INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO DANILO OLIVEIRA DE MORAIS

UMA ABORDAGEM DA LÓGICA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

CAJAZEIRAS
2024

FRANCISCO DANILO OLIVEIRA DE MORAIS

UMA ABORDAGEM DA LÓGICA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada junto ao **Curso de Especialização em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito parcial à obtenção do título de **Especialista em Matemática**.

Orientador:
Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares.

Coorientador:
Prof. Me. Jackson Tavares de Andrade.

Cajazeiras

2024

FRANCISCO DANILO OLIVEIRA DE MORAIS

UMA ABORDAGEM DA LÓGICA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada junto ao **Curso de Especialização em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito parcial à obtenção do título de **Especialista em Matemática**.

Data de aprovação: 22/03/2024

Banca Examinadora:

Leonardo Ferreira Soares

Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Jackson Tavares de Andrade

Prof. Me. Jackson Tavares de Andrade
Secretaria de Estado da Educação da Paraíba – SEE - PB

Thiago Andrade Fernandes

Prof. Me. Thiago Andrade Fernandes
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

Documento assinado digitalmente
REGINALDO AMARAL CORDEIRO JUNIOR
Data: 25/03/2024 22:59:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Reginaldo Amaral Cordeiro Junior
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
AILTON RIBEIRO DE ASSIS
Data: 25/03/2024 23:04:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Ailton Ribeiro de Assis
Instituto Federal da Paraíba – IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

M828a Morais, Francisco Danilo Oliveira de.
Uma abordagem da lógica matemática no ensino médio / Francisco Danilo Oliveira de Morais.– 2024.

79f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2024.

Orientador(a): Prof. Me. Leonardo Ferreira Soares.
Coorientador(a): Prof. Me. Jackson Tavares de Andrade.

1. Ensino de matemática. 2. Lógica matemática. 3. Ensino médio. 4. Resolução de problemas. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ CDU: 510.6(043.2)

Dedico este trabalho a minha família, amigos, a todos que me auxiliaram de alguma forma, e em especial a meu orientador e coorientador, pela paciência e dedicação na construção e no aprimoramento deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, pois foi Ele que me deu forças e sabedoria para conduzir este trabalho até o término.

Agradeço aos meus pais, Francisco José de Morais e Francisca Neida Oliveira de Morais, a meus irmãos, Danário Oliveira de Morais, Darlan Oliveira de Morais (em memória) e Francisca Danilea Oliveira de Morais, pelo incentivo e força para que eu pudesse progredir nos estudos.

Agradeço a minha maravilhosa esposa, Vanessa Figueiredo Morais, a qual me deu forças e teve muita paciência comigo, durante a confecção deste trabalho, agradeço também a minha brilhante filha, Bianca Figueiredo Morais, a qual me dar forças para lutar pelos objetivos.

Em especial, agradeço ao meu orientador, professor mestre Leonardo Ferreira Soares e ao meu coorientador professor mestre Jackson Tavares de Andrade, pela paciência que tiveram comigo, e pela orientação que me deram durante a elaboração deste trabalho.

Por fim, agradeço aos professores do curso de Especialização em Matemática do IFPB, campus Cajazeiras, assim como aos meus colegas do curso da Pós-graduação, principalmente, a Walison Arruda Ferreira e a todos os meus amigos. Todos vocês têm uma parcela de contribuição neste trabalho.

“Uma prova de que Deus esteja conosco não é o fato de que não venhamos a cair, mas que nos levantemos depois de cada queda”

Santa Teresa de Ávila

RESUMO

A Lógica Matemática é uma área de conhecimento pouca abordada no Ensino Médio, porém ela pode auxiliar no entendimento dos assuntos matemáticos dessa etapa acadêmica dos estudantes. Por isso, elaboramos este trabalho que tem por objetivo analisar uma abordagem da Lógica Matemática no Ensino Médio, com foco na resolução de problemas. Sendo realizado a partir de um levanto bibliográfico do assunto e questões. Apresentamos inicialmente um breve aspecto histórico, seguindo com uma discussão sobre a contribuição da Lógica Matemática no Ensino Médio. Abordamos a teoria acerca do tema, com a definição de proposição, os princípios lógicos fundamentais, os conectivos lógicos, a tabela verdade, as implicações lógicas, as equivalências lógicas e os argumentos lógicos. Concluímos, nosso trabalho, com aplicações da teoria estudada na resolução de questões de Matemática, provas de concursos públicos, vestibulares e olimpíadas.

Palavras-chave: Lógica Matemática; Ensino Médio; Resolução de problemas.

ABSTRACT

Mathematical Logic is a field of knowledge rarely studied in high school, but it can help students understand mathematical topics from this academic period. Therefore, we created this work that aims to analyze an approach to Mathematical Logic in High School, focused on the solution of problems. Accomplished from bibliographical research of the topic and questions. Initially, we introduce a brief history, followed by a debate on the contribution of Mathematical Logic in high school. We address the theory related to the theme, the definition of proposition, the fundamental logic principles, the logical connectors, the truth table, the logical implications, the logical equivalencies and the logical arguments. We conclude our work with applications of the studied theory in the solution of mathematical questions, public employment entry exams, university entry exams and math olympiad.

Keywords: Mathematical Logic; High School; Solution of problems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Leibniz (1646-1716) e sua obra “Dissertação da arte combinatória.” . . 15
Figura 1.2 – Aristóteles (384 - 322 a.C). 16
Figura 1.3 – George Boole (1815-1864). 16
Figura 1.4 – Gottlob Frege (1848 - 1925). 16
Figura 1.5 – Giuseppe Peano (1858 - 1932). 17
Figura 1.6 – Bertrand Russell (1872-1970). 17

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Conectivos lógicos 22
Tabela 3.2 – Tabela verdade com duas proposições 23
Tabela 3.3 – Tabela verdade da negação de uma proposição 24
Tabela 3.4 – Tabela verdade da Conjunção 25
Tabela 3.5 – Tabela verdade da Disjunção 27
Tabela 3.6 – Tabela verdade da Condicional 29
Tabela 3.7 – Tabela verdade da Bicondicional 31
Tabela 3.8 – Tabela verdade da Disjunção exclusiva 32
Tabela 3.9 – Construção da tabela verdade 35
Tabela 3.10–Construção da tabela verdade 36
Tabela 3.11–Tabela verdade da proposição $p \rightarrow p \vee q$ 37
Tabela 3.12–Tabela verdade da proposição $p \vee \sim p$ 38
Tabela 3.13–Tabela verdade da proposição $p \wedge \sim p$ 38
Tabela 3.14–Tabela verdade da proposição $p \vee q \rightarrow \sim r$ 39
Tabela 3.15–Tabela verdade do exemplo 3.23 39
Tabela 3.16–Tabela verdade do exemplo 3.24 40
Tabela 3.17–Tabela verdade da proposição $p \wedge \sim p \rightarrow q$ 41
Tabela 3.18–Tabela verdade das proposições $p \leftrightarrow p \wedge q$ e $p \rightarrow q$ 42
Tabela 3.19–Tabela verdade da proposição $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$ 43
Tabela 3.20–Tabela verdade da equivalência $p \Leftrightarrow \sim \sim p$ 44
Tabela 3.21–Tabela verdade da equivalência $p \vee q \Leftrightarrow \sim p \rightarrow q$ 44
Tabela 3.22–Tabela verdade da equivalência $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ 45
Tabela 3.23–Tabela verdade da equivalência $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ 45
Tabela 3.24–Tabela verdade da equivalência $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 46
Tabela 4.1 – Tabela verdade do Silogismo Hipotético 55
Tabela 4.2 – Tabela verdade do argumento $\sim p \rightarrow \sim q, p \vdash q$ 56
Tabela 5.1 – Tabela verdade da proposição $(\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ 62
Tabela 5.2 – Tabela verdade da Condicional 68

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **12**

1 BREVE ASPECTO HISTÓRICO DA LÓGICA **15**

2 LÓGICA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO **18**

3 LÓGICA PROPOSICIONAL **20**

3.1 Proposição **20**

3.2 Proposições simples e proposições compostas **21**

3.3 Conectivos lógicos **22**

3.3.1 Tabela verdade 23

3.3.2 Negação 23

3.3.3 Conjunção 24

3.3.4 Disjunção 26

3.3.5 Condicional 27

3.3.6 Bicondicional 30

3.3.7 Disjunção exclusiva 31

3.4 Sentenças abertas e Quantificadores lógicos **33**

3.4.1 Negação de sentenças com quantificadores 34

3.5 Construção de tabela verdade **34**

3.6 Uso de parênteses **36**

3.7 Tautologia, Contradição e Contingência **36**

3.8 Implicação lógica **39**

3.8.1 Propriedades da Implicação lógica 40

3.9 Equivalência lógica **41**

3.9.1 Propriedades da equivalência lógica 42

3.10 Negação de proposições compostas **46**

4 ARGUMENTAÇÃO LÓGICA 50

4.1 Argumentos válidos fundamentais 51

4.1.1 Regras de Inferência 52

5 APLICAÇÕES 58

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 75

REFERÊNCIAS 76

INTRODUÇÃO

A lógica se caracteriza como a ciência que estuda os princípios e os métodos, os quais nos fornece condições de identificar se um argumento é válido ou inválido (BISPO *et al.*, 2011). O raciocínio é um processo de construir argumentos, para dizer se certa proposição é verdadeira ou falsa, assim, é papel da lógica identificar se estamos diante de um argumento correto sem contradições (MORTARI, 2001).

A Matemática que estudamos hoje usa uma linguagem formal, com vários símbolos, principalmente no Ensino Médio e isso, por algumas vezes dificulta o entendimento de alguns assuntos matemáticos abordados, fazendo com que os alunos façam processos mecânicos para resolver problemas, mas muitas vezes, não compreendem a essência, a estrutura da resolução. Segundo Nascimento (2016), dentre tantos motivos pelos quais os alunos vão mal na disciplina de Matemática, um é especialmente notável: a dissociação da Lógica Matemática com a grade curricular das escolas, provocada muitas vezes pela ausência de tais conteúdos nos livros didáticos. Para que o aluno tenha um bom raciocínio lógico dedutivo acerca do que está sendo estudado, tanto na resolução de problemas como também nas demonstrações matemáticas, conhecer os fundamentos da Lógica Matemática é de fundamental importância para que ele desenvolva e alcance melhores resultados. Acerca disso, Ponte (2017) evidencia que

> o raciocínio dedutivo é característico da matemática, onde ocupa um lugar fundamental. Nesta ciência, assumimos um conjunto de afirmações como verdadeiras (axiomas ou postulados) e assumimos um conjunto de regras de inferência, para obter novas afirmações válidas (teoremas). É um raciocínio formal, relacionado com as demonstrações e a lógica.

Portanto, fazer uma abordagem da Lógica Matemática na educação básica, ajuda o discente a ter uma melhor compreensão da Matemática.

Segundo Santos *et al.* (2007) muitos estudantes apresentam grandes dificuldades na aprendizagem da Matemática, ocasionando assim a sua reprovação na disciplina, alguns chegam a acreditar que não são capazes de aprender Matemática, gerando também uma baixa autoestima. Outra grande dificuldade que os alunos têm é em relação a compreensão das demonstrações matemáticas, que são abordadas no Ensino Médio.

Nesse caso, segundo Filho (2013), ao ser explicitada uma demonstração matemática estará sempre presente nela uma estrutura lógica. Logo, a abordagem da Lógica Matemática no Ensino Médio, é uma alternativa que poderá deslumbrar nos alunos novas formas de pensar, de raciocinar, de ver os problemas matemáticos com uma outra perspectiva, diminuindo assim essas dificuldades.

Nessa perspectiva, objetiva-se, de forma geral, com esse trabalho analisar uma abordagem da Lógica Matemática no Ensino Médio, com foco na resolução de problemas. Como também, porém, de forma específica:

- Estabelecer uma relação entre a Matemática e a lógica visando o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo.
- Investigar as estratégias de resolução de problemas a partir da Lógica Matemática.
- Analisar as formas de argumentar as demonstrações matemáticas.

Assim, na tentativa de auxiliar os alunos no entendimento da Matemática, para uma melhor compreensão das demonstrações matemáticas do Ensino Médio, é preciso explorar os seus pensamentos matemáticos, a fim de que eles adquiram a capacidade de raciocinar de forma dedutiva e, dessa forma, possam validar se um argumento é verdadeiro ou falso, atingindo assim o propósito do estudo da Lógica Matemática. Nesse sentido os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que

> a ampliação e o aprofundamento da explicitação da estruturação lógica da Matemática são necessários ao aluno do Ensino Médio, devendo-se valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio lógico-dedutivo, a distinção entre validação matemática e validação empírica, e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em Matemática. (BRASIL, 2006)

Diante disso, o trabalho foi elaborado a partir de um levantamento bibliográfico, sendo considerado uma pesquisa cuja abordagem é qualitativa por não apresentar dados numéricos e ser escrito a partir de uma forma indutiva sobre o assunto. Enquanto a natureza, podemos classificá-lo como básica, pois um dos propósitos é aumentar o conhecimento sobre o tema, como também buscar o conhecimento para ser difundido na comunidade estudantil. Por fim, em relação aos objetivos podemos classificá-la como exploratória, uma vez que objetivou-se apresentar uma abordagem da Lógica Matemática no Ensino Médio, que é pouco estudado nessa etapa da vida acadêmica dos jovens.

Na atualidade está cada vez mais presente a exigência do conhecimento de raciocínio lógico em currículos de cursos superiores, em provas de concursos públicos, olimpíadas de Matemática, etc. Portanto, fazer uma abordagem da Lógica Matemática no Ensino Médio, contribui de forma significativa para a aprendizagem dos alunos que estão concluindo essa etapa de sua vida acadêmica, como também auxilia aqueles que ao término desse ensino pretendam ingressar em cargos públicos ou em cursos superiores.

Além disso, o mercado de trabalho exige cada vez mais cidadãos qualificados e com habilidades para desenvolver o trabalho o qual estão inseridos. Assim, fazer uma abordagem da Lógica Matemática no Ensino Médio tem grande relevância educacional, facilitando o desenvolvimento de um pensamento lógico crítico, significativo, consolidado, amadurecido, com organização de ideias, almejando uma formação dos discentes como cidadãos aptos para o mundo do trabalho, sendo capazes de raciocinar adequadamente conforme precise em uma tomada de decisão ou na busca de soluções de problemas adversos.

1 BREVE ASPECTO HISTÓRICO DA LÓGICA

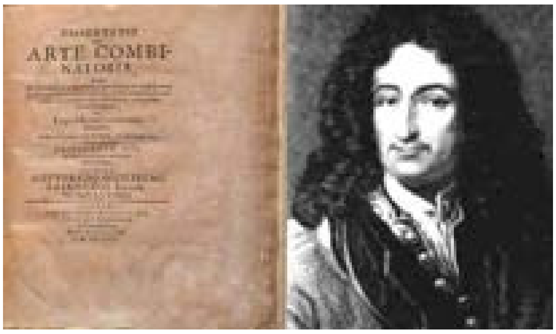
A lógica nasceu na Grécia antiga no século IV a.C, sendo criada pelo filósofo Aristóteles (384 - 322 a.C) com o objetivo de estabelecer um conjunto de regras, para reger a argumentação científica e política da época. Aristóteles propôs a primeira sistematização para a classificação das proposições em verdadeira ou falsa e a classificação para os argumentos em válidos ou inválidos. Esta sistematização perdura-se até os dias de hoje, por isso ele é conhecido como o pai da lógica clássica (NASCIMENTO, 2016). Aristóteles também criou a teoria dos silogismos que é um tipo de argumento composto por duas premissas e uma conclusão.

No fim da antiguidade tinha se estabelecido duas grandes correntes que estudavam a lógica: A Peripatética advinda de Aristóteles e a Estóica fundada por Zenon (335 - 264 a.C) e desenvolvida por Crísipo (281-205 a.C) a partir dos Megáricos, sendo os Estóicos os responsáveis pelo que chamamos hoje em dia de Lógica Proposicional (DIAS, 1994).

De acordo com Butierres (2016) na Grécia antiga destacou-se Euclides de Megara e sua Escola dos Estoicos e Megáricos por terem desenvolvido áreas da lógica que não foram desenvolvidas por Aristóteles. Além disso, essa escola desenvolveu o estudo das condicionais e das disjunções.

Ao fim da antiguidade, a lógica praticamente não se desenvolveu mais, por conta do clima intelectual que se deu com o Renascimento e o Humanismo. No século XVII, a lógica moderna começou a se desenvolver, com Leibniz, ele influenciou vários estudiosos da época, com sua obra "Dissertação da arte combinatória" criou um sistema exato e universal de notação, que era uma linguagem simbólica, a qual propiciaria o conhecimento fundamental de todas as coisas (D'OTTAVIANO; FEITOSA, 2009).

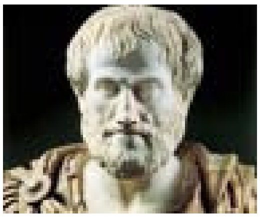
Figura 1.1 – Leibniz (1646-1716) e sua obra "Dissertação da arte combinatória."



Fonte: Franzon (2015)

De acordo com Dias (1994), além de Aristóteles, podemos destacar alguns outros contribuintes para a fundamentação da Lógica Matemática.

Figura 1.2 – Aristóteles (384 - 322 a.C).



Fonte: Menezes (2024)

Como o matemático inglês George Boole (1815-1864), considerado o fundador da Lógica Matemática, publicou o livro "The Mathematical Analysis of Logic" o qual deu início a um período revolucionário. Ele fundamentou a Lógica Formal, com uma nova álgebra, conhecida como álgebra Booleana.

Figura 1.3 – George Boole (1815-1864).

Fonte: Trebien (2024)

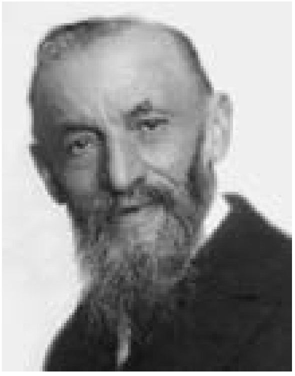
O alemão Gottlob Frege (1848 - 1925), publicou a obra "begriffsschrift" de 1879, costumeiramente traduzida como "conceitografia." Foi um dos precursores da distinção entre linguagem e meta-linguagem. Propôs provar que toda a aritmética podia ser derivada logicamente a partir de um conjunto de axiomas básicos. Ele representava a lógica usando variáveis e funções.

Figura 1.4 – Gottlob Frege (1848 - 1925).

Fonte: Frege (2024)

O matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932), desenvolveu o sistema de notação lógica, demonstrou que enunciados matemáticos não são obtidos por intuição e criou a axiomatização da aritmética.

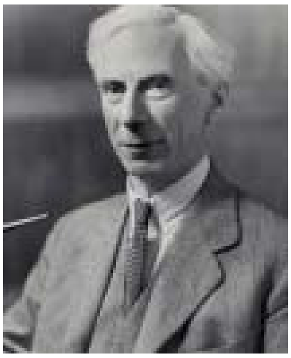
Figura 1.5 – Giuseppe Peano (1858 - 1932).



Fonte: Peano (2024)

O britânico Bertrand Russell (1872-1970), publicou a obra "Principia Mathematica", constituída em três volumes, na qual relata que a partir de um número específico de princípios lógicos fundamentais, se estabelece a Matemática Pura. Chegando ainda a afirmar que a Matemática é indistinguível da lógica.

Figura 1.6 – Bertrand Russell (1872-1970).



Fonte: Russell (2024)

Como podemos perceber muitos estudiosos se dedicaram para a formulação da Lógica Matemática, durante o seu processo evolutivo. Procurando relacionar a lógica com a Matemática até chegarmos em estruturas mais complexas. A evolução da lógica é de extrema importância, pois esse processo, acarretou a aplicação da Lógica Matemática na atualidade em grandes áreas do conhecimento como Matemática, Economia, Linguagem Formal, Engenharia e Ciências da Computação.

2 LÓGICA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Na atualidade é cada vez mais crescente o avanço das novas Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC), e isso vem refletindo nas escolas, tornando o processo de ensino-aprendizagem mais desafiador, tanto para o aluno como para o professor. Diante da complexidade deste processo, muitos alunos não conseguem compreender e nem raciocinar sobre o que lhe é proposto em um determinado problema, notando-se uma grande dificuldade dos mesmos com relação ao raciocínio lógico (SCOLARI *et al.*, 2007). Assim, fazer uma abordagem da Lógica Matemática na escola pode contribuir para uma melhor compreensão em determinados assuntos, tanto na área da Matemática, como também das demais áreas do conhecimento.

Embora na antiguidade a lógica fosse tratada de forma isolada da Matemática, na atualidade a Lógica Matemática está presente desde as mais simples operações básicas da aritmética, até chegarmos em demonstrações matemáticas mais complexas (NASCIMENTO, 2016). Logo, existe uma relação muito próxima da Matemática com a lógica tornando-as às vezes indistinguíveis conforme evidencia Russell (2006) "[...] a lógica tornou-se mais Matemática e a Matemática tornou-se mais lógica. Em consequência, tornou-se agora inteiramente impossível traçar uma linha divisória entre as duas; na verdade, as duas são uma".

O estudo da Matemática juntamente com uma abordagem da lógica traz significado ao ensino e a aprendizagem de forma consistente, assim o professor além de explicar como fazer, também deve explicar, o porquê, justificando fatos matemáticos apresentados, pormenores matemáticos que ficam muitas vezes "escondidos" nas entrelinhas e os demonstre com argumentos válidos convincentes através do desenvolvimento do raciocínio lógico (GOMES, 2015).

Conforme Filho (2013) a maioria dos estudantes quando entram na universidade se chocam ao se deparar com a linguagem formal e abstrata da Matemática que as algumas disciplinas iniciais exigem. O autor ainda diz que este choque é fruto, principalmente, de carências durante a formação dos alunos, de seus professores e de um Ensino Médio que, por muitas das vezes, não lhes fornece uma preparação adequada e nem lhes capacita para usar o raciocínio lógico dedutivo, o qual mais a frente lhe será cobrado.

Segundo Bianchi (2007), a lógica é a arte de pensar, a arte de raciocinar, sendo o raciocínio o pensamento em movimento, o encadeamento de juízos. É uma espécie de conhecimento que trata as operações que o ser humano usa, na tentativa de buscar a verdade. A autora, também, defende a inserção da Lógica Matemática no currículo da Educação Básica, não como um componenete curricular ou um conteúdo da disciplina de Matemática, mas sim, como um tema transdiciplinar.

Nessa mesma perspectiva NOÉ (2024) diz que a abordagem da Lógica Matemática na formação básica dos jovens, gera pessoas críticas com senso argumentativo. Habilidade essa, que se desenvolve estudantes capazes de criar, interpretar, responder e explicar situações problemas envolvendo Matemática.

Para reforçar a contribuição da Lógica Matemática no ensino, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) afirmam que na construção do pensamento matemático, a lógica permite a compreensão dos processos, a possibilidade do desenvolvimento da capacidade de argumentar, bem como de fazer conjecturas e generalizações. Além disso, auxilia na justificativa e assimilação de uma demonstração formal. Os PCNs ainda defendem a inclusão de alguns conceitos da lógica aos conteúdos inerentes a Matemática, desde as séries iniciais, uma vez que ela é inerente a Matemática, pois a lógica e a Matemática estão fortemente ligadas como linguagem formal e precisa (NICOLETE *et al.*, 2017).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aponta em umas das suas competências específicas que é uma das funções do ensino de Matemática “Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo” (KIPPER *et al.*, 2019).

Portanto, é de extrema importância a Lógica Matemática no ensino, para que possamos formar cidadãos, críticos, reflexivos, argumentativos, confiantes, com potencial para o mundo do trabalho e para que possam viver em sociedade, exercendo sua cidadania.

3 LÓGICA PROPOSICIONAL

A Lógica Proposicional ou Cálculo Proposicional é a parte da Lógica Matemática que estuda proposições, conectivos lógicos, tabela verdade e a validade ou invalidade dos argumentos. Faremos um estudo sobre os principais fundamentos desta lógica a partir do conceito de proposição até avançarmos para estruturas lógicas mais abrangentes.

3.1 PROPOSIÇÃO

Chama-se **proposição** toda sentença declarativa expressa por palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo, e que pode ser valorada apenas com um, e somente um, dos valores lógicos: verdadeiro (V) ou falso (F).

Dentre tantos tipos de lógica, a Lógica Matemática na sua versão clássica, a qual é abordada nesse trabalho, adota três princípios básicos em sua estrutura, como regra fundamental do pensamento (BISPO *et al.*, 2011):

1. **Princípio da Identidade**: Uma proposição é idêntica a si mesma.

2. **Princípio da Não-Contradição**: Uma proposição não pode ser valorada em verdadeira e falsa simultaneamente.

3. **Princípio do Terceiro Excluído**: Uma proposição ou é valorada como verdadeira ou é valorada como falsa, não existindo a possibilidade de uma terceira opção.

Assim, são exemplos de proposições as seguintes sentenças:

(a) O Brasil é um país da América do Sul.
(b) $2+3=5$.
(c) $\sqrt{25}=5$.
(d) $5<2$.

Perceba que os exemplos abaixo não são proposições:

(a) Que horas são? (pois, não tem como julgar em verdadeiro ou falso uma pergunta).
(b) $5+4$ (pois, não tem sentido completo, falta um verbo).
(c) Que roupa linda! (pois, não tem como julgar em verdadeiro ou falso uma exclamação).
(d) $x>2$ (veja que eu não conheço o valor de x, assim sendo podemos por exemplo admitir $x=3$, o que torna a sentença verdadeira, pois $3>2$. Mas se admitirmos $x=1$, a sentença é falsa, pois $1<2$, ferindo assim o princípio da não contradição). Na verdade o que temos

nesse exemplo é uma sentença aberta, discutiremos mais a frente que tipo de sentença é essa.

De maneira geral não são proposições:

- Frases interrogativas;
- Frases exclamativas;
- Frases imperativas;
- Frases sem verbo;
- Sentenças abertas.

Representamos as proposições através das letras latinas do nosso alfabeto, p, q, r, s, ..., vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1. p : A capital da China é Pequim.

Exemplo 3.2. q : $(3+5)^2 = 3^2 + 5^2$.

Toda proposição tem **valor lógico** único, que pode ser verdadeiro ou falso. Indicamos assim, V(p) = V, lê-se valor lógico da proposição p é verdadeiro ou V(p)=F, lê-se valor lógico da proposição p é falso.

No exemplo 3.1 temos V(p) = V, enquanto que no exemplo 3.2, temos V(q) = F.

3.2 PROPOSIÇÕES SIMPLES E PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

De acordo com sua estrutura as proposições podem ser classificadas em proposições **simples** ou proposições **compostas**.

Dizemos que uma proposição é **simples** ou **atômica**, quando ela não possui uma outra proposição integrante na sua composição. E dizemos que uma proposição é **composta** ou **molecular**, quando ela possui duas ou mais proposições integrantes na sua composição.

Segundo Filho (2002) é habitual representarmos as proposições compostas com letras maiúsculas, além do mais quando queremos destacar ou explicitar que uma proposição composta P é formada por outras proposições simples p, q, r, ..., indicamos esse fato da seguinte forma: P(p, q, r, ...).

Exemplo 3.3. p : Maria é inteligente.

A proposição p é simples, veja que temos apenas uma informação a respeito de Maria.

Exemplo 3.4. Q : João é rico e Lucas é alto.

Veja que na proposição Q temos duas informações, assim, dizemos que a proposição Q é composta.

Poderíamos dizer que a proposição Q é formada pela proposição r, João é rico e pela proposição s, Lucas é alto.

3.3 CONECTIVOS LÓGICOS

Chamamos de **conectivos lógicos** as palavras que usamos para ligar proposições com outras proposições ou para formar novas proposições.

No exemplo 3.4 temos a proposição "João é rico **e** Lucas é alto", a palavra "**e**" é um conectivo lógico que liga a proposição "João é rico" à proposição "Lucas é alto."

As palavras "e", "ou", "ou ... ou ... ", "se ... , então ... " , "... se, e somente se ... " e "não", são conectivos lógicos usuais na Lógica Matemática. Vejamos alguns exemplos de como esses conectivos lógicos aparecem nas proposições:

P: $2+3=5$ **e** $12>8$.
Q: Ana é alta **ou** João é atleta.
R: **Ou** um número real é racional **ou** é irracional.
S: **Se** chover, **então** a terra fica molhada.
T: Um triângulo é retângulo **se, e somente se**, o quadrado da hipotenusa for igual a soma dos quadrados dos catetos.
U: **Não** está escuro.

Temos na tabela abaixo os conectivos lógicos que usamos na Lógica Matemática:

Tabela 3.1 – Conectivos lógicos

Conectivo lógico	**Símbolo**	**Operador lógico**
não	$\sim$ ou $\neg$	Negação
e	$\wedge$	Conjunção
ou	$\vee$	Disjunção
se ..., então ...	$\rightarrow$	Condicional
... se, e somente se, ...	$\leftrightarrow$	Bicondicional
ou ... ou ...	$\veebar$	Disjunção exclusiva

Fonte: Autor

De acordo com a tabela 3.1, podemos representar as proposições na linguagem simbólica a partir da linguagem corrente.

Sejam as proposições na linguagem corrente:

p : João estudou para o exame.

q : João foi aprovado no exame.

Poderemos formar proposições compostas a partir das proposições p e q, utilizando os conectivos lógicos e representá-las na linguagem simbólica, como por exemplo:

$p \wedge q$: João estudou para o exame **e** foi aprovado.

$q \rightarrow p$: **Se** João foi aprovado, **então** estudou para o exame.

3.3.1 Tabela verdade

Dada uma proposição composta, para sabermos se o valor lógico dela é verdadeiro ou falso, colocamos todas as combinações possíveis dos valores lógicos das proposições simples integrantes que a compõe em uma tabela, e usamos as regras dos conectivos lógicos para julgarmos em verdadeiro ou falso a proposição, assim uma proposição composta por duas proposições simples p e q apresenta quatro combinações possíveis dos seus valores lógicos, **VV, VF, FV** e **FF**. Vejamos na tabela 3.2 todas as combinações.

Tabela 3.2 – Tabela verdade com duas proposições

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Fonte: Autor

3.3.2 Negação

Chamamos de **negação** de uma proposição p a proposição "Não p", que é representada simbolicamente por $\sim p$ (lê-se não p) ou, conforme alguns autores que usam a notação $\neg$ p. Portanto, para negar uma proposição acrescenta-se a partícula não antes do verbo na sentença.

Exemplo 3.5. Dada a proposição:

$$\text{p : Está frio,}$$

sua negação é a proposição:

$$\sim \text{p : Não está frio.}$$

Exemplo 3.6. Dada a proposição:

$$\text{q : João é honesto,}$$

a negação da proposição q poderia ser:

$$\sim \text{q : João não é honesto.}$$
ou
$$\sim \text{q : João é desonesto.}$$

Ou ainda de acordo com Filho (2002) a negação da proposição q poderia ser:

$$\sim \text{q : Não é verdade que João é honesto.}$$

A negação de uma proposição p será verdadeira, ou seja, V($\sim$ p) = V, quando o valor lógico da proposição p for falsa, ou seja, V(p) = F e vice - versa. O valor lógico da negação de uma proposição é dada pela tabela 3.3:

Tabela 3.3 – Tabela verdade da negação de uma proposição

p	$\sim$ p
V	F
F	V

Fonte: Autor

3.3.3 Conjunção

Chamamos **conjunção** de duas proposições p e q, a proposição composta representada por "p e q", e em símbolos por p $\wedge$ q, cujo valor lógico da proposição composta é verdadeiro (V), quando o valor lógico de p e q são ambos verdadeiros, e falso nos demais casos.

Para exemplificação, considere as proposições:

$$\text{p : João é americano.}$$

$$\text{q : Maria é professora,}$$

ambas verdadeiras, então será verdadeira a proposição composta:

$$\text{p} \wedge \text{q : João é americano e Maria é professora.}$$

Note que se pelo menos uma das proposições integrantes da proposição composta for falsa, então toda a proposição composta se tornará falsa. Podemos organizar todos os possíveis resultados da conjunção na tabela 3.4:

Tabela 3.4 – Tabela verdade da Conjunção

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Autor

Exemplo 3.7. Dadas as proposições:

$$\text{p} : 2+3=6.$$
$$\text{q} : \text{sen}^2\,\pi+\cos^2\pi=1,$$

temos que a proposição composta

$$\text{p} \wedge \text{q} : 2+3=6 \text{ e } \text{sen}^2\,\pi+\cos^2\pi=1$$

é falsa, pois como p é falso V(p) = F e q é verdadeiro V(q) = V, conforme a segunda linha da tabela 3.4, temos que o valor lógico da conjunção é falso, V(p ∧ q) = F.

Exemplo 3.8. Qual o valor lógico da proposição "$2^{10}=1024$ **e** $-10<-5$" ?

Resolução: Sejam as proposições

$$\text{p} : 2^{10}=1024.$$

$$\text{q} : -10<-5.$$

Veja que o conectivo lógico que liga as proposições p e q é a conjunção (**e**), assim teremos:

$$\text{p} \wedge \text{q} : 2^{10} = 1024 \text{ e } -10 < -5.$$

Como V(p) = V e V(q) = V, tem-se que V(p ∧ q) = V (conforme a primeira linha ta tabela 3.4).

3.3.4 Disjunção

Chamamos **Disjunção** ou **Disjunção inclusiva** de duas proposições p e q, a proposição composta representada por "p ou q", e em símbolos por p ∨ q, cujo valor lógico da proposição composta é verdadeiro (V), quando ao menos uma das proposições p ou q é verdadeira, e falso apenas no caso em que p e q são ambas falsas (F).

Para exemplificação, considere a sentença:

João é matemático ou João é químico.

Em quais condições essa sentença é verdadeira?

A sentença é verdadeira em três situações:

- No caso em que João for matemático e não for químico.
- No caso em que João for químico e não for matemático.
- No caso em que João for matemático e também for químico.

E em que condições a sentença é falsa?

Note que a sentença será falsa apenas em um único caso:

- quando João não for nem matemático e nem químico.

Em linguagem simbólica podemos representar a proposição "João é matemático ou João é químico," como sendo a proposição:

p ∨ q : João é matemático ou João é químico.

Na tabela 3.5 podemos elencar todos os possíveis resultados da disjunção p ∨ q.

Tabela 3.5 – Tabela verdade da Disjunção

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Autor

Exemplo 3.9. Qual o valor lógico da proposição "$5^0 = 1$ **ou** $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$" ?

Resolução: Sejam as proposições:

$$\text{p} : 5^0 = 1.$$

$$\text{q} : \frac{1}{4} > \frac{1}{2}.$$

Veja que o conectivo lógico que liga as proposições p e q é a disjunção (**ou**), assim teremos:

$$\text{p} \vee \text{q} : 5^0 = 1 \text{ ou } \frac{1}{4} > \frac{1}{2}.$$

Como V(p) = V e V(q) = F, tem-se que V(p ∨ q) = V (conforme a segunda linha ta tabela 3.5).

3.3.5 Condicional

Chamamos de **proposição condicional** ou simplesmente **condicional** de duas proposições p e q, a proposição composta representada por "se p então q", e em símbolos por p → q, cujo valor lógico da proposição composta é falso (F), no caso em que p é verdadeira e q é falsa, e verdadeiro (V) nos demais casos.

Para exemplificação, imagine que João fala para Ana a seguinte sentença:

Se fizer sol, então vou jogar bola.

Em quais condições João mente para Ana?

Note que os casos em que João mente para Ana, são justamente os casos em que a sentença "Se fizer sol, então vou jogar bola", é falsa, que ocorre apenas em uma situação:

- Fez sol e João não foi jogar bola.

Perceba que neste caso João não cumpriu a promessa que fez a Ana, pois fez sol e ele deixou de ir jogar bola.

E em quais condições João não mente para Ana?

Note que os casos em que João não mente para Ana, são justamente todos os casos em que a sentença “ Se fizer sol, então vou jogar bola ” é verdadeira, que ocorre nos seguintes casos:

- Fez sol e João foi jogar bola.
- Não fez sol e João foi jogar bola.
- Não fez sol e João não foi jogar bola.

Perceba que João não fez nenhuma promessa caso não fizesse sol, portanto, não fazer sol, João pode ir jogar bola ou não.

Exemplo 3.10. Represente em linguagem simbólica a senteça: Se 2 é um número natural então 2 é um número inteiro.

Resolução: Sejam as proposições:

$$\text{p : 2 é um número natural.}$$

$$\text{q : 2 é um número inteiro.}$$

Veja que estamos diante de uma condicional (se p então q), portanto , em linguagem simbólica teremos:

$$p \to q : \text{Se 2 é um número natural, então 2 é um número inteiro.}$$

Na tabela 3.6, elencamos todos os possíveis resultados da condicional p $\to$ q.

Tabela 3.6 – Tabela verdade da Condicional

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Autor

Na condicional p → q, chamamos p de **antecedente** e q de **consequente**. Diz-se também que p é **condição suficiente** para q, e que q é **condição necessária** para p.

Seja a proposição:

Se João é paraibano, então João é brasileiro.

- Perceba que uma pessoa ser paraibana é o suficiente para concluirmos que essa pessoa é brasileira.
- Note também que para uma pessoa ser paraibana é necessário que ela seja brasileira.

Exemplo 3.11. Qual o valor lógico da proposição “Se $7 > 2$, então $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$” ?

Resolução: Sejam as proposições

$$p : 7 > 2.$$

$$q : \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Veja que o conectivo lógico que liga as proposições p e q é a condicional (se ..., então ...), assim teremos:

$$p \rightarrow q : \text{Se } 7 > 2, \text{ então tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Como V(p)= V e V(q) = V, tem-se que o valor lógico da proposição “Se $7 > 2$, então $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$” é verdadeiro, isto é, V(P → q) = V (conforme a primeira linha da tabela 3.6).

Existem três **proposições associadas a condicional**, p → q, que são as seguintes condicionais contendo p e q em sua estrutura (FILHO, 2002):

- (i) **Proposição contrária** de p $\rightarrow$ q é a proposição $\sim$ p $\rightarrow$ $\sim$ q.
- (ii) **Proposição recíproca** de p $\rightarrow$ q é a proposição q $\rightarrow$ p.
- (iii) **Proposição contrapositiva** de p $\rightarrow$ q é a proposição $\sim$ q $\rightarrow$ $\sim$ p.

3.3.6 Bicondicional

Chamamos de **proposição bicondicional** ou simplesmente **bicondicional** de duas proposições p e q, a proposição composta representada por " p se, e somente se, q ", e em símbolos por p $\leftrightarrow$ q, cujo valor lógico da proposição composta é verdadeiro (V), no caso em que p e q possuem o mesmo valor lógico e falsa (F) nos demais casos.

Para exemplificação, imagine que João fala para Ana a seguinte sentença:

Vou jogar bola se, e somente se, fizer sol.

Em quais condições João mente para Ana?

Note que João vai jogar bola apenas no caso em que de fato fizer sol. Portanto, se não fizer sol, João não vai jogar bola. Assim, as condições que João mente para Ana são:

- Fez sol e João não foi jogar bola.
- Não fez sol e João foi jogar bola.

A partir destas observações, concluímos que os casos em que João fala a verdade para Ana acontece quando:

- Fez sol e João foi jogar bola.
- Não fez sol e João não foi jogar bola.

Na proposição composta bicondicional p $\leftrightarrow$ q, diz-se que p é condição **necessária e suficiente** para q, e que q também é **condição suficiente e necessária** para p.

Na tabela 3.7, elencamos todos os possíveis resultados da bicondicional p $\leftrightarrow$ q.

Tabela 3.7 – Tabela verdade da Bicondicional

p	q	p $\leftrightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Autor

Exemplo 3.12. Represente em linguagem simbólica a sentença: $5 > 2$ se, e somente se, 3 divide 9.

Resolução: Sejam as proposições:

$$\text{p} : 5 > 2.$$

$$\text{q} : 3 \text{ divide } 9.$$

Em linguagem simbólica temos:

$$\text{p} \leftrightarrow \text{q} : 5 > 2 \text{ se, e somente se, } 3 \text{ divide } 9.$$

Exemplo 3.13. Julgue em verdadeiro ou falso a sentença: $5^0 = 1$ se, e somente se, $\sqrt{25} = 5$.

Resolução: Sejam as proposições:

$$\text{p} : 5^0 = 1.$$

$$\text{q} : \sqrt{25} = 5.$$

Note que o valor lógico de p é verdadeiro, ou seja, V(p)= V e o valor lógico de q também é verdadeiro, V(q)= V, perceba que estamos diante de uma bicondicional em que os valores lógicos de suas duas proposições componentes são ambos verdadeiros, então de acordo com a primeira linha da tabela 3.7 temos que V(p $\leftrightarrow$ q) = V, portanto, a sentença "$5^0 = 1$ se, e somente se, $\sqrt{25} = 5$" é verdadeira.

3.3.7 Disjunção exclusiva

Chamamos de **disjunção exclusiva** de duas proposições p e q, a proposição composta representada por "ou p ou q", e em símbolos por p $\veebar$ q, cujo valor lógico da proposição composta é verdadeiro (V), no caso em que p e q possuem valores lógicos distintos e falsa (F) nos demais casos.

Para exemplificação, imagine que João fala para Lucas a seguinte sentença:

Ou vou para o mercado ou vou para a loja.

O emprego do conectivo lógico "ou ..., ou ..." na frase, significa que João vai apenas para um dos lugares, por isso essa disjunção é exclusiva, ou seja, ao escolher uma possibilidade exclui-se a outra.

Assim sendo, João fala a verdade para Lucas nos seguintes casos:

- João foi para o mercado e não foi para a loja.
- João não foi para o mercado e foi para a loja.

E, João mente para Lucas nos seguintes casos:

- João foi para o mercado e também foi para a loja.
- João não foi para o mercado e não foi para a loja.

Na tabela 3.8, podemos elencar todos os possíveis resultados da disjunção exclusiva $p \veebar q$.

Tabela 3.8 – Tabela verdade da Disjunção exclusiva

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Autor

Exemplo 3.14. Julgue em verdadeiro ou falso a sentença: Ou $5 > 1$ ou $\operatorname{sen} \pi = 0$.

Resolução: Sejam as proposições:

$$p : 5 > 1.$$

$$q : \operatorname{sen} \pi = 0.$$

Como V(p) = V e V(q) = V, de acordo com a primeira linha da tabela 3.8, o valor lógico da proposição $p \veebar q = F$. Logo, a proposição "ou $5 > 1$ ou $\operatorname{sen} \pi = 0$" é falsa.

3.4 SENTENÇAS ABERTAS E QUANTIFICADORES LÓGICOS

Como vimos sentenças abertas não são proposições, pois esse tipo de sentença, conforme visto não admite valor lógico único.

Segundo Andrade (2021) denominamos de **sentença aberta** uma frase subordinada a uma variável livre, fazendo com que a sentença não tenha seu valor lógico determinado.

Na expressão $x > 2$ temos uma sentença aberta devido a presença da variável livre x, logo, podemos atribuir valores reais a x. Por exemplo, para $x = 5$ a sentença $x > 2$ é verdadeira, pois $5 > 2$. Mas, para $x = 1$ a sentença $x > 2$ é falsa, pois $1 < 2$.

Quando usamos os quantificadores lógicos nas sentenças abertas, estas passam a serem proposições e, portanto, sentenças fechadas. Assim, **quantificador lógico** é um símbolo lógico que ao estar presente em uma sentença, esta passa a se tornar uma proposição (ANDRADE, 2021).

Os principais quantificadores lógicos são:

- **Universal**, cujo símbolo é $\forall$, e significa "para todo" ou "qualquer que seja".
- **Existencial**, cujo símbolo é $\exists$, e significa "existe pelo menos um", "para algum" ou "existe um".

Veja que a sentença "$x > 2$" é aberta, mas se a quantificarmos com algum dos quantificadores, como por exemplo "Existe pelo menos um x real, tal que $x > 2$", esta nova sentença passa a ser proposição, cujo valor lógico é único e neste caso verdadeiro. Pois, de fato existe algum valor real que a torne verdadeira, por exemplo $x = 3$. Na verdade existe uma infinidade de números reais que torna a sentença verdadeira. Logo, existe pelo menos um x real que a torne verdadeira. Em símbolos matemáticos diríamos assim, "$\exists x \in \mathbb{R} \mid x > 2$".

Exemplo 3.15. Qual o valor lógico da proposição "$\forall x \in \mathbb{Z}$, temos que $x^2 - 7x + 12 = 0$" ?

Perceba que a proposição afirma que qualquer que seja x inteiro temos que $x^2 - 7x + 12 = 0$. O que não é verdade, pois por exemplo se tomarmos $x = 0$, teremos $0^2 - 7 \cdot 0 + 12 = 0 - 0 + 12 = 12$ e, portanto, 0 não é solução da equação. Concluímos, então que a proposição "$\forall x \in \mathbb{Z}$, temos que $x^2 - 7x + 12 = 0$" é falsa.

3.4.1 Negação de sentenças com quantificadores

Conforme Filho (2002) a negação de uma proposição com quantificador universal, deve-se trocar este quantificador pelo quantificador existencial e negar o verbo. E quando for uma proposição com quantificador existencial, troca-se o mesmo pelo quantificador universal e nega-se o verbo.

Exemplo 3.16. Qual a negação da proposição “Todo aluno gosta de lógica” ?

Resolução: A negação da proposição “Todo aluno gosta de lógica” é a proposição “Existe pelo menos um aluno que não gosta de lógica”.

É comum muitas pessoas pensarem que a negação da proposição “Todo aluno gosta de lógica” é a proposição “Nenhum aluno gosta de lógica”, o que seria um erro, pois para encontrarmos esta negação é suficiente que pelo menos um aluno não goste de lógica. Outras maneiras equivalentes desta negação seria:

“Algum aluno não gosta de lógica”ou “Existe pelo menos um aluno que não gosta de lógica” ou ainda poderia ser “Nem todo aluno gosta de lógica”. Veja que o quantificador “Todo” foi trocado por “Existe” e a sentença “gosta de lógica” foi negada “não gosta de lógica”.

Exemplo 3.17. Qual a negação das proposições abaixo?

(a) $\forall x \in \mathbb{R};\ x^2 \geqslant 0$.

(b) $\exists x \in \mathbb{N};\ x+2=5$.

Resolução: As negações das proposições são:

(a) $\exists x \in \mathbb{R};\ x^2 < 0$.

(b) $\forall x \in \mathbb{N};\ x+2 \neq 5$.

3.5 CONSTRUÇÃO DE TABELA VERDADE

Como já vimos, uma proposição composta por duas proposições simples, a sua tabela verdade conterá quatro linhas com as seguintes combinações: **VV, VF, FV** e **FF**. Agora veremos como valorarmos em verdadeiro ou falso proposições que contenham três proposições simples ou mais em sua composição. Temos que construir sua tabela verdade e para isso, devemos proceder assim:

1. Primeiramente devemos encontrar o número de linhas da tabela verdade, e para isso fazemos o cálculo 2^n, onde n é a quantidade de proposições simples que integram a proposição composta. Se aparecer uma proposição e sua negação (p e $\sim p$) em uma proposição composta, não devemos contar duas vezes.

2. Para distribuir os valores lógicos (V) e (F) de cada proposição na tabela, usamos a ideia do dobro, começamos sempre a partir da última proposição até se chegar a primeira, sempre dobrando o número de (V) e (F) anterior.

Devemos também observar a ordem de precedência que um conectivo lógico tem sobre outro, que de acordo com Gomes (2015), a ordem de precedência do mais fraco para o mais forte é a seguinte:

1. Negação
2. Conjunção e/ou Disjunção
3. Condicional
4. Bicondicional

Exemplo 3.18. Vamos construir a tabela verdade da proposição composta:

$$(\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{q}) \leftrightarrow (\sim \mathrm{r}).$$

Resolução: Note que a proposição composta é uma bicondicional formada por três proposições simples p, q e r, assim, teremos $2^3 = 8$ linhas. Nas três primeiras colunas colocamos as três proposições. Como a última é r (na terceira coluna), então colocamos (V) e (F) alternadamente, em seguida na coluna anterior colocamos o dobro (VV) e (FF), alternadamente, e assim por diante. Continuando, na quarta coluna colocamos as negações caso apareça, que no caso apareceu (∼ r), cujo valores lógicos são opostos aos da terceira coluna. Vejamos como fica a tabela até aqui:

Tabela 3.9 – Construção da tabela verdade

p	q	r	∼ r
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	V

Fonte: Autor

Prosseguindo vamos colocar na quinta coluna o valor lógico da proposição $p \rightarrow q$, que é uma condicional, e para valorarmos esta proposição, devemos olhar para a primeira e segunda coluna nesta ordem, pois p é o antecedente e q é o consequente. Por fim, na sexta coluna vamos colocar toda a proposição composta, que é uma bicondicional. Esta última coluna é a que se encontra a valoração da proposição composta $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim r)$.

Tabela 3.10 – Construção da tabela verdade

p	q	r	$\sim r$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim r)$
V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V

Fonte: Autor

3.6 USO DE PARÊNTESES

Usamos parênteses nas proposições compostas para evitarmos ambiguidades ou para mudarmos o conectivo principal da proposição. Vejamos:

(i) $(p \vee q) \rightarrow r$ (O conectivo principal é "$\rightarrow$", portanto, esta proposição é uma condicional)

(ii) $p \vee (q \rightarrow r)$ (O conectivo principal é "$\vee$", portanto, esta proposição é uma disjunção)

(iii) $p \vee q \rightarrow r$ (O conectivo principal é a condicional, pois ele é o conectivo mais forte nesta estrutura. Assim, esta proposição é uma condicional)

Existem casos em que uma proposição composta, independente dos valores lógicos de suas proposições componentes, sempre são verdadeiras ou não. Veremos isto na próxima seção.

3.7 TAUTOLOGIA, CONTRADIÇÃO E CONTINGÊNCIA

Tautologia é toda proposição composta em que independentemente dos valores lógicos das proposições que a integram, em sua última coluna da tabela verdade encerra somente valores lógicos verdadeiros.

Exemplo 3.19. Mostre que a proposição $p \rightarrow p \vee q$, é uma tautologia.

Demonstração. Vamos construir a tabela verdade da proposição composta $p \rightarrow p \vee q$ e verificar se sua última coluna encerra somente valores lógicos verdadeiros (V).

Tabela 3.11 – Tabela verdade da proposição $p \rightarrow p \vee q$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow p \vee q$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Fonte: Autor

Perceba que a última coluna da tabela verdade da proposição composta $p \rightarrow p \vee q$ encerra somente valores lógicos verdadeiros. Portanto, a proposição composta é uma tautologia. □

Exemplo 3.20. Mostre que a proposição João é médico ou João não é médico, é uma tautologia.

Demonstração. Veja que neste exemplo temos uma proposição composta formada por duas proposições simples " João é médico " e " João não é médico ", as quais estão ligadas pelo conectivo lógico " ou ", sendo portanto, uma disjunção. Note que de fato, é perfeitamente razoável aceitarmos que apenas uma das informações deve ser verdadeira, ou João é médico ou João não é médico, e consequentemente como a proposição é uma disjunção, basta que pelo menos uma proposição componente desta disjunção seja verdadeira, para que a proposição disjuntiva também seja. Logo, a proposição " João é médico ou João não é médico " também é verdadeira, sendo portanto, uma tautologia. □

Demonstração. Agora vamos verificar que a proposição composta é uma tautologia, usando a tabela verdade.

Sejam as proposições:

p : João é médico.

$\sim p$: João não é médico.

$p \vee \sim p$: João é médico ou João não é médico.

Tabela 3.12 – Tabela verdade da proposição p $\vee \sim$ p

p	$\sim$ p	p $\vee \sim$ p
V	F	V
F	V	V

Fonte: Autor

Note que a última coluna da tabela verdade da proposição p $\vee \sim$ p, encerra somente com valores lógicos verdadeiros. Portanto, a proposição composta é uma tautologia. $\square$

Contradição é toda proposição composta em que independentemente dos valores lógicos das proposições que a integram, em sua última coluna da tabela verdade encerra somente valores lógicos falsos.

Exemplo 3.21. Mostre que a proposição 2 é um número inteiro e 2 não é um número inteiro, é uma contradição.

Demonstração. Vamos transformar a proposição composta que está na linguagem corrente para a linguagem simbólica, em seguida vamos construir a tabela verdade da proposição.

Sejam as proposições:

p : 2 é um número inteiro.

$\sim$ p : 2 não é um número inteiro.

p $\wedge \sim$ p : 2 é um número inteiro e 2 não é um número inteiro.

Tabela 3.13 – Tabela verdade da proposição p $\wedge \sim$ p

p	$\sim$ p	p $\wedge \sim$ p
V	F	F
F	V	F

Fonte: Autor

Note que a última coluna da tabela verdade da proposição p $\wedge \sim$ p, encerra somente com valores lógicos falsos. Portanto, a proposição composta é uma contradição. $\square$

Contingência é toda proposição composta em que independentemente dos valores lógicos das proposições que a integram, em sua última coluna da tabela verdade encerra valores lógicos verdadeiros (V) e valores lógicos falsos (F), estando presentes estes valores lógicos pelo menos uma vez cada um.

Exemplo 3.22. Mostre que a proposição composta $p \vee q \rightarrow \sim r$ é uma contingência.

Demonstração. Vamos construir a tabela verdade da proposição $p \vee q \rightarrow \sim r$.

Tabela 3.14 – Tabela verdade da proposição $p \vee q \rightarrow \sim r$

p	q	r	$p \vee q$	$\sim r$	$p \vee q \rightarrow \sim r$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

Fonte: Autor

Perceba que a última coluna da tabela verdade apresenta valores lógicos verdadeiros e valores lógicos falsos, sendo portanto, a proposição $p \vee q \rightarrow \sim r$ uma contingência. $\square$

3.8 IMPLICAÇÃO LÓGICA

Dizemos que uma proposição P(p, q, r, ...) **implica logicamente** ou apenas **implica** uma proposição Q(s, t, u, ...), **se Q(s, t, u, ...) é verdadeira todas as vezes que P(p, q, r, ...) for verdadeira.** Indicamos essa implicação pela notação:

$$P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow Q(s, t, u, \ldots)$$

Exemplo 3.23. Mostre que a proposição $p \wedge q$ implica na proposição $p \leftrightarrow q$.

Demonstração. Vamos construir uma tabela verdade que contenha as proposições "$p \wedge q$" e "$p \leftrightarrow q$".

Tabela 3.15 – Tabela verdade do exemplo 3.23

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**	**V**
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	V

Fonte: Autor

Note que ao analisarmos as linhas da tabela 3.15 a proposição $p \leftrightarrow q$ é verdadeira todas as vezes que a proposição $p \wedge q$ também é verdadeira. Portanto, ocorre a implicação lógica $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$. $\square$

Exemplo 3.24. Verifique se a proposição p $\wedge$ q implica na proposição $\sim$ p $\vee$ $\sim$ q.

Resolução: Vamos construir uma tabela verdade que contenha as proposições "p $\wedge$ q" e "$\sim$ p $\vee$ $\sim$ q'.

Tabela 3.16 – Tabela verdade do exemplo 3.24

p	q	$\sim$ p	$\sim$ q	p $\wedge$ q	$\sim$ p $\vee$ $\sim$ q
V	V	F	F	**V**	**F**
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V

Fonte: Autor

Note que na primeira linha da tabela 3.16 temos a proposição $\sim$ p $\vee$ $\sim$ q falsa e a proposição p $\wedge$ q verdadeira, e isso não pode ocorrer. Logo, a proposição p $\wedge$ q não implica na proposição $\sim$ p $\vee$ $\sim$ q.

Observação: É importante destacarmos conforme evidencia Andrade (2021) a diferença entre a condicional ($\rightarrow$) e a implicação ($\Rightarrow$). Enquanto a condicional representa uma operação lógica entre as proposições P e Q (P $\rightarrow$ Q), cujo valor lógico pode ser verdadeiro ou falso, a implicação lógica (P $\Rightarrow$ Q) significa a não ocorrência dos valores lógicos V e F, respectivamente para P e Q, em uma mesma linha da tabela verdade.

A implicação lógica aparece com muita frequência na matemática e o discente ter o conhecimento da tabela verdade dessas implicações lógicas pode ajudar a compreender alguns fatos matemáticos com mais clareza.

Exemplo 3.25. Sejam x e y números inteiros. Mostre que se x é par e y é impar, então $x+y$ é impar.

Demonstração. Seja P o antecedente "x é par e y é impar" que é a hipótese da condicional em questão, e Q o consequente "$x+y$ é impar" que é a tese da condicional. Devemos mostrar que ocorre a implicação lógica P $\Rightarrow$ Q. E para que isso ocorra, assumimos a hipótese P verdadeira, e a partir dela mostraremos que a tese Q também é verdadeira. Vejamos:

x é par e y é impar $\Rightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z};\ x = 2k$ e $\exists\ m \in \mathbb{Z};\ y = 2m+1 \Rightarrow x+y = 2k+2m+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x+y = 2(k+m)+1 = 2r+1 \Rightarrow x+y = 2r+1, r \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+y$ é impar $\square$

3.8.1 Propriedades da Implicação lógica

Sejam P, Q e R proposições. Então:

1. P $\Rightarrow$ P
2. Se P $\Rightarrow$ Q e Q $\Rightarrow$ R, então P $\Rightarrow$ R

Teorema 3.1. A proposição P(p, q, r, ...) implica à proposição Q(s, t, u, ...), isto é:

$$P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow Q(s, t, u, \ldots)$$

se, e somente se, a condicional:

$$P(p, q, r, \ldots) \rightarrow Q(s, t, u, \ldots)$$

é tautológica.

Veja que de acordo com o teorema 3.1, para verificarmos se ocorre uma implicação (P $\Rightarrow$ Q), basta verificarmos se a condicional (P $\rightarrow$ Q) é tautológica.

Exemplo 3.26. Mostre que ocorre a implicação lógica p $\wedge \sim$ p $\Rightarrow$ q.

Demonstração. Devemos construir a tabela verdade da proposição "p $\wedge \sim$ p $\rightarrow$ q" e verificar se é uma tautologia. Vejamos,

Tabela 3.17 – Tabela verdade da proposição p $\wedge \sim$ p $\rightarrow$ q

p	q	$\sim$p	p $\wedge$ $\sim$p	p $\wedge \sim$ p $\rightarrow$ q
V	V	F	F	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	V	F	**V**
F	F	V	F	**V**

Fonte: Autor

Como a última coluna da tabela 3.17, encerra somente valores logicos verdadeiros (V), conclui-se que a condicional "p $\wedge \sim$ p $\rightarrow$ q" é tautológica e portanto, ocorre a implicação lógica "p $\wedge \sim$ p $\Rightarrow$ q". □

3.9 EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Habitualmente dizemos que uma sentença é equivalente a outra quando ambas, mesmo que escritas de formas diferentes significam a mesma coisa ou geram o mesmo resultado. Do ponto de vista lógico esse fato também ocorre. Assim, dizemos que uma proposição P(p, q, r, ...) **é logicamente equivalente** ou apenas **equivalente** a uma proposição Q(s, t, u, ...), se as tabelas-verdade dessas duas proposições forem idênticas, ou seja, se apresentarem o mesmo resultado.

Indicamos essa equivalência pela notação:

$$\mathrm{P(p, q, r, \ldots) \Leftrightarrow Q(s, t, u, \ldots)}$$

Exemplo 3.27. Mostre que a proposição $p \leftrightarrow p \wedge q$ é equivalente à proposição $p \rightarrow q$.

Demonstração. Vamos construir a tabela verdade que contenha a proposição $p \leftrightarrow p \wedge q$ e a proposição $p \rightarrow q$, em seguida vamos verificar se a coluna de resultados de cada proposição na tabela são idênticas.

Tabela 3.18 – Tabela verdade das proposições $p \leftrightarrow p \wedge q$ e $p \rightarrow q$

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow q$
V	V	V	**V**	**V**
V	F	F	**F**	**F**
F	V	F	**V**	**V**
F	F	F	**V**	**V**

Fonte: Autor

Note que a quarta e a quinta coluna da tabela 3.18, têm os mesmos resultados, e correspondem respectivamente, aos valores lógicos das proposições $p \leftrightarrow p \wedge q$ e $p \rightarrow q$. Logo, essas proposições são equivalentes, isto é:

$$(p \leftrightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q).$$

□

Observação: É importante destacarmos a diferença entre a bicondicional ($\leftrightarrow$) e a equivalência ($\Leftrightarrow$). Enquanto a bicondicional representa uma operação lógica entre as proposições P e Q ($P \leftrightarrow Q$), cujo valor lógico pode ser verdadeiro (V) ou falso (F), a equivalência lógica ($P \Leftrightarrow Q$) significa que a tabela verdade de P é idêntica a tabela verdade de Q.

3.9.1 Propriedades da equivalência lógica

Sejam P e Q proposições. Então:

1. $P \Leftrightarrow P$

2. Se $P \Leftrightarrow Q$, então $Q \Leftrightarrow P$

3. Se $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$, então $P \Leftrightarrow R$

Teorema 3.2. A proposição $P(p, q, r, \dots)$ é equivalente à proposição $Q(s, t, u, \dots)$, isto é:

$$P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(s, t, u, \dots)$$

se, e somente se, a bicondicional:

$$P(p, q, r, \dots) \leftrightarrow Q(s, t, u, \dots)$$

é tautológica.

Note que de acordo com o teorema 3.2, para verificarmos se ocorre uma equivalência lógica ($P \Leftrightarrow Q$), basta verificarmos se a bicondicional ($P \leftrightarrow Q$) é tautológica.

Exemplo 3.28. Mostre que $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$.

Demonstração. Vamos resolver o problema de outra forma em vez de mostrarmos que as proposições $p \rightarrow q$ e $\sim p \vee q$ possuem tabelas-verdade idênticas, vamos usar o teorema 3.2 para mostrar essa equivalência. Assim, devemos trocar o símbolo de equivalência ($\Leftrightarrow$) pelo símbolo da bicondicional ($\leftrightarrow$) e mostrarmos que a proposição $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$ é tautológica. Vejamos:

Tabela 3.19 – Tabela verdade da proposição $\mathbf{p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q}$

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$
V	V	F	V	V	**V**
V	F	F	F	F	**V**
F	V	V	V	V	**V**
F	F	V	V	V	**V**

Fonte: Autor

Perceba que a última coluna da tabela 3.19, encerra somente valores lógicos verdadeiros. Assim, a proposição $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$ é tautológica e, portanto, ocorre a equivalência. $\square$

Na Lógica Matemática, cada operador lógico tem uma equivalência associada, vejamos as principais equivalências lógicas.

Equivalência da Negação

A proposição p é equivalente à proposição $\sim\sim$ p, isto é, p $\Leftrightarrow\ \sim\sim$ p. Vejamos,

Tabela 3.20 – Tabela verdade da equivalência p $\Leftrightarrow\ \sim\sim$ p

p	$\sim$ p	$\sim\sim$ p
V	F	**V**
F	V	**F**

Fonte: Autor

Note que a primeira e a terceira coluna da tabela 3.20 apresentam os mesmos resultados. Logo, p $\Leftrightarrow\ \sim\sim$ p.

Observação: Chamamos $\sim\sim$ p de **negação dupla** ou **dupla negação**.

Exemplo 3.29. Determine uma proposição logicamente equivalente, a negação da proposição: João é médico.

Resolução: Seja a proposição p: João é médico. A negação de p é $\sim$ p: João não é médico, e a negação de João não é médico é equivalente a proposição $\sim\sim$ p: Não é verdade que João não é médico.

Portanto, uma proposição equivalente a negação da proposição João é médico é a proposição "não é verdade que João não é médico".

Equivalência da Disjunção

A proposição disjuntiva p $\vee$ q é equivalente a proposição $\sim$ p $\rightarrow$ q, isto é, p $\vee$ q $\Leftrightarrow\ \sim$ p $\rightarrow$ q. Vejamos.

Tabela 3.21 – Tabela verdade da equivalência p $\vee$ q $\Leftrightarrow\ \sim$ p $\rightarrow$ q

p	q	$\sim$ p	p $\vee$ q	$\sim$ p $\rightarrow$ q
V	V	F	**V**	**V**
V	F	F	**V**	**V**
F	V	V	**V**	**V**
F	F	V	**F**	**F**

Fonte: Autor

Note que a quarta e a quinta coluna da tabela 3.21 apresentam os mesmos resultados. Logo, p $\vee$ q $\Leftrightarrow\ \sim$ p $\rightarrow$ q.

Exemplo 3.30. Determine uma proposição equivalenta à proposição: $2+8=10$ ou $1+1=2$.

Resolução: Sejam as proposições p: $2+8=10$ e q: $1+1=2$. Logo, teremos a proposição disjuntiva $p \vee q$: $2+8=10$ ou $1+1=2$, que tem como proposição equivalente a proposição condicional $\sim p \to q$: Se $2+8 \neq 10$ então $1+1=2$.

Portanto, uma proposição equivalente à "$2+8=10$ ou $1+1=2$," é a proposição "Se $2+8 \neq 10$ então $1+1=2$."

Equivalência da Condicional

No caso da condicional $p \to q$, temos duas equivalências fundamentais:

- $p \to q$ é equivalente à proposição $\sim p \vee q$. Isto é, $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$.
- $p \to q$ é equivalente à proposição $\sim q \to \sim p$. Isto é, $p \to q \Leftrightarrow \sim q \to \sim p$. Esta equivalência também é conhecida por **contrapositiva.**

Na tabela 3.22, temos a quarta e a quinta coluna com resultados idênticos, o que mostra que ocorre $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$.

Tabela 3.22 – Tabela verdade da equivalência $\mathbf{p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q}$

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee q$
V	V	F	**V**	**V**
V	F	F	**F**	**F**
F	V	V	**V**	**V**
F	F	V	**V**	**V**

Fonte: Autor

Na tabela 3.23, temos a quinta e a sexta coluna com resultados idênticos, o que mostra que ocorre $p \to q \Leftrightarrow \sim q \to \sim p$.

Tabela 3.23 – Tabela verdade da equivalência $\mathbf{p \to q \Leftrightarrow \sim q \to \sim p}$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**
F	V	V	F	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**

Fonte: Autor

Exemplo 3.31. Determine uma proposição equivalente a proposição: se $3<5$, então $5^2=25$.

Resolução: Na linguagem simbólica temos a proposição $p \rightarrow q$: se $3 < 5$, então $5^2 = 25$, a qual tem duas equivalências:

- $\sim p \vee q$: $3 \geq 5$ ou $5^2 = 25$.
- $\sim q \rightarrow \sim p$: Se $5^2 \neq 25$, então $3 \geq 5$.

Assim, podemos afirmar que uma proposição equivalente à "Se $3 < 5$, então $5^2 = 25$", poderia ser, por exemplo, a proposição: $3 \geq 5$ ou $5^2 = 25$.

Equivalência da Bicondicional

A proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ é equivalente à proposição $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, isto é, $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Vejamos.

Tabela 3.24 – Tabela verdade da equivalência $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	**V**	V	V	**V**
V	F	**F**	F	V	**F**
F	V	**F**	V	F	**F**
F	F	**V**	V	V	**V**

Fonte: Autor

Observe que os resultados da terceira e da sexta coluna da tabela 3.24 são idênticos, o que comprova a equivalência: $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

3.10 NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

Ja vimos a negação de proposições simples, agora veremos a negação de proposições compostas. Negar uma proposição composta corresponde a encontrar como resultado uma valoração oposta da proposição original antes de ser negada.

Negação da Conjunção

A negação da conjunção $p \wedge q$ equivale à proposição $\sim p \vee \sim q$, ou seja:

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q.$$

Logo, para negarmos a estrutura $p \wedge q$, nega-se ambas as proposições e troca-se o símbolo $\wedge$ pelo símbol $\vee$.

Exemplo 3.32. Vamos negar a proposição: 5 é um número natural e $\frac{1}{2}$ é um número racional.

Resolução: Sejam as proposições:

p : 5 é um número natural.

q : $\frac{1}{2}$ é um número racional.

Devemos negar as proposições p e q e trocar o conectivo "e" pelo conectivo "ou". Logo, a negação da proposição "5 é um número natural e $\frac{1}{2}$ é um número racional" é:

5 não é um número natural ou $\frac{1}{2}$ não é um número racional.

Negação da Disjunção

A negação da disjunção $p \vee q$ equivale à proposição $\sim p \wedge \sim q$, ou seja:

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q.$$

Logo, para negarmos a estrutura $p \vee q$, nega-se ambas as proposições e troca-se o símbolo $\vee$ pelo símbol $\wedge$.

Exemplo 3.33. Vamos negar a proposição: Estudo ou trabalho.

Resolução: Sejam as proposições:

p : Estudo.

q : Trabalho.

Devemos negar as proposições p e q e trocar o conectivo "ou" pelo conectivo "e". Logo, a negação da proposição "estudo ou trabalho" é:

Não estudo e não trabalho.

Negação da Condicional

A negação da condicional $p \rightarrow q$ equivale à proposição $p \wedge \sim q$, ou seja:

$$\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q.$$

Logo, para negarmos a estrutura $p \rightarrow q$, mantemos o antecedente, negamos o consequente e trocamos o símbolo $\rightarrow$ pelo símbol $\wedge$.

Observação: Cuidado para não cometer o erro em dizer que a negação da condicional $p \rightarrow q$ é a proposição $\sim p \rightarrow \sim q$. A proposição $\sim p \rightarrow \sim q$, conforme vimos, é a contrária de $p \rightarrow q$ e não a sua negação.

Exemplo 3.34. Vamos negar a proposição: Se trabalho, então recebo dinheiro.

Resolução: Sejam as proposições:

p : Trabalho.

q : Recebo dinheiro.

Devemos manter a proposição p, negar a proposição q e trocar o conectivo "se,... então" pelo conectivo "e".

Logo, a negação da proposição "Se trabalho, então recebo dinheiro" é:

Trabalho e não recebo dinheiro.

Negação da Bicondicional

A negação da bicondicional $p \leftrightarrow q$ equivale à proposição $p \veebar q$, ou seja:

$$\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \veebar q.$$

Logo, para negarmos a estrutura $p \leftrightarrow q$, mantemos as proposições p e q , e trocamos o símbolo $\leftrightarrow$ pelo símbolo $\veebar$.

Exemplo 3.35. Vamos negar a proposição: x é par se, e somente se, $x+1$ é impar.

Resolução: Sejam as proposições:

p : x é par.

q : $x+1$ é impar.

Devemos manter as proposições p e q, e trocar o conectivo lógico "... se, e somente se, ..." pelo conectivo lógico "ou ... ou ...".

Logo, a negação da proposição " x é par se, e somente se, $x+1$ é impar " é:

Ou x é par ou $x+1$ é impar.

Negação da Disjunção exclusiva

A negação da disjunção exclusiva p $\veebar$ q equivale à proposição p $\leftrightarrow$ q, ou seja:

$$\sim (p \veebar q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow q.$$

Logo, para negarmos a estrutura p $\veebar$ q, mantemos as proposições p e q , e trocamos o símbolo $\veebar$ pelo símbolo $\leftrightarrow$.

Exemplo 3.36. Vamos negar a proposição: Ou $\sqrt{64}=8$ ou $1=1$.

Resolução: Sejam as proposições:

p : $\sqrt{64}=8$.

q : $1=1$.

Devemos manter as proposições p e q, e trocar o conectivo lógico "ou ... ou ..." pelo conectivo lógico "...se, e somente se, ...".

Logo, a negação da proposição " Ou $\sqrt{64}=8$ ou $1=1$ " é:

$\sqrt{64}=8$ se, e somente se, $1=1$.

4 ARGUMENTAÇÃO LÓGICA

Segundo Bergamim (2018), chamamos de **argumento** o conjunto de proposições quaisquer P_1, P_2, P_3, $\ldots$, P_n, $(n \geq 1)$, chamadas de **premissas** e que a partir dessas premissas podemos chegar a uma proposição Q chamada de **conclusão**.

Indicamos simbolicamente o argumento assim:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \vdash Q$$

Podemos ler o argumento, dizendo que P_1, P_2, P_3, $\ldots$, P_n, acarreta Q. Sendo que o símbolo $\vdash$,(lê-se acarreta) significa que a conclusão Q do argumento, decorre das premissas P_1, P_2, P_3, $\ldots$, P_n.

Podemos também indicar o argumento desta outra forma,

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline Q \end{array}$$

Os argumentos da Lógica Matemática podem ser **válidos** ou **inválidos.**

- **Argumentos válidos**: são aqueles que a conclusão Q é verdadeira, todas as vezes ques as premissas P_1, P_2, P_3, $\ldots$, P_n forem verdadeiras.
- **Argumentos inválidos**: são aqueles que as premissas P_1, P_2, P_3, $\ldots$, P_n são verdadeiras e a conclusão Q é falsa. Ou aqueles em que a conclusão Q não decorre das premissas P_1, P_2, P_3, $\ldots$, P_n, sendo neste caso denominados de **falácia** ou **sofisma.**

Um argumento que aparece com frequência na Lógica Matemática é o que Aristóteles chama de **silogismo,** o qual é composto por duas premissas e uma conclusão. Vejamos:

Todo homem é mortal.

Sócrates é homem.

Logo, Sócrates é mortal.

Note que no argumento temos duas premissas "Todo homem é mortal" e "Sócrates é homem " e a conclusão "Sócrates é mortal."

É importante ressaltar também que a palavra validade é diferente de verdade, quando falamos validade ou invalidade estamos se referindo a argumentos, e quando falamos em verdade ou não verdade estamos se referindo ao valor lógico das premissas. A validade ou invalidade dos argumentos depende, exclusivamente, da estrutura de como ele é construído e não do seu conteúdo.

Teorema 4.1. Um argumento $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots, \mathrm{P}_n \vdash \mathrm{Q}$ é válido se, e somente se, a condicional $\mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{P}_2 \wedge \mathrm{P}_3 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n \rightarrow \mathrm{Q}$ é tautológica.

Note que pelo teorema, para que a proposição composta $\mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{P}_2 \wedge \mathrm{P}_3 \wedge \ldots \wedge \mathrm{P}_n$ seja verdadeira (V), é necessário que cada proposição que integra a proposição composta seja verdadeira, ou seja, $\mathrm{V}(\mathrm{P}_1)=\mathrm{V}$, $\mathrm{V}(\mathrm{P}_2)=\mathrm{V}$, $\mathrm{V}(\mathrm{P}_3)=\mathrm{V}$, $\ldots$, $\mathrm{V}(\mathrm{P}_n)=\mathrm{V}$, pois o conectivo que liga essas proposições é uma conjunção, e ja sabemos que uma proposição composta conjuntiva é verdadeira quando as proposições que as integram também é verdadeira.

4.1 ARGUMENTOS VÁLIDOS FUNDAMENTAIS

Apresentaremos alguns argumentos válidos que aparecem com frequência na Lógica Matemática. Sejam as proposições P, Q e R, temos:

(I) **Adição Conjuntiva (AC)**

- i) $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \vdash \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$
- ii) $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \vdash \mathrm{Q} \wedge \mathrm{P}$

(II) **Adição Disjuntiva (AD)**

- i) $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \vdash \mathrm{P} \vee \mathrm{Q}$
- ii) $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \vdash \mathrm{Q} \vee \mathrm{P}$

(III) **Simplificação (SIMP)**

- i) $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \vdash \mathrm{P}$

ii) P, Q $\vdash$ Q

(IV) **Modus Ponens (MP)**

P $\rightarrow$ Q, P $\vdash$ Q

(V) **Modus Tollens (MT)**

P $\rightarrow$ Q, $\sim$ Q $\vdash$ $\sim$ P

(VI) **Silogismo Disjuntivo (SD)**

i) P $\vee$ Q, $\sim$ P $\vdash$ Q

ii) P $\vee$ Q, $\sim$ Q $\vdash$ P

(VII) **Silogismo Hipotético (SH)**

P $\rightarrow$ Q, Q $\rightarrow$ R $\vdash$ P $\rightarrow$ R

De acordo com Filho (2002), esses argumentos fundamentais são usados para fazer "**inferências**", ou seja, executar os passos de uma dedução ou demonstração, e por esta razão são denominados também de regras de inferência. Uma das maneiras de verificar a **validade** desses argumentos, é assumir que as premissas são verdadeiras e verificar se a conclusão também é verdadeira, caso isso não ocorra o argumento é **inválido**.

4.1.1 Regras de Inferência

É habitual escrevermos as regras de inferência colocando as premissas uma abaixo da outra, em seguida colocamos a conclusão separado das premissas por um traço horizontal.

(I) **Adição Conjuntiva (AC)**

$$\begin{array}{c} \text{P} \\ \text{Q} \\ \hline \text{P} \wedge \text{Q} \end{array}$$

Demonstração. Sejam as premissas P e Q verdadeiras, devemos mostrar que a conclusão P $\wedge$ Q também é verdadeira. Como V(P)= V e V(Q)= V, segue que V(P $\wedge$ Q) = V (primeira linha da tabela 3.4). $\square$

(II) **Adição Disjuntiva (AD)**

$$\frac{P}{P \vee Q}$$

Demonstração. Considere a premissa P verdadeira. Devemos mostrar que a conclusão $P \vee Q$ é verdadeira. Para a disjunção ser verdadeira é suficiente que pelo menos uma das proposições componentes seja verdadeira. Como $V(P) = V$, segue que $V(P \vee Q) = V$ (ver tabela 3.5). □

(III) **Simplificação (SIMP)**

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

Demonstração. Considere a premissa $P \wedge Q$ verdadeira. Devemos mostrar que a conclusão P é verdadeira. Como $V(P \wedge Q) = V$, tem-se que $V(P) = V$ e $V(Q) = V$ (conforme primeira linha da tabela 3.4). □

(IV) **Modus Ponens (MP)**

$$\frac{\begin{array}{c} P \to Q \\ P \end{array}}{Q}$$

Demonstração. Considere as premissas $P \to Q$ e P verdadeiras. Devemos mostrar que a conclusão Q também é verdadeira. Como $V(P \to Q) = V$ e $V(P) = V$, consequentemente $V(Q) = V$. Pois, caso contrário teríamos $V(P \to Q) = F$, o que seria uma contradição. (ver tabela 3.6) □

(V) **Modus Tollens (MT)**

$$\frac{\begin{array}{c} P \to Q \\ \sim Q \end{array}}{\sim P}$$

Demonstração. Considere as premissas $P \to Q$ e $\sim Q$ verdadeiras. Devemos mostrar que a conclusão $\sim P$ do argumento também é verdadeira. Como $V(\sim Q) = V$, então $V(Q) = F$. Como $V(P \to Q) = V$, tem-se que $V(P) = F$, pois para a condicional ser verdadeira, não podemos ter antecedente verdadeiro e consequente falso. Daí, segue que $V(\sim P) = V$. □

(VI) **Silogismo Disjuntivo (SD)**

$$\begin{array}{c} P \vee Q \\ \sim P \\ \hline Q \end{array}$$

Demonstração. Considere as premissas $P \vee Q$ e $\sim P$ verdadeiras. Devemos mostrar que a conclusão Q do argumento também é verdadeira. Como $V(\sim P) = V$, tem-se que $V(P) = F$ e como $V(P \vee Q) = V$, tem-se que $V(Q) = V$, pois para a disjunção ser verdadeira é necessário que pelo menos uma das proposições componentes seja verdadeira. □

(VII) **Silogismo Hipotético (SH)**

$$\begin{array}{c} P \to Q \\ Q \to R \\ \hline P \to R \end{array}$$

Demonstração. Considere as proposições $P \to Q$ e $Q \to R$ verdadeiras. Devemos mostrar que a conclusão $P \to R$ também é verdadeira. Vamos fazer essa demonstração mediante a tabela verdade.

Observando a tabela 4.1, vemos que a conclusão $P \to R$ é verdadeira todas às vezes que as premissas $P \to Q$ e $Q \to R$ também são. Logo, a regra do silogismo hipotético é de fato um argumento válido.

Tabela 4.1 – Tabela verdade do Silogismo Hipotético

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$P \to R$
V	V	V	**V**	**V**	**V**
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	**V**	**V**	**V**
F	V	F	V	F	V
F	F	V	**V**	**V**	**V**
F	F	F	**V**	**V**	**V**

Fonte: Autor

□

Observação: Cada regra de inferência também é um argumento válido. Se construirmos a tabela verdade de cada um deles, observaremos que em nenhuma linha da tabela vai ocorrer de termos premissas verdadeiras e conclusão falsa. A validade de um argumento depende exclusivamente de sua forma e não da verdade ou falsidade das proposições que o compõe. (FILHO, 2002)

Exemplo 4.1. Verifique se o argumento é válido ou inválido:

Se chove, Antônio fica gripado.
Antônio não ficou gripado.
Logo, não choveu.

Resolução: Vamos representar as proposições na linguagem simbólica. Seja as proposições p: Chove, q: Antônio ficou gripado. Note que a primeira premissa do argumento é uma condicional, a segunda premissa é a negação da proposição q e a conclusão "não choveu" corresponde a negação do antecedente da condicional, então teremos:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

O argumento é **válido**, pois tem a **forma** do argumento válido **Modus Tollens (MT).**

No processo de resolução admitimos as premissas verdadeiras e colocamos verdadeiro nas premissas mais simples, em seguida continuamos fazendo as inferências lógicas nas demais premissas até chegarmos na conclusão. No exemplo 4.1, podemos tomar primeiramente como verdade à proposição "Antônio não ficou gripado," assim, o consequente da condicional " Antônio fica gripado" é falso, o que torna obrigatório o antecedente "Chove" ser falso, pois como sabemos, condicional verdadeira não ocorre antecedente verdadeiro e consequente falso. Logo, à proposição "não choveu" é verdadeira que é nossa conclusão.

Exemplo 4.2. Verifique se o argumento é válido ou inválido:

Se 2 não é par, então 7 não é primo.
2 é par.
Logo, 7 é primo.

Resolução: Sejam as proposições p: 2 é par, e q: 7 é primo. Então o argumento na linguagem simbólica fica assim:

$$\begin{array}{c} \sim p \rightarrow \sim q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Sejam as proposições p e $\sim p \rightarrow \sim q$ verdadeiras. Como V(p) = V, tem-se V($\sim$ p) = F. Como o antecedente da condicional $\sim p \rightarrow \sim q$ é falso, então a condicional é verdadeira independentemente se o consequente $\sim q$ é verdadeiro ou falso. Sendo assim, não podemos concluir que q é verdadeiro, sendo portanto, o argumento inválido.

Outra maneira de mostrarmos que o argumento é inválido é mediante a tabela verdade, vejamos:

Tabela 4.2 – Tabela verdade do argumento $\sim p \rightarrow \sim q,\ p \vdash q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$
V	V	F	F	V
V	**F**	F	V	**V**
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Fonte: Autor

As premissas do argumento dado estão na primeira e quinta coluna da tabela 4.2, e a conclusão está na segunda coluna. Note que na segunda linha da tabela as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Portanto, o argumento é inválido.

Exemplo 4.3. (**ESPM/RS**) Se $y > 3$, então $x \neq 2$ e $x \neq 5$. Sabe-se que $x^2 - 7x + 10 = 0$. Podemos afirmar que um possível valor de $x + y$ é:

(a)10 (b)11 (c)9 (d)12 (e) 8

Resolução: Considere verdadeiras as premissas "Se $y > 3$, então $x \neq 2$ e $x \neq 5$" e "$x^2 - 7x + 10 = 0$." Devemos concluir quanto vale $x + y$.

Dado que $x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 5$.

Vamos representar em linguagem simbólica a proposição "Se $y > 3$, então $x \neq 2$ e $x \neq 5$."

Sejam as proposições:

p: $y > 3$.

q: $x \neq 2$ e $x \neq 5$.

p $\rightarrow$ q: Se $y > 3$, então $x \neq 2$ e $x \neq 5$.

Como de $x^2 - 7x + 10 = 0$, temos que $x = 2$ ou $x = 5$, segue que V(q) é falso, pois q é a negação de $x = 2$ ou $x = 5$.

Mas, para a condicional (p $\rightarrow$ q) ser verdadeira, devemos ter o antecedente $y > 3$ também falso. Consequentemente $y \leq 3$.

Portanto, $x = 2$ ou $x = 5$ e $y \leq 3$. Que resulta em duas possibilidades a serem concluídas sobre os possíveis valores de $x + y$. Vejamos:

- Para $x = 2$, temos que $x + y \leq 5$, pois, $y \leq 3$.
- Para $x = 5$, temos que $x + y \leq 8$, pois, $y \leq 3$.

Assim, um possível valor para $x + y$ é 8. O gabarito correto é a assertiva (e).

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo iremos apresentar algumas questões de concursos públicos e da OBMEP, com suas soluções. Como também questões de conteúdos do Ensino Médio que podem ser relacionados com conhecimentos dos assuntos pertinentes do cálculo proposicional. Tais questões foram retiradas de: (QCONCURSOS, 2024) e (OBMEP-IMPA, 2024).

Aplicação 1. (FUNDATEC - Prefeitura de Cruzaltense - Técnico em Enfermagem - 2024) Assinale a alternativa que contém uma proposição lógica.

(a) Estude mais.

(b) $x+5 \neq 7$.

(c) Rodrigo, não chore.

(d) $3+4=10$.

(e) Que dia sai o resultado?

Resolução: Observe que, segundo a definição de proposição, a única alternativa que obedece a todos os critérios é a sentença $3+4=10$. Pois, as frases dos itens (a), (c) e (e) são frases imperativa, imperativa e interrogativa, respectivamente, as quais não são consideradas proposições. Bem como, a expressão do item (b), que se trata de uma sentença aberta, por se tratar de uma frase subordinada a uma variável livre, a saber x. Logo, a assertiva correta é a (d).

Aplicação 2. (LJ Assessoria e Planejamento Administrativo Limita - 2024 - Prefeitura de Turilândia - MA - Agente Administrativo) Nas afirmações abaixo, coloque V para as afirmações verdadeiras e F para as afirmações falsas.

( ) Proposição é toda sentença exclamativa que pode ser classificada, unicamente, como verdadeira (V) ou falsa (F). Chama-se valor lógico de uma proposição a verdade se a proposição for verdadeira e a falsidade de se proposição for falsa.

( ) Princípio da não-contradição: uma proposição pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Por exemplo, dada uma proposição p ela é verdadeira e falsa e pode assume os dois estados ao mesmo tempo.

( ) Princípio do terceiro excluído: toda proposição pode ser verdadeira e falsa simultaneamente, isto é, verifica-se sempre estes casos e nunca um terceiro. Ou seja, neste sistema de raciocínio tem-se estabelecido somente dois “estados de verdade”, isto é, a “verdade” e a “não verdade” (“falsidade”).

( ) Princípio da identidade: tudo é idêntico a si mesmo. Por exemplo, a proposição p é igual à p (p = p), mesmo se existir p = q.

Assinale a alternativa que contém a sequência correta.

(a) F, V, F, V

(b) V, V, V, V

(c) V, F, F, V

(d) V, V, V, F

(e) F, F, F, V

Resolução. A primeira afirmação é falsa, pois uma proposição não é uma sentença exclamativa. Pelo contrário, sentenças exclamativas não são consideradas proposições.

A segunda afirmação também é falsa, pois o princípio da não-contradição afirma que: Uma proposição não pode ser valorada em verdadeira e falsa simultaneamente.

A terceira afirmação é falsa, pois o princípio do terceiro excluído afirma que: Uma proposição ou é valorada como verdadeira ou é valorada como falsa, não existindo uma terceira opção.

A quarta afirmação é verdadeira, pois o princípio da identidade afirma que: Uma proposição é idêntica a si mesma.

Portanto, a sequência correta é F, F, F e V. Dessa forma, a assertiva correta é a letra (e).

Aplicação 3. (IBFC - Prefeitura de Contagem - Técnico de Edificações - 2022) Se Paulo é marceneiro e Cristina não é professora, então Carlos não é biólogo. Assinale a alternativa a que apresenta, através dos símbolos lógicos, a frase anterior.

(a) $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r$

(b) $(p \land \sim q) \leftrightarrow \sim r$

(c) $(p \lor \sim q) \rightarrow \sim r$

(d) $(p \rightarrow \sim q) \land \sim r$

Resolução: Note que a frase trata-se de uma condicional (se ... então, ...) com antecedente conjuntivo. Sejam as proposições:

p: Paulo é marceneiro.

q: Cristina é professora.

r: Carlos é biólogo.

Perceba que na condicional, temos no antecedente conjuntivo a proposição p: Paulo é marceneiro e a proposição $\sim$ q: Cristina não é professora, ficando esse antecedente representado assim, "$p \land \sim q$." Já o consequente da condicional é a proposição $\sim$ r: Carlos não é biólogo. Logo, em símbolos lógicos representamos a frase "Se Paulo é marceneiro e Cristina não é professora, então Carlos não é biólogo" pela seguinte extrutura lógica $(p \land \sim q) \rightarrow \sim r$. Segue que a assertiva correta é a letra (a).

Aplicação 4. (Quadrix - 2024 - CRMV-CE - Agente Fiscal) Considerando-se que seja p a proposição "Se Carla é loira, então Scheila é morena", julgue o item.

Para que a proposição p seja verdadeira, é necessário que a proposição "Carla é loira" seja falsa.

◯ Certo

◯ Errado

Resolução. Como a proposição p trata-se de uma proposição condicional e pela definição da tabela verdade desse tipo de proposição, a saber: uma proposição condicional só apresenta valor lógico falso se o antecedente possui valor lógico verdadeiro e o consequente valor lógico falso e nos demais casos apresenta valor lógico verdadeiro. Dessa forma, a proposição "Carla é loira" não é obrigatória ser falsa, pois, pode ocorrer a situação de "Carla é loira" ser verdadeiro (V) e "Scheila é morena" ser verdadeiro também, tendo assim $V(p) = V$. Logo, o item está errado.

Aplicação 5. (CESPE / CEBRASPE - 2024 - INPI - Tecnologista em propriedade industrial) Ao comentar em uma rede social a respeito de informações veiculadas por um jornalista, certo internauta escreveu: "Ou o jornalista é muito mal informado ou age de má-fé. Em minha opinião, as duas coisas."

Com base no texto precedente e nos aspectos de lógica sentencial, julgue o item seguinte.

A **negação** da proposição "Ou o jornalista é muito mal informado ou age de má-fé" pode ser corretamente expressa por "O jornalista é muito mal informado se, e somente se, age de má-fé".

○ Certo

○ Errado

Resolução. Sejam as proposições:

p: O jornalista é muito mal informado.
q: O jornalista age de má-fé.

Veja que na proposição "Ou o jornalista é muito mal informado ou age de má-fé" trata-se de uma disjunção exclusiva, por causa, da presença do conectivo lógico "Ou. . . ou . . . ", cuja representação em símbolos seria $p \veebar q$, e como vimos, a negação da disjunção exclusiva é a bicondicional, ou seja, $\sim (p \veebar q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow q$. Logo, a negação da proposição em questão corresponde a "O jornalista é muito mal informado se, e somente se, age de má-fé". O que mostra que o item está certo.

Aplicação 6. (FAUEL - 2024 - Pref. de Cândido de Abreu - PR - Administrador) Assinale a alternativa **CORRETA** em relação à proposição $(\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow (q \wedge p)$.

(a) A proposição é uma tautologia.

(b) A proposição é uma contradição.

(c) A proposição é uma contingência.

(d) A proposição é simples.

Resolução. Vamos construir a tabela verdade da proposição $(\sim p \vee \sim q)\leftrightarrow(q \wedge p)$.

Tabela 5.1 – Tabela verdade da proposição $(\sim \mathbf{p} \vee \sim \mathbf{q}) \leftrightarrow (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p})$

p	q	$\sim$ p	$\sim$ q	$\sim$ p $\vee \sim$ q	q $\wedge$ p	$(\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

Fonte: Autor

Perceba que a última coluna da tabela verdade apresenta valores lógicos falsos sendo, portanto, uma contradição. Dessa forma, a alternativa correta é a letra (b).

Aplicação 7. Considere as proposições abaixo:

p : $\forall x \in \mathbb{Z}; 3x+1=5$.

q : $\exists x \in \mathbb{Z}; x^2-5x+6=0$.

r : Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos

Julque os itens como verdadeiros ou falsos.

(a) A negação da proposição p é: $\exists x \in \mathbb{Z}; 3x+1=5$.

(b) O valor lógico de $p \vee q$ é verdade.

(c) A negação de r é: a relação o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, vale para todo triângulo retângulo.

Resolução: (a) O item está errado, pois a negação do quantificador universal é feito assim: troca-se o cador universal pelo quantificador existencial e nega o verbo. Assim, a negação correta seria: $\exists x \in \mathbb{Z}; 3x+1 \neq 5$.

(b) O item está correto. Vejamos, $V(p)=F$, pois existe valores para os quais a igualdade não é satisfeita, como, por exemplo, $x=4$ e $V(q)=V$, pois resolvendo a equação do segundo grau encontramos valores que satisfaz a igualdade, a saber, $x=2$ ou $x=3$. Dessa forma, como temos uma disjunção em que pelo menos uma proposição componente é verdadeira, a saber $V(q)=V$, segue que $V(p \vee q)=V$.

(c) O item está errado. Veja que a proposição r trata do teorema de Pitágoras, e a sentença do item (c) “a relação o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, vale para todo triângulo retângulo,” disse a mesma coisa da proposição r, mas com palavras diferentes. Portanto, não trata-se da negação de r.

Aplicação 8. (OBMEP - 2018 - Olimpíada Brasileira de Matemática) Vovó Vera quis saber qual de suas cinco netinhas tinha feito um desenho na parede de sua sala. As netinhas fizeram as seguintes declarações:

- Emília: Não fui eu.
- Luísa: Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.
- Marília: Não foi a Rafaela nem a Vitória.
- Rafaela: Não foi a Luísa.
- Vitória: Luísa não está dizendo a verdade.

Se apenas uma das netinhas mentiu, quem fez o desenho?

(a) Emília

(b) Luísa

(c) Marília

(d) Rafaela

(e) Vitória

Resolução: Suponha que quem desenhou na parede foi Emília, então ela mentiu ao dizer “não fui eu,” como todas as outras devem falar a verdade, perceba que neste caso Vitória também mente ao falar que Luíza não fala a verdade. Logo, esse caso não pode ter ocorrido, assim, Emília não desenhou na parede.

Suponha que quem desenhou na parede foi Luísa, então ela mentiu e Rafaela também mentiu. Esse caso também não pode ter ocorrido, se não teríamos duas pessoas mentindo.

Suponha que quem desenhou na parede foi Marília, neste caso Emília não mente, Luísa também não mente, pois a fala dela é uma disjunção, em que uma das proposições componentes, a saber “quem desenhou foi Marília” é verdadeira. Portanto, a disjunção é verdadeira, Marília e Rafaela não mente, mas perceba que Vitória mente. Logo, este caso está de acordo com o enunciado.

Suponha que quem desenhou na parede foi Rafaela, então Marília e Vitória mentiram. Esse caso também não pode ter ocorrido.

Suponha que quem desenhou foi Vitória, então Luísa e Marília mentiram. Este caso também não deve ter acontecido.

Logo, quem desenhou na parede foi Marília, a assertiva correta é a letra (c)

Aplicação 9. (CESPE / CEBRASPE - 2024 - ITAIPU BINACIONAL - Profissional de Nível Técnico I - (ADAPTADA) Seja a proposição:

P: O adversário tentou desgastar o candidato, mas a artilharia contra ele não teve sucesso.

Assinale a opção que apresenta uma **negação** da proposição P.

(a) O adversário não tentou desgastar o candidato ou a artilharia contra ele teve sucesso.

(b) O adversário não tentou desgastar o candidato, mas a artilharia contra ele teve sucesso.

(c) Se a artilharia contra o candidato não teve sucesso, o adversário tentou desgastá-lo.

(d) Se o adversário não tentou desgastar o candidato, então a artilharia contra ele não teve sucesso.

(e) O adversário tentou não desgastar o candidato, mas a artilharia contra ele teve sucesso.

Resolução. Observe que a sentença não traz de forma usual um conectivo. Porém, conjunções adversativas são tratadas como uma conjunção. Assim, o mas pode ser entendido como uma conjunção. Portanto, o item aborda a negação do conectivo e, que é obdito negando a primeira e segunda proposição e trocando-se o e por ou. Dessa forma, a negação será: o adversário não tentou desgastar o candidato ou a artilharia contra ele teve sucesso. Logo, a assertiva é a letra (a).

Aplicação 10. (CPCON - 2023 - Prefeitura de Cabaceiras - PB - Auditor Fiscal de Tributos) Qual das alternativas tem uma proposição que é a **negação** de “se eu consumi bebidas alcoólicas, eu não vou dirigir”?

(a) Eu não consumi bebidas alcoólicas ou eu vou dirigir.

(b) Eu não consumi bebidas alcoólicas e eu vou dirigir.

(c) Eu consumi bebidas alcoólicas ou eu não vou dirigir.

(d) Eu consumi bebidas alcoólicas e eu vou dirigir.

(e) Eu consumi bebidas alcoólicas então eu vou dirigir

Resolução. Note que, a sentença abordada na questão é uma proposição condicional. E, para negar uma condicional, basta manter o antecedente negar o consequente e trocar o $\rightarrow$ por $\wedge$. Assim, a negação da sentença será: Eu consumi bebidas alcoólicas e eu vou dirigir. Dessa forma, a letra (d) é a correta.

Aplicação 11. (IDHTEC - 2024 - Câmara de Machados - PE - Vigilante) A afirmação **logicamente equivalente** a sentença "Se faço curso de inglês, então sei falar outro idioma" é

(a) Se falo outro idioma, então não faço curso de inglês.

(b) Falo outro idioma e não faço curso de inglês.

(c) Se não falo outro idioma, então faço curso de inglês.

(d) Se falo outro idioma, então faço curso de inglês.

(e) Se não falo outro idioma, então não faço curso de inglês.

Resolução. Observe que a questão trata-se da equivalência da condicional. Lembremos que tem duas formas de equivalância para esse tipo de conectivo:

1º.) Negar o antecendente, manter o consequente e trocar o $\rightarrow$ por $\vee$.

2º.) A contrapositiva, que consiste em negar o antencendente e consequente e troca-los de posição, mantendo o conectivo.

Assim, as possíveis equivalências para a sentença seria:

1º.) Não faço curso de inglês ou falo outro idioma.

2º.) Se não falo outro idioma, então não faço curso de inglês.

Observando as alternativas, concluímos que a letra correta é (e).

Aplicação 12. Na linguagem de conjuntos, a união entre dois conjuntos, A e B, é representada pela simbologia $A \cup B$, que é o conjunto formado pela junção dos elementos que pertencem ao conjunto A com os elementos que pertencem ao conjunto B, isto é:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Com isso, qual a negação de $A \cup B$?

Resolução. Note que, a união de dois conjuntos trata-se de um disjunção. E, para negar uma disjunção basta negar a primeira e a segunda proposição e trocar o $\vee$ por $\wedge$. Dessa forma,

$$\sim (A \cup B) = \{x | x \notin A \text{ e } x \notin B\}.$$

Aplicação 13. (CPCON - 2023 - Prefeitura de Cabaceiras - PB - Auditor Fiscal de Tributos) A respeito do estado civil de Sabrina, Serena, Sílvia e Sônia, sabe-se que:

- Sabrina é casada ou Serena é casada.
- Se Serena é casada, então Sílvia é solteira.
- Sílvia é casada se, e somente se, Sônia é solteira.

Se Sônia é solteira, é **CORRETO** afirmar que:

(a) Serena e Sílvia são casadas.

(b) Sabrina e Sílvia são casadas.

(c) Sabrina e Serena são casadas.

(d) Sílvia e Sônia são solteiras.

(e) Sabrina e Sônia são solteiras.

Resolução: Vamos nomear as proposições, a fim de que possamos facilitar a interpretação da valoração das proposições.

p: Sônia é solteira.

q: Sílvia é solteira.

r: Serena é casada.

s: Sabrina é casada.

Transformando as proposições compostas em linguagem simbólica. Mas, note que a negação de Sílvia ser solteria é Sílvia ser casada. Assim, temos:

- $s \vee r$
- $r \to q$
- $\sim$ q $\leftrightarrow$ p

Como $V(p) = V$ e $\sim$ q $\leftrightarrow$ p, temos que $V(\sim q \leftrightarrow p) = V(\sim q \leftrightarrow V) = V$, isso ocorre somente quando $V(\sim q) = V$, consequentemente $V(q) = F$.

Como $V(q) = F$ e $r \to q$, segue que $V(r \to q) = V(r \to F) = V$, ocorrendo esse caso quando $V(r) = F$.

Como $V(r) = F$ e $s \vee r$, tem-se que $V(s \vee r) = V(s \vee F) = V$, ocorrendo quando $V(s) = V$.

Dessa forma, Sílvia é casada, Serena é solteira e Sabrina é casada. Portanto, observando as alternativas, concluímos que o item correto é a letra (b).

Aplicação 14. (LJ Assessoria e Planejamento Administrativo Limita - 2024) Sejam p e q proposições simples. Qual a probabilidade da proposição k = p $\to$ q produzir um valor verdadeiro?

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{3}{4}$

(d) $\frac{2}{3}$

(e) $\frac{1}{3}$

Resolução: Veja que a proposição k é constituída por uma condicional, lembrando a valoração da tabela verdade desse tipo de proposição, ver tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Tabela verdade da Condicional

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Autor

Observamos que o número de elementos do espaço amostral é 4 (quantidade de V e F, presentes na terceira coluna da tabela 5.2), e do evento desejado é 3 (quantidade de V que aparece na terceira coluna da tabela 5.2). Portanto, a probabilidade, é $\frac{3}{4}$, ou seja, a assertiva correta é a letra (c).

Aplicação 15. (VUNESP - 2024 - TRF - 3ª REGIÃO - Analista Judiciário) Considere verdadeiras as seguintes afirmações:

I. Se o evento é hoje, então descansei ontem.

II. O evento não é hoje ou amanhã vou descansar.

III. Ou estudo hoje ou não descansarei amanhã.

IV. Não descansarei amanhã.

Uma **conclusão verdadeira** que se pode extrair das informações apresentadas é:

(a) O evento é hoje.

(b) Descansei ontem.

(c) Não estudo hoje.

(d) Não descansei hoje.

(e) Estudo hoje.

Resolução. Inicialmente, designaremos as proposições.

p: O evento é hoje.

q: Descansei ontem.

r: Amanhã vou descansar.

s: Estudo hoje.

Transformando as proposições compostas em linguagem simbólica. E perceba que a negação de amanhã vou descansar é não descansarei amanhã. Assim:

- $p \to q$
- $\sim p \vee r$
- $s \veebar \sim r$
- $\sim r$

Como $V(\sim r) = V$ e $V(s \veebar \sim r) = V$, segue que $V(s) = F$. (pois, para a disjunção exclusiva ser verdadeira devemos ter apenas uma proposição verdadeira em sua composição). Consequentemente $V(\sim s) = V$.

Como $V(\sim r) = V$, então $V(r) = F$. Como $V(\sim p \vee r) = V$ e $V(r) = F$, segue que $V(\sim p) = V$ (Silogismo disjuntivo), consequentemente $V(p) = F$.

Como $V(p) = F$ e $V(p \to q) = V$, segue que $V(q) = V$ ou $V(q) = F$.

Analisando as alternativas, concluímos que a alternativa correta é a letra (c), pois concluímos que a proposição "não estudo hoje" é verdadeira . Mas, vale destacar que a alternativa da letra (b) não pode ser a assertiva correta, pois o valor lógico de "descansei ontem" pode ser ou verdadeiro ou falso não tendo assim, uma confirmação exata do seu valor lógico.

Aplicação 16. Dadas as premissas abaixo, mostre que $x = 0$.

- Se $x \neq 0$, então $x = y$.
- Se $x = y$, então $x = z$.
- $x \neq z$.

Demonstração. Veja que temos um argumento com três premissas e queremos mostrar que a conclusão, $x = 0$ é verdadeira.

Sejam as proposições:

p: $x = 0$
q: $x = y$
r: $x = z$

Vamos representar em linguagem simbólica as proposições e verificar a validade do seguinte argumento:

$$\sim \text{p} \to \text{q},\ \text{q} \to \text{r},\ \sim \text{r} \vdash \text{p}$$

Devemos considerar as premissas verdadeiras e fazer inferências lógicas até chegarmos na conclusão. De fato, como $\sim$ r é verdadeira, então r é falsa, e como q $\to$ r é verdadeira, segue que q é falsa, e como $\sim$ p $\to$ q é verdadeira, segue que $\sim$ p é falso, consequentemente p é verdadeira, o que nos garante que o argumento é válido. Logo, $x = 0$ é verdadeiro. $\square$

Aplicação 17. Dada a equação $x^2 - 7x + 12 = 0$, podemos afirmar que suas raízes são:

(a) 2 ou 0

(b) 3 e 4

(c) -3 e 4

(d) 3 ou 4

(e) 1 ou 2

Resolução. Sejam $a = 1$, $b = -7$ e $c = 12$, os coeficientes da equação $x^2 - 7x + 12 = 0$, do segundo grau. Temos que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \Rightarrow x = \frac{7 \pm 1}{2}$$

Daí, segue que $x = \dfrac{7+1}{2} \Rightarrow x = 4$, ou $x = \dfrac{7-1}{2} \Rightarrow x = 3$.

É importante notarmos que x possui dois valores, mas não podemos dizer que $x = 3$ e $x = 4$, isso é uma contradição, pois x não pode ser 3 e 4 ao mesmo tempo. Portanto, devemos usar a disjunção e dizer que $x = 3$ ou $x = 4$, assim, a assertiva correta é a letra (d).

Aplicação 18. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=100x$ e classifique como verdadeiras ou falsas as afirmações, justificando sua resposta.

(a) Se $x=3$, então $y=300$.

(b) $y=500$ se, e somente se, $x=4$.

(c) Se $y=600$, então $x=6$.

(d) $y=1200$ se, e somente se, $x=12$.

Resolução. Veja que nesta questão as alternativas tratam de condicionais e bicondicionais.

(a) para $x=3$, temos $f(3)=100\cdot(3)=300\Rightarrow y=300$. É verdadeira a alternativa, partimos de um valor de x verdadeiro, pois faz parte do domínio da função f e concluímos que é verdade que $y=300$.

(b) Para $y=500$, temos $500=100x\Rightarrow x=5$. Veja que o valor do domínio de f que produz imagem $y=500$ é $x=5$, e não $x=4$, portanto, a alternativa é falsa.

(c) Para $y=600$, temos $600=100x\Rightarrow x=3$. É falsa a alternativa, pois partimos de um valor de y verdadeiro que faz parte da imagem da função f e concluímos que o domínio que produz essa imagem é $x=3$ e não $x=6$.

(d) Para $y=1200$, temos $1200=100x\Rightarrow x=12$. Veja que o valor do domínio de f que produz imagem $y=1200$ é de fato, $x=12$. Portanto, a alternativa é verdadeira.

Aplicação 19. Sabendo que são verdadeiras as afirmações, determine a lei de formação da função afim $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

(I) Se $x=0$ então $y=0$.

(II) Ou $f(9)=3$ ou $f(3)=-2$.

(III) $y=1$ se, e somente se $x=3$.

Resolução. Como a função afim é da forma $y=ax+b$, temos que substituir pares ordenados (x,y) na função, para encontrarmos o coeficiente angular **a** e o coeficiente linear **b**. Como a condicional em (I) é verdadeira, tomemos $x=0$ e $y=0$ verdadeiros, em outras palavras, $(0,0)$ pertence a função f.

Segue que

$$0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow 0 = 0 + b \Rightarrow b = 0.$$

Como a bicondicional é verdadeira em (III), tomemos $y = 1$ e $x = 3$, verdadeiros, ou seja, $(3,1)$ pertence a função f. Assim:

$$1 = a \cdot 3 + b \Rightarrow 1 = a \cdot 3 + 0 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}.$$

Daí, temos $y = ax + b \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x$

Vamos verificar se a afirmação (II) está de acordo com a lei de formação da função $y = \frac{1}{3}x$. Como em (II) temos uma disjunção exclusiva, então apenas uma das proposições componentes deve satisfazer a função $y = \frac{1}{3}x$. Vejamos,

- $f(9) = 3$, temos que $(9,3) \in f \Rightarrow 3 = \frac{1}{3} \cdot 9 \Rightarrow 3 = 3$ (verdadeiro).
- $f(3) = -2$, temos que $(3,-2) \in f \Rightarrow -2 = \frac{1}{3} \cdot 3 \Rightarrow -2 = 1$ (falso).

Note que apenas a proposição $f(9) = 3$ satisfaz a função. Logo, a lei de formação da função é $y = \frac{1}{3}x$.

Aplicação 20. Sendo $x \in \mathbb{Z}$, mostre que se x^2 é par, então x é par.

Demonstração. Temos uma condicional em que o antecedente é a proposição "x^2 é par" e o consequente é a proposição "x é par". Assumir que o antecedente seja verdadeiro e chegar no consequente dessa forma, não é tão simples, por isso, vamos provar uma proposição equivalente a esta condicional, que no caso é a **contrapositiva** , já que são equivalentes, para resolver a questão basta demonstrar a **contrapositiva**. Assim, vamos mostrar que se x é ímpar, então x^2 é ímpar. Vejamos.

Como x é ímpar, temos que $x = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Daí, temos que $x^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot (2k) \cdot (1) + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$.

Segue que $x^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1 \Rightarrow x^2 = 2m + 1$.

Logo, x^2 é ímpar. Desta forma mostramos que se x é ímpar, então x^2 é ímpar, consequentemente, também é verdade que se x^2 é par, então x é par. $\square$

Aplicação 21. (OBMEP - 1º Fase - Nível Médio) Admita que sejam válidas ambas as seguintes sentenças:

- Pinóquio sempre mente;
- Pinóquio diz: “Todos os meus chapéus são verdes”.

Podemos concluir dessas duas sentenças que:

(a) Pinóquio tem pelo menos um chapéu.

(b) Pinóquio tem apenas um chapéu verde.

(c) Pinóquio não tem chapéus.

(d) Pinóquio tem pelo menos um chapéu verde.

(e) Pinóquio não tem chapéus verdes.

Resolução. Como Pinóquio mente, então a frase “Todos os meus chapéus são verdes” é falsa, logo, a negação dessa frase é verdadeira. A negação da frase de Pinóquio é: Pelo menos um dos meus chapéus não é verde. Daí, concluímos que Pinóquio tem pelo menos um chapéu (que no caso não é verde). Assim, a assertiva correta é a letra (a).

Aplicação 22. (OBMEP - 1º Fase - Nível Médio) Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos: “De quem são os celulares que tocaram?”

Guto disse: “O meu não tocou”
Carlos disse: “O meu tocou”
Bernardo disse: “O de Guto não tocou”.

Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?

(a) O celular de Carlos tocou e o de Guto não tocou.

(b) Bernardo mentiu.

(c) Os celulares de Guto e Carlos não tocaram.

(d) Carlos mentiu.

(e) Guto falou a verdade.

Resolução. Veja que a questão informa que apenas uma pessoa falou a verdade e que dois celulares tocaram na sala.

Suponha o caso em que Guto falou a verdade, nesta situação, Bernardo também falou a verdade, o que é uma contradição, pois teríamos duas pessoas falando a verdade. Logo, Guto mentiu, com isso a negação da fala dele é verdadeira. Concluímos assim, que o celular de Guto tocou. Como o celular de Guto tocou, então a fala de Bernardo é falsa, assim, constatamos que Bernardo também mentiu, e como apenas uma pessoa fala a verdade, segue que Carlos falou a verdade e, portanto, o celular de Carlos tocou. Como já concluímos que os celulares de Guto e Carlos tocaram em sala, segue que o celular de Bernardo não tocou. Portanto, a alternativa que está de acordo com as conclusões encontradas é a assertiva da letra (b).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O raciocínio lógico pode auxiliar, como percebemos no decorrer deste trabalho, na interpretação correta das informações, ele não se restringe apenas à área da Matemática, está presente também no nosso dia-a-dia, nas outras áreas do conhecimento, como por exemplo, na língua Portuguesa podemos pensar de forma lógica na estrutura e argumentação de um texto, na área de Filosofia ele aparece ao tentarmos expor um discurso afastando-se das falácias.

Assim, conhecer a Lógica Matemática, ajuda o indivíduo a desenvolver sua capacidade intelectual, a ser reflexivo, tornando-o cidadão crítico. Tratar da Lógica Matemática no ambiente do Ensino Médio, auxilia os estudantes na assimilação e compreensão dos conceitos elementares da Matemática, preparando-os para resolver problemas mais complexos, entender demonstrações matemáticas, diminuindo assim, muitas das dificuldades que muitos discentes possuem.

Porém, apesar de alguns documentos oficiais da educação brasileira sinalizar expressamente a importância da escola dar condições para que o estudante desenvolva a Lógica Matemática, os livros didáticos do Ensino Médio não tratam destes conteúdos de forma consolidada (ANDRADE, 2021), gerando assim, dificuldades nos estudantes para obterem uma aprendizagem significativa, principalmente na área de Matemática.

Neste trabalho foi abordado uma parte teórica da Lógica Matemática, desde o conceito de proposição até chegarmos em estruturas mais complexas, os argumentos lógicos, procurando relacionar as estruturas lógicas com a Matemática, para que se compreenda a Matemática de maneira mais abrangente, e finalizamos com aplicações da teoria apresentada na resolução de várias questões.

Enfatizamos ainda que este trabalho contempla uma grande parte da teoria da Lógica Matemática, a qual dá suporte para resolver inúmeras questões de Matemática. Entretanto, existem outros conteúdos da Lógica Matemática que não foram contemplados de forma profunda, como por exemplo a lógica da teoria dos conjuntos que faz uso dos diagramas, dessa forma deixamos aqui uma sugestão para trabalhos futuros.

Por fim, esperamos que este trabalho possa auxiliar aqueles, principalmente professores, alunos e concurseiros, que desejam aprofundar ou iniciar os estudos acerca dos assuntos pertinentes a Lógica Matemática.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. T. d. **Uma abordagem ao raciocínio lógico no contexto dos concursos públicos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2021.

BERGAMIM, E. G. J. **Logica Matemática: Uma proposta de atividades para educação básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2018.

BIANCHI, C. **A lógica no desenvolvimento da competência argumentativa**. Dissertação (Tese de Doutorado) — Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2007.

BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; FILHO, O. M. S. **Introdução à Lógica Matemática**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

BRASIL. Ministério da educação. secretaria de educação básica. **ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO**, v. 02 Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 02 mar 2024.

BUTIERRES, G. C. **Uma proposta para a introdução da lógica nas aulas de matemática**. Dissertação (Mestrado), 2016. Disponível em: <https://repositorio.furg.br/handle/1/8793>. Acesso em: 13 Maio 2023.

DIAS, C. M. C. Escorço histórico da lógica matemática. **Revista Acadêmica: ciências agrárias e ambientais**, Curitiba, 1994. Disponível em: <https://riut.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/423/1/REV.%20ACAD._Dias%2C%20Carlos%20Magno%20Corr%C3%AAa_1994.pdf>. Acesso em: 12 nov 2023.

D'OTTAVIANO, I.; FEITOSA, H. d. A. Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. 2003. **V Seminário Nacional de História da Matemática**, Rio claro, p. 1–34, 2009. Disponível em: <https://www.academia.edu/34054983/Sobre_a_hist%C3%B3ria_da_l%C3%B3gica_a_l%C3%B3gica_cl%C3%A1ssica_e_o_surgimento_das_l%C3%B3gicas_n%C3%A3o_cl%C3%A1ssicas_1>. Acesso em: 20 ago 2023.

FILHO, D. C. de M. Um convite à matemática. **Coleção Professor de Matemática. 2a ed. Rio de Janeiro: SBM**, 2013.

FILHO, E. de A. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: NBL Editora, 2002.

FRANZON, C. R. P. A característica universal de leibniz: contextos, trajetórias e implicações. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2015. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/55a33f2d-53ec-4d92-98d8-85f2bd5a376f/content>. Acesso em: 18 mar 2024.

FREGE, G. **Wikipédia, a enciclopédia livre.** 2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottlob_Frege>. Acesso em: 18 mar 2024.

GOMES, E. B. **PROPOSTA DE ABORDAGEM DO ENSINO DO RACIOCÍNIO LÓGICO NO ENSINO MÉDIO**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2015.

KIPPER, D.; OLIVEIRA, C. J. de; GOMES, L. B. Competências matemáticas na bncc: implicações curriculares. **Práxis Educacional**, v. 15, n. 34, p. 53–74, 2019.

MENEZES, P. **toda matéria**. 2024. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/aristoteles/>. Acesso em: 18 mar 2024.

MORTARI, C. A. **Introdução à lógica**. São Paulo: Unesp, 2001.

NASCIMENTO, J. A. D. **Explorando a Lógica Matemática no Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/21925/1/JeffersonAlexandreDoNascimento_DISSERT.pdf>. Acesso em: 02 jan 2024.

NICOLETE, P. C.; BILESSIMO, S. M. S.; CRISTIANO, M. A. da S.; SIMÃO, J. P. S.; SILVA, J. B. da. Technology integration actions in mathematics teaching in brazilian basic education: stimulating stem disciplines. **Revista de Educación a Distancia (RED)**, n. 52, 2017. Disponível em: <https://www.um.es/ead/red/52/nicolete_et_al.pdf>. Acesso em: 15 out 2023.

NOÉ, M. **Raciocínio Lógico**. 2024. Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/raciocinio-logico.htm>. Acesso em: 12 fev 2024.

OBMEP-IMPA. **19ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS**. 2024. Disponível em: <https://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: jan 2024.

PEANO, G. **Wikipédia, a enciclopédia livre.** 2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano>. Acesso em: 18 mar 2024.

PONTE, J. P. Promover o raciocínio matemático a partir do trabalho na sala de aula. FESPM, 2017. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/21330/1/Ponte2017Promover.pdf>. Acesso em: 15 mar 2023.

QCONCURSOS. **Raciocínio Lógico**. 2024. Disponível em: <https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/disciplinas/matematica-raciocinio-logico/raciocinio-matematico/questoes>. Acesso em: 20 Jan 2024.

RUSSELL, B. **Introdução à filosofia matemática**. Centro de Estudos de História e Filosofia da Ciência da Universidade de Évora: London, 2006.

RUSSELL, B. **Wikipédia, a enciclopédia livre.** 2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell>. Acesso em: 18 mar 2024.

SANTOS, J. A.; FRANÇA, K. V.; SANTOS, L. S. B. d. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática**. 41 f. Monografia (Monografia) — Centro Universitário Adventista de São Paulo Campus São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Santos.pdf>. Acesso em: 20 abr 2023.

SCOLARI, A. T.; BERNARDI, G.; CORDENONSI, A. Z. O desenvolvimento do raciocínio lógico através de objetos de aprendizagem. **RENOTE**, v. 5, n. 2, 2007. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/14253/8169>. Acesso em: 10 jul 2023.

TREBIEN, H. A. C. **Velip**. 2024. Disponível em: <https://velip.com.br/george-boole-e-sua-importancia-para-a-inteligencia-artificial-e-a-programacao/>. Acesso em: 18 mar 2024.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras - Código INEP: 25008978
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

TCC versão final

Assunto:	TCC versão final
Assinado por:	Francisco Morais
Tipo do Documento:	Projeto
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples