_n = n$. De fato, neste caso teremos que:

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{2n + 2 + \ln(n+1) - 2n - \ln(n)}{n+1-n} = \lim \left[2 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = 2$$

Porém, se fizermos $x_n = a_n - 2b_n = \ln(n)$ percebemos que (x_n) é divergente.

Diante desta discussão que acabamos de desenvolver podemos, então, enunciar e provar formalmente o Teorema de Stolz-Cesàro, pois o que fizemos até aqui nos dá uma ideia muito boa sobre o teorema em questão, mas não constitui uma prova formal.

4.1.2 Teorema de Stolz-Cesàro

Teorema 6. *Seja (b_n) uma sequência de números reais estritamente crescente com $\lim b_n = +\infty$ e (a_n) uma sequência de números reais arbitrária. Se existe $L \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L, \tag{3}$$

então $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$.

Demonstração. Tendo a Expressão (3) como hipótese, dado $\epsilon > 0$, a definição de sequência convergente garante a existência de um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - L \right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4}$$

Perceba que a Desigualdade (4) é equivalente a dizermos que:

$$L - \frac{\epsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < L + \frac{\epsilon}{2}. \tag{5}$$

Como (b_n) é estritamente crescente podemos multiplicar ambos os membros da Desigualdade (5) pelo fator $b_{n+1} - b_n > 0$. Assim,

$$\left(L - \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n). \tag{6}$$

Note que a Desigualdade (6) vale sempre que tivermos $n > n_0$. Neste caso, dado $m \in \mathbb{N}$ e $m > n_0$ vale que:

$$\left(L - \frac{\epsilon}{2}\right) \sum_{n=n_0+1}^{m-1} (b_{n+1} - b_n) < \sum_{n=n_0+1}^{m-1} (a_{n+1} - a_n) < \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right) \sum_{n=n_0+1}^{m-1} (b_{n+1} - b_n).$$

Além disso, somando as desigualdades anteriores membro a membro teremos,

$$\left(L - \frac{\epsilon}{2}\right)(b_m - b_{n_0+1}) < a_m - a_{n_0+1} < \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_m - b_{n_0+1}), \tag{7}$$

de modo que,

$$\left(L - \frac{\epsilon}{2}\right)(b_m - b_{n_0+1}) + a_{n_0+1} < a_m < \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_m - b_{n_0+1}) + a_{n_0+1}.$$

Dessa forma, podemos dividir ambos os membros desta última desigualdade por b_m já que (b_n) é crescente e reorganizar os termos nos restando que:

$$L - \frac{\epsilon}{2} - \frac{1}{b_m}\left(L \cdot b_{n_0+1} + \frac{\epsilon \cdot b_{n_0+1}}{2} + a_{n_0+1}\right) < \frac{a_m}{b_m} < L + \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{b_m}\left(-L \cdot b_{n_0+1} - \frac{\epsilon \cdot b_{n_0+1}}{2} + a_{n_0+1}\right).$$

Como $\lim b_m = +\infty$, dado $\epsilon > 0$ existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tais que:

$$m > n_1 \Rightarrow \left| \frac{1}{b_m}\left(L \cdot b_{n_0+1} + \frac{\epsilon \cdot b_{n_0+1}}{2} + a_{n_0+1}\right) \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$m > n_2 \Rightarrow \left| \frac{1}{b_m}\left(-L \cdot b_{n_0+1} - \frac{\epsilon \cdot b_{n_0+1}}{2} + a_{n_0+1}\right) \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí, tomando $m > \max\{n_1, n_2\}$ temos que:

$$L - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} < \frac{a_m}{b_m} < L + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow L - \epsilon < \frac{a_m}{b_m} < L + \epsilon.$$

Portanto, $L = \lim \frac{a_m}{b_m} = \lim \frac{a_n}{b_n}$, que é o resultado desejado.

$\blacksquare$

A demonstração que acabamos de fazer é a que, geralmente, os livros costumam apresentar, porém poderíamos ter tomado um caminho diferente a partir da Desigualdade (7) constituindo, assim, uma demonstração alternativa, a qual apresentamos a seguir.

Demonstração Alternativa. Podemos notar da Desigualdade (7) que para todo $m > n_0$ obtemos:

$$\left|\frac{a_m - a_{n_0+1}}{b_m - b_{n_0+1}} - L\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_m}{b_m} - L\right| &= \left|\frac{a_m + a_{n_0+1} - a_{n_0+1}}{b_m} - L\right| \\
&= \left|\left(\frac{a_m - a_{n_0+1}}{b_m}\right)\left(\frac{b_m - b_{n_0+1}}{b_m - b_{n_0+1}}\right) + \frac{a_{n_0+1}}{b_m} - L\right| \\
&= \left|\left(\frac{a_m - a_{n_0+1}}{b_m - b_{n_0+1}}\right)\left(\frac{b_m - b_{n_0+1}}{b_m}\right) + \frac{a_{n_0+1}}{b_m} - L\right| \\
&= \left|\left(1 - \frac{b_{n_0+1}}{b_m}\right)\left(\frac{a_m - a_{n_0+1}}{b_m - b_{n_0+1}} - L\right) + \frac{a_{n_0+1}}{b_m} - L \cdot \frac{b_{n_0+1}}{b_m}\right|.
\end{aligned}$$

Observe que $\left(1 - \frac{b_{n_0+1}}{b_m}\right) < 1$, assim, pela desigualdade triangular segue-se que:

$$\left|\frac{a_m}{b_m} - L\right| \leq \left|\frac{a_m - a_{n_0+1}}{b_m - b_{n_0+1}} - L\right| + \left|\frac{a_{n_0+1} - Lb_{n_0+1}}{b_m}\right|.$$

Como $(a_{n_0+1} - Lb_{n_0+1})$ é constante e $\lim b_m = +\infty$, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n_1$ teremos

$$\left|\frac{a_{n_0+1} - Lb_{n_0+1}}{b_m}\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, tomando $m > \max\{n_0, n_1\}$ nos resta que:

$$\left|\frac{a_m}{b_m} - L\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Em outras palavras, $\lim \frac{a_m}{b_m} = \lim \frac{a_n}{b_n} = L$ e isso termina a demonstração.

$\blacksquare$

Não obstante já termos apresentado duas demonstrações para o Teorema de Stolz-Cesàro podemos, ainda, apresentar outra demonstração utilizando o conteúdo da proposição a seguir.

Proposição 5. *Seja* $y_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = +\infty$*. Se* $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$*, então*

$$\lim \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = a.$$

Demonstração. Queremos provar que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} - a \right| < \epsilon.$$

Por hipótese $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$, então dado $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > k \Rightarrow \left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{8}$$

Como $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos reescrever (8) da seguinte forma:

$$n > k \Rightarrow |x_n - a y_n| < \frac{\epsilon}{2} y_n.$$

Tomando $n > k$, temos:

$$\left| \frac{(x_{k+1} - a y_{k+1}) + (x_{k+2} - a y_{k+2}) + \cdots + (x_n - a y_n)}{y_{k+1} + y_{k+2} + \cdots + y_n} \right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{9}$$

Tendo em vista que k é um número natural fixo e $\lim(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = +\infty$ então

$$\lim \frac{(x_1 - a y_1) + (x_2 - a y_2) + \cdots + (x_k - a y_k)}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = 0.$$

Ou seja, existe um natural p tal que

$$n > p \Rightarrow \left| \frac{(x_1 - a y_1) + (x_2 - a y_2) + \cdots + (x_k - a y_k)}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} - 0 \right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{10}$$

Note que se $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $y_1 + y_2 + \cdots + y_n > y_{k+1} + y_{k+2} + \cdots + y_n$ para todo $n > k$. Logo,

$$\left| \frac{\sum_{i=k+1}^{n} (x_i - a y_i)}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} \right| < \left| \frac{\sum_{i=k+1}^{n} (x_i - a y_i)}{y_{k+1} + y_{k+2} + \cdots + y_n} \right|. \tag{11}$$

Fazendo $n_0 > \max\{k, p\}$, utilizando a desigualdade triangular e as Desigualdades (9), (10) e (11) segue que para todo $n > n_0$ vale

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} - a \right| &= \left| \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - a y_i)}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} + \frac{\sum_{i=k+1}^{n} (x_i - a y_i)}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} \right| \\
&\leq \left| \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - a y_i)}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} \right| + \left| \frac{\sum_{i=k+1}^{n} (x_i - a y_i)}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \left| \frac{\sum_{i=k+1}^{n} (x_i - a y_i)}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \left| \frac{\sum_{i=k+1}^{n} (x_i - a y_i)}{y_{k+1} + y_{k+2} \cdots + y_n} \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} - a \right| < \epsilon.$$

Em outras palavras

$$\lim \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = a.$$

■

Com este resultado podemos, então, trazer mais uma demonstração alternativa para o Teorema de Stolz-Cesàro. Vejamos a seguir:

Demonstração Alternativa. Tendo em vista o resultado apresentado na Proposição 5, definamos as sequências

$$a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad \text{e} \quad b_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

Como $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então (b_n) é positiva e crescente. Por outro lado, $\lim(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = +\infty$ e isso implica que $\lim b_n = +\infty$, além disso por hipótese existe $\lim x_n/y_n = a$ então segue que:

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \lim \frac{x_n}{y_n} = a.$$

Da Proposição 5 temos que:

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = a \Rightarrow \lim \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = \lim \frac{a_n}{b_n} = a.$$

Logo,

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{a_n}{b_n} = a.$$

■

Veremos, agora, que se tivermos $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \pm\infty$, ainda, teremos $\lim \frac{a_n}{b_n} = \pm\infty$. Para provar este fato suponha que,

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = +\infty.$$

Neste caso, dado $K > 1$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > p$ teremos que:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} > K.$$

Como (b_n) é crescente e $K > 1$ nos resta que:

$$a_{n+1} - a_n > K(b_{n+1} - b_n) > b_{n+1} - b_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0.$$

Ou seja, (a_n) é crescente. Além disso, para todo $n > p$, podemos somar membro a membro as desigualdades a seguir

$$\begin{array}{rcl} a_{p+2} - a_{p+1} & > & b_{p+2} - b_{p+1}, \\ a_{p+3} - a_{p+2} & > & b_{p+3} - b_{p+2}, \\ a_{p+4} - a_{p+3} & > & b_{p+4} - b_{p+3}, \\ & \vdots & \\ a_n - a_{n-1} & > & b_n - b_{n-1}. \end{array}$$

De modo que, nos resta:

$$a_n - a_{p+1} > b_n - b_{p+1} \Rightarrow a_n > b_n + (a_{p+1} - b_{p+1}).$$

Como (b_n) é crescente e ilimitada, então para n suficientemente grande temos que

$$b_n + (a_{p+1} - b_{p+1}) > M$$

para qualquer $M \in \mathbb{R}$. Em particular, para $M > 0$. Logo, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ implica que $b_n + (a_{p+1} - b_{p+1}) > M$. Daí, fazendo $n > \max\{p, n_0\}$, vem que $a_n > M$, ou seja, $\lim a_n = +\infty$. Assim, pelo Teorema de Stolz-Cesàro, segue que:

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = +\infty \Rightarrow \lim \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

Então,

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

O caso em que $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = -\infty$ é análogo.

Com isso, concluímos a validade do Teorema de Stolz-Cesàro não só quando o limite da razão incremental é finito, mas também quando ele é infinito. Ademais, uma coisa interessante sobre esse teorema é que nem sempre a sua recíproca é verdadeira, para ter certeza disso vamos analisar o exemplo a seguir:

Exemplo 14. *Podemos definir* (x_n) *e* (y_n) *como*

$$x_n = \begin{cases} n+1; \textit{ se } n \textit{ é ímpar} \\ n; \textit{ se } n \textit{ é par} \end{cases} \quad e \ y_n = n.$$

Observe que $\lim x_n/y_n = 1$ *e, de fato,* (y_n) *é estritamente crescente, além disso,* $\lim y_n = +\infty$*, mas*

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \begin{cases} 0; \textit{ se } n \textit{ é ímpar} \\ 2; \textit{ se } n \textit{ é par.} \end{cases}$$

Logo, $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ *não converge, pois temos duas subsequências convergindo para limites distintos.*

Contudo, é possível tornar a recíproca verdadeira, para isso, deve-se também assumir que $\lim \frac{y_n}{y_{n+1}}$ converge para algum outro número que não 1. Vejamos a proposição a seguir:

Proposição 6. *Se (x_n) e (y_n) são duas sequências de números reais tais que (y_n) é estritamente crescente, $\lim y_n = +\infty$ e $\lim \frac{y_n}{y_{n+1}} = k \neq 1$, além disso, $\lim \frac{x_n}{y_n} = \omega$. Nessas condições temos que $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \omega$.*

Demonstração. Recorrendo a um artifício algébrico podemos ver que:

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} &= \frac{(y_{n+1}-y_n)(x_{n+1}-x_n+x_n)}{y_{n+1}(y_{n+1}-y_n)} \\
&= \frac{(x_{n+1}-x_n)(y_{n+1}-y_n)+x_n(y_{n+1}-y_n)}{y_{n+1}(y_{n+1}-y_n)} \\
&= \left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right)\left(\frac{y_{n+1}-y_n}{y_{n+1}}\right)+\left(\frac{x_n}{y_{n+1}}\right) \\
&= \left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right)\left(1-\frac{y_n}{y_{n+1}}\right)+\left(\frac{x_n}{y_n}\cdot\frac{y_n}{y_{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Então,

$$\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right)\left(1-\frac{y_n}{y_{n+1}}\right) = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \left(\frac{x_n}{y_n}\cdot\frac{y_n}{y_{n+1}}\right).$$

Como (y_n) é crescente então $\frac{y_n}{y_{n+1}} \neq 1$, consequentemente $\left(1-\frac{y_n}{y_{n+1}}\right) \neq 0$. Daí,

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \frac{x_n}{y_n}\cdot\frac{y_n}{y_{n+1}}}{1-\frac{y_n}{y_{n+1}}}.$$

Aplicando limite em ambos os membros da última igualdade e lembrando que $k \neq 1$, segue que:

$$\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{\lim \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\cdot\frac{y_n}{y_{n+1}}\right)}{\lim\left(1-\frac{y_n}{y_{n+1}}\right)} = \frac{\omega(1-k)}{1-k} = \omega.$$

Isso finaliza a demonstração. ■

A fim de fixarmos as ideias discutidas até aqui, vejamos a seguir alguns exemplos imediatos de aplicação do Teorema de Stolz-Cesàro.

Exemplo 15. *Mostre que* $\lim \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

Solução. Neste caso, basta fazermos $a_n = \ln(n)$ e $b_n = n$ é imediato que (b_n) é estritamente crescente e $\lim b_n = +\infty$. Logo, pelo Teorema 6, segue que:

$$\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{n+1-n} = \lim \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0.$$

Portanto,

$$\lim \frac{\ln(n)}{n} = \lim \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Exemplo 16. *Dado que $n,k \in \mathbb{N}$. Calcule*

$$\lim \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n}.$$

Solução. Queremos usar o Teorema 6, para isso basta definirmos $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ e $b_n = n$. Feito isso temos todas as condições que precisamos. Daí,

$$\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{(n+1)-n} = \lim \frac{1}{n+1} = 0.$$

Logo, pelo Teorema 6, nos resta que:

$$0 = \lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n}.$$

Exemplo 17. *Encontre o valor de* $\lim \frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$, *donde $n \in \mathbb{N}$.*

Solução. Pondo $a_n = 1+2^2+\cdots+n^2$ e $b_n = n^3$ temos que (b_n) é estritamente crescente e $b_n \to +\infty$. Neste caso, podemos utilizar o Teorema 6. Assim,

$$\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{3n^2+3n+1} = \lim \frac{n^2+2n+1}{3n^2+3n+1} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, pelo Teorema de Stolz-Cesàro, conclui-se que:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Diante do exposto, passamos a analisar, na próxima seção, alguns resultados importantes que são consequências diretas do Teorema de Stolz-Cesàro.

4.2 ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA DE STOLZ-CESÀRO

Nesta seção traremos alguns resultados que são consequências imediatas do Teorema de Stolz-Cesàro.

Corolário 1. *Seja* (z_n) *uma sequência de números reais. Suponha que existe* $\lim z_n$ *(finito ou infinito), então*

$$\lim \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} = \lim z_n.$$

Demonstração. Com efeito, tomando as sequências (a_n) e (b_n) tais que $a_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ e $b_n = n$. Temos que (b_n) é estritamente crescente e $\lim b_n = +\infty$. Daí, segue-se que:

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_{n+1} - (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)}{n+1-n} = \lim z_{n+1} = \lim z_n.$$

Logo, o Teorema de Stolz-Cesàro garante

$$\lim \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} = \lim z_n$$

e isso finaliza a demonstração. ∎

Corolário 2. *Seja* (x_n) *uma sequência arbitrária de números reais positivos, suponha que existe* $\lim x_{n+1}/x_n$ *(finito ou infinito), então*

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \sqrt[n]{x_n}.$$

Demonstração. Suponha inicialmente que $\lim x_{n+1}/x_n$ existe (finito ou infinito) e diferente de zero. Como $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então podemos definir as sequências $a_n = \ln(x_n)$ e $b_n = n$. Neste caso, observe que:

$$\begin{aligned} \lim \left[\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)\right] &= \lim [\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n)] \\ &= \lim \frac{\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n)}{(n+1)-n} \\ &= \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\lim [\ln(\sqrt[n]{x_n})] = \lim \frac{\ln x_n}{n} = \lim \frac{a_n}{b_n}$$

Note que (b_n) é estritamente crescente e $\lim b_n = +\infty$. Então, aplicando exponencias, segue do Teorema de Stolz-Cesàro que:

$$\begin{aligned} \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{a_n}{b_n} \quad &\Rightarrow \quad \lim \left[\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)\right] = \lim [\ln(\sqrt[n]{x_n})] \\ &\Rightarrow \quad e^{\lim\left[\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)\right]} = e^{\lim[\ln(\sqrt[n]{x_n})]} \\ &\Rightarrow \quad \lim e^{\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)} = \lim e^{\ln(\sqrt[n]{x_n})} \\ &\Rightarrow \quad \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \sqrt[n]{x_n}. \end{aligned}$$

Agora, suponha que $\lim x_{n+1}/x_n = 0$. Assim, dado $\epsilon > 0$ fixemos o número M positivo satisfazendo a desigualdade a seguir:

$$-\epsilon < 0 < M < \epsilon.$$

Como $\lim x_{n+1}/x_n = 0$, existe $p \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > p$ vale

$$0 < \frac{x_{p+i}}{x_{p+i-1}} < M.$$

Com $i \in \{2,3,4,\cdots,n-p\}$, de modo que multiplicando essas $n-p$ desigualdades membro a membro, teremos.

$$\begin{aligned} n > p \quad &\Rightarrow \quad 0 < \frac{x_{p+2}}{x_{p+1}} \cdot \frac{x_{p+3}}{x_{p+2}} \cdot \frac{x_{p+4}}{x_{p+3}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} < M^{n-p} \\ &\Rightarrow \quad 0 < \frac{x_n}{x_{p+1}} < M^{n-p}. \end{aligned}$$

Como $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pondo $a = \dfrac{x_{p+1}}{M^p} > 0$ e extraindo raízes n-ésimas teremos que para todo $n > p$ vale a desigualdade a seguir:

$$0 < \sqrt[n]{x_n} < M\sqrt[n]{a}. \tag{12}$$

Tendo em vista que, $M < \epsilon$ temos $M/\epsilon < 1$ e isso implica que $\epsilon/M > 1$, assim, $\epsilon/M - 1 > 0$. Por outro lado, $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ então conclui-se que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_1$, vem que:

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{\epsilon}{M} - 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \frac{\epsilon}{M}. \tag{13}$$

Então, de (12) e (13), pondo $n_0 = \max\{p, n_1\}$, segue-se que:

$$n > n_0 \Rightarrow -\epsilon < 0 < \sqrt[n]{x_n} < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Portanto,

$$n > n_0 \Rightarrow -\epsilon < \sqrt[n]{x_n} < \epsilon \Rightarrow \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \sqrt[n]{x_n} = 0.$$

Em todo caso temos $\lim x_{n+1}/x_n = \lim \sqrt[n]{x_n}$.

■

Corolário 3. *Se (y_n) é uma sequência de números reais positivos para todo $n \in \mathbb{N}$ e existe $\lim y_n$ (finito ou infinito), então*

$$\lim \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n} = \lim y_n$$

Demonstração. Como, por hipótese, tem-se que $y_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $z_n = \prod_{i=1}^{n} y_i > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{z_{n+1}}{z_n} = \lim y_{n+1} = \lim y_n.$$

Como estamos supondo que $\lim y_n$ existe, nos resta que $\lim z_{n+1}/z_n$ também existe e, pelo Corolário 2, conclui-se que

$$\lim \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n} = \underbrace{\lim \sqrt[n]{z_n} = \lim \frac{z_{n+1}}{z_n}}_{\text{Pelo Corolário 2}} = \lim y_n.$$

Portanto, temos que $\lim \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n} = \lim y_n$ ■

Diante dos resultados apresentados nos Corolários 1 e 3, conclui-se que, se existir $\lim a_n$ (finito ou infinito) e $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos então definir

$$A_n = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \quad \text{e} \quad G_n = \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n}$$

(a média aritmética e a média geométrica respectivamente). Logo, nos resta que:

$$\lim A_n = \lim G_n.$$

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo, são apresentadas algumas aplicações que envolvem o Teorema de Stolz-Cesàro. Dessa forma, é possível identificar como esse teorema é útil para calcular limites que relacionam o quociente de duas sequências, que pela definição ou por outros meios seria bem mais complexo. Para o desenvolvimento deste capítulo nos baseamos, principalmente, em (LIMA, 2022), (KACZOR; NOWAK, 2000) e problemas olímpicos.

Aplicação 1. *Prove que: Se* (a_n) *é uma sequência, tal que* $\lim(a_{n+1}-a_n)=k$*, então* $\lim a_n/n=k$*.*

Solução. Neste caso, vamos definir $x_n=a_n$ e $y_n=n$. Note que (y_n) é estritamente crescente e $\lim y_n=+\infty$. Temos também que

$$\lim\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1-n}=\lim(a_{n+1}-a_n)=k.$$

Logo, segue do Teorema de stolz-Cesàro que:

$$\lim\frac{x_n}{y_n}=\lim\frac{a_n}{n}=k,$$

que é o resultado desejado.

Com o resultado dessa aplicação podemos notar que se (a_n) é uma sequência convergente, digamos para L, então pela linearidade das sequências convergentes vale

$$\lim(a_{n+1}-a_n)=\lim a_{n+1}-\lim a_n=L-L=0.$$

Pela Aplicação 1, conclui-se que $\lim a_n/n=0$ sempre que (a_n) for uma sequência convergente.

Aplicação 2. *Mostre que: se* $n\in\mathbb{N}$ *e* $a_n=n!\cdot e^n/n^n$*, então* $\lim\sqrt[n]{a_n}=1$*.*

Solução. Note que $a_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Assim, podemos observar que:

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{\dfrac{(n+1)!\cdot e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!\cdot e^n}{n^n}}=\lim\frac{e\cdot n^n}{(n+1)^n}.$$

Como $n \in \mathbb{N}$, temos $n^n > 0$. Daí, lembrando que $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, e dividindo todos os termos da última igualdade por n^n segue-se que:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{e \cdot n^n}{n^n}}{\dfrac{(n+1)^n}{n^n}} = \lim \frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{e}{e} = 1.$$

Portanto, pelo Corolário, 2 teremos:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

que é o resultado buscado.

Aplicação 3. *Calcule o seguinte limite*

$$\lim \frac{1-2+3-4+\cdots+(-2n)}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Solução. Inicialmente vamos definir as sequências (a_n) e (b_n) como

$$a_n = 1-2+3-4+\cdots+(-2n) \quad \text{e} \quad b_n = \sqrt{n^2+1}.$$

Observe que (b_n) é estritamente crescente e $\lim b_n = +\infty$, além disso temos que

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= 1-2+\cdots+(-2n)+(2n+1)+(-(2n+2))-(1-2+\cdots+(-2n)) \\ &= 2n+1-(2n+2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

e

$$b_{n+1}-b_n = \sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2+1}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \lim \frac{-1}{\sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2+1}} \cdot \frac{\left(\sqrt{(n+1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(\sqrt{(n+1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}\right)} \\ &= \lim \frac{-\sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2+1}}{2n+1} \\ &= \lim \frac{-\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, vale que $n = \sqrt{n^2}$. Assim, dividindo todos os termos da última igualdade por n nos resta que:

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{-\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{-1-1}{2} = -1.$$

Portanto, o Teorema de Stolz-cesàro garante que:

$$\lim \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-2n)}{\sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{a_n}{b_n} = -1.$$

Que é o limite procurado.

Aplicação 4. *Considere uma sequência de números reais* (a_n) *tal que* $\lim a_n = a$ *então faça o que se pede.*

(a) Prove que $\lim \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = a$*;*

(b) Prove que $\lim \frac{n \cdot a_1 + (n-1) \cdot a_2 + \cdots + 1 \cdot a_n}{n^2} = \frac{a}{2}$.

Solução. (a) Neste caso, vamos tomar

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \quad \text{e} \quad t_n = \ln(n).$$

Podemos notar que (t_n) é estritamente crescente e $\lim t_n = +\infty$. Nós ainda temos que:

$$\begin{aligned}
\lim \frac{s_{n+1} - s_n}{t_{n+1} - t_n} &= \lim \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}}{\ln(n+1) - \ln(n)} \\
&= \lim \frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
&= \lim \frac{a_{n+1}}{(n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\
&= \lim \frac{a_{n+1}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \\
&= \lim a_{n+1}.
\end{aligned}$$

De modo que,

$$\lim \frac{s_{n+1}-s_n}{t_{n+1}-t_n} = \lim a_n.$$

Logo, pelo teorema de Stolz-Cesàro, segue-se que:

$$\lim \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = \lim \frac{s_n}{t_n} = a.$$

Como queríamos provar.

(b) Fazendo $z_n = n\cdot a_1 + (n-1)\cdot a_2 + \cdots + 1\cdot a_n$ e $s_n = n^2$, percebemos que (s_n) é estritamente crescente e $s_n \to +\infty$. Assim, podemos utilizar o Teorema de Stolz-Cesàro. Temos, ainda, que:

$$\begin{aligned} z_{n+1}-z_n &= [(n+1)\cdot a_1 + n\cdot a_2 + \cdots + 2a_n + 1\cdot a_{n+1}] - [n\cdot a_1 + (n-1)\cdot a_2 + \cdots + 1\cdot a_n)] \\ &= (n+1-n)a_1 + (n-n+1)a_2 + (n-1-n+2)a_3 + \cdots + (2-1)a_n + a_{n+1} \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1}, \end{aligned}$$

e

$$s_{n+1} - s_n = 2n+1.$$

Daí,

$$\lim \frac{z_{n+1}-z_n}{s_{n+1}-s_n} = \lim \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}}{2n+1}.$$

Observe que podemos aplicar o Teorema de Stolz-Cesàro, novamente, as sequências (x_n) e (y_n), dadas por $x_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}$ e $y_n = 2n+1$. Logo,

$$\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim \frac{a_{n+2}}{2} = \lim \frac{a_n}{2} = \frac{a}{2}.$$

Portanto, nos resta que:

$$\lim \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 1a_n}{n^2} = \lim \frac{z_n}{s_n} = \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{2}.$$

Isso conclui o que foi solicitado.

Aplicação 5. *Calcule o limite a seguir:*

$$\lim \frac{1}{\sqrt{3n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{3n}} \right).$$

Solução. Queremos usar o Teorema de Stolz-Cesàro. Para isso tomemos

$$x_n = \sum_{i=n}^{3n} \frac{1}{\sqrt{i}} \quad \text{e} \quad y_n = \sqrt{3n}.$$

Vemos que (y_n) é estritamente crescente e $\lim y_n = +\infty$. Além disso,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{3n+1}} + \frac{1}{\sqrt{3n+2}} + \frac{1}{\sqrt{3n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e

$$y_{n+1} - y_n = \sqrt{3n+3} - \sqrt{3n}.$$

Daí, podemos notar que

$$\begin{aligned} \lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} &= \lim \frac{\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3n+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3n+3}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+3}-\sqrt{3n}} \\ &= \lim \underbrace{\frac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3n+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3n+3}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{3n+3}+\sqrt{3n}\right)}{3n+3-3n}}_{p_n}. \end{aligned}$$

Agora precisamos determinar $\lim p_n$. Dessa forma, fazendo a distributiva na última igualdade e dividindo todos os termos do numerador por n nos resta que:

$$\lim p_n = \lim \frac{\sqrt{\frac{3+\frac{3}{n}}{3+\frac{1}{n}}} + \sqrt{\frac{3+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}} + \sqrt{\frac{3+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}} - \sqrt{3+\frac{3}{n}} + \sqrt{\frac{3}{3+\frac{1}{n}}} + \sqrt{\frac{3}{3+\frac{2}{n}}} + \sqrt{\frac{3}{3+\frac{3}{n}}} - \sqrt{3}}{3} = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}.$$

De modo que,

$$\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim p_n = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto, pelo Teorema de Stolz-Cesàro vem:

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{1}{\sqrt{3n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{3n}}\right) = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}.$$

que é o resultado desejado.

Aplicação 6 (Competição Elon Lages Lima, 2020)**.** *O limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{1/k}}\right)}{n}$$

é dado por:

(a) 1 *(b)* 2 *(c)* π *(d)* $\pi^2/2$ *(e)* e

Solução. Neste caso vamos definir as sequências $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/k}}$ e $y_n = n$. Temos que (y_n) é estritamente crescente e $y_n \to +\infty$, assim, podemos utilizar o Teorema de Stolz-Cesàro avaliando desta vez o seguinte limite:

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/k}} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{1/k}}\right)}{n-(n-1)} = \lim \frac{1}{n^{1/n}} = \frac{\lim 1}{\lim \sqrt[n]{n}}.$$

Se $\lim \sqrt[n]{n}$ existir e diferente de zero. De fato, este limite existe e vamos provar que ele é igual a 1. Com efeito, como $n \in \mathbb{N}$ então a sequência $b_n = n > 0$ para todo n natural. Logo, podemos utilizar o Corolário 2, isto é

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Então,

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{\lim 1}{\lim \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1,$$

e, pelo Teorema de Stolz-Cesàro, vem que:

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/k}}\right)}{n} = 1.$$

Portanto, a resposta correta é o item (a).

É importante mencionar que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ é um resultado bastante conhecido de estudantes que cursaram um curso de Análise Real e aqui vemos como o Teorema de Stolz-Cesàro, através de um de seus corolários, nos permite provar este resultado de maneira bem rápida.

Aplicação 7 (Romanian Mathematical Competitions, 2004)**.** *Seja $x_0 > 0$ e para qualquer inteiro positivo n, considere $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}$. Encontre:*

(a) $\lim x_n$*;*

(b) $\lim \dfrac{x_n^3}{n^2}$.

Solução. (a) Como $x_n > 0$ para todo n inteiro positivo, podemos notar da relação de recorrência que:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \Rightarrow x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{x_n}} > 0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n.$$

Ou seja, (x_n) é estritamente crescente. Agora, suponha que (x_n) converge para um certo número real L e apliquemos o limite em ambos os membros da relação de recorrência que nos foi fornecida. Além disso, devemos ter $L \neq 0$, pois (x_n) é crescente com $x_n > 0$. Disso,

$$\lim x_{n+1} = \lim\left(x_n + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) \Rightarrow L = L + \frac{1}{\sqrt{L}} \Rightarrow 0 = 1.$$

Chegamos, então, num absurdo. Logo, (x_n) é divergente e $\lim x_n = +\infty$, já que (x_n) é estritamente crescente e isso finaliza o item (a).

(b) Neste caso, vamos aplicar o Teorema de Stolz-Cesàro às sequências dadas por $a_n = \sqrt{x_n^3}$ e $b_n = n$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim \frac{\sqrt{x_{n+1}^3}-\sqrt{x_n^3}}{n+1-n} &= \lim\left[\left(\sqrt{x_{n+1}^3}-\sqrt{x_n^3}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x_{n+1}^3}+\sqrt{x_n^3}\right)}{\sqrt{x_{n+1}^3}+\sqrt{x_n^3}}\right]\\
&= \lim \frac{x_{n+1}^3 - x_n^3}{\sqrt{x_{n+1}^3}+\sqrt{x_n^3}}\\
&= \lim \underbrace{\frac{\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^3 - x_n^3}{\sqrt{\left(x_n + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^3} + \sqrt{x_n^3}}}_{\text{Pela recorrência}}\\
&= \lim \frac{3\sqrt{x_n^3} + 3 + \frac{1}{\sqrt{x_n^3}}}{\sqrt{x_n^3 + 3\sqrt{x_n^3} + 3 + \frac{1}{\sqrt{x_n^3}}} + \sqrt{x_n^3}}\\
&= \lim \frac{3 + \frac{3}{\sqrt{x_n^3}} + \frac{1}{x_n^3}}{\sqrt{1 + \frac{3}{\sqrt{x_n^3}} + \frac{3}{x_n^3} + \frac{1}{\sqrt{x_n^9}}} + 1} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, pelo Teorema de Stolz-Cesàro segue-se que:

$$\lim \frac{x_n^3}{n^2} = \left(\lim \frac{a_n}{n}\right)^2 = \left(\lim \frac{\sqrt{x_n^3}}{n}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Aplicação 8 (OBMU 2003 (Adaptado))**.** *Defina* $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n^2 - 2.$ *Prove que* $\lim \dfrac{\ln\ln a_n}{n} = \ln 2.$

Solução. Iniciaremos utilizando o princípio de indução finita sobre n para mostrarmos que $a_n \geq 3$ para todo n natural. Observe

$$a_1 = 3 \Rightarrow a_2 = 3^2 - 2 = 7 \geq 3,$$

que são os dois casos iniciais. Suponha que $a_n \geq 3$ (hipótese de indução), daí em face dessa hipótese temos que:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2 \geq 3^2 - 2 = 7 \Rightarrow a_{n+1} \geq 7 \geq 3,$$

o que prova a validade para a_{n+1}. Portanto, (a_n) é estritamente crescente, pois

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n - 2 \quad &\Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n = a_n(a_n - 1) - 2 \,\geq\, 3(3-1) - 2 = 4 \\ &\Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n \geq 4 > 0 \\ &\Rightarrow \quad a_{n+1} > a_n. \end{aligned}$$

Agora, suponha por absurdo que (a_n) é convergente. Dessa forma, seja $\lim a_n = k$, então:

$$\lim a_{n+1} = \lim(a_n^2 - 2) \Rightarrow k = k^2 - 2 \Rightarrow k = -1 \quad \text{ou} \quad k = 2.$$

Absurdo, já que a_1 é maior que esses valores e a sequência (a_n) é crescente. Portanto, $a_n \to +\infty$. Voltando agora a nossa atenção para o limite solicitado no problema, podemos notar que temos as condições necessárias para usar o Teorema de Stolz-Cesàro, pois definindo as sequências (x_n) e (b_n), como $x_n = \ln\ln a_n$ e $b_n = n$, temos que (b_n) é estritamente crescente e $b_n \to +\infty$. Daí,

$$\begin{aligned} \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{b_{n+1} - b_n} &= \lim \frac{\ln(\ln(a_{n+1})) - \ln(\ln(n))}{(n+1) - n} \\ &= \lim \ln \left[\frac{\ln(a_{n+1})}{\ln a_n} \right] \\ &= \lim \ln \left[\frac{\ln(a_n^2 - 2)}{\ln a_n} \right] \\ &= \ln \lim \left[\frac{\ln(a_n^2 - 2)}{\ln a_n} \right]. \end{aligned}$$

Observe que o nosso problema, agora, se resume a mostrar que $\lim \dfrac{\ln(a_n^2 - 2)}{\ln a_n} = 2$. De fato, observe que:

$$\begin{aligned} \lim \frac{\ln(a_n^2 - 2)}{\log a_n} &= \lim \frac{\ln\left[\left(a_n + \sqrt{2}\right)\left(a_n - \sqrt{2}\right)\right]}{\ln a_n} \\ &= \lim \frac{\ln(a_n + \sqrt{2}) + \ln(a_n - \sqrt{2})}{\ln a_n} \\ &= \lim \frac{\ln(a_n + \sqrt{2})}{\ln a_n} + \lim \frac{\ln(a_n - \sqrt{2})}{\ln a_n}. \end{aligned}$$

Agora, se mostrarmos que, de fato, $\lim \frac{\ln(a_n+\sqrt{2})}{\ln a_n} = \lim \frac{\ln(a_n-\sqrt{2})}{\ln a_n} = 1$ o problema acaba. Para isso, note que $a_n \geq 3$, então $a_n > \sqrt{2}$ e isso implica que $a_n + a_n > a_n + \sqrt{2}$. Logo, $2a_n > a_n + \sqrt{2}$. Daí, como $(\ln a_n)$ é estritamente crescente, pois $a_n \geq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vem que:

$$\ln a_n < \ln(a_n + \sqrt{2}) < \ln(2a_n) = \ln 2 + \ln a_n.$$

Então,

$$\ln a_n < \ln(a_n + \sqrt{2}) < \ln 2 + \ln a_n. \tag{14}$$

Por outro lado, se $a_n \geq 3$ em particular $a_n > 1$ e isso implica que $\ln a_n > \ln 1 = 0$. Daí, podemos dividir ambos os membros da Desigualdade (14) por $\ln a_n$ de modo que nos restará.

$$1 < \frac{\ln(a_n + \sqrt{2})}{\ln a_n} < \frac{\ln 2}{\ln a_n} + 1. \tag{15}$$

Como $\lim a_n = +\infty$ temos que $\lim \ln a_n = +\infty$ e isso implica que $\lim \frac{\ln 2}{\ln a_n} = 0$. Portanto, aplicando o Teorema do confronto na Desigualdade (15), obtemos:

$$\lim \frac{\ln(a_n + \sqrt{2})}{\ln(a_n)} = 1.$$

Por um raciocínio análogo prova-se que $\lim \frac{\ln(a_n-\sqrt{2})}{\ln a_n} = 1$. Assim, pelo Teorema de Stolz-Cesàro nos resta que:

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{x_n}{b_n} = \lim \frac{\ln \ln a_n}{n} = \ln 2.$$

Isso resolve o problema.

Aplicação 9 (Indiana College Mathematics Competition, 1993)**.** *Seja* $a_1 = 1$ *e*

$$a_{n+1} = \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}, \quad \textit{para} \quad n > 0.$$

Determine $\lim \dfrac{a_n}{n}$.

Solução. Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $a_n > 0$ e

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \\
&\Rightarrow a_{n+1}^2 = \left(\sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)^2 \\
&\Rightarrow a_{n+1}^2 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\
&\Rightarrow a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_n.
\end{aligned}$$

Isso, por sua vez, nos sugere que $a_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, fazendo uso do princípio de indução finita sobre n, vemos que $a_1 \geq 1$ e

$$a_2^2 = a_1^2 + a_1 \Rightarrow a_2^2 = 1+1 = 2 \Rightarrow a_2 = \sqrt{2} \geq 1,$$

que são os casos inicias. Suponha que $a_n \geq 1$, assim, teremos

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_n \geq 1+1 = 2 \Rightarrow a_{n+1} \geq \sqrt{2} \geq 1.$$

Logo, nos resta que a desigualdade também vale para a_{n+1} e por indução vale que $a_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_n \Rightarrow a_{n+1}^2 \geq a_n^2 + 1 \Rightarrow a_{n+1}^2 > a_n^2 \Rightarrow a_{n+1} > a_n.$$

Portanto, (a_n) é estritamente crescente. Suponha por absurdo que a sequência (a_n) converge para um valor real finito, digamos L, então aplicando limite em ambos os membros da recorrência, teremos:

$$L^2 = L^2 + L \Rightarrow L = 0,$$

temos um absurdo, pois $a_1 = 1$ e a sequência (a_n) é crescente. Dessa forma, $a_n \to +\infty$ e isso implica que $1/a_n \to 0$. Além disso,

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_n \underbrace{\Rightarrow}_{a_n^2 \geq 1} \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = 1 + \frac{1}{a_n} \Rightarrow \lim \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = 1 \Rightarrow \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Agora, pondo $x_n = a_n$ e $y_n = n$ podemos aplicar o Teorema de Stolz-Cesàro já que (y_n) é estritamente crescente e $y_n \to +\infty$, nos restando que:

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1-n} = \lim \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{a_{n+1} + a_n} = \underbrace{\lim \frac{a_n}{a_{n+1} + a_n}}_{\text{Pela recorrência}}.$$

Então,

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{a_n}{a_{n+1} + a_n} = \lim \frac{1}{\dfrac{a_{n+1}}{a_n} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Logo, pelo Teorema de Stolz-Cesàro, temos que:

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Que é o limite procurado.

Diante das aplicações abordadas neste capítulo, nota-se a aplicabilidade do Teorema de Stolz-Cesàro em variados tipos de problemas desde os mais simples a problemas mais sofisticados. Em todo caso, fica evidente que tal teorema é um resultado poderoso e prático, portanto, utilizá-lo sempre que possível representa um ganho considerável para calcular limites de sequências numéricas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos uma pesquisa sobre o Teorema de Stolz-Cesàro que é um resultado importante da teoria de sequências numéricas e de limite. Durante o desenvolvimento da pesquisa foi possível constatar que tal teorema nos fornece um critério de convergência o qual nos permite avaliar muitos tipos de limites de sequências numéricas de maneira bastante prática. Em particular, ficou evidente a aplicabilidade e praticidade deste teorema em problemas como limites das médias arimética e geométrica de uma sequência convergente e nas diversas aplicações apresentadas neste trabalho.

Ademais, os objetivos específicos deste trabalho consistiram em compreender os principais conceitos de sequências numéricas, realizar um estudo teórico sobre o Teorema de Stolz-Cesàro e apresentar algumas de suas aplicações. Dessa forma, buscando atingir esses objetivos iniciamos apresentando uma revisão dos principais tópicos da teoria de sequências numéricas, tais como: definição de sequência numérica, sequências monótonas e limitadas e a definição limite. Com essas definições foi possível demonstrar, com a maior riqueza de detalhes possível, alguns teoremas e propriedades algébricas dos limites de sequências, que serviram de base para o que foi apresentado sobre o estudo teórico do Teorema de Stolz-Cesàro e suas aplicações.

Outrossim, foi apresentada uma interpretação geométrica de tal teorema que nos permitiu compreender melhor os seus conceitos basilares, a fim de, logo em seguida, trazermos três demonstrações diferentes do Teorema de Stolz-Cesàro, além de uma discussão sobre a sua recíproca mostrando que nem sempre ela é verdadeira, contudo ficou evidenciado que diante de um ajuste nas hipóteses podemos ganhar tal resultado ampliando ainda mais suas aplicações. Além disso, apresentamos algumas de suas consequências e várias aplicações de tal teorema. Diante disso, o objetivo geral deste trabalho, que consistiu em apresentar um material abrangendo o Teorema de Stolz-Cesàro que possa servir de consulta para estudantes e professores, foi alcançado.

Por fim, trazemos como sugestão para pesquisas futuras o estudo sobre aplicações de supremo e ínfimo, mais especificamente as desigualdades $\limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \geq \limsup \frac{a_n}{b_n}$ e $\liminf \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \leq \liminf \frac{a_n}{b_n}$ donde (a_n) e (b_n) são sequências de números reais com (b_n) estritamente crescente e $b_n \to +\infty$.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, S. **Understanding Analysis**. Nova York: Springer, 2010.

ARANTES, G. C. V.; RODRIGUES, C. G. Sequências e séries: Conceitos e aplicações. **INTERMATHS**, v. 4, n. 1, p. 88–102, jun. 2023. Disponível em: <https://periodicos2.uesb.br/index.php/intermaths/article/view/12235>. Acesso em: 20 nov. 2023.

AVILA, G. S. de S. O ensino de cálculo e da análise. **Revista Matemática Universitária**, n. 33, p. 83–95, 2002.

AVILA, G. S. de S. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3a. ed. São Paulo: Blucher, 2006.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática, tradução: Hygino H. Domingues**. Campinas: Unicamp, 2011.

FRANCO, A.; HIDALGO, E. La regla de l'hôpital: Versión discreta. **Visión Antataura**, v. 3, p. 39–59, 2019. ISSN 2309-6373. Disponível em: <http://portal.amelica.org/ameli/journal/225/2251081004/>. Acesso em: 20 nov. 2023.

GELCA, R.; ANDREESCU, T. **Putnam and Beyond**. Nova York: Springer, 2007.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6a. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo, vol. 1**. 5a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

KACZOR, W. J.; NOWAK, M. T. **Problems in Mathenatical Analysis I- Real Numbers, Sequences and Series**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2000. v. 4.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 15a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022. v. 1.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5a. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MORESI, E. Metodologia da pesquisa. **Brasília: Universidade Católica de Brasília**, v. 108, n. 24, 2003.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar**: Volume 3: introdução à análise. 3a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

OLIVEIRA, A. M. **O Teorema de Stolz-Cesàro e Suas Aplicaçes**. 39 f. Monografia (Graduação em Matemática) — Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2019. Disponível em: <http://repositorioinstitucional.uea.edu.br//handle/riuea/3593>. Acesso em: 09 set. 2023.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. Disponível em: <https://www.feevale.br/Comum/midias/0163c988-1f5d-496f-b118-a6e009a7a2f9/E-book%20Metodologia%20do%20Trabalho%20Cientifico.pdf>. Acesso em: 09 nov. 2023.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

UCHÔA, D. V.; LEME, R. P. P. O Teorema de Stolz. **Revista Eureka**, n. 23, p. 15–22, 2006. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka23.pdf>. Acesso em: 21 set. 2023.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de TCC

Assunto:	Entrega de TCC
Assinado por:	Franklin Barbosa
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Franklin Feitosa Barbosa**, **ALUNO (202012020007) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 18/12/2023 13:01:36.

Este documento foi armazenado no SUAP em 18/12/2023. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1027222
Código de Autenticação: 411cb2d03f