INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

José Sá Neto

TÍTULO

O CONCRETO, O ABSTRATO E A TRIGONOMETRIA NO LIVRO DE MATEMÁTICA

CAMPINA GRANDE – PB, 2023

José Sá Neto

TÍTULO

O CONCRETO, O ABSTRATO E A TRIGONOMETRIA NO LIVRO DE MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luis Havelange Soares

S111c

Sá Neto, José.

O concreto, o abstrato e a trigonometria no livro de matemática / José Sá Neto. - Campina Grande, 2023.

46 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Luis Havelange Soares

1. Matemática 2. Trigonometria - concreta 3. Trigonometria-abstrata I. Soares, Luis Havelange, II. Título.

CDU 514

JOSÉ SÁ NETO

O CONCRETO, O ABSTRATO E A TRIGONOMETRIA NO LIVRO DE MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

22 / 12 / 2023.

BANCA EXAMINADORA:

____

ORIENTADOR: Prof. Dr. Luis Havelange Soares – IFPB

____

AVALIADOR: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida – IFPB

____

AVALIADOR: Prof. Me. Cicero da Silva Pereira – IFPB

AGRADECIMENTOS

Agradeço à instituição do instituto federal da Paraíba pela oportunidade vivida e todas as experiências que obtive durante o curso de licenciatura em matemática.

Deixo também meus agradecimentos em especial ao professor Dr. Luis Havelange por toda sua orientação durante o trabalho de conclusção do curso.

Agradeço ao meu querido coordenador prof. Me. Orlando Batista por toda a sua empatia e atenção com todos os alunos , sua dedicação e carinho ficaram marcados para sempre em minha trajetória acadêmica.

Agradeço às minhas queridas irmãs Lucênia e Luana, obrigado por nunca me deixar desistir .

À minha querida esposa que sempre acreditou no meu potencial , muito obrigado!

Deixo aqui meus sinceros agradecimentos a minha querida mãe , Ismênia e meu amado avô, José Sá, obrigado pela educação e exemplos de vida . In memoriam.

A matemática, vista corretamente, possui

não apenas verdade, mas também
suprema beleza - uma beleza fria e
austera, como a da escultura

(Russell,Bertrand)

RESUMO

A presente pesquisa apresenta uma reflexão teórica sobre os conceitos de concreto e de abstrato no âmbito da construção de conhecimentos, especialmente no que se refere ao conhecimento matemático. Por consequência, adentra em reflexões sobre o processo de aprendizagem da matemática na escola, tomando como análise o texto do livro didático e como tema a Trigonometria. A pesquisa teve o objetivo de investigar relações entre o concreto e o abstrato no âmbito do conhecimento trigonométrico da educação básica. Como bases teóricas foram utilizados trabalhos como os de Ilienkov(1960), Soares (2015), Devlin (2006), Giardineto (1999), dentre outros. A perspectiva metodológica foi centrada num aprofundamento teórico sobre a relação do concreto e do abstrato nos processos de construção de conhecimento, seguida de uma análise de um livro didático do ensino médio com vistas a observar aspectos de concretude e de abstração. A reflexão teórica indicou a importância da relação entre concreto e abstrato para a compreensão do objeto em estudo. No contexto da matemática emergiu a relevância do processo de representação dos seus objetos para que estes possibilitem o diálogo entre a concretude e a abstração. A análise do livro didático indicou a predominância de aspectos abstratos para o estudo da trigonometria, necessitando-se, assim, de um cuidado especial do professor no processo de ensino.

Palavras chaves: Concreto. Abstrato. Matemática. Trigonometria.

ABSTRACT

This research presents a theoretical reflection on the concepts of concrete and abstract in the context of knowledge construction, especially with regard to mathematical knowledge. Consequently, it delves into reflections on the process of learning mathematics at school, taking the text of the textbook as an analysis and Trigonometry as its theme. The research aimed to investigate relationships between the concrete and the abstract within the scope of trigonometric knowledge in basic education. As theoretical bases, works such as those by Ilienkov (1960), Soares (2015), Devlin (2006), Giardineto (1999), among others, were used. The methodological perspective was centered on a theoretical deepening of the relationship between the concrete and the abstract in the processes of knowledge construction, followed by an analysis of a high school textbook with a view to observing aspects of concreteness and abstraction. Theoretical reflection indicated the importance of the relationship between concrete and abstract for understanding the object under study. In the context of mathematics, the relevance of the process of representing objects emerged so that they enable a dialogue between concreteness and abstraction. Analysis of the textbook indicated the predominance of abstract aspects for the study of trigonometry, thus requiring special care from the teacher in the teaching process.

Keywords: Concrete. Abstract. Mathematics. Trigonometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

No ensino da matemática é possível observar uma concepção marcada por um grau de dificuldade em diferentes níveis de aprendizado por parte do indivíduo que a estuda.Tal entendimento está preso à dificuldade de entendimento do conteúdo relacionado.Para o estudante isso pode ser um processo problemático e doloroso.

A técnica mais utilizada na atualidade pelos professores, na grande parte das disciplinas, é fazer com que o aluno traga o conteúdo para a sua realidade. Essa busca de aproximar o conteúdo em estudo aos aspectos do contexto do estudante leva inevitavelmente a uma reflexão mais profunda sobre a relação entre o concreto e o abstrato no ensino e aprendizagem da Matemática. A Matemática, na sua essência, lida com objetos de estudo que são abstratos, entretanto as suas fórmulas e equações auxiliam o indivíduo a resolver problemas do seu cotidiano, ou seja, por ser uma disciplina de cunho abstrato, há a necessidade de uma grande problematização no ensino do campo matemático.

Desde as séries iniciais do ensino fundamental, não é difícil encontrarmos estudantes com dificuldade nessa disciplina, pois, a dificuldade de associar os conteúdos ao seu cotidiano é muito grande e isso acarreta em um desinteresse ou até mesmo em negação total ao estudo dessa disciplina. Nesse contexto, o papel do professor é fundamental para trazer para o mundo do aluno, através de representações adequadas, os saberes matemáticos, por meio de exemplos e exercícios que envolvam aspectos de sua vida.

É necessário saber que no campo matemático não é tão simples fazer esse procedimento porque na grande maioria dos casos e exemplos em que isso ocorre nos deparamos com objetos de difícil representação como no caso, por exemplo, dos números irracionais. Para isso, fazemos uso de uma aproximação da realidade supondo tamanho, grandezas e elaborando algumas situações que, mesmo hipoteticamente, não sejam tão usuais, mas, que darão ao indivíduo uma possibilidade de construção do conhecimento a partir de uma dialética entre os aspectos da concretude (ou das representações) e os aspectos abstratos dos objetos matemáticos.

O grande paradigma é exatamente conseguir identificar qual é o processo chave que faz com que o aluno sinta dificuldade ou até mesmo não consiga

aprender, criando um bloqueio para a matemática. É preciso termos em mente alguns aspectos e também salientarmos que não existe só um motivo pelo qual o aluno esteja tendo dificuldade no aprendizado matemático.

A peça fundamental desse processo fica a cargo do professor descobrir por meio de análise do desenvolvimento do aluno em sala de aula, observando os exemplos, a capacidade de assimilação do conteúdo e principalmente, o passo a passo do aluno na resolução de questões para, a partir daí, ter um diagnóstico seguro de qual é a principal falha que o aluno está tendo naquela ocasião.

Dados divulgados em 08/08/2022 pela ONG “Todos pela Educação” em que 40,8% das crianças brasileiras entre 6 e 7 anos não sabiam ler ou escrever em 2021. É como se, em uma sala de aula com 25 crianças, 10 delas não haviam sido alfabetizadas. É possível observar que muitos estudantes saem do ensino fundamental sem conseguir realizar as quatro operações, isso nos leva a induzir que esses casos a deficiência na Matemática começam nas séries iniciais e são levados por um grande período ou até mesmo pra vida inteira.

A Matemática é uma ciência muito particular, por isso não se faz associação do mundo real com o abstrato de maneira tão simples como as outras disciplinas, como Física e Química, por exemplo, apesar de não fazerem parte do cotidiano dos alunos , eles preferem e têm mais facilidade em estudar tais disciplinas a compreender a Matemática.

Os saberes matemáticos são fundamentais para o desenvolvimento da capacidade de abstração no processo de aprendizagem do aluno. Diversos profissionais da área da matemática estudam e aprimoram seus conhecimentos nesse campo de estudo em todo o mundo, visando uma melhoria para os estudantes na concepção de ideias que trabalhem os fatores de concreto e abstrato da matemática.

A matemática é uma disciplina de estudo continuamente rejeitada pelos estudantes por terem dificuldades na sua compreensão. Não é difícil encontrar estudantes do ensino médio com dificuldades em conceitos básicos da Matemática que deveriam ter aprendido no ensino fundamental.

Não é diferente quando falamos da Trigonometria, área da Matemática que cria uma aversão nos alunos do conteúdo por na sua grande maioria alegarem ser de difícil compreensão. Não se pode ao certo identificar facilmente quais seriam os principais motivos para a negação da Trigonometria por parte dos alunos,

poderíamos até presumir dois fatores que ocorrem com maior frequência. Um é a falta de interesse ou a desmotivação dos estudantes em adentrar no mundo matemático. Mas essa pesquisa traz um olhar voltado para o processo cognitivo do aprendizado da Trigonometria, relacionando o que nela há de representações do concreto e o abstrato inerente à sua natureza conceitual. Além disso, queremos interpretar como esses fatores ajudam ou prejudicam no processo de aprendizagem do estudante.

Pode-se destacar que não é necessário que o aluno conheça amplamente a relação entre o concreto e abstrato no contexto do conhecimento matemático, pois para isso seria necessário um aprofundamento teórico sobre tais aspectos (concreto e abstrato). Mas, é de suma importância que o aluno utilize aspectos abstratos para a sua realidade, a sua cotidianidade, a sua concretude.

Levando em consideração o que foi exposto anteriormente, o projeto de pesquisa que tem como título “O concreto , o abstrato e a trigonometria no livro de matemática” busca responder às seguintes questões: Quais as concepções de concreto e de abstrato que a trigonometria estuda na educação básica possui? Como utilizar o concreto e o abstrato da Trigonometria em colaboração de um ensino aprendizagem mais significativo para o aluno?

1.1. OBJETIVOS

Objetivo geral:

- Investigar relações entre o concreto e o abstrato no âmbito do conhecimento trigonométrico da educação básica na segunda série do ensino médio.

Objetivos específicos:

- Interpretar a escrita trigonométrica no livro de Matemática do ensino médio relativamente aos conceitos de concreto e de abstrato;
- Identificar representações da trigonometria com bases em aspectos concretos;

- Analisar estudos já desenvolvidos sobre os conceitos de concreto e abstrato no âmbito do conhecimento da trigonometria.

1.2. Metodologia

O estudo será desenvolvido através de verificação e classificalçao dos objetos matemático encontrados e analisados no livro didático de matemática do 2° ano do ensino médio do IFPB (Instituto federal de ciência e tecnologia da paraiba), com textos e pesquisas já desenvolvidas que servem de apoio para o embasamento e estudo desses objetos faremos uma breve leitura e aproximação com a realidade dos estudantes analisando as demonstrações, conteudos teóricos, representações entre outros aspectos e posterior classificação que constará em três classificações possiveis para os objetos estudados que são,concretos,concretos cognitivos e abstratos.Vale a pena lembrar que essas classificações se consolida quase que em sua totalidade por indução do autor deste trabalho visto que a análise de um objeto matemático ser conreto ou abstrato vai dependender de vários viéses que se diferenciam de individuo para individuo.

2. O que é o concreto? O que é o abstrato?

O abstrato, numa definição superficial encontrada nos dicionários, é o que não é concreto o que possui alto grau de generalização. Já aí nota-se uma das questões fundamentais da filosofia de qualquer conceito que é a existência do outro representativo que com ele estabelece uma dialética do “ser” e do “não ser”. Ou seja, só faz sentido se falar de algo abstrato com base no reconhecimento da existência de uma concretude, só há o abstrato, porque também há o concreto. Da mesma forma, só há o concreto em virtude do “não concreto”, que é o abstrato.

Essa perspectiva inicial exige que compreendamos outra questão: esses conceitos, concreto e abstrato, como quaisquer outros, não possuem dimensões fixas, estáticas. Por isso mesmo falamos numa dialética, num contínuo entre eles. Dizendo de outra maneira, não há uma discretude, ou seja, o entendimento do que é concreto e do que é abstrato possui uma volatilidade por depender do conjunto de idiossincrasias de cada sujeito que os analisa. No entanto, alguns autores definem o abstrato como algo que só existe na ideia e não tem representatividade sensorial ou conceitual. Esse aspecto talvez seja o mais aceito na filosofia.

No dicionário de filosofia[1] Temos a seguinte definição para o que é abstrato:

é uma operação pela qual o espírito, depois de haver distinguido os diferentes caracteres de um objeto, separa um desses caracteres dos outros e o considera isoladamente como uma coisa. A palavra abstrato vem do latim *abstractus* que é considerado como separado, independente de suas determinações concretas e acidentais. Uma ideia abstrata é aquela que se aplica à essência considerada em si mesma e que é retirada por abstração. Podemos observar que existem várias definições nas quais poderíamos ficar aqui por muito tempo a explicitar cada uma delas de acordo com o autor e a área. Numa acepção simples o abstrato nada mais

é que uma construção mental, tendo como base um contexto espacial e temporal.

O fator abstração está inteiramente ligado com nossos pensamentos já que abstrair quer dizer retirar algo de alguma coisa. Por exemplo, de tanto vermos objetos azuis abstraímos o azul ou a ideia de azul que pode se relacionar com o tipo de pensamento criativo que também pode ser dedutivo, analítico e indutivo.

---

1 De acordo com a pagina: www.ceismael.com.br

Vamos dar ênfase em algumas definições e comentários com maior destaque no mundo filosófico no que se diz respeito ao que é abstrato e iremos poder dessa forma compreender um pouco mais. De acordo com a visão marxista, com base em Ilienkov

(1960) o conceito abstrato é tratado como mentalmente independente e isolado das coisas. Nomes e conceitos quando se referem a propriedades e relações das coisas são chamados abstratos, enquanto as coisas são chamadas de concretas.

Ainda falando de abstrato podemos concluir que com a concepção desse entendimento, do nível de abstração, conseguimos tornar mais fácil ou mais complexo a questão cognitiva da compreensão matemática. Funciona como uma balança, na qual é imprescindível garantir o equilíbrio, uma vez que quanto maior a abstração, mais complexo e difícil pode ficar a compreensão. Imaginemos a seguinte situação: se falarmos a um estudante de ensino fundamental, por exemplo, sobre funções trigonométricas, certamente isso lhe causará estranheza ao passo que se falarmos isso a um professor de matemática espera-se que o mesmo se interesse e queira se aprofundar mais no assunto, tendo assim mais facilidade no manuseio desse conteúdo. Acontece que para o aluno esse conteúdo é muito abstrato e para o professor não, logo para um indivíduo um entendimento é mais fácil que para o outro.

Ficam evidenciadas duas consequências ou causas como queiram. Uma é um nível de conhecimento e, por consequência, o nível de abstração; a outra é o nível de conteúdo. Há outros diversos fatores que podem influenciar na compreensão: idade cognitiva do indivíduo, idade do indivíduo, série que cursa, meio que vive, dentre outros.

Para o nosso estudo vamos apenas considerar os níveis de abstração. Para dar mais ênfase ao nosso exemplo, consideramos a soma das frações trigonométricas abaixo:

Ao tentarmos encontrar o resultado para o problema acima percebemos algo importante que além de ter um bom nível de abstração quem irá solucionar também

deve ter na sua carga de informações alguns conhecimentos prévios, como por exemplo, expressões algébricas e trigonometria, ângulos notáveis, são alguns desses. É notório que algumas pessoas poderiam simplesmente resolver esse problema enquanto que, para outras, pode ser um problema de difícil solução.

Repare que quando falamos em *seno*, *cosseno* e *tangente* de um ângulo estamos falando na ''representação'' de um ângulo, pois estamos explorando termos puramente abstratos. Se observarmos melhor podemos ver que após adquirir esse nível de abstração, ou seja, de conhecimento, passa a ser menos abstrato portanto, mais concreto, porém não um concreto comum como se diz na definição trivial mas, um concreto cognitivo construído na mente do indivíduo.

Para falarmos um pouco sobre o concreto é necessário que tenhamos um entendimento e plena convicção das definições que são objetivamente intituladas através de vários estudiosos em consideração que qualquer incorreção pode nos levar a uma concepção distorcida daquilo que realmente se quer expressar. Se estamos num campo de estudo complexo e que abrange várias áreas de estudos distintos é imprescindível que tenhamos um conhecimento prévio básico dos princípios básicos da lógica dialética entre os conceitos de concreto e abstrato.

Vamos considerar para nosso estudo que concretos são todos os objetos nos quais podemos através da nossa percepção inferir que são realmente reais, enquanto que abstratos são aquelas construções realizadas em nossa mente mesmo que ainda sejam abstraídas de um objeto propriamente dito concreto.

De acordo com Ilienkov(1960), para Marx, o concreto é uma unidade da diversidade na lógica dialética. Uma interpretação disso é que o concreto é apenas um dos elementos que compõem o conjunto de elementos que caracterizam o objeto. Ao ponto em que percebemos que os objetos não oferecem possibilidades de associações, comparações, objetividades e subjetividades, nos remetem a um entendimento de separação. Esse processo é o que se pode considerar como o processo de abstração. Nessa perspectiva a composição da concretude de um objeto está inevitavelmente atrelada a processos de abstração. A abstração separa, busca conexões, propriedades, investiga, constrói definições, faz simulações; o concreto nos dá uma ideia de completude, de acabamento, de significação manipulável. E esse fato ocorre exatamente fazendo a amarração do que a abstração realiza.

Segundo Ilienkov(1960), Marx explica ser o concreto justamente o que é composto por vários elementos que formam no final das contas, um só elemento. Mas, note que embora o concreto seja essa junção, ele também é parte. O concreto

é um dos componentes do objeto. Assim, o concreto e o abstrato tem uma relação vital, não há abstrato que não tenha alguma raiz numa representatividade da concretude. E, da mesma forma, não há objeto concreto que não seja forjado num processo de abstração.

Se observarmos bem, podemos até dizer que esses acontecimentos de concreto e abstrato exercem sobre si uma situação de dependência como um conceito de função, por exemplo, perceba que o objeto tratado como concreto ele é real e inerente a qualquer opinião alheia ou, em outras palavras, ele é concreto independentemente da participação de um terceiro. Ele está ali e ele existe. Pense em uma pedra, imagine que você está caminhando e de repente se depara com uma pedra enorme. Independentemente de você pensar nessa pedra ou não, ela está ali e logo ela é real.

Agora, vejamos a condição em que o abstrato se manifesta vamos usar o mesmo exemplo da pedra acima imagine agora que essa pedra é cinza, mesmo que você não tenha propriamente se deparado com uma pedra hoje certamente você a imaginou e logo em sua mente nesse momento por alguns segundos, existiu de forma abstrata uma pedra cinza. Mas, e a relação de dependência? Perceba que o concreto é independente, ele existe, se realmente for um objeto concreto sem ajuda de um terceiro vamos dizer assim.

Já a relação chamada abstrata só surge a partir do concreto. O cinza da pedra não vai surgir sem que haja interação de um ser humano para fazer a abstração a não ser que a pedra seja exatamente cinza. É impossível também abstrairmos algum objeto sem antes termos visto este objeto, só é possível imaginarmos algo se de alguma forma ou já vimos antes, ou ouvirmos algo parecido. Daí, criamos em nossa mente.

Resumidamente o concreto é tratado dessa forma para caracterizar coisas individuais sensorialmente contempladas, o concreto só está nominalmente presente no pensamento somente na capacidade de nome que o designa.

No entanto, nenhum abstrato ou tão pouco concreto pode ser instrumento de medição para nível de aprofundamento de estudo o que queremos salientar é que na verdade a pessoa que tem um pensamento mais abstrato ou mais concreto em determinado conteúdo ou situação de vida não quer dizer que propriamente este sabe mais ou menos que aquele por causa da concretude e abstração do momento. O que podemos dizer é que essa relação se caracteriza apenas como forma de conhecimento.

2.1. O abstrato na visão da metafísica

Antes de falarmos sobre o que é e como é representado o abstrato para metafísica vamos entender o que é a metafísica. Considerada como base da filosofia chamada de filosofia primeira é também um ramo responsável pelo estudo da existência do ser. A palavra meta significa "além de" e seu primeiro filósofo assim também sendo mais influente foi Aristóteles. Aristóteles tinha uma concepção diferente da de Platão, para ele o princípio da realidade não está no mundo inteligível e sim no nosso mundo, o sensível. A realidade sempre submetida ao tempo e espaço.

> Diferente de Aristóteles, Platão defendia que todo o verdadeiro saber se distingue pelas notas da necessidade lógica e da validade universal. Ou seja, a construção do conhecimento se dá a partir de um mundo, chamado por ele como mundo das ideias que independe da realidade. "Assim, para ele, não se pode procurar um verdadeiro saber na experiência. Com isso, ele citava a Matemática como sendo o maior exemplo do saber verdadeiro e indiscutível" (SOARES, 2015, p.50)

> Percebe-se que em determinado momento a compreensão humana já não acompanha a complexidade de elementos extremamente abstratos e fazemos uso de concepções concretas e termos acessórios para então sermos capazes de dar embasamento a esses casos como dos exemplos que iremos ver mais à frente.

Para a metafísica o abstrato é algo que o ser humano conceitua e tangibiliza para que sua mente possa processar conceitos abstratos inexistentes na observação da realidade subjetiva a partir da realidade objetiva, percebidos conceitos abstratos inexistentes. Por exemplo, o infinito, se situa no campo da existência ou no campo da metafísica? Depende de como você encara a Matemática.

A soma dos números naturais +.... pode ser considerada como uma demonstração do infinito (soma tende ao infinito), ou não, se observarmos a partir da ótica em que a sequência tem números finitos, uma vez dado um teremos uma finitude. No entanto, podemos fazer

essa soma pode ser considerada como uma demonstração do infinito ,a quantidade dos termos a serem somados tendem ao infinito já que determinado o n teremos uma quantidade finita de termos ou seja, s=0+1+2+3+....n+ com n sendo

número natural, assim deduzimos com mais facilidade uma fórmula para uma quantidade finita. O infinito é uma dedução lógica do raciocínio, situado no campo da metafísica. O infinito está além de tudo o que é físico ou mensurável fisicamente.

Essas breves reflexões mostram como é difícil falar de concretude e de abstração, especialmente no contexto do conhecimento matemático. Os objetos matemáticos são, por excelência, construções abstratas que fazemos a partir de objetos que não são matemáticos, ou a partir dos processos de representação de objetos matemáticos. Noutros campos científicos se faz uma relação entre concretude e abstração sem se questionar a existência do objeto, quase sempre fazendo uma referência ao próprio objeto (real) ou a uma das suas representações. Se vai se falar do átomo, parte-se da certeza que o átomo existe, mesmo que não seja possível manipular esse objeto com as mãos; se vai se falar de velocidade, mostra-se um experimento para que se "veja" o objeto materializado que chamamos de velocidade; Se vai se falar do "lugar", conceito da Geografia, usa-se como referencial um lugar específico, mesmo sabendo-se que o lugar, qualquer lugar é um conceito relativo, na perspectiva de vários autores da Geografia.

Essa ideia de que só os objetos estudados na Matemática são objetos que não possuem representação real é bastante limitada mas, ainda é usada em muitos discursos nos espaços educativos para se fazer referência às dificuldades de aprendizagem em Matemática. Sobre isso, Soares (2015), tece algumas críticas às concepções superficiais sobre abstração e mostra diversas situações, no âmbito de outras ciências, nas quais os objetos de estudo também não possuem uma representação real, no entanto, mesmo assim, não se observa ligações a esse fato e as dificuldades de aprendizagem. Ele cita como exemplo o caso de conceitos inseridos nas ciências sociais, como o conceito de "estado", de "democracia", ou no campo das línguas, como a construção da simbologia e dos textos. São conceitos

que possuem uma subjetividade, uma abstração, que podem ter representatividades concretas, mas são construções da mente humana.

Tais reflexões só corroboram com o que já dissemos, qual seja, o entendimento de que não há como se estudar nada, sem que se faça um caminhar na concretude e na abstração. Mesmo os objetos reais, manipuláveis, como o estudo dos reinos animal e vegetal na Biologia, só fazem sentido a partir de um processo dialético entre o concreto e o abstrato. E, ousamos dizer, com base em Kosik (1976), que qualquer prática de ensino, qualquer pretensão de construção de conhecimento, que se pretenda, presa exclusivamente, aos aspectos da concretude imediata dos objetos não resultará em nenhum progresso significativo.

3.Um Breve resumo sobre a trigonometria

De um modo geral podemos dizer que a trigonometria é o estudo da matemática encarregado por desenvolver relaçoes com triângulos e seus lados. A trigonometria é utilizada em diversas áreas como navegação, construção civil, química, biologia, e até medicina. A palavra 'trigonometria' vem do idioma grego 'trigono' se refere a triângulo e 'metrein' se refere às medidas. Ela surgiu inicialmente da necessidade de astronomos em calcular mas, foi depois desenviolvida pela navegação, já na área científica a trigonometria foi amplamente desenvolvida pelo Hiparco de Nicéia, que é até entao, lembrado como o pai da trigonometria.

As principais relaçoes de estudo da trigonometria são , seno,cosseno,tangente, funções trigonométricas,estudo da trigonometria no triangulo retangulo , euqações trigonométricas, lei dos senos e lei dos cossenos além do amplo estudo no ciclo trigonometrico.

3.1 Um olhar sobre o ensino de Trigonometria

No contexto do ensino de matemática as concepções em torno dos termos de concreto e de abstrato são muito simplistas e presas a entendimentos do senso comum. Isso é uma consequência da falta de estudos teóricos sobre esses termos, além de um sistema formalista matemático, onde mecanicamente se aceitam as definições, num processo que mais se parece a um acúmulo de informações.

A partir deste momento iremos concentrar nosso foco na análise do binômio concreto-abstrato em algumas relações trigonométricas. Para iniciarmos nossa conversa sobre esse assunto, antes é necessário que tenhamos em mente a importância do binômio concreto-abstrato na economia e na produção de riquezas. Por exemplo, hoje com estudos mais evoluídos é quase que impossível separar o conhecimento da fonte de riqueza o que muito já foi exaltado em tempos antigos. Hoje, é praticamente uma regra quando observamos por exemplo alguns produtos do setor de produção fabril, quanto mais complexo e codificado mais valor esse produto tem ao passo de que quanto menos codificado, ou seja, com menos informações menos valor o produto passa a ter.

Não é tão difícil de imaginar uma situação como esta, ao nosso redor temos vários exemplos como estes, onde o produto que cabe menos informações, ou seja, mais simplista, tem menos valor que um mais complexo. Esse acontecimento se dá porque segundo (MACHADO 2004 p. 24) o conhecimento se transformou em um dos fatores principais atrelados ao preço final do produto. A partir de então, é necessário que levemos em consideração uma síntese, onde é preciso que para o entendimento do nosso estudo os leitores possam ter uma formação acentuada no grau da matemática pois, consideramos no aspecto concreto e abstrato levando em consideração um mundo matemático e trigonométrico, onde seus aspectos e relações são majoritariamente abstratos. Porém, é possível classificarmos esses aspectos em outros conceitos de concreto e abstrato que iremos ver mais a frente.

Alguns aspectos que dificultam o aprendizado da matemática e consequentemente da trigonometria por ser um campo matemático é a compreensão dos termos abstrato e concreto de forma disjunta, que nos levam a ter um entendimento muito simplista desses termos, abraçados fortemente pela síntese da matemática formal no qual se defende que a Matemática não é para muitos. Também se pode ver uma estrutura onde percebemos que um dos erros enraizados

é considerar que a matemática é um estudo contemplativo como diz Bertrand Russell. “Embora isso possa parecer um paradoxo, toda ciência exata é denominada pela ideia de aproximação” (SINGH, 1999, p.42).

Diante das dificuldades encontradas no ensino da matemática e também por sua vez no ensino da trigonometria podemos destacar a dificuldade em trazer os objetos da Matemática para a realidade dos alunos, mesmo que sobre forma de representação, e em alguns casos essa representação ainda não irá ajudar muito, o que se entende e que cada vez mais é necessário problemas que induzam ao dia a dia dos alunos, pois a simples interlocução de problemas e exemplos sem nexo ao seu dia a dia ou seu cotidiano não atraem o entendimento e interesse e assim ficamos por trabalhar objetos matemáticos abstratos como sendo mais abstratos do que são e esses por sua vez se tornam mais um obstáculo didático para o aluno e o professor. “Os conceitos escolares na medida que não apresentam uma relação imediata com a vida dos alunos, são regidos por procedimentos de ensino arbitrários, como que um amontoado de regras sem nexo que são impostas aos alunos” [GIARDINETTO ,1999,p 04}

Em contra mão a tudo isso vimos uma necessidade extrema de justificar o ensino através dessa forma de ser necessário o ensino pelo cotidiano, forma metodológica que vem ganhando força nos últimos anos, que acaba por sua vez

sendo outro obstáculo de aprendizagem, o que justifica uma ascensão ao aprendizado cotidiano e menosprezo com o aprendizado da vida escolar.

Alguns fatores contribuem de forma preponderante para atuar como dificultadores do processo de aprendizagem por parte dos alunos, porém esses fatores se devem mais no momento aos docentes. Primeiramente ao fato de não questionarmos o porquê da Matemática ser considerada uma disciplina num patamar acima das outras, como se estivesse em outro nível e, assim, naturalizar uma falácia de que ela é mais complexa, mais difícil.

Outra questão que no nosso entendimento contribui para concepções equivocadas sobre a Matemática diz respeito à consideração de que ela é complexa, difícil, porque lida um nível alto de abstração. É muito comum escutarmos frases como “a Matemática é muito abstrata”. Todavia, desde os primeiros anos na escola estudamos em outras disciplinas assuntos que também levam em si uma carga de abstração tão grande quanto a Matemática. Se olharmos com atenção, perceberemos que não é uma exclusividade da Matemática.

O que mais nos impacta é sabermos que ao estarmos limitando o acesso ao conhecimento matemático, ao aprendizado, por caso da abstração, estamos também limitando o progresso das pessoas, pois todos nós temos uma relação com o mundo abstrato e não devemos deixá-la para trás, pois somos todos capazes de estimular e progredir nesse processo.

Outro fato fundamental é a representação. A partir dela podemos perceber ou melhorar o nosso entendimento dependendo da situação, conteúdo ou forma que estivermos estudando para assim termos condição de representar mesmo que em um momento inicial em nossa mente as ideias que ainda não estão concretas no mundo real, mas, no nosso mundo concreto cognitivo. A representação e o simbolismo são sem dúvidas, uma das chaves principais deste trabalho, ao passo que temos a oportunidade ou a condição de fazermos uma boa representação dos objetos matemáticos, no nosso caso trigonométrico, conseguimos assim uma melhora significativa no aprendizado.

> Sobre isso, Devlin (2006) defende que, todo ser humano traz consigo a capacidade para a compreensão dos processos matemáticos simples. No entanto, tais considerações sobre a matemática e, nesse caso, a capacidade de abstração ainda não é intencional, mas um processo involuntário e natural. O simbolismo, demarcado inicialmente pela representação, é a primeira capacidade

> desenvolvida pelo ser humano e é essencial para o desenvolvimento do processo abstrato. (Soares, 2015, p.104)

Ao observarmos os procedimentos de alta relevância nesse processo dialógico entre o concreto e o abstrato podemos perceber que há dois processos que estão conectados pelo concreto e o abstrato em toda a Matemática e também logicamente com a trigonometria, ora se iniciando o caminho do conteúdo pela ótica concreta e através de exemplos vamos aprofundando o conteúdo até chegar a uma formalização, ora partindo de uma abstração consequentemente formalista até chegar um ponto de concretude ideal para a compreensão do aluno. Podemos observar que não se é fácil determinar qual seria o melhor modelo metodológico a se adotar todavia, é possível destacarmos a importância da metodologia adotada para um êxito maior ou não no nosso contexto.

Talvez para alcançarmos um êxito melhor no contexto da aprendizagem da trigonometria poderíamos trabalhar com o binômio concreto\abstrato onde os dois fazem conexões a partir de representações e a partir daí começamos a avançar de forma mais satisfatória sobre esse ponto de vista. Não podemos esquecer que esses modelos vêm sendo fortemente exigidos junto a necessidade de se acrescentar ao cotidiano do aluno exemplos de objetos matemáticos e em nosso caso trigonométrico, para que se justifique o estudo, por vezes quase que forçados, são impostos na sala de aula, com a defesa de algo que fuja dessa metodologia não irá alcançar o resultado agradável no que se diz respeito ao aprendizado.

Temos consciência de que essa prática não pode ser somente aceita de tal forma, visto que o aluno também precisa dessa conexão com os conteúdos escolares e o aprendizado nos termos escolares são essenciais para o desenvolvimento de diversos campos, principalmente quando estamos falando em matemática. Essa característica também foi observada por Giardinetto (1999) e Machado (2011). Para Giardinetto, tal concepção pode levar à supervalorização do cotidiano do estudante e, assim, limita-se o processo de aprendizagem de conceitos científicos construídos social e culturalmente. Machado entende que esse modelo é insuficiente, pois, a partir de um determinado ponto, em face do esquema linear de compreender a construção do conhecimento, abandona-se a relação do conhecimento com o concreto e situa-se o processo exclusivamente no campo da abstração, o desconectado da realidade (Soares, 2015).

É importante ressaltarmos que um modelo ou outro não é suficiente para uma boa política de ensino, faz-se necessário darmos ênfase a esses modelos de concreto e abstrato como binômio e não dissociados apenas dando enfoque a um enquanto escanteamos o outro. Entendemos também que não conseguimos extinguir os problemas e dificuldades encontrados na trigonometria escolhendo apenas um modelo metodológico, mas, podemos minimizar as dificuldades fazendo com que tenhamos menos um problema ou mesmo um obstáculo didático desse tipo ao invés de darmos enfoque a um ou outro modelo seremos capazes de estabelecer um modelo metodológico que trabalhe de forma dialética entre o concreto e abstrato que nos possibilita explorar mais a fundo o estudo na Matemática sobre trigonometria.

Após discutirmos um pouco sobre os métodos que são utilizados, agora, vamos dar enfoque em outro fator indispensável para um melhor aproveitamento de compreensão a partir principalmente de objetos abstratos (nesse caso , a trigonometria se encaixa perfeitamente por estudar quase que em sua totalidade objeto matemáticos puramente abstrato),que são as representações. Existem vários tipos de objetos matemáticos, uns de fácil representação e outros nem tanto. Porém, o que pode ser feito para se ter êxito em uma boa representação desses objetos e como aprender a trabalhar de forma que sejam melhores representados e assim melhores compreendidos?

Para outros questionamentos sobre fatores que contribuem ou não para o auxílio do entendimento desses objetos matemáticos temos a dialética e seus pontos de vista, para essas concepções temos quatro pontos de vista principais, como defende Mello citado por Soares (2015).

> Para Giardinetto, tal concepção pode levar à supervalorização do cotidiano do estudante e, assim, limita-se o processo de aprendizagem de conceitos científicos construídos social e culturalmente. Machado entende que esse modelo é insuficiente, pois, a partir de um determinado ponto, em face do esquema linear de compreender a construção do conhecimento, abandona-se a relação do conhecimento com o concreto e situa-se o processo exclusivamente no campo da abstração, desconectando-o da realidade. (SOARES, 2015, p.106).

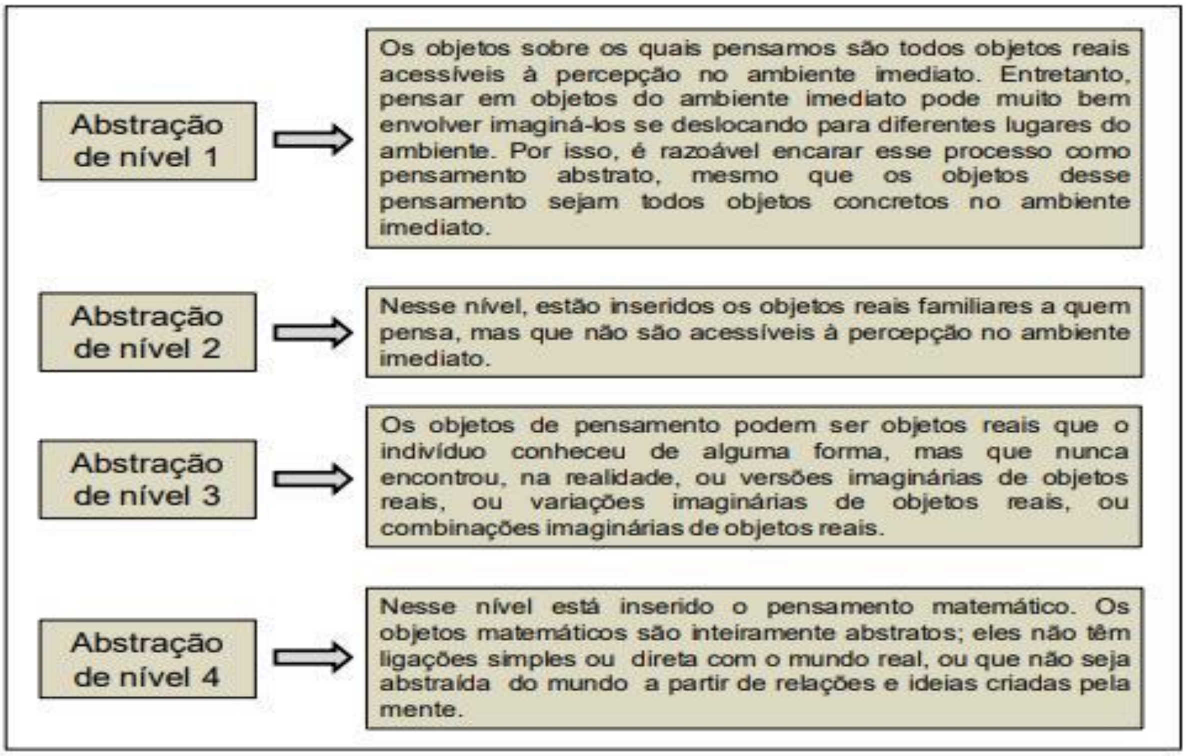
Com base em Soares (2015), defendemos que o entendimento ou classificação de concreto ou de abstrato, para um objeto dado, é estabelecido pelo grupo de significações que este objeto tem para o sujeito, fato que está diretamente associado ao conjunto de especificidades próprias, intrínsecas do objeto e também ao cabedal de construções cognitivas tomadas a partir dos conhecimentos prévios que o sujeito já possui do referido objeto. ou seja, a base cognitiva do indivíduo (aluno) é que determina o que é concreto para ele.

Para Soares (2015), qualquer conhecimento (ou novo conhecimento) está inserido em um determinado nível de abstração e de concretude que varia de sujeito para sujeito, em decorrência da estrutura cognitiva que cada um possui e também do próprio objeto. No entanto, independentemente da situação cognitiva e do objeto do conhecimento do qual se esteja tratando, haverá duas possibilidades a serem consideradas: (1) O físico (material, palpável, sensorial) pode ser considerado como instância do primeiro nível de abstração (A1); ou (2) O físico não representa o primeiro nível de abstração e há entre estes um “vazio de significação” ou um “obstáculo de representação”.

Entendemos que a base cognitiva de qualquer pessoa, especialmente em idade escolar, já tenha alcançado níveis de abstração superiores ao nível físico. Isto significa que, em termos de conhecimento matemático, alguns elementos abstratos inicialmente já sejam considerados como elementos concretos (concretos cognitivos). Consideramos que, independente do aspecto do objeto, do tipo de conhecimento e da sua materialidade ou não, a partir do momento em que este se incorpora à base cognitiva do indivíduo, ele passa a ser entendido como um objeto concreto.

Devllin (2006, p.143), classificou em quatro os níveis de abstração para que possamos compreender melhor em magnitude do que estamos falando :

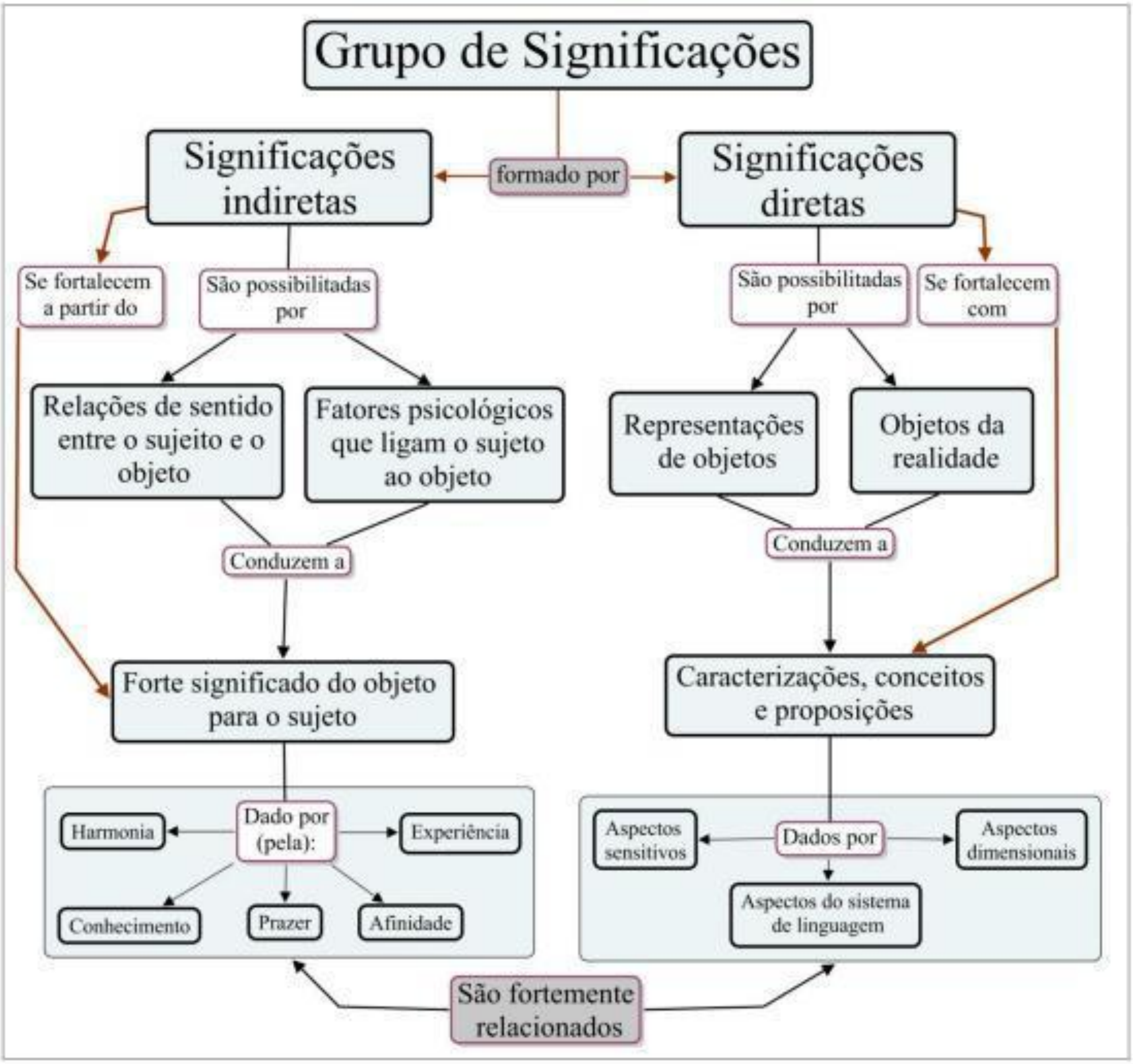
Figura 1: Níveis de abstração do conhecimento



Fonte: Devlin (2006, p.143)

Além disso, temos outros mapas como esse que nos auxiliaram durante o nosso estudo dando um melhor entendimento. Em especial, o mapa abaixo nos permite fazer esse dinamismo através das significações:

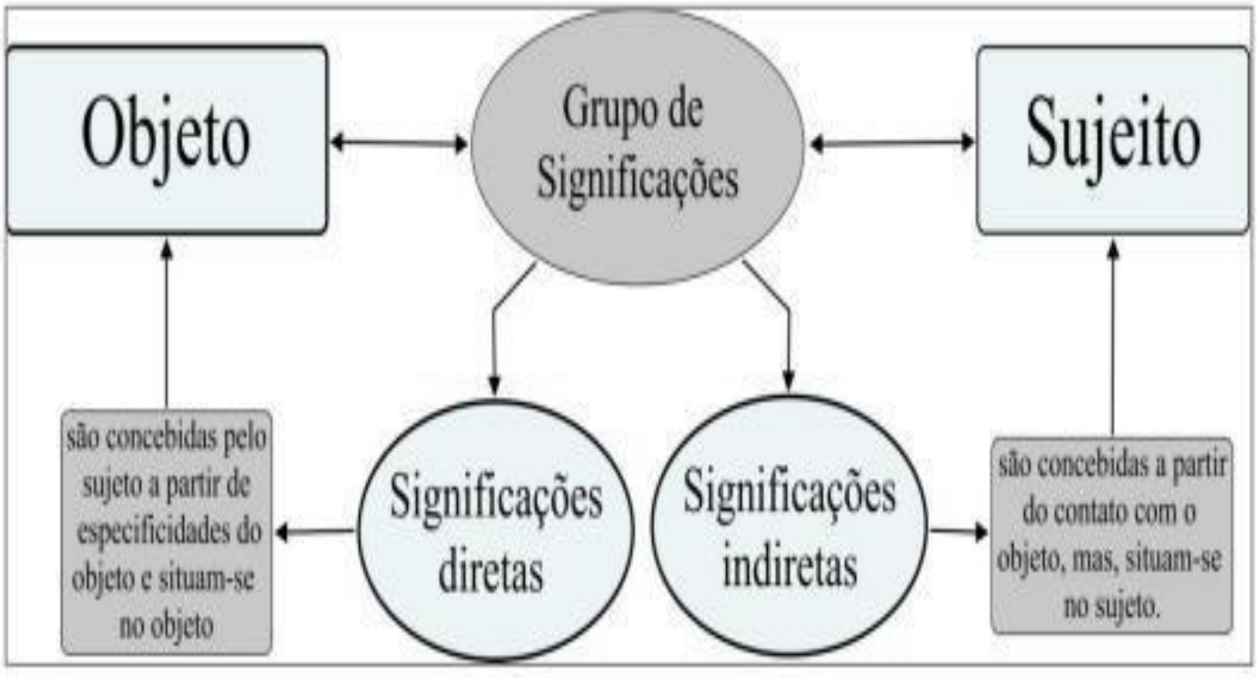
Figura 2: Grupos de significações no estudo de um objeto



FONTE: Soares (2015, p.136.)

A partir daqui entramos no ponto principal do nosso estudo, através de exemplos e contextualizações vamos exemplificar o que acontece de forma intrínseca na mente daquele que estuda ou de alguma forma desenvolve a Matemática para que se compreenda todo o processo que falamos até o presente momento com o auxílio primordial das significações e simbologia como podemos observar nas imagens abaixo dos diagramas.

Figura 3: Relações entre o sujeito e o objeto



Fonte: Soares (2015, p.140)

A estruturação proposta por Soares (2015), especialmente ao tratar do grupo de significações, nos parece bastante relevante para pensarmos no contexto da construção de conhecimento. Interpretando de outro modo, esta organização nos faz refletir sobre o fato de que há dois conjuntos de especificidades que se deve considerar no processo de construção de conhecimento de um objeto, ou no processo de aprendizagem de um objeto. Um deles diz respeito aos fatores expostos do sujeito que emergem a partir do contato com o objeto; o outro é composto por elementos que estão no objeto e que são observados ou interpretados pelo sujeito.

Notamos que as Significações diretas e as Significações indiretas são coisas distintas, na perspectiva de Soares (2015), fato com o qual também concordamos. Ousamos dizer que o processo de aprendizagem do objeto será tanto mais significativo, quanto mais dialeticamente esses grupos de significações estiverem relacionados. Ou seja, se as minhas construções cognitivas prévias possuem um diálogo consistente com os aspectos que constituem o objeto, possivelmente o meu entendimento e a minha nova concepção desse objeto ficará fortalecida.

Tomando esses argumentos como bases importantes na busca de compreendermos como se dá o processo de construção do conhecimento, como se conhece um objeto, como se aprende algo, no contexto do conhecimento surge outra questão que deve ser analisada. Se os objetos da Matemática não possuem uma concretude na perspectiva do concreto perceptível, sensorial, manipulável, como fazer então para possibilitar o grupo de significações de um objeto matemático?

É nessa perspectiva que o processo de representação se constitui como fundamental para o processo de construção do conhecimento matemático. Algumas especificidades do objeto matemático podem ser exploradas a partir da representatividade. Nesse sentido, objetos manipuláveis, embora não sejam objetos matemáticos, possibilitam o diálogo entre as significações; o processo de contextualização, embora seja limitado, também se configura num processo de representação relevante; os artefatos da tecnologia computacional também possibilitam uma gama de representações de objetos matemáticos; dentre outros processos. Todos esses recursos utilizados no texto e no contexto do ensino da matemática podem contribuir para uma aproximação entre os grupos de significações e, por consequência, podem facilitar a construção de conhecimento.

4. Buscando o diálogo do concreto e do abstrato na trigonometria do livro didático de Matemática

Agora, entraremos em uma discussão mais prática do que teórica do nosso estudo através da análise dos usos das concepções do que é abstrato e do que é concreto em um livro didático de Matemática. Para ser mais específico escolhemos o livro do 2° ano do ensino médio da editora Saraiva, que tem autoria de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce , David Degenszan, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. O livro faz parte da coleção Ciência e Aplicações, 9° Edição, 2017.

O livro escolhido para análise e uso no trabalho é um livro de autores consagrados da matemática que tem sua linha voltada para a matemática pura. Esse livro foi extraido da coleção fundamentos da matemática elementar de dez autores que tem por finalidade alcançar principalmente professores de matemática que já convivem em uma linha mais algébrica, sendo assim ficamos de certa maneira mais imitados para algumas análises .

A escolha pelo livro do 2º ano se deu por que é nesse volume da coleção que é apresentada a temática da Trigonometria. Já a escolha por esta coleção foi estabelecida por ser o livro utilizado nas turmas do 2º ano do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Campus Campina Grande.

Iremos iniciar nossa investigação, a partir dos capítulos 1 e 2 do livro e assim analisar com atenção como os temas voltados ao estudo da trigonometria são apresentados em relação às concepções de concreto e de abstrato. É válido enfocar que nossa investigação não é completa e cabe ainda muita discussão e embasamento dentro do campo de interesse.

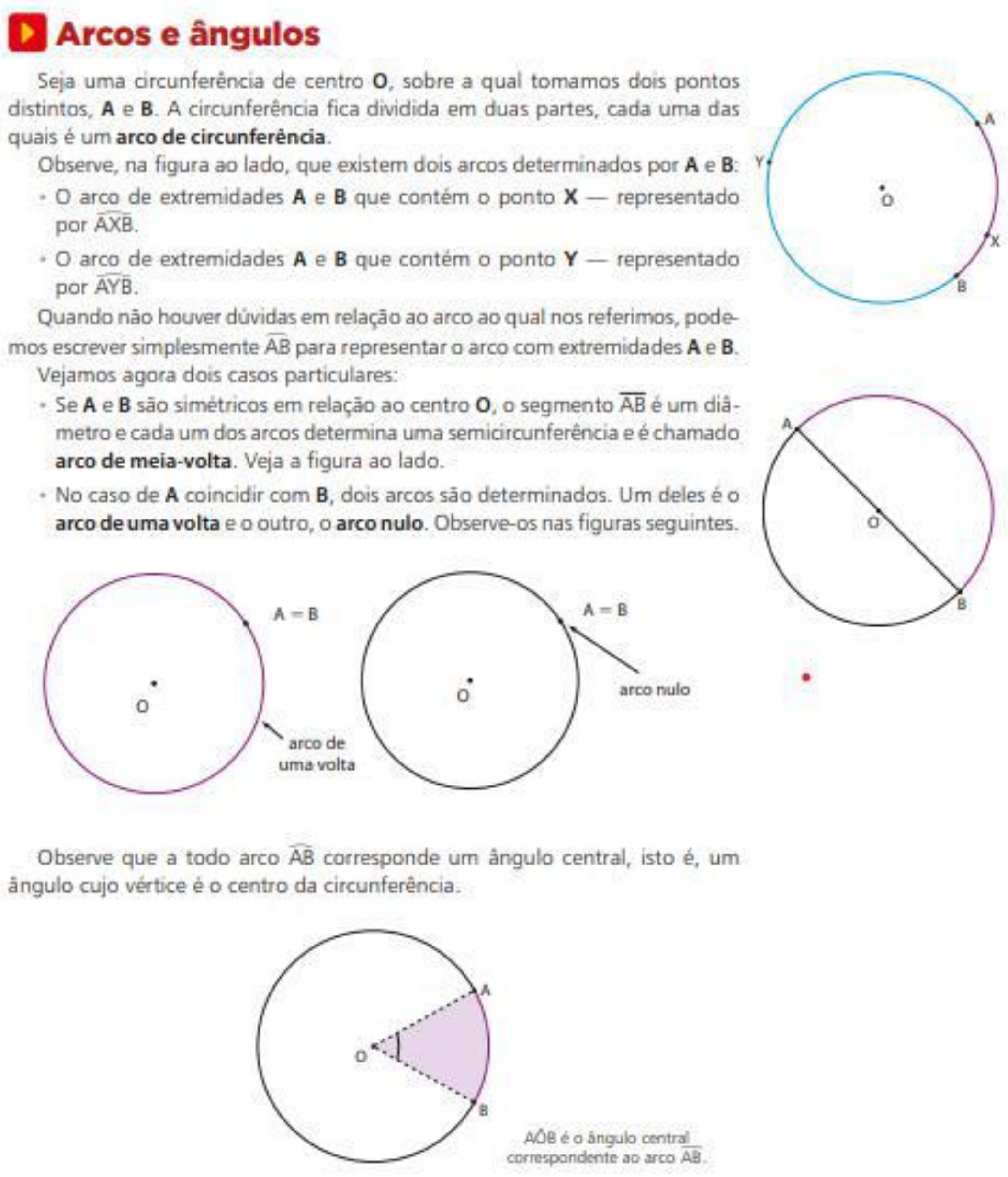
É importante enfocarmos que, só pelo fato de ser o livro didático, embora tenha uma ótima escrita e boas representações, já estamos atuando mais em um campo abstrato do que no campo concreto. Também iremos considerar que os

autores consideraram que os estudantes já possuem o nível de abstração requerido, ou seja, os alunos já possuem, segundo os autores, o conhecimento prévio necessário para compreender a teoria do livro sem que seja necessário maiores representações de concretude cognitiva. Ao fim de nossa análise iremos montar uma tabela quantitativa entre os elementos abstrato e concreto que encontramos na nossa investigação.

É importante esclarecermos o que iremos considerar como aspectos de concretude e de abstração no texto matemático. Com base em Soares (2015), nas categorias de concretude e de abstração, entendemos que, contextualizações, aplicações e representações que tenham uma associação direta com aspectos da realidade imediata, podem ser consideradas concepções de concretude, enquanto que, construções matemáticas soltas de tais possibilidades, podem ser consideradas dentro de âmbito próprio da abstração.

Iniciamos a nossa observação pela página 7 do capítulo 1 do livro didático.

Figura 4: Texto da página 7 do Livro de Matemática.



Arcos e ângulos

Seja uma circunferência de centro **O**, sobre a qual tomamos dois pontos distintos, **A** e **B**. A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma das quais é um **arco de circunferência**.

Observe, na figura ao lado, que existem dois arcos determinados por **A** e **B**:

- O arco de extremidades **A** e **B** que contém o ponto **X** — representado por $\widehat{AXB}$.
- O arco de extremidades **A** e **B** que contém o ponto **Y** — representado por $\widehat{AYB}$.

Quando não houver dúvidas em relação ao arco ao qual nos referimos, podemos escrever simplesmente $\widehat{AB}$ para representar o arco com extremidades **A** e **B**.

Vejamos agora dois casos particulares:

- Se **A** e **B** são simétricos em relação ao centro **O**, o segmento $\overline{AB}$ é um diâmetro e cada um dos arcos determina uma semicircunferência e é chamado **arco de meia-volta**. Veja a figura ao lado.
- No caso de **A** coincidir com **B**, dois arcos são determinados. Um deles é o **arco de uma volta** e o outro, o **arco nulo**. Observe-os nas figuras seguintes.

Observe que a todo arco $\widehat{AB}$ corresponde um ângulo central, isto é, um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

$A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente ao arco $\widehat{AB}$.

Fonte: Iezzi *et al* (2017)

É preciso ter em mente que, antes da análise sobre o que o livro apresenta, o próprio texto do livro (escritas, figuras, etc.) constitui um conjunto de elementos abstratos, na perspectiva em que estamos considerando neste trabalho. Assim, no texto do livro, ao pé da letra, não há nada de concreto, inclusive a linguagem é abstrata por excelência. Assim, se no livro há uma figura de uma argola ao se falar de ciclo trigonométrico, a que se considera uma grande diferença entre uma argola real manipulável e o desenho, que está no livro, de uma argola. No entanto, é pertinente também que, embora o desenho da argola não seja uma argola real, a forma como ela é referenciada no texto, tem consequências distintas para a construção conceitual de ciclo trigonométrico, por exemplo.

Diante disso, conscientes dessa diferenciação, entre um objeto concreto, uma de suas representações e, ainda, objeto matemático e suas possibilidades de representação, vamos analisar alguns fragmentos textuais do livro, e para isso, tomaremos como uma representação concreta o ato da referenciação a essa concretude.

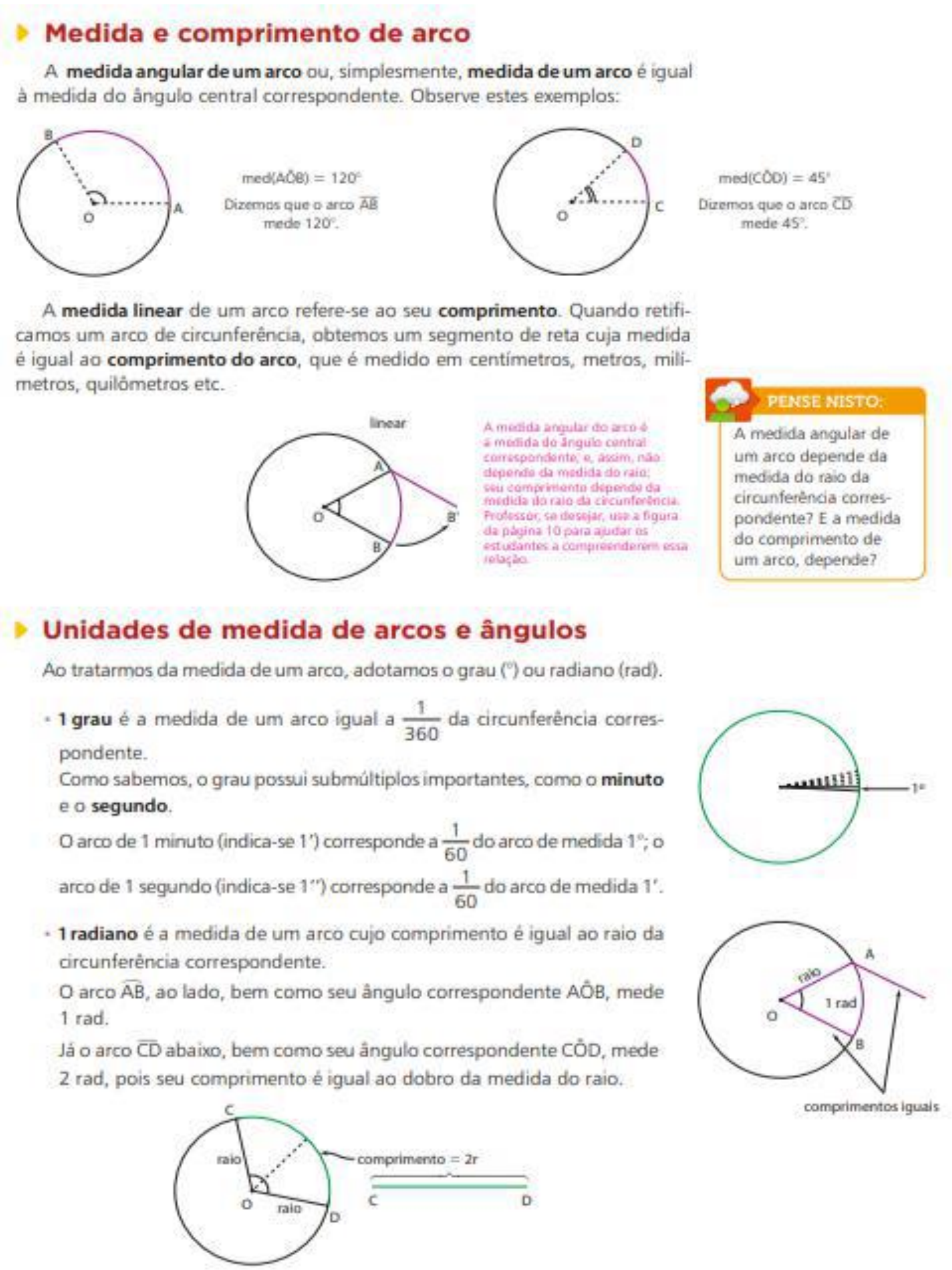
Percebemos alguns aspectos abstratos de imediato como, figuras que representam algumas circunferências matemáticas, diâmetros, distâncias, arco de uma circunferência, circunferência (considerando sempre que a figura por estar livre e plana), pontos, segmentos, ângulos, e mais profundamente uma representação de um retângulo no formato da folha do livro que consistirá em todas as páginas logicamente, além de teoria explicativa do conteúdo é claro.

Aqui podemos encaixar o círculo como objeto concreto, assim também como o ângulo, não na sua essência é claro, mas por se tratar de um livro didático para uma turma de 2° ano compreendemos que os alunos já possuem esse conhecimento prévio e no tocante a círcunferência e ângulo, não é a primeira vez que os alunos estudam esse tipo de conteúdo. Logo, não podemos dizer que a círcunferência e o ângulo são objetos concretos mas, suas representações podem ser consideradas aqui para o nosso estudo no campo dos objetos concretos cognitivos. Agora, é bom salientar que se estivermos falando de uma turma que não viu sequer ainda falar em círculo e ângulo, logicamente estes seriam considerados totalmente abstratos.

Na página 8 podemos verificar algumas relações importantes no que se diz respeito aos arcos, círculos, também medidas de comprimento, medida angular,

grau, segmentos entre outros. São aspectos que se destacam, pois se encaixam perfeitamente em nossa análise de relação de concretude e abstração já que podem ser representados alguns por figuras, outros por texto como podemos observar:

Figura 5: Texto da página 8 do Livro de Matemática.



Medida e comprimento de arco

A **medida angular de um arco** ou, simplesmente, **medida de um arco** é igual à medida do ângulo central correspondente. Observe estes exemplos:

med(AÔB) = 120°
Dizemos que o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 120°.

med(CÔD) = 45°
Dizemos que o arco $\overset{\frown}{CD}$ mede 45°.

A **medida linear** de um arco refere-se ao seu **comprimento**. Quando retificamos um arco de circunferência, obtemos um segmento de reta cuja medida é igual ao **comprimento do arco**, que é medido em centímetros, metros, milímetros, quilômetros etc.

A medida angular do arco é a medida do ângulo central correspondente, e, assim, não depende da medida do raio; seu comprimento depende da medida do raio da circunferência. Professor, se desejar, use a figura da página 10 para ajudar os estudantes a compreenderem essa relação.

PENSE NISTO:
A medida angular de um arco depende da medida do raio da circunferência correspondente? E a medida do comprimento de um arco, depende?

Unidades de medida de arcos e ângulos

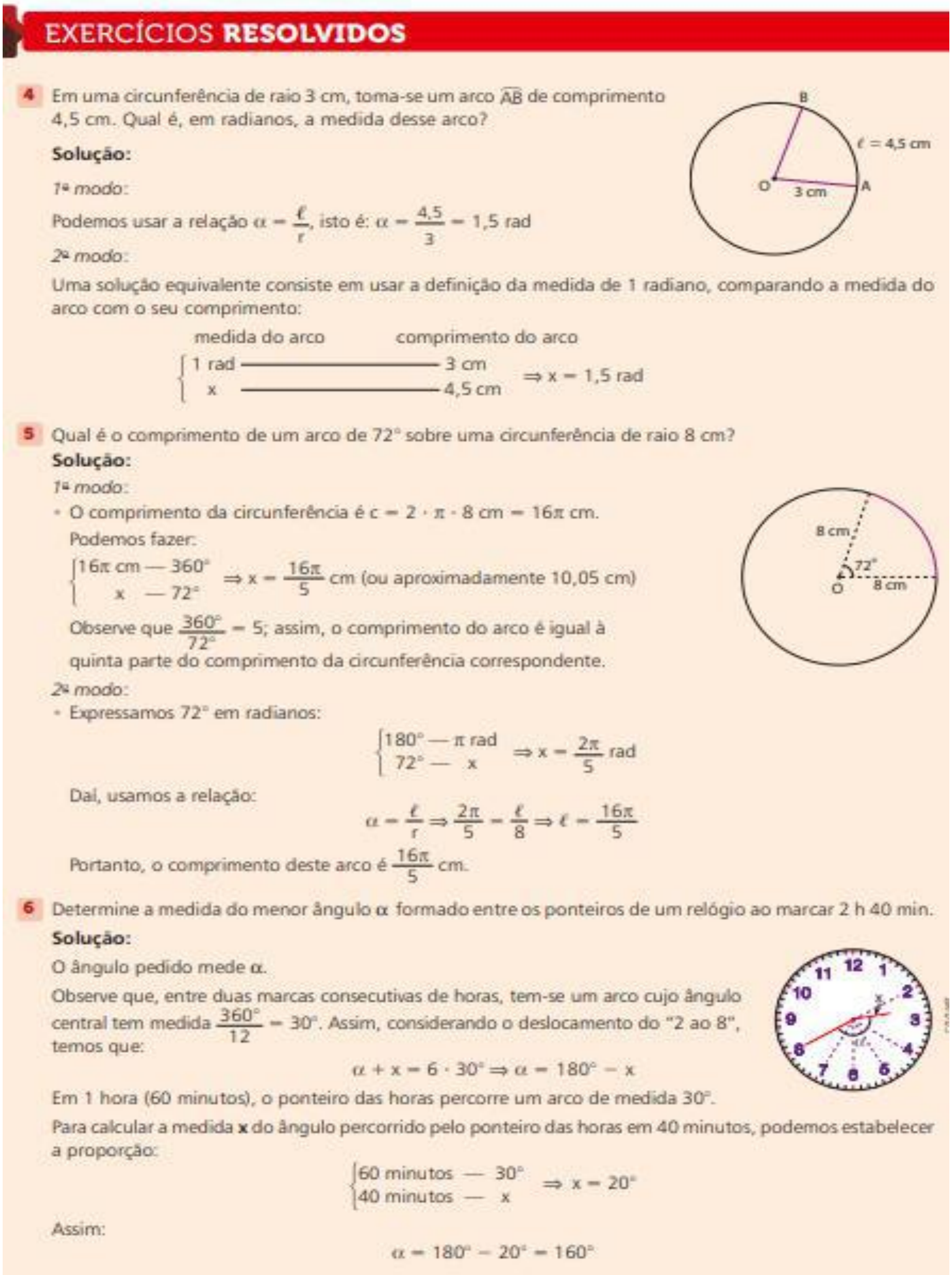
Ao tratarmos da medida de um arco, adotamos o grau (°) ou radiano (rad).

- **1 grau** é a medida de um arco igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência correspondente.
  Como sabemos, o grau possui submúltiplos importantes, como o **minuto** e o **segundo**.
  O arco de 1 minuto (indica-se 1′) corresponde a $\frac{1}{60}$ do arco de medida 1°; o arco de 1 segundo (indica-se 1″) corresponde a $\frac{1}{60}$ do arco de medida 1′.
- **1 radiano** é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência correspondente.
  O arco $\overset{\frown}{AB}$, ao lado, bem como seu ângulo correspondente AÔB, mede 1 rad.
  Já o arco $\overset{\frown}{CD}$ abaixo, bem como seu ângulo correspondente CÔD, mede 2 rad, pois seu comprimento é igual ao dobro da medida do raio.

Fonte: Iezzi *et al* (2017)

Nota-se que o texto do livro é descrição em língua às vezes fazendo um
basicamente uma portuguesa e linguagem não se percebe nessa
simbólica dos objetos matemáticos, diálogo
com representações geométricas dos
objetos. Mas, página nenhuma referência a
objetos concretos manipuláveis.

Figura 6: Página 11 do Livro Didático – Exercícios resolvidos.



EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

4 Em uma circunferência de raio 3 cm, toma-se um arco $\overset{\frown}{AB}$ de comprimento 4,5 cm. Qual é, em radianos, a medida desse arco?

Solução:

1º modo:

Podemos usar a relação $\alpha = \frac{\ell}{r}$, isto é: $\alpha = \frac{4,5}{3} = 1,5$ rad

2º modo:

Uma solução equivalente consiste em usar a definição da medida de 1 radiano, comparando a medida do arco com o seu comprimento:

$$\begin{array}{ccc} \text{medida do arco} & & \text{comprimento do arco} \\ \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ rad} \\ x \end{array}\right. & \begin{array}{c} \text{———} \\ \text{———} \end{array} & \begin{array}{l} 3 \text{ cm} \\ 4,5 \text{ cm} \end{array} \end{array} \Rightarrow x = 1,5 \text{ rad}$$

5 Qual é o comprimento de um arco de 72° sobre uma circunferência de raio 8 cm?

Solução:

1º modo:

- O comprimento da circunferência é $c = 2 \cdot \pi \cdot 8$ cm $= 16\pi$ cm.

Podemos fazer:

$$\left\{\begin{array}{l} 16\pi \text{ cm} — 360° \\ \quad x \quad — 72° \end{array}\right. \Rightarrow x = \frac{16\pi}{5} \text{ cm (ou aproximadamente 10,05 cm)}$$

Observe que $\frac{360°}{72°} = 5$; assim, o comprimento do arco é igual à quinta parte do comprimento da circunferência correspondente.

2º modo:

- Expressamos 72° em radianos:

$$\left\{\begin{array}{l} 180° — \pi \text{ rad} \\ 72° — \quad x \end{array}\right. \Rightarrow x = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

Daí, usamos a relação:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{5} = \frac{\ell}{8} \Rightarrow \ell = \frac{16\pi}{5}$$

Portanto, o comprimento deste arco é $\frac{16\pi}{5}$ cm.

6 Determine a medida do menor ângulo α formado entre os ponteiros de um relógio ao marcar 2 h 40 min.

Solução:

O ângulo pedido mede α.

Observe que, entre duas marcas consecutivas de horas, tem-se um arco cujo ângulo central tem medida $\frac{360°}{12} = 30°$. Assim, considerando o deslocamento do "2 ao 8", temos que:

$$\alpha + x = 6 \cdot 30° \Rightarrow \alpha = 180° - x$$

Em 1 hora (60 minutos), o ponteiro das horas percorre um arco de medida 30°.

Para calcular a medida **x** do ângulo percorrido pelo ponteiro das horas em 40 minutos, podemos estabelecer a proporção:

$$\left\{\begin{array}{l} 60 \text{ minutos} — 30° \\ 40 \text{ minutos} — \quad x \end{array}\right. \Rightarrow x = 20°$$

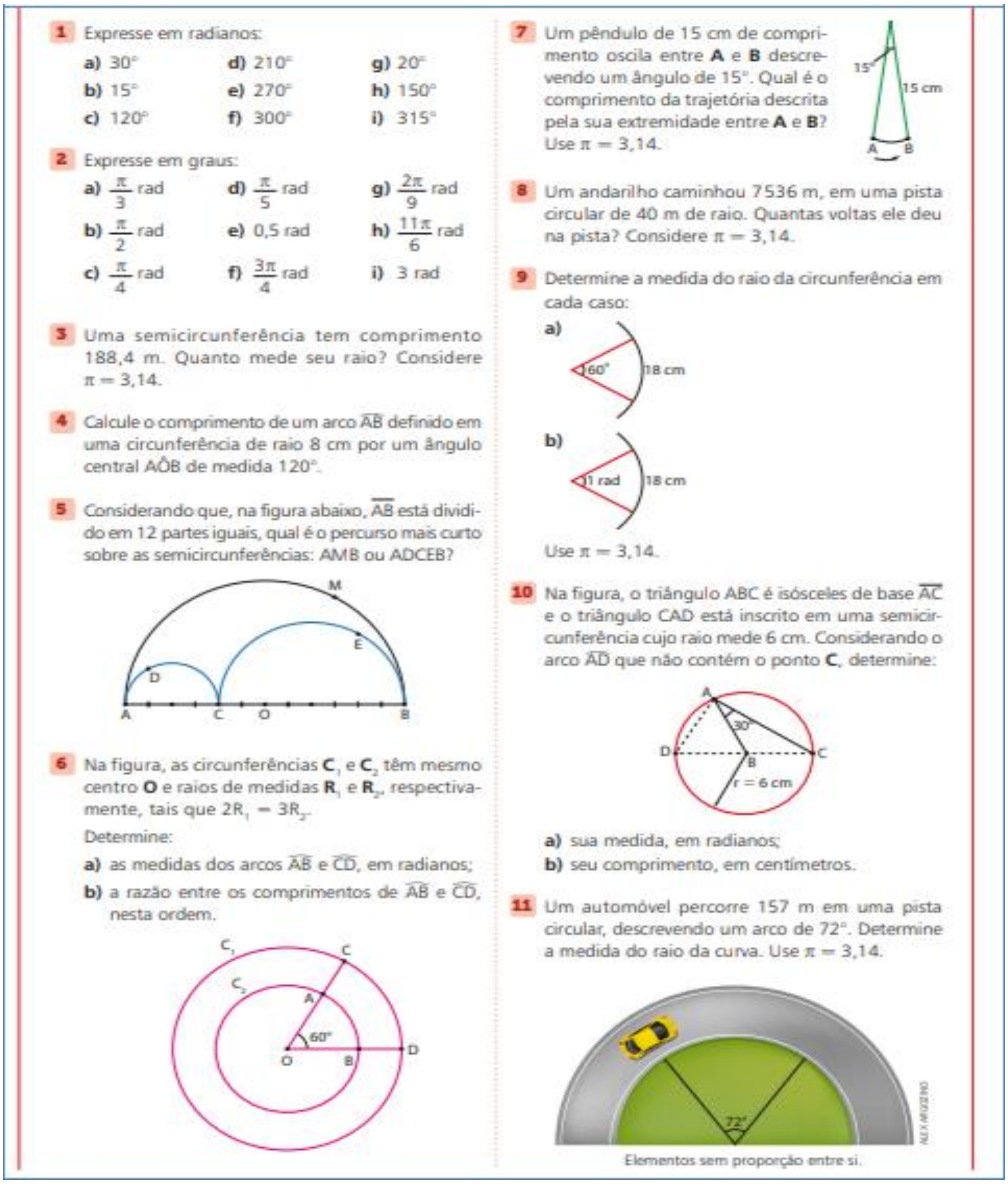
Assim:

$$\alpha = 180° - 20° = 160°$$

Fonte: Iezzi *et al* (2017)

Nessa página nota-se uma referência a um objeto concreto manipulável, um relógio, que é utilizado para a representação de uma circunferência. O apelo a esse tipo de representação pode contribuir no processo de exploração e construção dos conceitos matemáticos, uma vez que possibilita a emergência de novos significados para o estudante. No mais, a página trata de conteúdo teórico puramente abstrato, equações entre outros objetos já citados na página anterior.

Figura 7: Página 12 do Livro Didático.



1 Expresse em radianos:

a) 30° **b)** 15° **c)** 120° **d)** 210° **e)** 270° **f)** 300° **g)** 20° **h)** 150° **i)** 315°

2 Expresse em graus:

a) $\frac{\pi}{3}$ rad **b)** $\frac{\pi}{2}$ rad **c)** $\frac{\pi}{4}$ rad **d)** $\frac{\pi}{5}$ rad **e)** 0,5 rad **f)** $\frac{3\pi}{4}$ rad **g)** $\frac{2\pi}{9}$ rad **h)** $\frac{11\pi}{6}$ rad **i)** 3 rad

3 Uma semicircunferência tem comprimento 188,4 m. Quanto mede seu raio? Considere $\pi = 3,14$.

4 Calcule o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ definido em uma circunferência de raio 8 cm por um ângulo central $A\hat{O}B$ de medida 120°.

5 Considerando que, na figura abaixo, $\overline{AB}$ está dividido em 12 partes iguais, qual é o percurso mais curto sobre as semicircunferências: AMB ou ADCEB?

6 Na figura, as circunferências C_1 e C_2 têm mesmo centro **O** e raios de medidas R_1 e R_2, respectivamente, tais que $2R_1 = 3R_2$.

Determine:

a) as medidas dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, em radianos;

b) a razão entre os comprimentos de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, nesta ordem.

7 Um pêndulo de 15 cm de comprimento oscila entre **A** e **B** descrevendo um ângulo de 15°. Qual é o comprimento da trajetória descrita pela sua extremidade entre **A** e **B**? Use $\pi = 3,14$.

8 Um andarilho caminhou 7536 m, em uma pista circular de 40 m de raio. Quantas voltas ele deu na pista? Considere $\pi = 3,14$.

9 Determine a medida do raio da circunferência em cada caso:

a) 60°, 18 cm

b) 1 rad, 18 cm

Use $\pi = 3,14$.

10 Na figura, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AC}$ e o triângulo CAD está inscrito em uma semicircunferência cujo raio mede 6 cm. Considerando o arco $\overset{\frown}{AD}$ que não contém o ponto **C**, determine:

a) sua medida, em radianos;

b) seu comprimento, em centímetros.

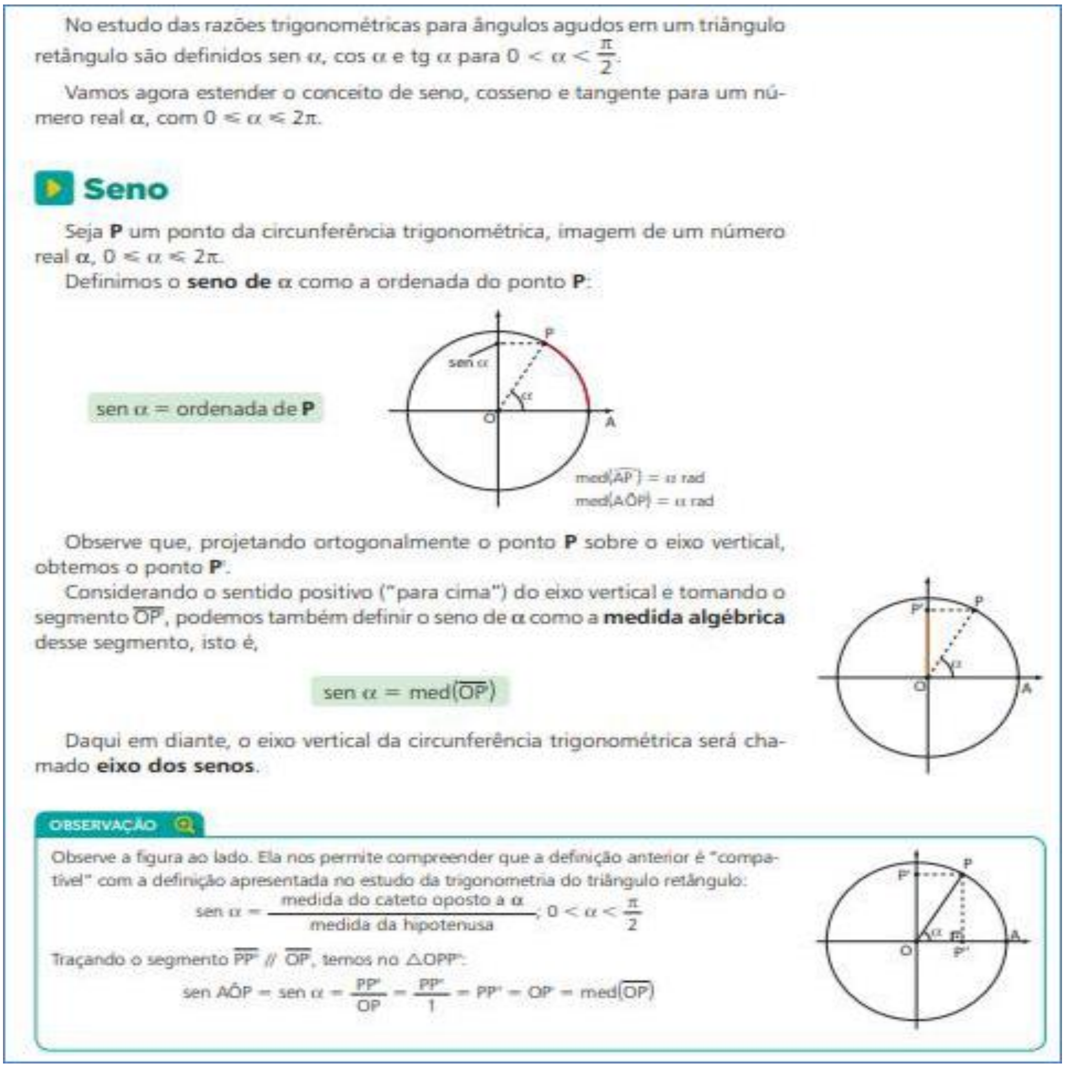
11 Um automóvel percorre 157 m em uma pista circular, descrevendo um arco de 72°. Determine a medida do raio da curva. Use $\pi = 3,14$.

Elementos sem proporção entre si.

Fonte: Iezzi *et al* (2017)

A página 12 do livro nos traz exercícios e muitas informações dentre elas temos: o número π, a unidade de medida radianos e também graus e centímetros, ângulos novamente, sendo citado como na página 7 e 11, circunferência, e uma figura cuja representação é de uma pista circular que remete ao leitor um semi círculo para entendimento e resolução das questões. Essa última imagem com certeza ganha expressão na parte do concreto cognitivo, as demais em sua grande maioria sendo abstratas.

Figura 8: Razões Trigonométricas


No estudo das razões trigonométricas para ângulos agudos em um triângulo retângulo são definidos sen α, cos α e tg α para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Vamos agora estender o conceito de seno, cosseno e tangente para um número real α, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Seno

Seja **P** um ponto da circunferência trigonométrica, imagem de um número real α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Definimos o **seno de α** como a ordenada do ponto **P**:

sen α = ordenada de **P**

Observe que, projetando ortogonalmente o ponto **P** sobre o eixo vertical, obtemos o ponto **P'**.

Considerando o sentido positivo ("para cima") do eixo vertical e tomando o segmento $\overline{OP'}$, podemos também definir o seno de α como a **medida algébrica** desse segmento, isto é,

$$\text{sen } \alpha = \text{med}(\overline{OP'})$$

Daqui em diante, o eixo vertical da circunferência trigonométrica será chamado **eixo dos senos**.

OBSERVAÇÃO

Observe a figura ao lado. Ela nos permite compreender que a definição anterior é "compatível" com a definição apresentada no estudo da trigonometria do triângulo retângulo:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}};\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Traçando o segmento $\overline{PP''} \mathbin{/\!/} \overline{OP'}$, temos no $\triangle OPP''$:

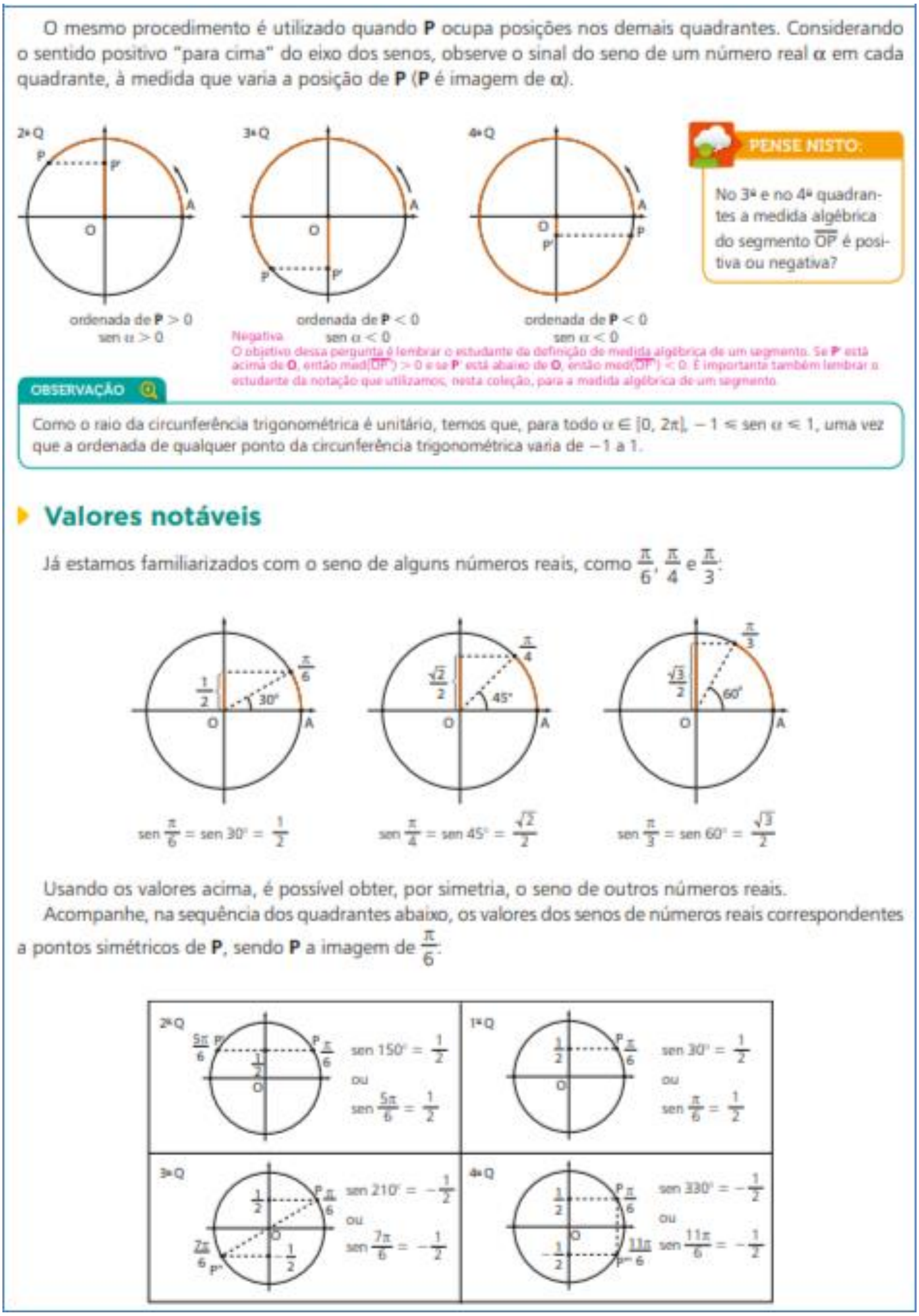
$$\text{sen } A\hat{O}P = \text{sen } \alpha = \frac{PP''}{OP} = \frac{PP''}{1} = PP'' = OP' = \text{med}(\overline{OP'})$$

Fonte: Iezzi *et al* (2017)

Agora, dando continuidade a nossa análise do livro didático vamos passar para a página 20 (Figura 8) na qual podemos observar objetos matemático e trigonométricos como o seno, eixo dos senos, demonstração do seno, além de algumas letras do alfabeto grego como o “alfa”,unidade de medidas como o radiano, sinais de objetos matemáticos como o “maior que” e “menor que “ como sugere a imagem da figura 8.

Já a página 21 do nosso livro nos trás aspectos voltados para o ciclo trigonométrico onde podemos encontrar algumas relações trigonométricas mais perceptíveis no âmbito das expressões ou de valores notáveis , como também vemos a presença dos quadrantes.

Figura 9: Arcos e ângulos notáveis no Livro de Matemática



O mesmo procedimento é utilizado quando **P** ocupa posições nos demais quadrantes. Considerando o sentido positivo "para cima" do eixo dos senos, observe o sinal do seno de um número real α em cada quadrante, à medida que varia a posição de **P** (**P** é imagem de α).

2º Q — ordenada de **P** > 0; $\text{sen}\ \alpha > 0$

3º Q — ordenada de **P** < 0; $\text{sen}\ \alpha < 0$

4º Q — ordenada de **P** < 0; $\text{sen}\ \alpha < 0$

PENSE NISTO:

No 3º e no 4º quadrantes a medida algébrica do segmento $\overline{OP}$ é positiva ou negativa?

Negativa.
O objetivo dessa pergunta é lembrar o estudante da definição de medida algébrica de um segmento. Se **P'** está acima de **O**, então med($\overline{OP'}$) > 0 e se **P'** está abaixo de **O**, então med($\overline{OP'}$) < 0. É importante também lembrar o estudante da notação que utilizamos, nesta coleção, para a medida algébrica de um segmento.

OBSERVAÇÃO

Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário, temos que, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, $-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1$, uma vez que a ordenada de qualquer ponto da circunferência trigonométrica varia de -1 a 1.

Valores notáveis

Já estamos familiarizados com o seno de alguns números reais, como $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$.

$\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \text{sen}\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Usando os valores acima, é possível obter, por simetria, o seno de outros números reais.

Acompanhe, na sequência dos quadrantes abaixo, os valores dos senos de números reais correspondentes a pontos simétricos de **P**, sendo **P** a imagem de $\frac{\pi}{6}$.

2º Q: $\text{sen}\ 150° = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen}\ \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$	1º Q: $\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
3º Q: $\text{sen}\ 210° = -\frac{1}{2}$ ou $\text{sen}\ \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	4º Q: $\text{sen}\ 330° = -\frac{1}{2}$ ou $\text{sen}\ \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Em face da semelhança dos aspectos de concretude e abstração expostos na sequência do livro didático com as imagens de algumas páginas já apresentadas, podemos inferir que esse Livro Didático tem uma abordagem profundamente caracterizada apenas pelos aspectos formais da Matemática, que envolvem uma simbologia exagerada, uma escrita na linguagem matemática refinada e poucas representações de objetos da concretude imediata.

Com base no que vimos e analisamos até o momento podemos organizar essas informações em uma planilha e veremos o quantitativo de cada classe abstrata, concreta ou concreta cognitiva dos quais os objetos matemáticos destacados pertencem como mostra o quadro abaixo:

Quadro 1: Interpretações sobre o concreto e o abstrato no texto do Livro Didático

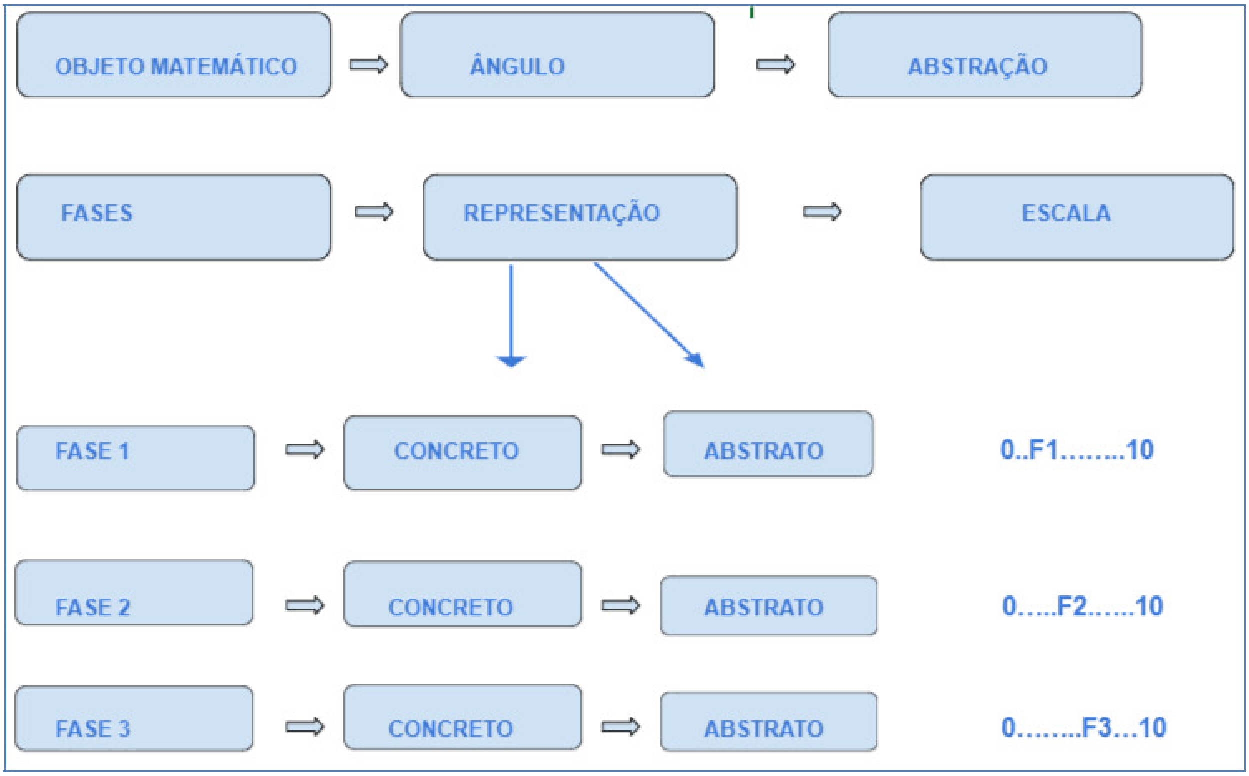
CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO COGNITIVO ENTRE O CONCRETO E ABSTRATO DO LIVRO DIDÁTICO			
OBJETOS CONCRETOS		**OBJETOS CONCRETOS COGNITIVOS**	**OBJETOS ABSTRATOS**
	PÁGINAS DO LIVRO DIDÁTICO	**ÂNGULOS**	**ARCO CIRCUNFERÊNCIA**
		CIRCUNFERÊNCIA	**SEGMENTO**
		CÍRCULO	**NÚMERO π**
		FIGURA DE UM RELÓGIO (REPRESENTAÇÃO CÍRCULO)	**EQUAÇÃO TRIGONOMÉTRICA**
		UNIDADE DE MEDIDA (cm)	**CONTEÚDO TEÓRICO**
		REPRESENTAÇÃO PISTA (SEMICÍRCULO)	**UNIDADE DE MEDIDA (rad) REDUÇÃO DE QUADRANTES**
		QUADRANTE	**SENO**
		MAIOR QUE >	**COSSENO**
		MENOR QUE <	**UNIDADE DE MEDIDA (grau) °**
			EIXO DOS SENOS
			EIXO DOS COSSENOS
TOTAL	1	9	12

Verificando e analisando cada elemento ou melhor, cada objeto matemático podemos através do diagrama das significações e representações entender um pouco melhor que o que define em nossa mente e o que nos faz caracterizar esses objetos matemáticos trigonométricos será apenas a quantidade de vezes em que os observamos durante a vida como também a qualidade dessas representações que foram feitas durante nosso período estudantil que assim nos compreende deixarmos cada classe com sua concretude, abstrato ou concreto cognitivo como vemos na tabela acima.

Uma vez que temos a oportunidade de observar os ângulos por exemplo diversas vezes durante nossos estudos,vemos representações de ângulos,os calculamos de diversas formas e estamos vendo ângulos em figuras geométricas por exemplo sempre que vamos trabalhar com geometria nos traz a relação de uma concretude mesmo entendendo que o ângulo em si é um objeto matemático abstrato porém de tanto internalizamos esse objeto em nossa mente chegamos ao ponto de considerarmos ele como concreto pois se trata de uma ideia viva em nossa mente,daí a escolha desse objeto ser concreto cognitivo,os demais objetos passaram pelo mesmo critério.

Com base na planilha acima podemos verificar o grau de concretude e abstração dos objetos matemáticos trigonométricos um a um analisando através de um diagrama das significações,acontece em resumo que quanto mais vemos determinados conteúdos eles se tornam mais concretos ou concretos cognitivos em nossa mente como podemos observar abaixo:

Figura 10: Diagrama das representações e significações dos objetos de estudo trigonométrico e matemático



A análise do processo de concretude e abstração requer conhecimentos prévios que nos ajudam e possibilitam uma compreensão a partir de uma ótica na qual por muitas vezes nos alunos passam mas,não compreendem, essa relação um tanto implícita para muitos mesmo que não seja de todo o alcance permanece presente a todo o momento todas as vezes que estudamos matemática, esse estudo fica voltado para salientar que tal percepção desse processo pode nos levar a um grau mais elevado no quesito qualitativo de entendimento matemático,por exemplo o professor percebendo tal processo em determinadas situações pode simplesmente forçar de certa forma alguma conteúdos e exemplos que explorem a capacidade de abstração dos alunos para que possam atingir um nível mais alto de compreensão dos objetos matemáticos,nesse caso em específico,o trigonométrico.

Várias vertentes atuais de ensino buscam justificar o ensino e aprendizado por meio de exemplificação corriqueira da vida dos estudantes,o que no caso da matemática por ser abstrata fica mais difícil, mas não impossível. Uma vez que se consegue fazer essa aproximação com a realidade todos ganham tanto alunos como

professores, sabemos bem das dificuldades encontradas no dia a dia escolar mas, seria um esforço a valer a pena.

Esse estudo não tem o intuito de fazer uma autocrítica ao formato de ensino tanto de professores quanto de escolas, entendemos que existem as mais diversas metodologias que se enquadram de acordo com a realidade e desejo que cada estudante ou de acordo com a vontade dos pais dos estudantes, vale também lembrar que muitos não conseguem uma boa adequação na melhor forma de ensinar por meio de estruturas ou até mesmo por falta de acompanhamento cognitivo de alunos que por sua vez não obtiveram acesso ao conhecimento no momento mais oportuno como no caso dos EJAs[2] . O nosso estudo vem por trazer a" Luz "o que está "escuro" , mas com assim?

É simplesmente mostrar que nesse processo ainda tão pouco falado é percebido e até algumas vezes dado sem importância que existem oportunidades de melhoria no ensino, há uma oportunidade de entendimento de certos conteúdos como o da trigonometria riquíssimos nesse processo, imagine se conseguíssemos colocar todos os conteúdos trigonométricos na gráfico das significações e a partir dele encontrarmos os que mais os alunos sentem dificuldades / pouca abstração e trabalhar em cima de exemplos somente com esses conteúdos, já seria um caminho para uma melhoria. O estudo da abstração matemática e toda sua dialética é simplesmente fantástico é como perceber o que está acontecendo dentro de nossa mente com uma visão por fora dela , é poder ter a percepção dos acontecimentos sendo protagonista e plateia ao mesmo tempo e sendo assim, podemos nos avaliar e nos reavaliar sempre que possível, o nosso estudo tem o intuito de conjuntamente com muitos outros da educação matemática de alguma forma por mais singela que seja em ajudar no nível de aprendizado dos alunos, em especial aos que estudam trigonometria.

O fascínio pela trigonometria e pelo processo de concreto e abstrato da matemática fez com que chegássemos até aqui no final desse trabalho, com todas as análises feitas sentimos um desejo de contribuição para uma melhor desenvoltura no quesito compreensão dos estudos na trigonometria, dessa forma, vemos que a preocupação em se aprender a trigonometria vem por meio de um isolamento cognitivos de tudo aquilo que é muito abstrato ou de difícil compreensão para os

---

2 EJAs(Programa de educalçao de jovens e adultos)

estudantes porém não basta fazermos de todos os esforços para tornar o abstrato matemático concreto mas também em conjunto, um esforço estudantil para compreender a linguagem matemática e trigonométrica e assim , por sua vez mesmo que implicitamente compreender sua abstração e concretude de forma eficaz , só assim, com essa relação biunívoca podemos avançar em um aprendizado mais incisivo para todos

Considerações finais

A cada três anos temos um alto investimento em livros para alunos do ensino fundamental e ensino médio. É preciso saber se o aprendizado tem algum retorno significativo. Na abordagem ao conteúdo, por exemplo, cada livro utiliza uma forma diferente e o processo de concreto e abstrato da matemática entra nessa abordagem. Analisando o desenvolvimento do conteúdo com o desenvolvimento do aluno que podemos perceber se existe uma parte desse processo de utilizar a matemática abstrata e trazê-la para o mundo concreto, tudo isso com a presença do professor é claro mas observando o desenvolver do aluno através das propostas didáticas e de exercícios propostos pelo livro podemos refletir qual a verdadeira importância nesse processo e quais são as concepções que o aluno pode desfrutar desse acompanhamento do livro didático em sua vida escolar.

Outro ponto culminante nesse aspecto são os materiais utilizados para dar aula. Hoje o professor pode contar com ajuda de muitos artifícios para lecionar, através da informática no geral, livros didáticos, materiais manipuláveis e etc. Dentre esses materiais o que iremos destacar e aprofundar esse estudo é o livro didático tão importante e por muitas vezes esquecido no procedimento de aprendizagem não se vê mais no âmbito educacional grande preocupação com a escolha de um bom livro didático. Acredita-se que no Brasil esse assunto já foi muito discutido e não merece mais tanta relevância quanto existia no passado.

Contudo, o livro didático é muito importante nesse processo de aprendizagem e pode vir dele as respostas para a dificuldade de muitos alunos de trazer a matemática abstrata para uma matemática da vida real. Esse material tem como características desenvolver o lado cognitivo do indivíduo através de exemplos,exercícios,informações gráficos e etc. A escolha errada de um livro didático pode atrapalhar todo o processo de aprendizagem do aluno,pois,existem muitos livros que não trazem informações concretas ou trazem informações ambíguas não são objetivos e assim faz com que dificulte e atrapalhe o aluno como também o próprio professor em sala de aula.

É de extrema importância que o professor seja criterioso na escolha do livro pois, a partir dele podemos descobrir uma nova maneira de abordar o conteúdo

impedindo o aluno de ficar mecanizado a resolver problemas com a mesma linha de pensamento, ou seja, a do professor. O livro não veio para delimitar o campo de participação do professor em sala de aula, ele veio para somar conhecimento e ajudar no aprendizado. Não se sabe ao certo qual a influência do livro no processo da saída da abstração para o concreto matematicamente falando mas sabemos que para essa associação ocorrer é necessário que o aluno tenha um breve conhecimento matemático e a partir desse pensamento podemos concluir que o livro ajuda no processo mesmo que de forma indireta.

O desenvolvimento cognitivo do aluno e um dos principais termos a serem analisados é muito importante que o aluno aprenda também um pouco só sem a dependência total do professor é preciso que se crie uma autonomia na matemática para a partir daí ser possível explorar o universo ao seu redor matematicamente falando e o livro e o material que mais poderá lhe ajudar. Desenvolvimento cognitivo, exercícios,tipo de linguagem,abordagem ao conteúdo e etc. São todos critérios estabelecidos pelo programa nacional do livro didático PNLD.

O desenvolvimento do aluno com a ajuda do livro é importante mas sabemos que o professor assume uma papel indispensável na aprendizagem, não é muito raro observarmos que alguns alunos têm uma confiança excessiva nos livros didáticos tomando sempre os seus exemplos e exercícios como verdade absoluta e sabemos todos que nem sempre e assim muitos livros levam a crer em ideologias que não ajudaram muito o aluno,outros vem com erros nos exercícios e também nos exemplos e se não existisse a figura do professor presente em sala de aula e até para possíveis erros como esse teríamos um problema com algumas questões de alguns conteúdos.

É também possível enxergar que os livros mais pedidos ou seja, os considerados melhores pelos professores possam trazer ainda um desenvolvimento melhor na vida escolar e analisando essa melhoria no desenvolvimento da vida escolar iremos poder observar com maior cautela a maneira que o livro traz os conteúdos para verificar quais as possíveis concepções do processo abstrato e concreto da matemática.

É importante fazer com que o aluno possa enxergar essas concepções , importantíssimo fazer com que o aluno o tenha capacidade de se desenvolver sozinho também e de ter voz de poder saber escolher se aquele modo ou aquele material é o melhor para sua vida escolar.

Referências

BEZERRA, Juliana**. Metafísica.** Disponível em :

https://www.todamateria.com.br/metafisica. Acesso em: 14 Ago 2023

CURADO, Adriano**. Trigonometria: definição, origem, funções e aplicações.**

Disponivel em: https://conhecimentocientifico.r7.com/trigonometria acesso em:28 dez 2023.

DEVLIN, Keith**. O gene da matemática.** 4°edição.Rio de Janeiro.Editora record.2008.

D'AMORE**,** Bruno**.** et al**. Primeiros elementos de semiótica**. 1°edição. São Paulo.2015.Editora livraria física.

Dicionário da Filosofia. site ceismael.com.br,2010.Disponível em: https://www.ceismael.com.br/filosofia/dicionario-de-filosofia.htm. Acesso em:10 Jul.2023.

Dicionário Conceitos. Disponível em:https://conceitos.com/pensamento-abstrato.Acesso em:17 Ago 2023.

IEZZI, Gelson**. Matemática ciências e suas aplicações**.Edição 9°.São Paulo.Editora Saraiva.2017.

ILIENKOV, Vasilievich Evald. **A Dialética do Abstrato e do Concreto em: O Capital de Karl Marx**. **Trad.** Marcelo José de Souza e Silva, 1960. Disponível em: www.marxists.org

MARX, Karl**. Marxist Internet Archive.marxist.org.12 Out 1999.Disponível em**:https://www.marxists.org/portugues/marx/index.htm.Acesso **em:21** Nov 23

MENEGHETTI, Fábio. **Abstração na arte e na matemática**. Disponível em: https://www.blogs.unicamp.br/onabla/2021/12/18/abstracao-na-arte-e-na-matematica/.

SOARES, Havelange Luiz. **A Dialética entre o concreto e o abstrato na construção do conhecimento matemático**. Tese de Doutorado. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2015.

VASILIEVICH, Evald. **A dialética do abstrato e do concreto na capital de Karl**

Marx. www.Marxist.org. 1960. Disponível em:https://www.marxists.org/portugues/ilyenkov/1960/dialetica/03.htm.Acesso em 15 Jul 2023.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

ENTREGA VERSAO FINAL TCC

Assunto:	ENTREGA VERSAO FINAL TCC
Assinado por:	José Neto
Tipo do Documento:	Certificado
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **José Sá Neto**, **ALUNO (20141123019) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 15/02/2024 09:40:12.

Este documento foi armazenado no SUAP em 15/02/2024. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1081509
Código de Autenticação: 1db91b088f