INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

FELIPE BEZERRA DA SILVA

O ENSINO DA PROBABILIDADE DESENVOLVIDO A PARTIR DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELABORADA COM ENFOQUE NO ESTUDO DOS JOGOS DE AZAR

CAJAZEIRAS
2024

FELIPE BEZERRA DA SILVA

O ENSINO DA PROBABILIDADE DESENVOLVIDO A PARTIR DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELABORADA COM ENFOQUE NO ESTUDO DOS JOGOS DE AZAR

Monografia apresentada junto ao **Curso de Especialização em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito parcial à obtenção do título de **Especialista em Matemática**.

Orientador:
Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda.

Coorientadora:
Profa. Ma. Kissia Carvalho

Cajazeiras
2024

FELIPE BEZERRA DA SILVA

O ENSINO DA PROBABILIDADE DESENVOLVIDO A PARTIR DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELABORADA COM ENFOQUE NO ESTUDO DOS JOGOS DE AZAR

Monografia apresentada junto ao **Curso de Especialização em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito parcial à obtenção do título de **Especialista em Matemática**.

Data de aprovação: 22/02/2024

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br GERALDO HERBETET DE LACERDA
Data: 07/03/2024 23:12:23-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
gov.br KISSIA CARVALHO
Data: 08/03/2024 16:53:59-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Ma. Kissia Carvalho
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
gov.br RODINEY MARCELO BRAGA DOS SANTOS
Data: 08/03/2024 00:00:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Rodiney Marcelo Braga dos Santos
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Maria Beatriz Marim de Moura

Profa. Ma. Maria Beatriz Marim de Moura
Mittuniversetet - MIUN

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S586e Silva, Felipe Bezerra da.
O ensino da probabilidade desenvolvido a partir de uma sequência didática elaborada com enfoque no estudo dos jogos de azar / Felipe Bezerra da Silva.– 2024.

76f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2024.

Orientador(a): Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda.
Coorientador(a): Prof. Me. Kissia Carvalho.

1. Ensino de matemática. 2. Probabilidade. 3. Didática - Matemática. 4. Jogos de azar. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ CDU: 514(043.2)

Dedico este trabalho a minha família, amigos e professores, em particular, aos meus orientadores.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, pois é Ele quem me guia e em nome d'Ele que realizo mais essa conquista.

Agradeço também aos meus pais, José Welliton Galdino da Silva e Felismina Bezerra da Silva, e a minha irmã, Sabrina Bezerra da Silva, por todo apoio, carinho e atenção ao longo de toda a minha vida, inclusive na graduação e especialização.

Agradeço aos meus colegas de curso, Francisco Danilo Oliveira de Morais, Maria Micaely Juvêncio Pereira, Nilmara Farias de Araújo e Walison Arruda Ferreira por todos os momentos de alegrias e desafios compartilhados.

Em especial, agradeço ao professor Geraldo Herbetet de Lacerda, bem como à professora Kissia Carvalho, responsáveis por orientar, com excepcionalidade, a produção deste trabalho.

Agradeço também ao professor Rodiney Marcelo Braga dos Santos e à professora Maria Beatriz Marim de Moura por prontamente se dispuserem a participar da banca examinadora. Por fim, sou grato os demais professores e funcionários que tornaram possível a realização deste sonho.

"A verdadeira felicidade pode ser encontrada somente em Deus, todos os outros prazeres nada mais são do que uma máscara vazia e são capazes de produzir apenas uma satisfação momentânea".

Leonhard Euler

RESUMO

Com suas raízes atreladas ao estudo dos jogos de azar, a probabilidade, hoje, constitui um dos mais impressionantes ramos da Matemática. Todavia, uma série de descasos em relação ao processo de ensino e aprendizagem desta unidade temática na Educação Básica tem se revelado, portanto, expondo um preocupante impasse que deve ser revisto. Pensando nisso, este trabalho propõe-se, a partir de uma análise histórica sobre o advento da probabilidade, retomar a análise dos objetos que levaram ao seu desenvolvimento — os jogos de azar —, por conseguinte, buscar soluções para o seguinte questionamento: "O ensino da probabilidade desenvolvido a partir de uma sequência didática elaborada com enfoque no estudo dos jogos de azar pode contribuir com o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo nas turmas do 2º ano do Ensino Médio?". Destarte, para esse propósito, traçamos o objetivo de propor uma situação de ensino de probabilidade para o 2° ano do Ensino Médio usando como recurso didático os jogos de azar. Consequentemente, para alcançá-lo, apostamos em uma pesquisa de natureza aplicada, do ponto de vista dos objetivos, exploratória, de caráter qualitativo e bibliográfica. Que, por sua vez, nos provaram que, sim, é possível que o ensino da probabilidade como problematizado de acordo com as condições acima corroboram com o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo. Já que, para além do dinamismo e diversão impulsionados pelos jogos, essa reaproximação desses recursos e a probabilidade concedem aos alunos oportunidades de aprendizagens mais significativas e ativas as quais, aliadas aos benefícios dos planejamentos das sequências didáticas, nos permitem obter resultados mais sólidos e consistentes. Divergindo, assim, das aulas mecânicas, descontextualizadas e centradas na figura do professor que ainda é amplamente empregada na maioria das escolas.

Palavras-chave: Probabilidade; Jogos de azar; História da Matemática; Sequências didáticas.

ABSTRACT

Probability has its origins in games of chance, today constitutes the most impressive branches of Mathematics. However, a series of neglect in relation to the teaching and learning process of this thematic unit in Basic Education has been revealed, therefore, exposing a worrying impasse that must be reviewed. With this in mind, this work proposes, based on a historical analysis of the advent of probability, to resume the analysis of the objects that led to its development — games of chance —, therefore, to seek solutions to the following question: "What Can the teaching of probability developed from a didactic sequence designed with a focus on the study of games of chance contribute to the teaching and learning process of this content in 2nd year high school classes?". Therefore, for this purpose, we set out the objective of proposing a probability teaching situation for the 2nd year of high school using games of chance as a teaching resource. Consequently, to achieve this, we bet on research of an applied nature, from the point of view of objectives, exploratory, qualitative, and of a bibliography nature. Which, in turn, proved to us that, yes, it is possible that the teaching of probability as problematized according to the conditions above corroborates the teaching and learning process of this content. Since, in addition to the dynamism and fun driven by games, this rapprochement of these resources and probability gives students more meaningful and active learning opportunities which, combined with the benefits of planning didactic sequences, allow us to obtain more solid and consistent results. Thus, diverging from the mechanical classes, decontextualized, and centered on the figure of the teacher, which are still widely used in most schools.

Keywords: Probability; Gambling; History of Mathematics; Sequences didactics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Probabilidade é um ramo muito importante da Matemática. Responsável por estudar os experimentos aleatórios, seu desenvolvimento ao longo da história tem contribuído em vários aspectos, não só para a Matemática, mas também para várias outras ciências.

Em consequência disso, uma série de documentos que orientam a educação nacional, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), e normativos, como a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), exigem o desenvolvimento de habilidades relacionadas a esse conteúdo na Educação Básica. Visto que, como explicita o primeiro documento citado, a maioria dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e fazer os alunos reconhecerem isso é uma preocupação eminente, sendo, portanto, a principal finalidade da exploração desse conteúdo nesse nível da educação escolar.

Entretanto, uma série de descasos corroboram para uma maior preocupação quanto ao processo de ensino e aprendizagem desse tema no Ensino Médio. E a principal delas é a negligência de um número significativo de professores que, alegando despreparo na formação inicial, se intimidam, por conseguinte, deixam de lecionar esse conteúdo ainda no Ensino Fundamental (SANTANA, 2011). Sobrecarregando, assim, os professores do Ensino Médio, os quais têm a obrigação de instruir, desde o básico, seus alunos no que tange o processo de ensino e aprendizagem da probabilidade.

Por intermédio disso, e levando em consideração o fato de que a maioria dos alunos têm muito pouco interesse e extrema dificuldade quanto a efetivação de uma aprendizagem significativa da probabilidade (NUNES *et al.*, 2015), a qual apresenta “conceitos complexos que se baseiam em formas elaboradas de pensamento analítico e hipotético-dedutivo” (BORBA *et al.*, 2018, p. 2). Decidimos revisar a grandiosa história da matemática, o que nos estimulou a retomar a uma prática indispensável para o desenvolvimento da Teoria da Probabilidade que conhecemos hoje: o estudo de jogos de azar.

Em virtude disso, e nos aliando aos vários benefícios da execução de um planejamento didático elaborado à luz das sequências didáticas, propomo-nos a investigar a seguinte indagação: O ensino da probabilidade desenvolvido a partir de uma sequência didática elaborada com enfoque no estudo dos jogos de azar pode contribuir com o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo nas turmas do 2º ano do Ensino Médio?

Por conseguinte, para alcançar essa finalidade, traçamos o seguinte objetivo geral:

propor uma situação de ensino de probabilidade para o 2° ano do Ensino Médio usando como recurso didático os jogos de azar. E seus objetivos auxiliares (específicos), que foram três. O primeiro deles limita-se a discutir a história da probabilidade, tendo em vista que esse é o fator motivante de toda essa pesquisa.

Em seguida, destacamos, para o nosso próximo objetivo, a necessidade de analisar as sequências didáticas e os jogos como recurso didático no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, em razão desse estudo nos nortear sobre a atual literatura desses elementos. Por fim, nossa última finalidade consiste em estabelecer uma relação entre sequência didática, o ensino da probabilidade e o estudo dos jogos de azar. Que, alcançado os dois objetivos auxiliares anteriores, nos oportunizar alcançar o nosso propósito final.

Isso posto, acreditamos que sim, é possível que uma sequência didática, ou melhor, um produto didático [1] elaborado de modo a compreender toda a Teoria da Probabilidade no Ensino Médio possa, aliada a análise dos jogos de azar, fomentar em vários aspectos o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo. Sejam pelo dinamismo e estímulos proporcionado pelos jogos, pela aproximação entre a História da Matemática e a matemática escolar possibilitada por meio dessa abordagem, ou, ainda, pela eficiência das sequências didáticas frente a outras estratégias de planejamentos burocráticos e vazias de propósitos e intencionalidades.

Todavia, para verificar nossa hipótese e conceber a este trabalho legitimidade científica, adotamos uma pesquisa que caracterizamos, conforme Prodanov e Freitas (2013), como básica, haja vista que o seu propósito é gerar novos conhecimentos para aplicação prática. Além disso, enfatizamos que a mesma possui um caráter qualitativo, uma vez que suas informações e resultados não podem ser mensurados numericamente. Do ponto de vista dos objetivos, destacamos que ela é exploratória, mediante seu objetivo de realizar um aprofundamento dos fenômenos a que se busca investigar (ZANELLA, 2011).

No mais, ainda quanto a tipificação da pesquisa, temos que ela se enquadra como uma pesquisa bibliográfica, em função de utilizar das informações disponíveis em livros e nas tecnologias digitais de informação e comunicação para determinar resultados mais consistentes (PRODANOV; FREITAS, 2013) concedendo-lhe, portanto, respaldo e reconhecimento técnico-científico.

Por fim, destacamos que este trabalho será divido em três capítulos. Cada qual desenvolvido de modo a colaborar com a consecução dos objetivos específicos e, principalmente, do objetivo geral. Sendo assim, o primeiro capítulo engloba uma síntese da história da probabilidade, na qual apontamos algumas figuras pertinentes à evolução da Teoria da

[1] Nomenclatura que se dá ao planejamento elaborado a partir do ideal das sequências didáticas.

Probabilidade.

Em seguida, conduzimos uma apresentação dos conceitos de probabilidade, tomando como referências alguns livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio. E, finalmente, no terceiro capítulo, realizamos uma breve discussão sobre as sequências didáticas e jogos no processo de ensino e aprendizagem. Junção de conhecimentos esses que, mais tarde, nos Resultados, resultará na situação de ensino probabilística desejada.

1 HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

Neste capítulo será apresentado um breve apanhado que versa sobre a origem da probabilidade. Nele abordaremos não só os motivos catalisadores que levaram ao seu advento (a análise dos jogos de azar), mas também uma série de eventos envolvendo nomes importantes da Matemática e suas contribuições, que a fizeram evoluir, desde a Pré-História até a Idade Contemporânea, beneficiando-nos com a Teoria da Probabilidade que empregamos na atualidade.

1.1 PROBABILIDADE: A ORIGEM

A História sempre será um fator intrigante para a humanidade. A curiosidade de saber os motivos que levaram a origem de determinados acontecimentos, objetos, descobertas científicas, teorias, dentre outras coisas, nos leva constantemente a um estado de inquietação. Sendo assim, nada mais apropriado do que começarmos a desbravar esse trabalho investigando ela — a história por trás da origem da probabilidade.

Dessa forma, para alcançar esse fim, dividiremos esse estudo em dois momentos. O primeiro compreendendo o intervalo entre a Pré-História até a Idade Média, em virtude de, nesse espaço de tempo, a probabilidade ter apresentado singelos avanços. E, quanto ao segundo momento, enfatizaremos a Idade Moderna e Contemporânea, época essa que, diferente da anterior, desenvolveu-se toda a base sólida do que conhecemos hoje como a Teoria da Probabilidade. Vejamos-nos seus detalhamentos a seguir.

1.1.1 Pré-História, Antiguidade e Idade Média

Com suas raízes entranhadas na ideia do acaso, eventualidade, imprevisibilidade, incerteza, dentre outros sinônimos, começamos a nossa exploração ainda na Pré-História, período no qual, segundo David (1962, apud SILVA, 2020), surgiu um dos materiais mais utilizados no desenvolvimento do conceito de probabilidade e que nos acompanhará durante algum tempo nessa jornada: o dado, ou, pelo menos, o seu protótipo inicial, os astrágalos.

Osso do calcanhar dos membros posteriores de animais como cervos, ovelhas, vacas, cavalos e antílopes, os astrágalos, conhecidos também por tálus, compõem os primeiros vestígios materiais que remetem-se a ideia do acaso, sendo considerado um dado primitivo (também um hexaedro, porém, com apenas 4 faces anatomicamente utilizáveis para servir de apoio em relação a face oposta) e um dos primeiros jogos de azar[1]. Vejamos sua

[1] Os jogos de azar, presentes na história da humanidade desde a Pré-História, são jogos cujos resultados dependem exclusivamente do acaso. Os exemplos mais comuns desses recursos são os jogos que envolvem

ilustração na Figura 1.1.

Figura 1.1 – Astrágalo (tálus).

Fonte: Silva (2020).

Todavia, o surgimento dos astrágalos não desencadearam o desenvolvimento de toda a Teoria da Probabilidade, pelo contrário, muito há o que se desenrolar até que, de fato, a ideia do acaso fosse reconhecida como um fenômeno aleatório destituído de significados atribuídos a divindades e fenômenos sobrenaturais.

Uma exemplificação dessa longa tradição data da Antiguidade, na Antiga Grécia (mas que também se propagava na Antiga Roma), uma vez que, para além de apostas, como descreve Mlodinow (2009, p. 36):

> Os gregos também utilizavam astrágalos ao consultarem seus oráculos. As respostas que obtinham eram tidas como as palavras dos deuses. Muitas escolhas importantes, feitas por gregos proeminentes, se baseavam nesses conselhos, como descrito nos relatos do historiador Heródoto e de escritores como Homero, Ésquilo e Sófocles. Porém, apesar da importância do jogo de astrágalos tanto nas apostas como na religião, os gregos não fizeram nenhum esforço por entender as regularidades desse jogo.

Outrossim, uma pequena fagulha, na Antiga Roma, começa a revolucionar esse cenário de significados divinos, apesar de tímida: Cícero. Contestando a ação divina nos resultados obtidos nos jogos dos astrágalos praticados tanto pelos romanos quanto pelos gregos — que consistiam no lançamento de quatro desses dados primitivos[2] — acreditava que os resultados poderiam ser antecipados e previstos.

o lançamento de dados ou moedas não viciadas, em razão do seu lançador não poder manipulá-los de forma a garantir, com absoluta certeza, que obterá o resultado almejado.

[2] Segundo Viali (2008), no jogo de astrágalos os dados primitivos eram numerados conforme a seguinte descrição: as faces maiores recebiam os números 3 e 4, e as menores, 1 e 6. Além disso, o melhor e o pior resultado recebiam uma designação especial, respectivamente, jogada de Vênus e os cães. A jogada de Vênus consistia em obter as quatro faces distintas, quanto a os cães, obter quatro uns.

Entretanto, no fim, o maior legado de Cícero com relação a probabilidade foi a sua atual terminologia, que decorre do termo *probabilis*, usado por ele ao retratar da sua insatisfação relativa a interpretação dos resultados da época. (MLODINOW, 2009).

Em decorrência disso tudo, os primeiros estudos e registros históricos que mostravam os primeiros passos para a formalização de um dos conceito de probabilidade remetem-se ao período posterior a Antiguidade, na Idade Média, época essa na qual se inicia uma listagem dos possíveis resultados dos jogos de azar (nesse momento, mais vastos e modernos do que os pré-históricos astrágalo). Sendo um dos mais antigos, o trabalho do bispo belga Wibold, que, por volta do ano de 960, analisou o seu próprio jogo (jogo de dados morais [3]), e determinou 56 possibilidades, as quais atribuiu virtudes católicas (VIALI, 2008).

1.1.2 Idade Moderna e Contemporânea

Haja vista toda a trajetória aqui retratada, um dos acontecimentos que, de fato, marcou o início do estudo da probabilidade para além da mera listagem das possibilidades, desenvolve-se na Itália, na Idade Moderna, precisamente, entre os séculos XV e XVI.

Consolidando-se uma maior atenção aos fenômenos aleatórios concretos, os italianos, considerados pioneiros do cálculo probabilístico, deram um enorme passo, e assim, vislumbrados pelos jogos de azar, passaram a se questionar, formular problemas de comparação de frequências e ganhos envolvendo esses recursos, onde, por fim, tentavam resolvê-los (SILVA, 2020). Muitas das vezes, inclusive, para fins práticos, visando aumentar as suas chances frente à disputa nesses jogos.

Para fins de exemplificação desses problemas, destacamos o importantíssimo exemplo abordado no trabalho do italiano frei Luca Bartolomeo de Pacioli, *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proporcionalitá* (Resumo da Proporção e Proporcionalidade da Geometria Aritmética), publicado em latim na cidade de Veneza, em 1494, e que tornou o seu escritor uma das referências na história da probabilidade:

> Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da balla. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo tinha 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio? (EVES *et al.*, 2011, p. 365).

Conhecido como Problema dos Pontos, o problema acima é considerado "[...] a questão à qual está ligada a origem da ciência da probabilidade [...]" (EVES *et al.*,

[3] O jogo de dados moral inventado pelo bispo Wibold se resume no lançamento de três dados convencionais cujo o resultado se obtém dos números das faces superiores.

2011, p. 365). Entretanto, faz-se necessário acrescentar que o mesmo não foi solucionado corretamente pelo próprio Pacioli, sendo ele a primeira pessoa a tentar resolvê-lo (ZINDEL, 2018), pelo contrário, foi estudado por uma quantidade considerável de matemáticos até que chegassem a sua exata solução.

Contudo, a corrida pela verdadeira solução do Problema de Pontos, que inspirou ontros matemáticos, fez com que alguns outros nomes também se destacassem. Ainda nos limitando ao território italiano, temos o célebre Girolamo Cardano, embora sua honrosa menção não se deva exclusivamente à análise desse problema.

Viciado em dados, o que lhe impulsionou a escrever o livro *Liber de Ludo Aleae*[4] (O Livro dos Jogos de Azar), publicado em 1526, Cardano foi o primeiro a estudar o seu lançamento no campo da probabilidade (visando ampliar suas chances de ganhar nas suas jogatinas), bem como a publicar o primeiro trabalho da história relativo à teoria da aleatoriedade, que é exatamente esse material supracitado. Além disso, cabe enfatizar que:

> Não seria fora de propósito considerar Cardano como o pioneiro do cálculo de probabilidade, pois foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento e também a considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Ele, também, conhecia a idéia de eventos independentes e a regra da multiplicação entre eles (VIALI, 2008, p. 146-147).

Finalizando a nossa leva de italianos importantes para a história da probabilidade, temos o renomado físico, astrónomo e matemático Galileu Galilei. Influenciado por *Liber de Ludo Aleae*, e decidido a ajudar Ferdinando dei Medici, o grão-duque de Toscana — que, nessa época, desejava melhorar seus resultados nos jogos de azar envolvendo dados — fez o estudo desse material, às vezes, envolvendo o lançamento de mais deles, e como resultado, surgiu *Considerazione sopra il Giuco dei Dadi* (Considerações sobre o Jogo de Dados), escrito entre 1612 e 1623. (ZINDEL, 2018).

Esse trabalho, que, em linhas gerais, tratava essencialmente de probabilidade, abordando conclusões gerais sobre a frequência de diferentes combinações e tipos de resultados, foi outro passo igualmente notável para esse recém ramo da Matemática. Nele, Galilei se preocupava em analisar e propor soluções para questionamentos como esses: “porque quando são lançados três dados o número nove e o número 10 podem

[4] Faz-se importante mencionar que, segundo Mlodinow (2009), *Liber de Ludo Aleae* também tratava de jogos de cartas, gamão e astrágulos, mostrando assim um pouco da variedade dos jogos de azar para a época. Além disso, cabe frisar que, nessa obra, Cardano, apesar das inúmeras revisões da obra, cometeu alguns equívocos em alguns pontos. Porém, isso não rebaixou em nada a qualidade do seu trabalho, que é adjetivado como surpreendente e eficiente na literatura.

aparecer em seis combinações diferentes e a prática mostra que o número 10 aparece mais frequentemente do que o nove" (CALABRIA; CAVALARI, 2013, p. 9), que nutria a necessidade de uma análise mais criteriosa dos resultados.

Partindo agora para o território francês, no século XVII, duas figuras têm uma importância sem igual. Entretanto, antes de mencioná-las, temos que destacar a pessoa responsável por estabelecer uma ligação entre elas no que tange a história da probabilidade e sua maturação, Chevalier de Méré. Caracterizado por Eves *et al.* (2011) como um hábil e experiente jogador, tem sua menção aqui justamente por, na sua incapacidade de resolver o Problema dos Pontos (e outros problemas envolvendo dados), apresentá-lo a Blaise Pascal, que levou ao conhecimento de Pierre de Fermat.

Felizes por vivenciarem em um período em que não só o cálculo literal[5] foi introduzido (por volta de 1600, através de François Viète), mas também a álgebra desenvolvida por Descartes em *La Géometrie* (A Geometria), publicado em 1630, Pascal e Fermat, por meio de diversas correspondências datadas de 1654, foram as primeiras pessoas a resolver o Problema dos Pontos (apesar de encontrarem soluções distintas um do outro) se beneficiando das técnicas complexas e modernas de contagem (SILVEIRA, 2001).

Pascal, resolveu-o utilizando-se do triângulo aritmético (EVES *et al.*, 2011), que mais tarde ficou conhecido como triângulo de Pascal, por intermédio da sua obra *Traité du Triangle Arithmétique* (Tratado do Triângulo Aritmético), publicada em 1653. Quanto a Fermat, beneficiou-se das arcaicas técnicas de probabilidade e combinatória empregadas por Cardano, aperfeiçoando-as, e desse modo, resolveu os problemas propostos pelo próprio Chevalier de Méré de maneira similar aos métodos empregados na atualidade (SILVEIRA, 2001).

Além disso, é notório pontuar que Pascal e Fermat foram os primeiros responsáveis por resolver variações genéricas do Problema dos Pontos e outros problemas similares, como o destacado a seguir, porém, assim como os italianos, sem apresentar qualquer teorema.

> Dois jogadores com habilidades equivalentes apostam igualmente em um jogo que se encerra quando algum deles obtêm m pontos. Em determinado momento precisam interromper o jogo, um deles possuindo a pontos, e o outro com b pontos. Como deve ser repartido o valor apostado por eles? (NASCIMENTO *et al.*, 2017, p. 12).

Por fim, concluíndo a descrição da participação desses memoráveis franceses para o ramo probabilístico, destacamos que as "correspondências de Pascal e Fermat foram

[5] Utilização de letras para representar quantidades conhecidas ou desconhecidas.

publicadas em 1679, em Toulouse, sendo hoje consideradas a origem do desenvolvimento da teoria matemática da probabilidade" (GADELHA, 2004, p. 4).

Nos direcionando agora para o que Viali (2008) descreve como a "adolescência" da probabilidade, temos como ponto de partida o holandês Christiaan Huygens, que tomou ciência das correspondências de Pascal e Fermat, em 1655. Fator esse que acabou o empolgando para realizar seus próprios estudos sobre essa nova Matemática. Que teve como produto o seu livro *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (O Raciocínio Sobre o Jogo), concluído em 1657.

Reconhecida como a primeira obra impressa referente a probabilidade, *De Ratiociniis in Ludo Aleae* não só marcou o nome de seu autor, como também trouxe algumas outras contribuições para o ramo probabilístico da Matemática. Uma vez que, por meio dele, conforme Silva (2020, p. 29), Huygens "apresentou de forma sistemática as novas proposições trazidas pelos problemas discutidos por Pascal e Fermat, [...] e foi quem introduziu o conceito de esperança matemática", empregando, ainda, a mesma tendência de análise dos jogos de azar[6].

Seguindo essa teia de inspiração, do mesmo modo que Cardano inspirou Fermat por meio de *Liber de Ludo Aleae*, Huygens, por meio de *De Ratiociniis in Ludo Aleae* estimulou uma outra pessoa de incomparável importância, o suíço Jacob Bernoulli.

Simpatizando-se com os métodos aplicados por Fermat, combinatória, Bernoulli foi a pessoa responsável por iniciar o processo de sistematização da probabilidade, deixando um pouco de lado o seu enfoque puramente nos jogos de azar. Uma de suas maiores contribuições no que remete ao cálculo probabilístico encontram-se no seu livro *Ars Conjectandi* (Arte de Conjecturar), publicado em 1713, na qual apresenta um estudo minucioso de permutação e combinatória, além de contar com algumas resoluções dos problemas propostos pelo próprio Huygens (ARCEGO; BERLANDA, 2016).

Outrossim, cabe enfatizar que Bernoulli também foi a pessoa responsável por elaborar os primeiros teoremas remetentes à Teoria da Probabilidade, um deles é a Lei dos Grandes Números (SILVEIRA, 2001).

Encerrando-se a fase de "adolescência", temos como destaque a figura francesa de Pierre-Simon Laplace, que surge no período de transição da Idade Moderna para a Contemporânea, sendo considerado o matemático que mais contribuiu na Teoria da Probabilidade, em virtude de, a partir de 1774, ter produzido vários artigos sobre o assunto

[6] Por meio de *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, Huygens analisou mais outros 14 problemas envolvendo jogos de azar, sendo um deles o típico problema de retiradas de bolas coloridas em uma urna (VIALI, 2008), que até hoje se faz presente nos livros didáticos da atualidade.

(BOYER, 2010).

Um dos seus mais clássicos trabalhos com relação a essa área, é *Théorie Analytique des Probabilités* (Teoria Analítica de Probabilidades), de 1812, na qual, conforme descreve Soukeff (2014, p. 17), ele "fez novas contribuições, reuniu, sistematizou e ampliou resultados produzidos por seus antecessores. Os fundamentos da teoria da probabilidade foram organizados por Laplace de uma maneira clássica, que se manteve praticamente inalterada".

Para além, outros trabalhos de sua autoria, no que tange o campo da probabilidade, foram publicados, *Essai philosophique sur les probabilités* (Ensaio filosófico sobre as probabilidades), de 1814, por exemplo, é um agrupamento das notas de aula do próprio Laplace que aborda os princípios da Teoria da Probabilidade, aplicações nos jogos de azar, filosofia natural, ciência morais, testemunho, decisões judiciais e mortalidade (SILVA, 2020).

No mais, um outro ponto alto da participação de Laplace nesta recente área da Matemática foi o crescimento exponencial por esse emergente assunto que seus resultados impulsionaram, como destaca Viali (2008, p. 151):

> Foi a partir da obra de Laplace que os estudos na área cresceram e tiveram a atenção de grandes matemáticos como o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), o suíço Leonhard Euler (1707 - 1783), o russo Andrei Andreyevich Markov (1856 - 1922), e os franceses Siméon Denis Poisson (1781 - 1840), Jules Henri Poincaré (1854 - 1912), Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 - 1956), Henri Léon Lebesgue (1875 - 1941), Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783), entre outros.

Ademais, nos direcionando, finalmente, para a Teoria Moderna da Probabilidade, realçamos a Rússia, único país, segundo Santos (2016), que no século XIX, ainda demandava esforços em pesquisas acerca dos fundamentos da Teoria da Probabilidade, o que fez o russo, Andrei Nikolaevich Kolmogorov, por meio da Escola de São Petersburgo [7], ficar conhecido como o pai da probabilidade moderna.

Notado pela sua monografia publicada no ano de 1933, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Fundamentos de Probabilidade), esse trabalho foi essencialmente importante para o área probabilística da Matemática.

Considerada o marco da etapa moderna da probabilidade, conforme Viali (2008), foi por meio de *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* que Kolmogorov estabeleceu

[7] A Escola de São Petersburgo ficou conhecida como o berço da probabilidade moderna (SANTOS, 2016).

toda a moderna base axiomática[8] da probabilidade, além de fundamentá-la por meio da Teoria dos Conjuntos (SILVA, 2020), vínculo esse que ainda permanece tão sólido quanto a associação da probabilidade e às valiosas técnicas de contagem.

Por fim, reforçamos que toda a nossa pesquisa até aqui é uma breve síntese da grandiosa história da probabilidade. Para tanto, é de se esperar que alguns estudiosos não tiveram seus nomes, assim como suas contribuições, explorados. Nesse viés, para um aprofundamento sobre essa temática, sugerimos ao leitor uma retomada a alguns materias, onde acentuamos as publicações de Mlodinow (2009), Silva (2020), Santos (2016) e Viali (2008).

[8] Para estabelecer essa base axiomática, Kolmogorov deixa claro, ainda no prefácio de *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, que recorreu a sistematização dos axiomas que já vinham sendo empregados, implícita e explicitamente, pelos veteranos no estudo da Teoria da Probabilidade.

2 PROBABILIDADE

Neste capítulo será apresentada a base teórica da Teoria da Probabilidade explorada no Ensino Médio. Nesse sentido, abordaremos aqui os conceitos fundamentais inerente à compreensão dessa teoria, alguns resultados que nos permitem calcular a probabilidade de certos eventos e propriedades clássicas pertinentes a essa etapa da Educação Básica.

2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Muito embora tenhamos apresentado até aqui a história da probabilidade, na falta da formalização de seus conceitos, abordados aqui nesta seção, o que consideramos ser os "conceitos fundamentais". Isto é, definições elementares que constituem o primeiro passo para uma compreensão da Teoria da Probabilidade. Ou, pelo menos, da probabilidade abordada no Ensino Médio.

Neste viés, adotaremos, para a construção desta seção e das que se seguem, neste capítulo, especificamente, livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio. São eles os livros das coleções: "#Contato matemática" de Souza e Garcia (2016), "Matemática: contexto & aplicações" de Dante (2016) e "Matemática — Paiva" de Paiva (2010).

Feito essa introdução, vamos às definições. Iniciando pelo clássico conceito de experimento aleatório, que, inclusive, é de práxis nos livros didáticos introduzir o conteúdo de probabilidade por meio da sua definição/exploração (à exceção da apresentação, talvez, de um pequeno recorte sobre a origem da Teoria da Probabilidade), podemos apresentá-lo a seguir:

Definição 2.1. Experimentos aleatórios (ou **fenômenos aleatórios**) é a nomenclatura que utilizamos para designar qualquer experimento cujo resultado depende, exclusivamente, do acaso, ou seja, cujo o resultado é imprevisível, mesmo que realizado várias vezes e em condições constantes.

Para nível de exemplificação, e visando melhor contextualizar os próximos conceitos, podemos destacar experimentos aleatórios como o lançamento de moedas e dados convencionais não viciados, retirar uma carta de um baralho previamente embaralhado, sortear fichas em uma urna, dentre outros que, na impossibilidade de prever, com certeza absoluta o resultado que obterá, se enquadra na Definição 2.1.

Dando continuidade, um dos próximos conceitos fundamentais diz respeito a uma prática que se iniciou na Idade Média, e tem como uma dos seus mais antigos realizadores o bispo Wibold, que é o de listar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, o espaço amostral, que definimos, embora já tenhamos previamente antecipado, a partir da seguinte definição:

Definição 2.2. Espaço amostral é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Por tradição, adotamos o símbolo Ω (lê-se ômega) para nos referirmos a ele. A nível de elucidação, retomemos ao caso de lançamento de moeda, onde, para esse exemplo, temos como espaço amostral a seguinte representação tabular:

$$\Omega = \{cara, coroa\}.$$

Enquanto no dado convencional, é trivial assumir que o nosso espaço amostral é:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Exemplificado o espaço amostral, definiremos agora um terceiro e último conceito fundamental, o evento, a qual podemos descrevê-lo a partir da Definição 2.3:

Definição 2.3. Evento (ou **acontecimento**) é cada subconjunto de um espaço amostral de um experimento aleatório.

Usualmente, assim como é empregado na Teoria dos Conjuntos, representamos os eventos por meio de letras maiúsculas (A, B, C, D, etc.). Retomando ao exemplo da moeda, por exemplo, podemos descrever todos os seus eventos, que são:

- $A = \{cara, coroa\}$;
- $B = \{cara\}$;
- $C = \{coroa\}$;
- $D = \varnothing$.

Que inclusive, recebem todos nomenclaturas especiais. A e D, por representarem os subconjuntos triviais (além de possuírem, dentro da probabilidade, características singulares), recebem, respectivamente, o nome de evento certo e impossível. Retomaremos a eles mais a diante. E, quanto ao evento B e C, damos a nomenclatura de eventos elementares. Uma vez que são compostos, cada um, por um único elemento do espaço amostral.

Ademais, salientamos que eventos compostos por mais de um elemento (que não seja o evento certo), como, por exemplo, no caso do dado, o evento:

$$P = \{2, 4, 6\},$$

que é o de obter face par, não recebe nenhuma designação especial.

E, por fim, embora seja mais uma curiosidade relacionada com a Teoria dos Conjuntos, apontamos aqui a possibilidade de determinar, numericamente, a quantidade de eventos (subconjuntos) de um espaço amostral, que se dá pela seguinte relação:

$$2^n,$$

onde n é o número de elementos do espaço amostral. O que torna trivial verificar que no lançamento de moedas, temos, exatamente, quatro eventos (os que descrevemos anteriormente). Porém, no caso do dado, por exemplo, temos $2^6 = 64$ eventos a considerar.

2.1.1 Espaço amostral equiprovável

Muito embora, partindo de uma visão mais simplista, conseguirmos definir espaços amostrais equiprováveis como sendo qualquer espaço amostral na qual os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer. Como é o caso do lançamento de uma moeda não viciada. Em virtude dos eventos, retomando a seção anterior,

- $B = \{cara\}$;
- $C = \{coroa\}$;

apresentarem a mesma chance de ocorrer. Trazemos a discussão dessa subdefinição de espaço amostral de maneira isolada devido a necessidade de uma maior exemplificação.

Sendo assim, partindo do seguinte experimento apresentado por Paiva (2010): o lançamento de um único dado repetidas vezes em que as frequências de ocorrência das faces são contabilizadas. Considerando a frequência absoluta como sendo o número de vezes que um evento elementar acontece, isto é, o número de vezes que determinada face ocorre. E a frequência relativa a razão entre a frequência absoluta e o número de vezes que foi realizado o experimento.

Se tomarmos, tal qual como Paiva (2010), que o evento tenha acontecido 1000 vezes, por exemplo, é provável que alcancemos, para cada uma das faces (com pequenas variações), os seguintes resultados apresentados na Figura 2.1 a seguir:

Figura 2.1 – Registro das frequências absolutas e relativas do experimento realizado por Paiva (2010) 1000 vezes.

Face	Frequência absoluta	Frequência relativa
1	165	$\frac{165}{1.000} = 0{,}165$
2	168	$\frac{168}{1.000} = 0{,}168$
3	165	$\frac{165}{1.000} = 0{,}165$
4	163	$\frac{163}{1.000} = 0{,}163$
5	169	$\frac{169}{1.000} = 0{,}169$
6	170	$\frac{170}{1.000} = 0{,}170$
	Frequência total = 1.000	

Fonte: Paiva (2010, p. 354)

E, é justamente o fato das frequências relativas serem tão próximas para cada uma das faces/eventos elementares, que torna o espaço amostral desse experimento equiprovável. Vejamos a formalização desse conceito:

Definição 2.4. Um espaço amostral é **equiprovável** se as frequências relativas da ocorrência dos eventos elementares tendem a um mesmo valor quando o número de experimentos aumenta indefinidamente.

Da definição reiteramos que os valores das frequências relativas apresentados na Figura 2.1 podem se tornar ainda mais próximos se aumentarmos o número de vezes que o experimento é realizado. E isso encerra a apresentação dos conceitos fundamentais.

2.2 DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

Apesar de muito tempo ter percorrido desde que Cardano escreveu *Liber de Ludo Aleae*, publicado em 1526, é importante ressaltar que a sua definição clássica da probabilidade como sendo a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis se arrasta até a atualidade.

Sendo assim, considerando um evento qualquer, A, de um experimento aleatório cujo espaço amostral é Ω, em linguagem matemática, podemos definir, a partir de Cardano, que a probabilidade do evento A acontecer, $P(A)$, é:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Desse pressuposto, e já apresentado a definição de espaço amostral e evento, seguindo a construção lógica desse capítulo e da Matemática, é de se esperar que esses conceitos tenham alguma relação com o cálculo da probabilidade de um evento, o que é verdade. Uma vez que o número de casos favoráveis é uma designação para o número de elementos do evento que pretendemos calcular a probabilidade, nesse caso, o número de elementos de A, que representamos por $n(A)$. E o número de casos favoráveis, uma designação para o número de elementos do espaço amostral, $n(\Omega)$.

Diante disso, podemos conceituar a probabilidade de um evento a partir da seguinte definição:

Definição 2.5. Considere um evento qualquer A de um espaço amostral equiprovável Ω. A razão entre o número de elementos de A, $n(A)$, e o número de elementos do espaço amostral, $n(\Omega)$, é a probabilidade, $P(A)$, do evento A acontecer. Portanto,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}. \tag{1}$$

A nível de exemplificação, trazemos o seguinte exemplo baseado na análise de jogos de azar:

Exemplo 2.1. Em um baralho convencional com 52 cartas, sendo 13 delas de cada um dos naipes (copas, espadas, ouro e paus), é retirado uma carta ao acaso. Qual a probabilidade da carta retirada ser um valete?

Resolução:

Iniciando pela análise dos casos favoráveis, que compõe o nosso evento, chamemos de A, temos que eles são, exatamente, os conjunto dos valetes do baralho, assim:

$$A = \{valete\,de\,copas, valete\,de\,espadas, valete\,de\,ouros, valete\,de\,paus\}.$$

Quanto aos casos possíveis, como iremos, nesse experimento, retirar apenas uma carta, então qualquer evento elementar é possível, o que implica que o espaço amostral é o próprio conjunto de todas as cartas do baralho. Daí, é fácil perceber que, como $n(A) = 4$ e $n(\Omega) = 52$, então:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Concluída a resolução, acrescentamos que existem três formas usuais de representar a probabilidade de um evento. Por meio de frações, como fizemos anteriormente. Por meio de representações decimais e, por fim, porcentagens. Ou seja, para além da possibilidade de representar a probabilidade do evento A do Exemplo 2.1 por meio das frações equivalentes $\frac{4}{52}$ e $\frac{1}{13}$, podemos também representá-la por meio do número decimal $0,077$ (uma aproximação decimal com três dígitos) ou pela porcentagem $7,7\%$.

2.2.1 Propriedades das probabilidades

Assim como vários conteúdos da Matemática, é previsível imaginar que a probabilidade também apresente algumas particularidades dignas de serem reconhecidas como propriedades das probabilidades. No tocante ao 2º Ano do Ensino Médio, existem basicamente quatro delas, às quais apresentaremos aqui.

Iniciando por umas das mais básicas, porém, fundamental, diz respeito a um evento que já mencionamos aqui, o evento impossível, que, à rigor, representamos por $\varnothing$. Vejam-na:

Propriedade 2.1. Se $\varnothing$ é um evento impossível, ou seja, é o subconjunto vazio de um espaço amostral, Ω, então $P(\varnothing) = 0$.

Demonstração. Se $\varnothing$ é um subconjunto vazio, então $n(\varnothing) = 0$. Calculando a probabilidade do evento $\varnothing$ acontecer, isto é, a probabilidade do evento impossível, $P(\varnothing)$, acontecer temos:

$$P(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} = \frac{0}{n(\Omega)} = 0.$$

$\square$

Isso quer dizer que esse evento nunca acontecerá.

Uma segunda propriedade também é relativa a um dos subconjunto trivial, que é o próprio espaço amostral. Esse evento recebe o nome de evento certo e assim como o evento impossível, foge à regra, apresentando uma representação especial, Ω.

Propriedade 2.2. Se Ω é um evento certo, ou seja, é o subconjunto de um espaço amostral que contém todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, então $P(\Omega) = 1$.

Demonstração. Se Ω é um evento certo, então ele contém e está contido nos espaço amostral. Logo, é o próprio espaço amostral. Calculando a probabilidade do evento Ω acontecer, isto é, a probabilidade do evento certo, $P(\Omega)$, acontecer, temos:

$$P(\Omega) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1.$$

$\square$

Essa propriedade implica que o evento certo, independente das circunstâncias, vai sempre ocorrer.

A próxima propriedade mantém relações com as duas últimas. Ela nos apresenta os limites inferiores e superiores para o cálculo da probabilidade de um evento.

Propriedade 2.3. Se A é um evento qualquer de um espaço amostral, Ω, então $0 \leq P(A) \leq 1$.

Demonstração. Se A é um evento qualquer de um espaço amostral, Ω, então $\varnothing \subset A \subset \Omega$. O que implica que $n(\varnothing) \leq n(A) \leq n(\Omega)$. Dividindo essa cadeia de desigualdades por $n(\Omega)$, obtemos:

$$\frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \qquad \Rightarrow \qquad P(\varnothing) \leq P(A) \leq P(\Omega).$$

Portanto:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

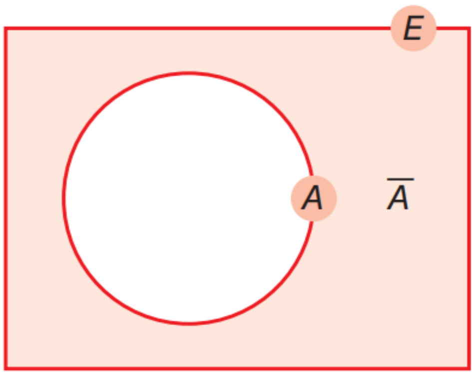
$\square$

Quanto a última propriedade, mediante a influência da Teoria dos Conjuntos na Teoria da Probabilidade, diz respeito ao conceito de eventos complementares que, numa perspectiva mais probabilística, pode ser definido assim:

Definição 2.6. Seja Ω um espaço amostral de um experimento aleatório qualquer e A um dos seus eventos. Conceitua-se **evento complementar de** A, que indicamos por A^C (ou $\overline{A}$), o evento formado pelos elementos do espaço amostral, Ω, mas que não pertencem a A.

Em linguagens de conjuntos podemos destacar que $A^C = \Omega - A$. E, para efeito de visualização, trazemos a seguinte representação por meio de diagrama (Figura 2.2) , na qual A^C está delimitado pela região colorida, A pela região circular incolor, sendo E, nesse caso, o espaço amostral.

Figura 2.2 – Representação do espaço amostral, E, evento A e o evento complementar de A, A^C.



Fonte: Paiva (2010, p. 357)

Da imagem acima, ainda podemos verificar, imediatamente, que:

$$A \cup A^C = \Omega \qquad \text{e} \qquad A \cap A^C = \varnothing,$$

condições essas que serão utilizadas, posteriormente, para demonstramos a Propriedade 2.4 a seguir, apesar de a realizarmos apenas na próxima seção:

Propriedade 2.4. Seja A um evento do espaço amostral, Ω, e A^C o evento complementar de A. Então, $P(A^C) = 1 - P(A)$.

2.3 PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS

Até agora aprendemos a calcular a probabilidade de um evento, em particular, de um espaço amostral, Ω. Seja esse evento A, temos, por definição, que a probabilidade de

A, $P(A)$, é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Entretanto, o que nos compete discutir aqui, nesta seção, é se existe um resultado para calcular a probabilidade da união de dois eventos. E, antecipadamente, afirmamos que, sim, ele existe.

Sendo também uma consequência da forte relação da Teoria dos Conjuntos e da Teoria da Probabilidade, a probabilidade da união de dois eventos, também conhecida como teorema da adição de probabilidades, pode ser definida da seguinte forma:

Teorema 2.1. Sejam A e B eventos quaisquer de um mesmo espaço amostral, Ω. Então, a probabilidade da união dos eventos A e B, que usualmente denotamos por $P(A \cup B)$, pode ser calculada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{2}$$

Demonstração. Segue do seguinte resultado que nos permite determinar o número de elementos da união de dois conjuntos. Por conveniência, sejam A e B esses conjuntos, temos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \tag{3}$$

Dividindo a Equação (3) por $n(\Omega)$, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{A}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}.$$

Logo, está provado que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

□

Ademais, no tocante ao cálculo da probabilidade da união de dois eventos, é nossa responsabilidade, no momento atual, respaldar que, na grande maioria das vezes, o conectivo **OU** refere-se a probabilidade da união de dois ou mais eventos. E, quanto ao conectivo **E**, a probabilidade da intersecção de dois ou mais eventos. Sendo ambos os conectivos fortes indicadores para o uso da Equação (2).

Para via de exemplificação, vejamos a resolução do seguinte problema enunciado a seguir:

Exemplo 2.2. Em um jogo um dado é lançado duas vezes. Depois, o número das faces obtidas são somadas e isso determina o resultado da jogatina de cada um dos jogadores. Sabendo que o ganhador é aquele que obtém um resultado primo ou maior que 10, calcule a probabilidade de qualquer jogador ganhar.

Resolução:

Querendo determinar a probabilidade de qualquer jogador ganhar, isto é, de qualquer ganhador obter um resultado primo **OU** maior que 10. Por meio da discussão dos conectivos, é fácil perceber que esse problema trata-se da probabilidade da união de dois eventos.

Sendo assim, tomando o par ordenado (x, y) , onde x representa a face obtida no primeiro lançamento do dado e y a face obtida no segundo lançamento. Definido o evento A como resultado primo e B resultado maior que 10 na soma das faces. Temos, para os casos favoráveis dos dois conjuntos, os seguintes casos listados a seguir:

$A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), (5,6), (6,5)\}$.

$B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$.

Por conseguinte, como a equação (2) exige calcular a probabilidade da intersecção entre os conjuntos A e B, $P(A \cap B)$, isto é, a probabilidade de qualquer jogador ganhar. Será necessário, também, determinar os casos favoráveis para a situação em que o resultado é um número primo e maior que 10. Assim,

$$A \cap B = \{(5,6), (6,5)\}.$$

Daí, sabendo que o total de casos possíveis, $n(\Omega)$, é 36, uma vez que, para o primeiro lançamento do dado temos 6 possibilidades e para o segundo lançamento do dado, também temos 6 possibilidades. O que implica, pelo Princípio Fundamental da Contagem [1] que, o total é 6×6. Então, o que desejamos encontrar, $P(A \cup B)$ é:

[1] O Princípio Fundamental da Contagem é uma particularidade da Análise Combinatória. Ele nos diz que se um acontecimento X pode ocorrer de n maneiras distintas e, se para cada uma das n maneiras, um evento Y pode ocorrer de m maneiras, também distintas. Então, a quantidade de possibilidades de ocorrências simultâneas dos acontecimentos X e Y é dada pelo produto $m \times n$.

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ P(A\cup B) &= \frac{15}{36}+\frac{3}{36}-\frac{2}{36} \\ P(A\cup B) &= \frac{16}{36}=\frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Encerrada a elucidação de como utilizar o resultado que nos permite calcular a probabilidade da união de dois eventos. Retomemos a pendência de demonstrar a Propriedade 2.4, que trata da probabilidade de eventos complementares.

Demonstração. (Propriedade 2.4) Seja A um evento qualquer de um espaço amostral, Ω, e A^C o evento complementar de A. Por definição, temos:

$$A\cup A^C=\Omega \qquad \text{e} \qquad A\cap A^C=\varnothing.$$

Daí, recorrendo ao resultado que nos permite calcular a probabilidade da união de dois eventos, em particular, da união dos eventos A e A^C, obtemos:

$$\begin{aligned} P(A\cup A^C) &= P(A)+P(A^C)-P(A\cap A^C) \\ P(A^C) &= P(A\cup A^C)-P(A)+P(A\cap A^C) \end{aligned}$$

Consequentemente, como $A\cup A^C$ e $A\cap A^C$ são, respectivamente, o evento certo e o impossível, então:

$$P(A^C) = 1-P(A). \tag{4}$$

□

Resultado esse muito útil que, embora não tenhamos entrado em detalhes, nos permite, de forma eficiente, obter a probabilidade de um evento conhecendo a probabilidade do seu respectivo complementar.

Para via de exemplificação da situação descrita acima, podemos retomar ao Exemplo 2.2. Sendo assim, se desejássemos saber a probabilidade de qualquer jogador perder, ou seja, não obter resultado primo (tomemos esse evento como C) e obter resultado menor que 10 (evento D) na soma da face dos dados. Que é o evento complementar de ganhar ($A \cup B$).

Sabendo que, para a nossa situação, em linguagens de conjuntos, podemos representar o evento perder por $C \cap D$. Então teríamos que:

$$\begin{aligned} P(C \cap D) &= 1 - P(A \cup B) \\ P(C \cap D) &= 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Logo, de uma maneira mais conveniente, sabendo da probabilidade do jogador ganhar, poderíamos calcular a probabilidade de qualquer um perder. Sem a necessidade de investigar os casos favoráveis.

2.4 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Para além do resultado clássico da probabilidade, equação (1), e do resultado que nos permite calcular a probabilidade da união de dois eventos, equação (2), e suas consequências, como é o caso da relação existente entre a probabilidade de eventos complementares, equação (4). A Teoria da Probabilidade também nos permite calcular a probabilidade de um evento condicionado à ocorrência de um outro evento.

Esse resultado, provém, exatamente, da probabilidade condicional. Vejamos a sua definição.

Definição 2.7. Sejam A e B eventos não vazios de um espaço amostral, Ω. Definimos a probabilidade condicional do evento A acontecer, dado que B ocorreu[2], que denotamos por $P(A/B)$, por meio da seguinte razão:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}. \tag{5}$$

Igualdade essa que, no que concerne a probabilidade condicional, representa apenas um dos resultados que nos permite obtê-la.

Sendo assim, um pequeno adendo sobre uma outra e última alternativa para calcular a probabilidade condicional se faz necessária. E, não sendo algo muito distante

[2] Para fins de conscientização, destacamos que, para além da expressão "probabilidade condicional do evento A acontecer, dado que B ocorreu", usado para descrver $P(A/B)$. É possível encontrarmos outras descrições para essa simbologia matemática. Assim acrescentamos as expressões: "probabilidade condicional do evento A, uma vez que B tenha ocorrido" e "probabilidade condicional de ocorrer o evento A, sabendo que já ocorreu o evento B"

da equação (5), pois advém dessa mesma igualdade, entretanto, com a sutil diferença de realizarmos a divisão simultânea do numerador e denominador por $n(\Omega)$, onde obtemos:

$$P(A/B) \quad = \quad \frac{\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}.$$

Como consequência desse processo (que não interfere, uma vez que isso é o mesmo que multiplicarmos pela unidade) e do resultado clássico de probabilidade, alcançamos essa nova alternativa. Portanto, a probabilidade condicional do evento A ocorrer, dado que B aconteceu, pode ser também determinado, por:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}. \tag{6}$$

Que determina, o que encontramos na literatura, como teorema multiplicativo da probabilidade, um dos seus efeitos. Vejam-no a seguir:

$$P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A/B). \tag{7}$$

Finalizando essa seção, destacamos que esse teorema nos dá abertura para discutir duas outras classificações de eventos: os eventos dependentes e independentes. Uma vez que essas definições podem fornecer formas alternativas da utilização da equação (7). A seguir, suas definições:

Definição 2.8. Sejam A e B dois eventos não vazios de um mesmo espaço amostral, Ω. Classificamos A e B como eventos dependentes quando $P(A/B) \neq P(A)$, o que implica em:

$$P(A\cap B) = P(A/B)\cdot P(B). \tag{8}$$

E, quanto ao caso de A e B serem eventos independentes, temos que $P(A/B) = P(A)$. Portanto:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B). \tag{9}$$

Em linhas gerais, podemos dizer que dois eventos são independentes quando à ocorrência de um deles, condicionado à ocorrência antecipada do outro, não altera as suas possibilidades de ocorrer.

Agora vejamos um exemplo da aplicação da probabilidade condicional:

Exemplo 2.3. Em um sorteio beneficente, 100 bolas numeradas de 1 a 100 são depositadas em uma urna, e cada um desses números torna-se disponível para a compra. Sabendo que o responsável por divulgar o resultado ganhador — em um momento de suspense — deixou escapar que, após a retirada, o resultado ganhador era ímpar. Calcule a probabilidade de Maria, que adquiriu todos os múltiplos de 7, levada pela ideia de que ele é o número da sorte, ganhar.

Resolução:

Desejando calcular a probabilidade do número sorteado ser um número múltiplo de 7 no intervalo de 1 a 100, dado que ele é ímpar. Podemos, para esse exemplo, definir o evento A, ser múltiplo de 7 no intervalo de 1 a 100. E o evento B, ser um número ímpar, no mesmo intervalo. Portanto,

$A = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$.

$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99\}$.

Delimitado essas condições, o nosso próximo passo, em termos de probabilidade condicional, é calcular $P(A/B)$. Entretanto, como isso exige que investiguemos o evento $A \cap B$, isto é, os casos em que o número é múltiplo de 7 e ímpar, simultaneamente. Logo:

$A \cap B = \{7, 21, 35, 49, 63, 77, 91\}$.

Por conseguinte, segue que:

$$\begin{aligned} P(A/B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \\ P(A/B) &= \frac{7}{50}. \end{aligned}$$

Resolvido o Exemplo 2.3, para encerrar esse capítulo, fornecido, anteriormente, os critérios para classificar dois eventos com dependentes ou independentes. Nossa última ação aqui será concluir em qual categoria os eventos A e B, delimitados para mensurar a possibilidade de Maria sair vitoriosa, se encaixam.

Sendo assim, calculando a probabilidade do evento A acontecer, isto é, a probabilidade de qualquer número múltiplo de 7 ser sorteado entre os 100 possíveis números disponíveis. Dado por:

$$P(A) = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}.$$

Mediante ao fato de verificarmos que $P(A/B) = P(A)$, logo, esses eventos são independentes. Assim, em termos de probabilidade, a condição usada para dar suspense ao sorteio beneficente não afeta, de forma alguma, as chances de Maria sair vitoriosa.

3 JOGOS E SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Neste capítulo versaremos sobre o conceito de sequências didáticas, apresentaremos alguns dos seus tipos e exploraremos, com maior nível de detalhes, a sequência didática de Fedathi. Além disso, realizaremos um breve apanhado sobre o uso de jogos no processo de ensino e aprendizagem, evidenciando a oposição — rejeições e benefícios — que permeiam o uso desses recursos lúdicos no ensino.

3.1 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Planejar uma série de ações didáticas isoladas visando alcançar um determinado objetivo é uma tarefa muito complexa e arriscada por diversas razões. A principal delas, ousamos dizer, é a falta de conexões entre cada uma delas, que, em um contexto geral, pode impulsionar algumas descontinuações entre uma atividade e outra, interrompendo o processo de assimilação ativa dos conhecimentos explorados.

Em virtude disso, e reconhecendo que o planejamento sob tais condições pode gerar inúmeras consequências como, por exemplo, baixos níveis de aprendizagem. O que implica uma quebra de expectativas quanto aos propósitos e intencionalidades da educação escolar, a qual tem como meta oferecer uma educação de qualidade, que aqui apontamos como uma alternativa: as sequências didáticas.

Definidas como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p. 18). Apresentamos-as aqui por vários motivos, sendo o primeiro deles, sua eficiência no planejamento a longo prazo, que, para além de desenvolverem uma contínua comunicação na preparação de várias aulas, podem também auxiliar o planejamento de unidades didáticas, planejamento esse que gira em torno de um tema central, como é o caso da probabilidade.

Razão essa muito bem explicitado por Groenwald *et al.* (2009, p. 33), porém, ao retratar da análise combinatória, que, por sua vez, possui um vínculo de dependência com a probabilidade e uma estrutura lógica-formal similar:

> O conteúdo de Análise Combinatória, por sua estrutura lógico-formal, adapta-se com grande vantagem à proposta de aprendizagem através de uma seqüência didática , onde uma etapa depende da compreensão da anterior, e o encadeamento de atividades auxilia na construção dos conceitos.

Para além da probabilidade, outro motivo para apresentar essa estratégia didática é a crescente onda de pesquisa que ela vem desencadeando em Educação Matemática, como destaca Costa e Gonçalves (2022). O que torna possível, na atualidade, encontrar uma grande variedade de produtos didáticos desenvolvidos à luz das sequências didáticas em mecanismos de pesquisa acadêmica de excelência como o Google Acadêmico, Periódicos CAPES, SciELO, repositórios de Universidades e Institutos Federais e, inclusive, no repositório do próprio Instituto Federal da Paraíba, campus Cajazeiras.

Por fim, uma última razão que nos levou a nos aprofundar sobre essa temática são as suas contribuições no processo de ensino e aprendizagem, as quais são muito variadas e que atuam diretamente em vários momentos. Partindo de Gonçalves (2020, p. 49), por exemplo, podemos destacar que:

> A utilização da Sequência Didática como um recurso pedagógico contribui para que o professor tenha um novo olhar sobre a organização do conteúdo, de onde pode partir para a problematização, conduzindo o aluno a verificar seu conhecimento prévio e a se apropriar de novos significados.

Corroboração muito oportuna, dado que, na maioria das vezes, o olhar dos professores sobre os conteúdos e suas formas de organização são pré-determinados exclusivamente pelo livro didático. O que os mantêm neutros em relação às formas de problematização e contextualização, isentando-os de verificar e analisar os conhecimentos prévios dos alunos de forma mais ampla, e buscar maneiras de utilizar esses conhecimentos de forma significativa.

Uma outra contribuição no que tange o processo de ensino e aprendizagem é a sua utilidade para oferecer equidade de oportunidades de aprendizagens, uma vez que, proporcionando níveis progressivos de desafios (PAULA; BARRETO, 2016), as sequências didáticas podem ser planejadas para desenvolver as competências e habilidades necessárias para uma compreensão significativa dos conteúdos, mesmo considerando os ritmos de aprendizagem variados e as dificuldades dos alunos.

Por fim, quanto aos últimos levantamentos acerca dos benefícios do emprego de sequências didáticas no processo de ensino e aprendizagem, evidenciamos a sua eficiência em estabelecer o contrato didático, definido por Guy Brousseau como um conjunto de “regras que permeiam as relações existentes entre professor, aluno e saber” (SOUZA; LIMA, 2014, p. 33). Já que ela consolida uma forte relação entre esses três elementos. E, finalmente, por meio de Maroquio (2021, p. 4-5) elencamos algumas das suas relevâncias para o ensino da matemática, dado que:

> O trabalho com sequências didáticas pode facilitar a elaboração de situações-problema envolvendo a área de conhecimento matemático, por meio de atividades e exercícios múltiplos e variados com a finalidade de ajudar o aluno a consolidar e ampliar aprendizagens, conceitos, procedimentos e representações simbólicas a partir de situações de resolução dos mais variados problemas em diversas situações de uso que dão significado aos conceitos matemáticos.

O que nos permite concluir que essa abordagem é muito frutífera e digna de ser pesquisada e amplamente divulgada. Em especial na Matemática que, na grande maioria das vezes, é ainda explorada por métodos, quase exclusivamente, tradicionais, "depositando" conhecimentos com pouco significado para os alunos.

3.1.1 Tipos de sequência didática

Muito embora, anteriormente, por meio de Zabala (1998) tenhamos apresentado uma definição geral acerca das sequências didáticas, é de suma importância enfatizar que existem tipos de sequências.

A título de curiosidade, por meio de Costa e Gonçalves (2022), podemos destacar algumas dessas diversas abordagens, por exemplo: sequência didática na Engenharia Didática, sequência didática de Zabala, sequência didática de Dolz e colaboradores, sequência didática de Fedathi, sequência didática interativa e sequência didática via Unidade Articulável de Reconstrução Conceitual (UARC's).

Contudo, como o nosso propósito não é realizar um aprofundamento teórico em termos de sequência didática, mas sim desenvolver uma sequência/produto didático para o ensino de probabilidade, compete-nos aqui apenas apresentar a abordagem que adotaremos para confeccioná-la, que, inclusive, é a sequência didática de Fedathi que exploraremos a seguir com base em Costa e Gonçalves (2022).

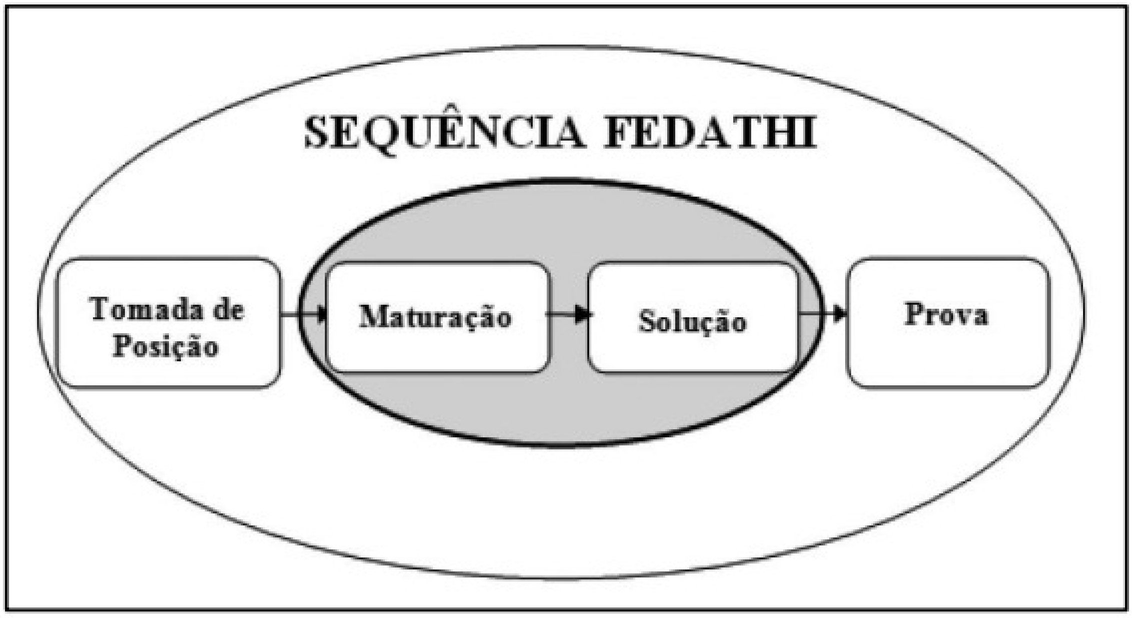
3.1.1.1 Sequência Didática de Fedathi

Desenvolvida pelo professor Hermínio Borges Neto da Universidade Federal do Ceará, a sequência Fedathi recebe essa denominação em homenagem aos filhos do seu progenitor, Felipe, Daniel e Thiago, uma vez que é composto pela combinação, respectivamente, das primeiras sílabas de cada um dos seus nomes, nessa ordem.

Com uma proposta de "colocar o aprendiz em uma posição próxima a do matemático quando este está produzindo Matemática" (COSTA; GONÇALVES, 2022, p. 369), essa abordagem desenvolvida em meados da década de 90, é dotada de quatro etapas sequenciais e interdependentes, que são a: tomada de posição, maturação, solução e prova.

Esquematizada por meio da Figura 3.1, a sequência de Fedathi concentra-se, ora no professor (primeira e quarta etapa), ora na interação professor, aluno e saber (segunda e quarta etapa). Dito isso, vejamos a descrição das suas etapas.

Figura 3.1 – Etapas de desenvolvimento da Sequência Fedathi.



Fonte: Costa e Gonçalves (2022, p. 370).

Iniciando pela tomada de posição, etapa inicial da presente abordagem, seu propósito é unicamente apresentar um problema que se busca investigar com a finalidade de alcançar um determinado conhecimento. Que, muito embora, em um primeiro momento, possa parecer uma tarefa simples e com pouco significado, é fundamental. Mediante o fato dela ser a primeira ação e, portanto, um momento decisório no que tange o envolvimento dos alunos de forma ativa. Condição extremamente necessária para o sucesso dessa abordagem, dado o seu propósito anteriormente exposto.

Todavia, cabe ressaltar que, apesar de a tomada de posição ser a primeira etapa da sequência de Fadathi, o seu próprio progenitor não descarta a necessidade de realizar uma atividade diagnóstica antes da aplicação das sequências didáticas planejadas com base nessa abordagem. O que é muito importante, e que, inclusive, é uma ação defendida por muitos pesquisadores e professores em educação. Já que é ela que pode nos dar informação sobre os níveis dos alunos, sendo apontada, conforme Sousa (2010, *apud* COSTA; GOLÇALVES, 2022), como um fator determinante.

Partindo para a segunda etapa, que marca o início da participação ativa dos alunos no desenvolvimento dos produtos didáticos elaborados à luz das sequências didáticas de Fedathi, a maturação, essa etapa é marcada pela problematização e discussões acerca do problema apresentado na tomada de posição. Dessa forma, busca-se um aprofundamento sobre ele no sentido de tentar compreendê-lo e resolvê-lo. Sendo o professor, a partir daqui, um mediador, responsável por levantar perguntas e conduzir os alunos a realizarem reflexões e conjecturas.

A penúltima ação, a solução, é caracterizada pela sistematização das resoluções dos alunos — processo que deve ser orientado pelo professor — seguida pela promoção de debates acerca da variedade de soluções alcançadas ao longo das etapas até o presente momento. Nela, tanto erros, quanto acertos e confrontos de ideias devem ser considerados. Pois, nessa etapa, acima das soluções, prevalecem os raciocínios.

E, por fim, temos a prova, que, como já decretado, centra-se na figura do professor. De forma resumida essa etapa tem dois propósitos. O primeiro é a apresentação da resolução formal do problema pelo docente, seguida ou não de demonstrações condizentes com os níveis do seu alunado. E o segundo é a generalização do problema explorado, de tal forma que, no fim, os alunos compreendam o conteúdo desejado, tornando-os capazes de aplicá-los de forma autônoma em outras situações e contextos.

Encerrada a descrição das suas etapas, é válido considerar que a sequência de Fedathi é uma abordagem excepcional. Permitindo que os alunos sejam proativos no processo de consolidação dos seus respectivos aprendizados, trazendo a figura do professor como um mediador do processo, e valorizando a aprendizagem por descoberta, suas vantagens são diversas. Acúmulo de argumentos esses, que, para além da tentativa de desfrutar de oportunidades diferenciadas das típicas aulas expositivas e expositivas dialogadas, que nos fizeram selecioná-lá.

3.2 JOGOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Embora pouco se discuta a importância dos recursos didáticos quanto elemento do planejamento, é importante ressaltar que eles também são muito importantes. Definidos como todo material que pode ser utilizado no processo de ensino e aprendizagem visando a garantia do aprendizado do conteúdo proposto (SOUZA; DALCOLLE, 2007). Têm inúmeras funcionalidades, sendo algumas delas, conforme Castoldi e Polinarski (2009), a sua atuação no processo de desenvolvimento cognitivo, além de aproximar o aluno do conteúdo.

Contudo, o reducionismo desse termo, na prática, a recursos como a lousa, pincéis, apagador, aparelho de DVD, TV, projetores, dentre outros comumente empregados nas aulas expositivas, é um enorme problema. E isso, por sua vez, acaba impactando negativamente na perspectiva macro sobre esses elementos. Tanto na visão de professores, quanto licenciados que, tendo vivenciado o quase exclusivo contato com somente esses materiais e inspirados pelo ensino tradicional, se negam a reconhecer as suas inúmeras vantagens, além do enorme portfólio desses instrumentos e suas múltiplas utilizações.

Um desses recursos didáticos desprezados, ousamos dizer, são os jogos, devido a sua indissociável relação com a diversão que, no que lhe diz respeito, em relação ao ensino, boa parte das vezes é taxado como "[...] uma distração de aprendizado sério, perda de tempo[...]" (OKADA; SHEEHY, 2020, p. 593). Portanto, considerando que qualquer esforço para estabelecer prazer na aprendizagem é uma perda de foco.

No mais, um ponto crítico que deve ser levantado é que essa visão pessimista sobre o uso de jogos no ensino não é um consenso, e, possivelmente, é fruto de uma série de fatores: experiências frustradas, falta de planejamento, objetivos mal traçados, escolhas inapropriada de recursos, má gestão de sala de aula, tempo e relação professor e aluno. Dito isso, vamos explorar os benefícios da aplicação dos jogos no processo de ensino e aprendizado.

Iniciando por Silva (2005, p. 26), a qual nos informa que:

> Ensinar por meio de jogos é um caminho para o educador desenvolver aulas mais interessantes, descontraídas e dinâmicas, podendo competir em igualdade de condições com os inúmeros recursos a que o aluno tem acesso fora da escola, despertando ou estimulando sua vontade de freqüentar com assiduidade a sala de aula e incentivando seu envolvimento nas atividades, sendo agente no processo de ensino e aprendizagem, já que aprende e se diverte, simultaneamente.

Podemos, de imediato, perceber que suas aplicações são muito vantajosas por vários aspectos. Dentre eles, como destacado, podemos reforçar a oportunidade de desenvolver aulas mais descontraídas e dinâmicas, suavizando a ideia da escola como um ambiente tedioso. Algo extremamente necessário, visto que o pleno desenvolvimento do educando só é possível em um ambiente estimulante.

Além disso, uma outra vantagem tão importante quanto a promoção dos estímulos necessários para o desenvolvimento da aprendizagem, ainda considerando as palavras de Souza e Dalcolle (2007), é a possibilidade de tornar o aluno um agente do processo, superando a ideia do professor autoritário e aluno passivos da educação bancária, há muito criticada pelo patrono da educação brasileira, Paulo Freire (BRIGHENTE; MESQUIDA, 2016).

Ademais, retomando a ideia distorcida da diversão como uma vilã no processo de ensino e aprendizado — sabendo que os jogos e diversão são quase sinônimos na compreensão popular — apontamos as palavras de Okada e Sheehy (2020, p. 594), onde afirma que:

> Na literatura científica sobre "diversão e aprendizado", alguns estudos sugerem que a diversão tem um impacto e/ou valor positivo. Um argumento-chave para esses estudiosos é que o aprendizado divertido (agradável e motivador) é mais envolvente e, portanto, eficaz do que o aprendizado estéril (chato).

Palavras essas que descrevem uma das outras várias contribuições da aplicabilidade dos jogos no processo de ensino e aprendizagem. Uma vez que aprender e se divertir, simultaneamente, proporcionam uma maior interação/envolvimento entre todos os envolvidos no processo, além de se mostrar eficiente frente a uma proposta de ensino mais engessada.

Finalizando seus benefícios, expomos ainda as competências dos jogos para auxiliar a ação docente, especificamente, em razão de proporcionar a exploração de conceitos, reforçar conteúdos, averiguar os conhecimentos prévios dos alunos (PASDIORA *et al.*, 2008), viabilizando retomadas. Dessa forma, garantindo um trabalho mais produtivo, além de possibilitar o desenvolvimento de avaliações diagnósticas e formativas.

E, por fim, no que tange a Matemática, componente curricular base da nossa pesquisa, trazemos as percepções de Santos *et al.* (2021, p. 1), que, em síntese, elenca, de forma geral, alguns dos pontos apresentados até aqui, porém, direcionado a essa área do conhecimento de interesse, ao evidenciar que:

> A utilização de jogos pode ser forte aliada do professor no ensino da Matemática, que muitas vezes é encarada pelos alunos como disciplina difícil de ser aprendida. Com a utilização de jogos, é possível aumentar a curiosidade e a atenção dos alunos, tornando as aulas mais interessantes e prazerosas, e consequentemente a matéria a ser ensinada, facilitando que aumentem também a motivação e o envolvimento dos alunos para aprender os conteúdos. Além disso, também tem como vantagem fixar os conteúdos de forma dinâmica, reduzindo a dificuldade dos alunos que têm limitações quanto ao aprendizado da Matemática e facilitar a socialização entre os próprios alunos à medida que eles interagem durante os jogos.

Pensamento esse que acaba elencando uma outra e importante contribuição sobre o uso de jogos no ensino da Matemática, que é a de auxiliar no processo de desmistificação dessa área como um componente curricular de difícil compreensão. Obstáculo esse que compromete significamente a visão dos alunos sobre a Matemática, dificultando o seu aprendizado.

Encerrando essa seção e com objetivo de promover uma ligação com tudo que tratamos até aqui, neste capítulo e nos anteriores, acrescentamos que recursos lúdicos (inclusive os jogos de azar) são elementos que podem ser facilmente incorporados no planejamento das sequências didáticas. Já que o professor deve prever, conforme Pasdiora *et al.* (2008), no desenvolvimento dessa estratégia didática, uma série de desafios, problemas, jogos, análises e reflexões que, progressivamente, aumente o nível de complexidade, permitindo um maior aprofundamento sobre o tema.

E, por último, retomando ao primeiro capítulo, o qual apresenta uma síntese sobre a história da probabilidade, sabendo do seu envolvimento com o estudo dos jogos, especificamente, os jogos de azar, conseguimos observar, para a finalidade desse trabalho, um outro potencial para o uso dos jogos: a abertura para se trabalhar a história da Matemática. Recomendações previstas desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), mas que também se arrastam até os documentos mais atuais, como é o caso da Proposta Curricular do Ensino Médio do Estado da Paraíba[1].

[1] A Proposta Curricular do Ensino Médio do Estado da Paraíba encontra-se disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1q7hNWJL7ScfzW26dAjqXai9oUVpLs4Zf/view>

4 RESULTADOS

4.1 PRODUTO DIDÁTICO PROBABILÍSTICO

Sendo o resultado do planejamento das ações pedagógicas elaboradas à luz da sequência didática um produto didático. Apresentaremos, a seguir, o resultado da nossa pesquisa que é o produto didático que denominamos "Jornada probabilística". Que foi inspirado pela sequência didática de Fedathi, apesar de suas etapas (tomada de posição, maturação, solução e prova), que foram descritas na seção 3.1.1.1, estarem um pouco implícitas. Consequência da probabilidade não se tratar de partes de um conteúdo isolado, mas sim de uma unidade com várias particularidades e conceitos que merecem ser amplamente discutidos, impossibilita, assim, a expressa delimitação das etapas em cada uma das tarefas programadas.

Todavia, como esse problema não é um limitador, haja vista que a essência de cada uma das etapas da sequência didática de Fedathi anteriormente descritas foram conservadas. Vejamos, agora, o detalhamento do referido produto didático.

4.2 JORNADA PROBABILÍSTICA

Apresentaremos, aqui, nessa seção, o produto didático probabilístico que desenvolvemos, tendo em vista a efetivação de uma aproximação entre a Teoria da Probabilidade e os recursos cuja investigação tornou-se o meio pela qual ela se desenvolveu historicamente: os jogos de azar.

Produzida em quatro etapas, cada uma com uma quantidade específica de tarefas. O Jornada probabilística visa explorar e apresentar os conceitos e resultados probabilísticos de forma indutiva, isto é, desenvolver a aprendizagem tomando como ponto de partida situações particulares e resultados já conhecidos, induzindo os alunos à generalizações. Para isso, foi traçado o seguinte objetivo geral:

- Desenvolver habilidades matemáticas para a identificação, compreensão e resolução de problemas envolvendo conceitos de probabilidades empregados na Educação Básica, especificamente, no 2º ano do Ensino Médio.

E os imediatos objetivos específicos:

- Apresentar conceitos fundamentais inerentes a compreensão da Teoria da Probabilidade;
- Definir intuitivamente probabilidade de um evento como a razão entre a quantidade de elementos do evento pela quantidade de elementos do espaço amostral;
- Reconhecer as propriedades da probabilidade;
- Explicar probabilidade da união de dois eventos e probabilidade condicional;
- Generalizar a história da Teoria da Probabilidade reconhecendo a aplicabilidade dessa teoria para o cálculo de estimativas envolvendo jogos de azar.

Onde, quanto a forma de avaliação que orientamos, em conformidade com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, é a "avaliação contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais" (BRASIL, 1996, p. 9). Em outras palavras, avaliações formativas. Apesar de não excluirmos a necessidade da aplicação de avaliações somativas e diagnóstica, ficando a critério do professor que venha a adotar essa metodologia.

Quanto aos recursos, salientamos, antecidadamente, que são simples: lousa, pincéis, projetor (caso opte em reproduzir o vídeo sugerido na Tarefa 8), dados, moedas, baralhos e o jogo da trilha (apresentaremos-o posteriormente ao decorrer da Tarefa 9).

Diante do exposto, vejamos, a seguir, a descrição de cada uma das ações elaboradas, onde evidenciamos que, na parte introdutória de cada etapa e tarefas, estão previamente explicitados os seus objetivos.

4.2.1 Etapa 1: Estudar os conceitos fundamentais e a definição do cálculo de probabilidade

Como é óbvio, essa etapa foi elaborada objetivando apresentar os conceitos fundamentais da teoria da probabilidade e a definição indutiva do resultado clássico que nos permite determinar a probabilidade de um evento qualquer de um espaço amostral.

Dessa forma, de maneira a atingir esse objetivo, traçamos uma quantidade de 3 tarefas com propósitos bem delimitados, mas, que ainda sim, mantêm um grau de interdependência, mostrando que nosso produto tem uma construção lógica e contínua. Vamos a descrição de cada uma dessas tarefas.

Tarefa 1. Problematizar questões referentes à determinação de todos os possíveis resultados que podem ser obtidos no lançamento de uma única moeda ou dado, a fim de definir os conceitos fundamentais de probabilidade.

Essa tarefa foi pensada com o objetivo de nos conceder abertura para introduzir os conceitos de experimentos aleatórios, espaço amostral e espaço amostral equiprovável. Para essa finalidade, propomos que sejam levantados os seguintes questionamentos, que, respectivamente, serão oportunos para formalizar cada um desses conceitos na ordem em que aparecem acima.

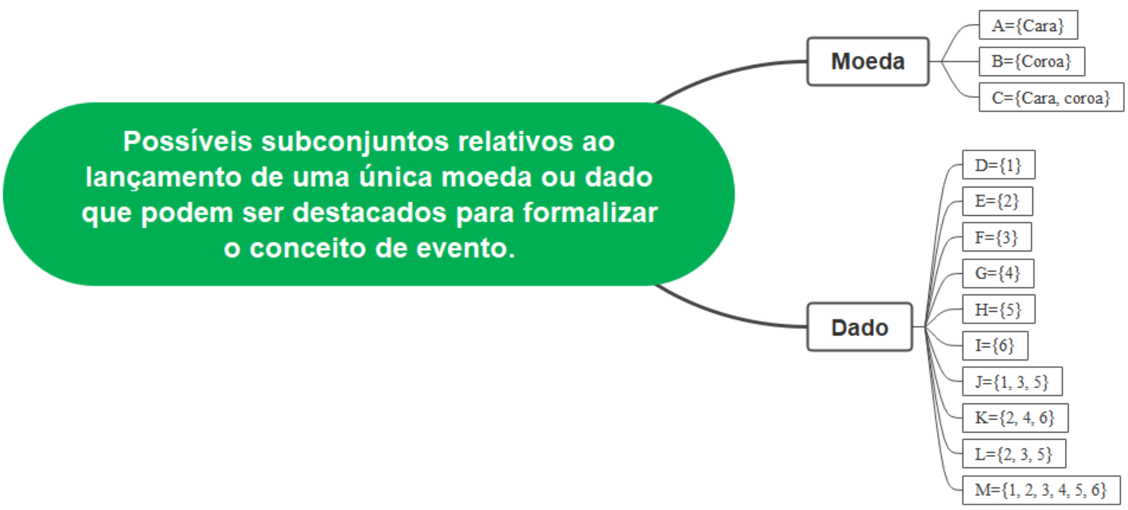
Item 4.1. É possível prever exatamente qual será o resultado antes do lançamento da moeda ou dado?

Item 4.2. Determine todos os possíveis resultados que podemos obter ao lançarmos uma única moeda? E no lançamento de um único dado?

Item 4.3. Cada um dos resultados que podem ser obtidos no lançamento de cada um desses objetos tem a mesma chance de ser obtido em comparação aos demais resultados?

Posteriormente, sugerimos que sejam tomados alguns subconjuntos do espaço amostral, sejam eles formados por cada um dos possíveis resultados (eventos elementares) ou por subconjuntos de elementos que possuem características em comum. Esse exercício nos será útil para definir outro conceito crucial: o evento de um espaço amostral. Veja a seguir, na Figura 4.1, algumas sugestões de subconjuntos/eventos a considerar.

Figura 4.1 – Sugestões de subconjuntos/eventos no lançamento de dados e moedas.



Fonte: Arquivo pessoal.

Logo, a partir dessas iniciativas, estará encerrada a apresentação dos conceitos fundamentais de uma forma menos mecânica e mais produtiva.

Tarefa 2. Definir, intuitivamente, a probabilidade de um evento como a razão entre a quantidade de elementos do evento pela quantidade de elementos do espaço amostral.

Nessa tarefa, buscando minimizar o tempo e maximizar os resultados, significativamente, propomos que o ponto de partida seja a investigação de um dos problemas mais clássicos da probabilidade, que é o de determinar a chance de se obter cara (ou coroa) no lançamento de uma única moeda.

Sendo assim, definindo o evento A, obter cara:

$$A = \{cara\},$$

que admite como espaço amostral o conjunto $\Omega = \{cara, coroa\}$, já definido na Tarefa 1, esse problema nos é útil, justamente, porque é do conhecimento de muitos dos alunos que a resposta é 50%.

Desse modo, aproveitando-nos da definição de porcentagem, que nos diz que, $50\% = \dfrac{50}{100}$ e do conceito de frações equivalentes, que valida a seguinte cadeia de igualdades:

$$P(A) = 50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},$$

por comparação/associação, torna-se viável estabelecer, intuitivamente, essa definição, nosso propósito. Uma vez que 1, o numerador, representa a quantidade de elemento do evento A, e 2, o denominador, representa a quantidade de elementos do espaço amostral, Ω. O que nos permitirá assumir que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n^{o}\ de\ casos\ favoráveis}{n^{o}\ de\ casos\ possíveis}. \tag{10}$$

Por fim, para uma consolidação mais consistente, sugerimos também a análise de outros exercícios cujos os resultados sejam facilmente presumidos (ou de conhecimento de senso comum), sem a necessidade de efetuar cálculos. Os quais, por comparação/assimilação, nos levará, novamente, ao mesmo resultado em (10). A título de exemplificação, trouxemos os seguintes problemas:

Exercício 4.1. Em um jogo de ludo quatro competidores participam: Cardano, Fermat, Pacioli e Pascal. Sabendo que cada um deles tem a mesma chance de ganhá-lo, determine a probabilidade de que Cardano seja o vencedor.

Exercício 4.2. Em uma escola com 100 alunos será sorteado um prêmio no dia do estudante. Se, para cada um dos alunos, for atribuído um único número de 1 a 100, exclusivamente, em um pedaço de papel, o qual, posteriormente, será dobrado e depositado em uma urna. Qual a probabilidade de qualquer um deles seja sorteado?

Na qual, finalmente destacamos que ambas as tarefas (Tarefas 1 e 2), foram pensadas para serem executadas em um período de duas aulas, cada uma delas com 50 minutos de duração.

Tarefa 3. Exercitar o cálculo da probabilidade de um evento.

Definido a probabilidade de um evento, o nosso próximo passo é desafiar os alunos. Sendo assim, é muito importante que o professor ainda utilize dos recursos lúdicos que viemos trabalhando até agora, a moeda e o dado, e formule problemas que possam ser resolvidos por meio do resultado em (10). Para via de exemplificação, apontamos os seguintes itens:

Item 4.4. Qual a probabilidade de obter cara ou coroa no lançamento de uma moeda? E cara e coroa, simultaneamente?

Item 4.5. Qual a probabilidade de, no lançamento de um único dado, obter uma face par? E face ímpar?

Item 4.6. Qual a probabilidade de, no lançamento de um único dado, obter uma face cujo número é primo?

Item 4.7. Sabendo que um número N se diz perfeito se, e somente se, é igual à soma de seus divisores próprios (divisores inteiros positivos de N com exceção do próprio N). Calcule a probabilidade de se obter, no lançamento de um único dado, um número perfeito?

Ademais, é importante também, que nessa fase, o professor exponha a existência de formas diversas de representações numéricas de probabilidades de eventos: frações, números decimais e porcentagens. E, para além, inicie uma breve discussão acerca dos conectivos lógicos **E** e **OU**.

No mais, como uma sequência didática trata-se de um conjunto de atividades com nível crescente de dificuldades, é crucial que o professor introduza mais objetos, moedas e dados, pensando em desenvolver problematizações por meios dos objetos lúdicos explorados até aqui, o que resultará em uma ampliação do espaço amostral e, consequentemente, passará a desafiar o alunado gradativamente.

Além disso, como o conceito de probabilidade mantém relações diretas com as técnicas de contagem, é sugerido que o professor desenvolva em suas aulas problemas envolvendo o Princípio Fundamental da Contagem, permutação, arranjo e combinação. Seja apoiada em recursos lúdicos ou não, entretanto, sem deixar de lado a abstração e o desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo.

Por fim, ressaltamos, que dependendo do nível de aprofundamento dos problemas e o nível de dificuldade dos alunos, essa tarefa pode ser realizada no período de uma ou duas aulas, também de 50 minutos. Assim, estimamos, para a primeira etapa, um total de 4 aulas.

4.2.2 Etapa 2: Apresentar as propriedades de probabilidade

Elaborada para introduzir as quatro propriedades básicas da probabilidade ensinadas ao longo do 2º ano do Ensino Médio, que veremos a seguir. Essa etapa, a qual se constitui de duas tarefas, cada qual, programada para ser realizada no decorrer de duas aulas, cada uma com duração de 50 minutos, também foi planejada para ser desenvolvida a partir de um viés indutivo, visando dar sequência de forma contínua e dialogada com as atividades já executadas. A seguir, veja a descrição das tarefas.

Tarefa 4. Fazer reconhecer a existência de eventos que recebem nomenclaturas especiais e os limites para o cálculo da probabilidade de um evento.

Nesta tarefa incentivamos apresentar, inicialmente, a existência de dois eventos especiais que compõem duas das propriedades da Teoria da Probabilidade abordada no Ensino Médio: evento certo e impossível. Começando pelo evento certo, porém, pensando também em estabelecer uma relação entre as tarefas anteriormente propostas, de forma bem objetiva, sugerimos retomar ao primeiro questionamento do Item 4.4 abordado na Tarefa 3: “Qual a probabilidade de obter cara ou coroa no lançamento de uma moeda?”.

O objetivo de resgatá-lo, além de já tê-lo discutido, é exatamente o fato de que a probabilidade do evento que representa o problema supracitado é 1 (ou 100%) − condição necessária e suficiente para garanti-lo a nomenclatura de evento certo. Uma vez que, sejam:

$$A = \{cara, coroa\} \qquad \text{e} \qquad \Omega = \{cara, coroa\}.$$

Onde A é o evento que representa a possibilidade de obter cara ou coroa no lançamento de uma moeda, é trivial perceber que $P(A) = 1$. Portanto, sendo esse questionamento digno para introduzir esse conceito.

Para além, um outro fator que nos estimulou a escolhê-lo e sugeri-lo é o fato dele expressar a condição de que o conjunto do espaço amostral e o subconjunto do evento certo coincidem e compartilham os mesmos elementos e, à vista disso, a mesma quantidade de elementos. Informação que consideramos crucial. Já que, no Ensino Médio, a enorme gama de problemas probabilísticos resume-se em determinar, por meio das técnicas de contagem, a quantidade de elementos do evento e do espaço amostral, não sendo eficiente e, às vezes impossível, determinar a representação tabular desses conjuntos e todos os seus elementos.

Encerrando sua apresentação, levantamos a necessidade de apontar que esse evento sempre ocorre, independente das circunstâncias. Assim preparando, intuitivamente, o aluno a considerar que 1 (ou 100%) é o limite superior para o cálculo da probabilidade.

Quanto ao outro evento especial, o evento impossível, aconselhamos reaver o segundo questionamento do mesmo Item 4.4 a abordado na Tarefa 3, que quer saber a probabilidade de se obter cara e coroa, simultaneamente, no lançamento de uma única moeda (chamemos de evento B). Sendo assim, definindo que:

$$B = \varnothing \qquad \text{e} \qquad \Omega = \{cara, coroa\},$$

também é simples verificar que $P(B) = 0$ (ou 0%), que é o fator decisivo para qualificarmos um evento como impossível e, portanto, se mostrando uma brecha eficiente para a apresentação formal dessa outra propriedade.

Ademais, similar ao evento certo, reforçamos a necessidade de expor que isso implica que esse evento nunca acontece. E, em vista disso, persuadir os alunos a cogitarem que 0 (ou 0%) é o limite inferior para o cálculo da probabilidade.

Para encerrar a apresentação dos eventos de nomenclatura especial, recomendamos que sejam propostas algumas atividades para que os alunos possam determinar se um evento é certo ou impossível, a seguir, algumas exemplificações:

Exercício 4.3. Qual a probabilidade de se obter o número $x = 4 - 3(4-2) + 3^2$ no lançamento de um único dado?

Exercício 4.4. Lançados dois dados convencionais, observam-se as faces superiores obtidas, somam-se os números correspondentes, e esse é o resultado que se obtém. Por exemplo, se obtermos, no primeiro dado, um número 3, e no segundo, um número 5, o resultado final é 8. Desse modo, calcule a probabilidade de se obter um número cujo o resultado da soma seja diferente de π.

Exercício 4.5. Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. Qual a probabilidade de, ao se retirar duas bolas, sem reposição, a soma ser um número múltiplo de 1? E de 20?

Finalizando, a nossa última parte da presente tarefa é apresentar os limites inferiores e superiores que se podem obter no cálculo da probabilidade (penúltima propriedade). Para isso, aconselhamos, primeiramente, que os alunos sejam instigados a concluir que, se o evento impossível tem probabilidade exatamente igual a 0 (ou 0%), e o evento certo, 1 (ou 100%). Então, a probabilidade de um evento qualquer M, $P(M)$, oscila entre $0 \leq P(M) \leq 1$ (ou $0\% \leq P(M) \leq 100\%$).

Posteriormente, sem deixar de lado o formalismo matemático, propomos que seja apresentada a sua demonstração, tal qual na seção 2.2.1 Propriedades da probabilidade.

Tarefa 5. Estabelecer a relação entre probabilidade de eventos complementares.

Para a realização dessa atividade, assim como as demais a seguir, sugerimos, antes de mais nada, que sejam retomados alguns conceitos da Teoria de Conjuntos, visto que, como apresentado no Capítulo 1, a Teoria da Probabilidade da atualidade mantém relações diretas com definições e propriedades do seu domínio. Posto isso, como no que se restringe a essa atividade, a definição de interesse da Teoria dos Conjuntos é a de conjuntos complementares, apresentadas as devidas formalizações quanto a esse conceito, podemos iniciar a execução da presente tarefa.

Objetivando apresentar a última propriedade da Teoria da Probabilidade que, apesar de muitas vezes passar despercebida, é de extrema importância – probabilidade de eventos complementares – temos que, de antemão, definir dois eventos que expressem exatamente conjuntos complementares. Sejam Ω o espaço amostral, e A e B esses eventos, sabemos que:

$$A \cup B = \Omega \qquad \text{e} \qquad A \cap B = \varnothing. \tag{11}$$

Dessa forma, retomando ao nosso interesse de definir os conceitos da Teoria da Probabilidade de forma mais espontânea, além de estabelecer uma série de ligações com as atividades anteriores. Para a finalidade dessa atividade, indicamos retornar a Tarefa 3, em particular, os Itens 4.4 e 4.5.

Iniciando pelo Item 4.4 (que recomendamos fortemente): "Qual a probabilidade de obter cara ou coroa no lançamento de uma moeda? E cara e coroa, simultaneamente?". Apontamos-os aqui justamente porque cada um dos seus questionamentos representa um evento complementar em relação ao outro, porém, sobretudo, por representarem eventos complementares especiais, evento certo e impossível, respectivamente.

Sendo assim, definindo A o evento de obter cara ou coroa. E B o evento de obter cara e coroa, simultaneamente, temos:

$$A = \{cara, coroa\} \qquad \text{e} \qquad B = \varnothing,$$

logo, é viável que os alunos verifiquem, a partir da definição de conjuntos complementares, que, consequentemente, esses conjuntos, pelo fato de satisfazer as propriedades anteriormente apresentadas em (11), também os sejam.

Daí, o nosso próximo passo é instigá-los a perceberem que, sendo $P(A) = 1$ e $P(B) = 0$, então:

$$P(A) = 1 - 0,$$

o que implica que:

$$P(A) = 1 - P(B). \tag{12}$$

Assim, levando os alunos a levantar a hipótese de que (12) seja uma possível propriedade. Por conseguinte, como isso não é suficiente para fazê-los aceitar que essa relação seja um fato verídico, visto que isso não poderia passar de um acaso. Diante desse impasse, reforçamos a necessidade da realização de outros problemas envolvendo eventos complementares de um mesmo espaço amostral.

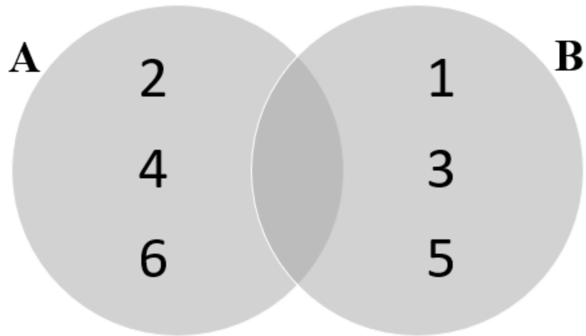
Para tanto, propomos a análise do Item 4.5: "Qual a probabilidade de, no lançamento de um único dado, obter uma face par? E face ímpar?". Que, por sua vez, é tão, ou mais importante quanto o item a, sendo uma abertura para começarmos a trabalhar o Diagrama de Venn, representação muito oportuna em termos de cálculo de probabilidade, e que também pode facilitar a visualização de eventos complementares.

À vista disso, definamos para essa situação o evento A obter face par. E B obter face ímpar, segue que:

$$A = \{2, 4, 6\} \qquad \text{e} \qquad B = \{1, 3, 5\}.$$

a qual podemos representar, em termos de Diagrama de Venn, pela Figura 4.2:

Figura 4.2 – Diagrama de Venn que descreve os eventos do Item 4.5.



Fonte: Arquivo pessoal.

É fácil verificar que:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2},$$

logo, novamente será verificado que (12) é observado. E, dessa forma, podemos consolidar, de forma indutiva, que se A e B são eventos complementares, então (12) é satisfeito.

Por fim, para encerrar essa atividade, levantamos a necessidade de realizar a demonstração formal dessa propriedade, tal qual na seção 2.3 Probabilidade da união de dois eventos, e, como de praxe, propomos também que sejam exercitados tais conhecimentos aqui explorados. Entretanto, de duas formas diferentes.

Para a primeira forma, sugerimos problemas em cadeia, como o Item 4.5, uma vez que eles podem facilitar a compreensão de quando usar a propriedade de eventos complementares. Para via de exemplificação, trazemos os seguintes questionamentos:

Exercício 4.6. Uma moeda é lançada três vezes e, em seguida, é definida uma sequência com caras e coroas. Diante do exposto, calcule a probabilidade de se obter sequências:
a) com apenas caras.
b) com, pelo menos, uma coroa.

Exercício 4.7. Em um jogo envolvendo dados, dois desses objetos são lançados. Em seguida, observam-se as faces superiores, e o resultado que se obtém é exatamente a soma

dos seus valores. Diante disso, calcule a probabilidade de obter:
a) soma maior ou igual a 11.
b) soma menor que 11.

E, quanto à segunda forma, propomos questões mais gerais, onde compete ao aluno escolher o caminho a seguir, o mais óbvio, delimitando os elementos ou a quantidade de elementos do evento correspondente e calculando por meio do resultado em (10), que pode ser mais exaustivo. Ou por meio de eventos complementares, que, em algumas situações, pode se provar mais eficiente. Assim, sugestionamos os seguintes exemplos:

Exercício 4.8. Em uma urna existem 30 bolas numeradas de 1 a 30. Se retirarmos ao acaso uma bola, qual a chance do número que representá-la ser composto?

Exercício 4.9. Um baralho convencional é composto por 52 cartas. Se tirarmos duas cartas, sem reposição, qual a probabilidade de que não sejam um par de damas?

4.2.3 Etapa 3: Discutir probabilidade da união de dois eventos e probabilidade condicional.

Assim como a etapa anterior, a presente etapa também consiste no desenvolvimento de duas tarefas, cada uma delas planejada para ser executada em um período de duas aulas, totalizando quatro aulas de 50 minutos. Como já exposto, na sua introdução, tem como objetivo apresentar a probabilidade da união de dois eventos, bem como da probabilidade condicional. Expresso isso, vejamos o detalhamento das atividades.

Tarefa 6. Explicar a probabilidade da união de dois eventos.

Mantendo uma relação de dependência com observações pertinentes ao campo da Teoria dos Conjuntos, a probabilidade da união de dois eventos também requisitará uma pequena retomada a conceitos do seu domínio.

Em específico, da relação que nos permite determinar o número de elementos da união de dois conjuntos, que nos diz que, se A e B são dois conjuntos de um mesmo conjunto universo, então:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \tag{13}$$

Para além, como o nosso objetivo, nessa tarefa, é induzir os alunos ao resultado que nos permite calcular a probabilidade da união de dois eventos. A mera demonstração dele, por meio da substituição de (13) em (10), ao se calcular a probabilidade de $P(A \cup B)$, não é suficiente.

Assim, recomendamos, como ponto de partida (primeira fase da atividade), incentivar, por meio de recursos lúdicos e eventos mutuamente exclusivos das quais é possível obter, logicamente, por meio de (10), o resultado da probabilidade da união (sejam esses eventos X e Y), que:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y). \tag{14}$$

E, posteriormente (segunda fase da atividade), problematizar o fato de que, quando existem elementos comuns aos dois conjuntos, a probabilidade que se obtém por meio de (14) é imprecisa, nos levando a inevitável necessidade de subtrair a probabilidade da intersecção dos dois eventos.

Sendo assim, tomando o dado como recurso lúdico, propomos, para a primeira fase, investigar a probabilidade da união de dois eventos mutuamente exclusivos, como os das sugestões a seguir:

Item 4.8. Qual a probabilidade de se obter, no lançamento de um dado, um número divisível por 3 ou por 5?

Item 4.9. Qual a probabilidade de se obter, no lançamento de um dado, um número par ou múltiplo de 5?

Uma vez que é intuitivo determinar o conjunto dos casos favoráveis, no caso do Item 4.8, $\{3, 5, 6\}$, levando-nos a concluir que a probabilidade do evento em questão é $\frac{3}{6}$. Mesmo sem o uso rigoroso da linguagem matemática que, a princípio definiria o evento X, obter um número divisível por 3, Y, obter um número múltiplo de 5, e $X \cup Y$, obter um número divisível por 3 ou múltiplo de 5, cujos os casos favoráveis encontram-se delimitados a seguir:

$X = \{3, 6\}$,
$Y = \{5\}$,
$X \cup Y = \{3, 5, 6\}$.

Para só depois determinar que:

$$P(X \cup Y) = \frac{3}{6},$$

formalismo que se faz necessário para uma compreensão mais significativa da probabilidade da união de dois eventos.

Posto isso, encorajamos para essas sugestões de problemas, o seguinte roteiro:

(i) Definir os conjuntos que representam os eventos envolvidos individualmente, o conjunto que representa o evento da união e os elementos de cada um deles, tal qual como fizemos anteriormente acima;

(ii) Determinar a probabilidade da união dos dois eventos intuitivamente, sem o uso de fórmulas específica, usando apenas o resultado em (10);

(iii) Refletir sobre a possibilidade de se estabelecer uma relação entre a probabilidade da união de dois eventos e a probabilidade dos eventos envolvidos, levando aos alunos a cogitarem que (14) é uma relação verídica.

Vejamos a sua aplicabilidade por meio do Item 4.8. Iniciando pelo passo (i), onde é sugerido definir os seguintes conjuntos/eventos, tal qual fizemos anteriormente (ainda levando em consideração as designaçãos de cada um dos eventos tomados mais acima):

$X = \{3, 6\}$,
$Y = \{5\}$,
$X \cup Y = \{3, 5, 6\}$.

Seu propósito é fornecer uma base sólida de informações que nos levará a considerar (14) como um possível resultado para efetuar o cálculo da probabilidade da união de dois eventos.

Posteriormente, no passo (ii), onde é imposto que determinemos a probabilidade da união dos dois eventos em questão, de maneira intuitiva. Sua função é antecipar esse resultado que, para essa situação é $P(A \cup B) = \dfrac{3}{6}$. Permitindo que os alunos pensem em formas de alcança-lo a partir do desenvolvimento do roteiro.

Finalmente, quanto ao passo (iii), consiste em colocar o aluno na posição de matemático. Conjecturando e testando suas hipóteses, até concluir que, para o caso investigado, mediante a consequência de:

$$P(X) = \frac{2}{6} \qquad \text{e} \qquad P(Y) = \frac{1}{6},$$

que (14) é, possivelmente, uma verdade absoluta (apesar de ser uma informação precipitada). Quanto ao Item 4.9, podemos fazer o processo análogo ao Item 4.8, para via de um estabelecimento de um maior grau de aceitação.

Encerrado essa primeira fase, o nosso objetivo agora passa a ser questionar se (14) é uma regra geral, que não é. Em virtude disso, também orientamos que sejam realizadas investigações sobre a probabilidade da união de dois eventos que, similar a fase anterior, também possam ser facilmente determinadas por meio de uma reflexão lógica, a partir de (10).

Porém, agora envolvendo eventos representados por conjuntos não mutuamente exclusivos, o que garantirá uma quebra de expectativa quanto a (14). Dessa forma, indicamos abordar questões como:

Item 4.10. Qual a probabilidade de se obter um número par ou primo no lançamento de um único dado?

Item 4.11. Qual a probabilidade de obter, no lançamento de um dado, um número múltiplo de 2 ou 3?

Onde sugerimos o mesmo passo a passo e intencionalidade apresentado anteriormente, na primeira fase, entretanto, com uma ligeira mudança no passo (iii), que agora passa a ser:

(iii) Verificar se (14) acontece.

A qual sabemos que, não. Dado que, se tomarmos o Item 4.10 para via de exemplificação, definindo o evento A, obter um número par, B, obter um número primo, e $A \cup B$, obter um número par ou primo no lançamento de um dado, o que implica em:

$A = \{2, 4, 6\}$,
$B = \{2, 3, 5\}$,
$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,

no passo (i), onde é importante deixar claro que na representação tabular dos conjuntos não se pode repetir termos, em virtude de, no conjunto da união, 2 satisfazer as duas condições. E determinado que, $P(A \cap B) = \dfrac{5}{6}$, no passo (ii).

Em decorrência do fato de:

$$P(A) = \frac{3}{6} \qquad \text{e} \qquad P(B) = \frac{3}{6},$$

é viável verificar que:

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6} \neq P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1,$$

que nos leva a questionar o resultado (14), nosso objetivo.

Sendo assim, algumas outras intervenções se fazem necessárias para alcançar o propósito da nossa tarefa, que é definir um resultado geral para a probabilidade da união de dois eventos, sejam eles mutuamente exclusivos ou não. E, o caminho que traçamos para esse fim começa pela seguinte pergunta: “Em quanto a probabilidade obtida por meio de (14) é superior a probabilidade precisa da união dos dois eventos?”.

Questionamento esse que consideramos muito oportuno, visto que, a partir dele, os alunos serão levados a fazer a seguinte operação:

$$P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

Finalizando a segunda fase, a nossa próxima intervenção é instigá-los a calcular a probabilidade da intersecção dos eventos A e B, fazendo-se verificar que, por intermédio de:

$A = \{2, 4, 6\}$,
$B = \{2, 3, 5\}$,
$A \cap B = \{2\}$,

que então,

$$\frac{1}{6} = P(A \cap B).$$

Portanto, permitindo-nos inferir que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{15}$$

Por fim, para uma aceitação mais sólida, sugerimos que sejam trabalhados todos os Itens 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11 por meio desse resultado, mostrando que é válido, independente da condição dos conjuntos a qual se deseja calcular a probabilidade da união. E, além disso, retomar a (14), evidenciando que ele é válido apenas sob a condição dos conjuntos serem mutuamente exclusivos.

Ademais, também sugerimos uma demonstração do resultado por meio de (13) e (10). E, finalmente, propomos que sejam realizados alguns exercícios. Vide os exemplos:

Exercício 4.10. Em um jogo de cartas uma pessoa permanece se, ao escolher uma única carta, conseguir um naipe de cor vermelha ou uma rainha. Se José realizar a primeira retirada de cartas dentre a 52, qual a probabilidade de não encerrar a sua participação no jogo na sua primeira ação?

Exercício 4.11. 360 pessoas participaram de uma rifa beneficente. Dessas pessoas, 90 são amigos do beneficiário, 50 são familiares e 20 são amigos e familiares, simultaneamente. Sabendo que, tanto os amigos quanto a família prometeram não aceitarem receber o prêmio, caso ganhassem, qual a probabilidade de o beneficiário ter sob sua posse, após a premiação, tanto o valor arrecadado quanto o prêmio ofertado?

Exercício 4.12. Uma urna vedada encontra-se cheias de bolinhas numeradas de 1 a 50, sendo que não existem bolinhas com números repetidos. Se uma pessoa retirar uma bolinha da urna, quais são as suas chances de ter escolhido uma bolinha de número par ou primo maior ou igual a 7?

Exercício 4.13. Levi coleciona histórias em quadrinhos de dois gêneros: ficção científica e policial. Sabendo que em sua coleção ele acumulou um total de incríveis 250 quadrinhos, das quais destacam 70 volumes de ficção científica, 30 do gênero policial e 15 de ambos os gêneros como os seus preferidos, calcule:
i) A probabilidade de, em sua estante, que não é nada organizada, Levi pegar aleatoriamente um quadrinho que está entre seus preferidos.
ii) A probabilidade de escolher um dos seus não favoritos?

Tarefa 7. Explanar probabilidade condicional.

Nessa tarefa, assim como de costume, também iremos explorar problemas das quais os resultados da probabilidade podem ser facilmente determinados, mesmo sem o uso de fórmula específica. Entretanto, usando como recurso de apoio o baralho convencional de 52 cartas.

Dessa forma, aconselhamos explorar problemas do tipo:

Item 4.12. Após embaralhar um baralho com todas as 52 cartas, Liz e Maria propuseram o seguinte jogo de adivinhações: dentre as 52 cartas, uma delas retiraria uma carta e a entregaria outra. Porém, para maximizar as suas chances de acertar qual carta sorteara, teria direito a uma única pergunta.

Analisando a situação hipotética de que Liz tenha retirado a primeira carta fazendo a Maria a seguinte pergunta: “Qual o naipe da carta?”. Sabendo que a resposta foi paus, qual a probabilidade de ter sido um rei?

Item 4.13. Guilherme e Renato realizam uma investigação relativa às 52 cartas de um baralho. O foco dela é calcular as chances de, aleatoriamente, retirar uma determinada carta ou um conjunto delas que satisfazem determinada condição. Mediante a isso, eles fizeram a seguinte indagação: “qual a probabilidade de tirar uma carta com valor numérico par, sabendo que é maior que 6?”.

Se eles responderam corretamente esse problema, sua resposta foi exatamente?

Esses exemplos foram escolhidos justamente por duas razões. A primeira, inevitavelmente, é o fato de ser fácil calcular as probabilidades dos problemas em questão, por meio de (10), após fazermos uma pequena reflexão, que, no caso do Item 4.12, a título de exemplo, é $\dfrac{1}{13}$.

E, quanto à segunda razão, sabendo que, definido os seguintes conjuntos, ainda referentes ao problema das cartas de Liz e Maria:

$A = \text{Ser rei} \Rightarrow n(A) = 4,$
$B = \text{Ser paus} \Rightarrow n(B) = 13,$
$A \cup B = \text{Ser um rei ou ser de paus} \Rightarrow n(A \cup B) = 16,$
$A \cap B = \text{Ser rei e ser de paus} \Rightarrow n(A \cap B) = 1,$

é viável esperar que, nessa fase, os alunos suspeitem que o resultado buscado provem de alguma relação entre eles. Tomando vantagem da consequência do número de elemento de cada um ser distinto dos demais (o que acontece também no Item 4.13), torna-se fácil induzir que a probabilidade condicional é dada por meio da razão entre o número de elementos da intersecção, $n(A \cap B)$, pelo número de elementos do evento que sabemos que ocorreu, $n(B)$. Em virtude de:

$$\frac{1}{13} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Portanto, estará definido que:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}, \tag{16}$$

restando, agora, discutir a simbologia adotada para representar a probabilidade condicional, $P(A/B)$. Que representa a probabilidade de A ocorrer dado que ocorreu o evento B.

Contudo, como (16) é apenas um dos resultados possíveis para determinar a probabilidade condicional, reforçamos ainda a necessidade de apresentar o segundo resultado:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

que advém de (16) dividindo-se, apenas, tanto o numerador quanto o denominador pela quantidade de elementos do espaço amostral, $n(\Omega)$. Devendo, ainda, o professor demonstrar que isso é possível em termos de divisão de fração, não interferindo no resultado, uma vez que esse processo é equivalente a multiplicar por 1.

Por fim, levantamos a indispensabilidade de praticar os conhecimentos aqui desenvolvidos. Assim, propomos a realização dos seguintes exercícios:

Exercício 4.14. Um dado é lançado e, posteriormente, é observado a face oposta. Sabendo que uma pessoa obteve uma face que representa um número primo, qual a chance de ele ser par?

Exercício 4.15. Alan lança uma moeda três vezes e, em seguida, analisa a sequência de caras e coroas obtidas. Sabendo que, no mínimo, Alan obteve uma sequência com duas caras, qual a probabilidade de ele obter a sequência (cara, coroa, cara)?

Exercício 4.16. Rafael e Vinícius estão brincando de quem retira a carta com valor mais alto do baralho. Nas regras do jogo definidas por eles, o ás vale 20, rei, valete e dama valem 15, e as demais cartas (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) valem os respectivos valores que representam. Sabendo que Rafael, o primeiro a retirar a carta, escolheu uma de valor superior a 9, qual a chance de ela ser um rei, valete ou dama?

Exercício 4.17. Uma urna contém 25 bolinhas coloridas das quais: 10 são brancas, 10 são amarelas e 5 são azuis. De acordo com essas informações, calcule a probabilidade de se obter, na segunda retirada, uma bolinha de cor azul sabendo que, na primeira retirada, sorteou-se uma bolinha de cor azul, também, que:
i) foi reposta na urna após a observação.
ii) não foi reposta na urna após sua observação.

Dessas destacamos o item (i) do Exercício 4.17 para introduzir o conceito de eventos independentes.

4.2.4 Etapa 4: Explorar a história da probabilidade, problematizando o jogo da trilha.

Concebida por duas razões, essa etapa tem a característica de trazer a tona aspectos históricos ligados à origem da probabilidade — que nasceu do estudo dos jogos de azar — e desafiar os alunos a estudar probabilisticamente um desses recursos, realizando uma aproximação entre esse tema e a História da Matemática. Outrossim, fazendo os alunos assumirem a posição de matemáticos, como é esperado na sequência didática de Fedathi.

Para esse fim, foram programadas as duas últimas tarefas. A primeira, que aconselhamos realizar em uma única aula de 50 minutos, referente a história da probabilidade. E a segunda, o desafio do jogo da trilha, conforme veremos mais à frente, em um total de duas aulas. Vejamos a exposição dessas atividades.

Tarefa 8. Discutir a história da probabilidade.

Percorrido toda essa nossa trajetória até aqui e fugindo um pouco do previsível que nos levaria, inicialmente, a introduzir a história da probabilidade, para só depois explorá-la.

Nesse produto didático, especificamente, decidimos trabalhar toda a parte teórica matemática a partir dos recursos catalisadores que levaram ao seu advento —os jogos de azar — sem como isso deixar explícito seu envolvimento histórico na construção desse saber. Para, somente, posteriormente, respaldar sobre essa relação histórica, deixando evidente o fato de adotarmos tais recursos ao longo das atividades planejadas, assim justificando o fato de sempre termos os utilizados como ponto de partida para cada uma das tarefas.

Assim, para essa última ação, instruímos, como já é perceptível, que seja explorada a história da probabilidade. Portanto, indicamos as seguintes possibilidades de materiais para a efetivação da presente tarefa. Inicialmente, apontamos o Capítulo 1 deste trabalho, uma vez que, embora seja um texto elaborado para o nível superior de ensino, apresenta leitura simples e de fácil compreensão. Sendo, portanto, uma possível referência.

Quanto uma outra possibilidade, indicamos também os recortes históricos introdutórios apresentados no início da unidade de probabilidade nos livros "#Contato matemática" de Souza e Garcia (2016) e "Matemática — Paiva" de Paiva (2010), dado que, apesar de muito resumido, deixa explícito o envolvimento da origem da probabilidade com o estudo dos jogos de azar, apresentando algumas das figuras envolvidas. E, portanto, sendo um estopim para discuti-la com algumas outras pontuações do professor que adotar essa metodologia.

E, por fim, sendo os recursos audiovisuais recursos exemplares e, talvez, mais interessantes para introduzir essa temática, apontamos materiais como vídeos. Para via de exemplificação, apontamos o material “História da Matemática - Aula 14 – Probabilidade[1]”, da Universidade Virtual do Estado de São Paulo (UNIVESP). Que, além de ser menos cansativo e mais dinâmico, explora ilustrações animadas e exemplos que, decorrido as demais 7 tarefas anteriores, tornam-se compreensíveis para o alunado a essa altura.

Tarefa 9. Desafiar os alunos a partir do estudo do jogo da trilha.

Popular no Brasil, o jogo da trilha é um jogo de tabuleiro simples que envolve o lançamento de dados e múltiplos jogadores. Veja a ilustração desse tabuleiro na Figura 4.3 a seguir.

Figura 4.3 – Jogo da trilha.

Fonte: Arquivo da internet.

[1] Endereço para acesso ao vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=r0GnS_SWU2s>

Possuindo regras de fácil compreensão, o jogo consiste em, a partir da seleção das peças que representarão os jogadores (na ilustração acima, cada uma das coroas circulares de cor verde, azul, vermelha e amarela), que, inicialmente, repulsam sobre a palavra "INÍCIO", no tabuleiro, fazê-las percorrer, em menor tempo, todos os trilhos (cada uma das casas numeradas), assim alcançado o "X" em destaque que marca o "FIM" do jogo.

Por conseguinte, para essa finalidade, os jogadores devem obedecer a algumas condições. Primeiramente, definir uma sequência entre os jogadores que determinará, até o fim do jogo, a ordem do lançamento do dado, se mantendo inalterada. Após isso, cada um dos jogadores, respeitando a sua respectiva vez, deve lançar o dado, na qual o número da face superior implica o total de trilhos que a peça se deslocará. Por exemplo, se o jogador da peça verde se encontra no "INÍCIO" e, no primeiro lançamento do dado, obtém face 2. Então a peça deve se deslocar duas casas, alcançando o trilho 2.

Por fim, uma última regra consiste em obedecer às condições dos trilhos especiais e suas implicações. Para via de exemplificação, suponha que no início do jogo o jogador representado pela peça verde tenha obtido no dado uma face 3. Assim sua peça, nessa jogada, alcançará o trilho 3, um dos trilhos especiais, que tem a seguinte imposição: avançar 3 casas. Portanto, o jogador deve acatar essa instrução, assim se direcionando para a trilha 6.

Destarte, como é viável analisar, pelo fato do mérito de ganhar depender exclusivamente do fator sorte, podemos classificar o jogo da trilha como um jogo, indiscutivelmente, de azar. Assim, para encerrar as ações planejadas, propomos, como último desafio, estudá-lo, promovendo, desse modo, uma imersão ainda maior aos alunos sobre a história da matemática, dando a eles a oportunidade de experimentar e investigar um jogo de azar, similar a trajetória dos grandes nomes da Matemática envolvidos no desenvolvimento da Teoria da Probabilidade.

Todavia, como essa tarefa é um desafio, arquitetamos uma lista de problemas que devem ser trabalhados ao longo do seu desenvolvimento, onde nos esforçamos para cobrir a maior parte da teoria abordada ao longo do produto didático. Na qual, de antemão, destacamos aqui o método de caracterização dos elementos dos eventos e espaço amostral que recomendamos: a composição do número obtido na face superior do dado, seguido da respectiva localização final da peça (respeitando as condições dos trilhos especiais, se houver), no tabuleiro, para melhor visualização/compreensão.

Assim, por exemplo, se o jogador encontra-se no trilho 17, antes do lançamento do dado. Sabendo que o jogador tem a possibilidade de percorrer 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 trilhos, determinado pela face superior do dado, quando lançada, que tem como consequência, a posição da peça, respectivamente, no trilho 16 (acatando a exigências do trilho 18), 19, 20, 21, 23 (acatando a exigência do trilho 22) e 23. Sugerimos que cada elemento seja representado da seguinte forma: $X[Y]$. Onde X e Y designam:

$$\underset{\textbf{FACE SUPERIOR DO DADO}}{\overset{\textbf{X}}{\downarrow}} \quad \underset{\textbf{LOCALIZAÇÃO FINAL DA PEÇA}}{\overset{\textbf{[Y]}}{\downarrow}}$$

Consequentemente, para a situação acima analisada, podemos determinar os elementos do espaço amostral da seguinte forma:

$$\Omega = \{1[16], 2[19], 3[20], 4[21], 5[23], 6[23]\}.$$

Encerrada a exposição da caracterização dos elementos. Vejamos agora os exercícios planejados. Iniciando pelo resultado clássico de probabilidade, apontamos os exercícios a seguir:

Exercício 4.18. No lançamento de um único dado, qual a probabilidade de, no início do jogo, alcançar uma casa par no tabuleiro? E ímpar?

Exercício 4.19. Se o jogador encontra-se no trilho 4, qual a probabilidade de, no próximo lance, alcançar a casa 5 com um único lançamento do dado?

Em que, para via de exemplificação, trazemos a resolução do Exercício 4.18.

Resolução Exercício 4.18:

Querendo determinar, inicialmente, a probabilidade de, no início do jogo, alcançar um número par no tabuleiro, seja esse evento A. A princípio, temos as seguintes possibilidades: obter, no dado, face 2, 4 ou 6. Que, implicam, respectivamente, alcançar o trilho 2, 4 ou 6. Porém, como ao se obter face 3, alcançamos, mediante a imposição do trilho especial 3, o trilho 6. O que, nos permite decretar, para o nosso estudo, que o trilho 3 é exatamente igual ao trilho 6. Mediante essas considerações, temos que:

$A = \{2[2], 3[6], 4[4], 6[6]\}$
$\Omega = \{1[1], 2[2], 3[6], 4[4], 5[5], 6[6]\}.$

Assim,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Quanto ao segundo questionamento: alcançar um trilho ímpar no ínicio do jogo. Foi formulado com o propósito de utilizar a relação existente entre a probabilidade de eventos complementares. Sendo assim, tomando A^C como o evento alcançar um trilho ímpar no início da jogatina, temos que:

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

logo, está resolvido.

Quanto ao Exercício 4.19, apenas um comentário. Também foi pensado para que os alunos utilizassem o resultado clássico de probabilidade, contúdo, devido a sua simplicidade, foi preparado para que os mesmos começassem a se habituar a determinar o espaço amostral e os eventos nessas circunstâncias. Desse modo, conduzindo os alunos a uma maior familiaridade com o estudo probabilístico do jogo da trilha.

Dando prosseguimento a nossa tarefa, os próximos exercícios que planejamos trata-se da probabilidade da união de dois eventos. Portanto, elaboramos os seguintes problemas:

Exercício 4.20. Qual a probabilidade de, no início do jogo, com um único lançamento de dado, o jogador alcançar um trilho de número par ou maior ou igual a 3, no tabuleiro, obedecendo as regras do jogo?

Exercício 4.21. Considerando o início do jogo como o trilho número 0, se o jogador encontra-se na casa número 4 antes do lançamento do dado, qual a probabilidade de alcançar, no tabuleiro, uma casa par ou uma casa maior ou igual a 5 respeitando as exigências das trilhas?

Exercício 4.22. Se o jogador encontra-se na trilha 17, qual a probabilidade dele alcançar, com um único lançamento de dado, a casa 23 e quase ganhar o jogo ou ficar mais distante do seu propósito, voltando casas?

Na qual acrescentamos que o Exercício 4.20 é um problema comum de probabilidade de eventos não mutuamente exclusivos. O Exercício 4.21 é um problema que trata de probabilidade da união cujo o resultado é 1, logo um evento certo. E, por fim, o Exercício 4.22 é um típico problema que trata de probabilidade da união de eventos mutuamente exclusivos. Para via de elucidação, vejamos a resolução do Exercício 4.21.

Resolução Exercício 4.21:

Definamos, para essa situação, estando localizados no trilho 4, os eventos:

$A =$ Alcançar uma casa par no tabuleiro $= \{2[6],\ 4[8], 5[0], 6[10]\}$.
$B =$ Alcançar uma casa maior ou igual a 5 no tabuleiro $= \{1[5], 2[6], 3[5], 4[8], 6[10]\}$
$A \cap B =$ Alcançar, no tabuleiro, uma casa par ou uma casa maior ou igual a 5,
$A \cap B = \{2[6], 4[8], 6[10]\}$,

na qual o espaço amostral é:

$$\Omega = \{1[5], 2[6], 3[5], 4[8], 5[0], 6[10]\},$$

Pelo resultado que nos permite calcular a probabilidade da união de dois eventos, em particular, a probabilidade de alcançar, no tabuleiro, uma casa par ou uma casa maior ou igual a 5, levando em consideração a exata localização inicial da peça no tabuleiro (trilho 4), que, em linguagem matemática, podemos simplificar por $P(A \cap B)$. Temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1,$$

um evento certo, como já havíamos mencionado, possibilitando uma retomada a essa propriedade.

Decorrido todo esse percurso, concluímos a nossa atividade com algumas sugestões de exercícios referentes à probabilidade condicional. Vejam-nos abaixo:

Exercício 4.23. Sabendo que, no primeiro lançamento da partida, um jogador descansou, no tabuleiro, a sua peça sobre um número ímpar seguindo as exigências dos trilhos especiais, qual a probabilidade desse número ser primo?

Exercício 4.24. Sabendo que, quando a peça do jogador estava posicionado sob o trilho 8, ele obteve um número ímpar no lançamento do dado, qual a probabilidade de alcançar um trilho de número maior que 10 no tabuleiro?

Por conseguinte, de forma habitual, exemplificaremos resolvendo um desses problemas. Tomemos o Exercício 4.24.

Resolução Exercício 4.24:

Estando situada no trilho de número 8, no tabuleiro. E sabendo que foi obtido um número ímpar no lançamento do dado. Querendo saber a probabilidade de, dada essas condições, alcançarmos um número maior que 10 no tabuleiro, definamos os seguintes conjuntos:

$A =$ Alcançar um número maior que 10 no tabuleiro $= \{3[11], 4[12], 5[13], 6[16]\}$,
$B =$ Obter um número ímpar no lançamento do dado $= \{1[0], 3[11], 5[13]\}$,

na qual a intersecção entre os eventos, o conjunto $A \cap B$, é:

$$A \cap B = \{3[11], 5[13]\}.$$

Almejando calcular $P(A/B)$, que é exatamente igual a:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{3},$$

concluindo o problema, onde acrescentamos, para via de ampliação de conheciementos, fazê-los, em sala de aula, verificar se esses eventos são dependentes ou independentes. A qual, de imediato, por meio dos conjuntos já definidos, verificamos que são independentes, em virtude de:

$$P(A/B) = \frac{2}{3} = P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

onde o espaço amostral, referente ao evento A, é o conjunto:

$$\Omega = \{1[0], 2[10], 3[11], 4[12], 5[13], 6[16]\}.$$

Por fim, antecipamos que, mediante ao nosso propósito de cobrir a maior parte do conteúdo de probabilidade abordado no Ensino Médio, o Exercício 4.23 refere-se a probabilidade de eventos dependentes, e, assim, está encerrada essa atividade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como analisado, o processo de ensino e aprendizagem da Teoria da Probabilidade no Ensino Médio enfrenta inúmeros desafios. Como já mencionado, um dos principais motivos é a falta de empenho de um número significativo de professores do Ensino Fundamental, que se negam a ensiná-la ainda nessa etapa obrigatória da Educação Básica. Sobrecarregando, dessa forma, os professores do Ensino Médio, que, por sua vez, têm a incubência de se desdobrarem para lecionar, desde o básico, essa matéria a qual os alunos já deveriam ter possuído um mínimo contato.

Todavia, como a Teoria da Probabilidade possui um alto grau de complexidade, uma vez que exige uma análise minuciosa e detalhista, muita das vezes, se relacionando, diretamente com outros assuntos também complexos, como as técnicas de contagem, torna-se ainda mais viável considerar que ensiná-la sob tais condições é um desafio enorme.

Por conseguinte, investigar indagações como o nosso problema de pesquisa: "O ensino da probabilidade desenvolvido a partir de uma sequência didática elaborada com enfoque no estudo dos jogos de azar podem contribuir com o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo nas turmas do 2º ano do Ensino Médio?", torna-se crucial, em razão de possibilitar o surgimento de novas e atraentes estratégias didáticas diferentes das arcaicas e, às vezes, pouco significativas técnicas tradicionais.

Que, por sua vez, alcançado o nosso objetivo geral de propor uma situação didática sobre a Teoria da Probabilidade no 2º Ano do Ensino Médio por meio dos jogos de azar — o produto didático probabilístico apresentado, juntamente com os objetivos específicos já apresentados que, resumidamente, consistem em discutir a história da probabilidade, analisar as sequências didáticas e os jogos como recursos didáticos e, por fim, estabelecer uma relação entre sequência didática, o ensino da probabilidade e o estudo de jogos de azar. Nos permitiram contestar nossa hipótese inicial.

Portanto, concluir que, sim, é possível fomentar o ensino da Teoria da Probabilidade por meio dessa tripla e dependente relação que, fazendo uso da sequência didática de Fedathi, deu origem a nossa inovadora, lúdica, e atrativa proposta. A qual carrega em sua essência uma postura ativa de aprender fazendo, hipotetizando, testando, encerrando-se com uma demonstração matemática mais elaborada. Dado que aprender e se divertir não exclui a necessidade de uma apresentação formal dos conceitos matemáticos.

A vista disso, reiteramos que a escolha da caracterização da pesquisa adotada e descrita anteriormente na seção da Metodologia foi apropriada. Fato que podemos contestar em razão das nossas finalidades terem sido alcançadas. Mesmo levando em conta algumas dificuldades, como por exemplo, as escassas pesquisas quanto à história da probabilidade ou as discussões sobre sequências didáticas no processo de ensino e aprendizagem (com exceção de produtos didáticos, nesse quesito existe uma grande diversidade de materiais) em território nacional. O desafio de elaborar uma proposta autêntica, como é o caso da análise do jogo do trilha no campo probabilístico, escrita do trabalho, dentre outros.

Adversidades essas que, à primeira vista podem parecer um enorme empecilho, mas que são muito importantes, pois contribui em vários aspectos, favorecendo, assim, a origem de situações didáticas criativas, novas e estimulantes. Algo vital, visto as exigências e aspirações da sociedade contemporânea. E que, como bônus, incrementa o desenvolvimento profissional e pessoal de quem se propõe e fazê-las.

Por fim, acrescentamos que nosso produto didático pode ser aperfeiçoado com novas ideias, especificamente, na parte do jogo da trilha. Para via de inspirações para trabalhos posteriores, apontamos a possibilidade de inserir o lançamento de uma moeda no jogo antes do lançamento do dado de cada jogador. Dessa forma, por exemplo, podemos pré-definir cara para um único lançamento do dado e coroa para dois lançamentos. Consequentemente, complexificar o espaço amostral e daí elaborar novos problemas, o que nos propiciará um leque de novas opções.

REFERÊNCIAS

ARCEGO, P.; BERLANDA, J. C. A história da matemática como meio de interlocução no ensino da probabilidade. 2016.

BORBA, R.; SOUZA, L. d. O.; CARVALHO, J. I. F. de. Desafios do ensino na educação básica de combinatória, estatística e probabilidade. **EM TEIA-Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Universidade Federal de Pernambuco, v. 9, n. 1, p. 1–24, 2018.

BOYER, C. B. **História da matemática**. [S.l.]: Editora Blucher, 2010.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. estabelece as diretrizes e parâmes da educação nacional. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, 1996.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. **Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF**, 1998.

BRASIL. Base nacional comum curricular. **Ministério da Educação. Brasília: MEC**, 2018.

BRIGHENTE, M. F.; MESQUIDA, P. Paulo freire: da denúncia da educação bancária ao anúncio de uma pedagogia libertadora. **Pro-Posições**, SciELO Brasil, v. 27, p. 155–177, 2016.

CALABRIA, A. R.; CAVALARI, M. F. Um passeio histórico pelo início da teoria das probabilidades. **Campinas: SBHMAT**, 2013.

CASTOLDI, R.; POLINARSKI, C. A. A utilização de recursos didático-pedagógicos na motivação da aprendizagem. **I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 684, 2009.

COSTA, D. E.; GONÇALVES, T. O. Compreensões, abordagens, conceitos e definições de sequência didática na área de educação matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, SciELO Brasil, v. 36, p. 358–388, 2022.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações**. São Paulo: Ática, 2016.

EVES, H. W. *et al.* **Introdução à história da matemática**. [S.l.]: Unicamp Campinas, 2011.

GADELHA, A. Uma pequena história da probabilidade.[sn]. 2004.

GONçALVES, E. d. S. Contribuições de uma sequência didática com resolução de problemas de análise combinatória. 2020.

GROENWALD, C. L. O.; ZOCH, L. N.; HOMA, A. I. R. Seqüência didática com análise combinatória no padrão scorm. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 22, n. 34, p. 27–55, 2009.

MAROQUIO, V. S. Sequências didáticas como recurso pedagógico na formação continuada de professores didactic sequences as a pedagogical resource in continuing teacher education. **Brazilian Journal of Development**, v. 7, n. 10, p. 95397–95409, 2021.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas**. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2009.

NASCIMENTO, J. C. P. d. *et al.* Um estudo sobre a valorização e as dificuldades do ensino de probabilidade na educação básica. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2017.

NUNES, V. A. *et al.* A utilização dos jogos lotéricos para o ensino de probabilidade no ensino médio. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2015.

OKADA, A.; SHEEHY, K. O valor da diversão na aprendizagem on-line: um estudo apoiado na pesquisa e inovação responsáveis e dados abertos. **Revista e-Curriculum**, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, v. 18, n. 2, p. 590–613, 2020.

PAIVA, M. R. **Matemática — Paiva**. São Paulo: Moderna, 2010.

PASDIORA, N. M. W. L.; MÉDIO, C. E. S. J.-E.; LAPA-PR, P. Jogos e matemática: uma proposta de trabalho para o ensino médio. **Colégio Estadual São José–Ensino Médio e Profissionalizante Lapa–PR**, 2008.

PAULA, B.; BARRETO, D. E. S. Sequência didática de matemática com livros paradidáticos na perspectiva de uma avaliação formativa e reguladora. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo**, v. 13, 2016.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. D. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico-2ª Edição**. [S.l.]: Editora Feevale, 2013.

SANTANA, M. Renata Moraes de. **O acaso, o provável, o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2011.

SANTOS, J. P. d. **A teoria da probabilidade e a teoria dos jogos em uma abordagem para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Brasil, 2016.

SANTOS, R. A. B. d.; ANDRADE, C. S. d.; JUCá, J. M. B.; BARRETO, C. d. C. A utilização de jogos como ferramenta auxiliar no ensino da matemática. **Revista Educação Pública**, v. 21, n. 42, 2021.

SILVA, M. S. D. **Clube de matemática: jogos educativos**. [S.l.]: Papirus Editora, 2005.

SILVA, W. N. D. **Um resumo sobre a história da probabilidade e alguns problemas curiosos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Oeste do Pará, 2020.

SILVEIRA, J. **Início da matematização das probabilidades**. [S.l.]: Porto Alegre: UFRGS, 2001.

SOUKEFF, F. E. B. Jogo mega-duque: uma proposta para o ensino de probabilidade. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2014.

SOUZA, C. M. P.; LIMA, A. P. d. A. B. O contrato didático a partir da aplicação de uma sequência didática para o ensino de progressão aritmética. **Zetetike**, v. 22, n. 2, p. 31–61, 2014.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **#Contato matemática, 2º ano**. São Paulo: FTD, 2016.

SOUZA, S. E. de; DALCOLLE, G. A. V. de G. O uso de recursos didáticos no ensino escolar. **Arq Mudi. Maringá, PR**, v. 11, n. Supl 2, p. 110–114p, 2007.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 8, n. 16, p. 143–153, 2008.

ZABALA, A. A prática educativa: como ensinar. trad. **Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed**, 1998.

ZANELLA, L. **Metodologia de Pesquisa . Florianópolis: Departamento de Ciencias da Administraçâo-UFSC**. 2011.

ZINDEL, M. L. Tomada de decisão e risco: A contribuição dos matemáticos e estatísticos. **Estatística e Sociedade**, n. 5, 2018.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras - Código INEP: 25008978
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Restrito

TCC ESPECIALIZAÇÃO - FELIPE BEZERRA DA SILVA

Assunto:	TCC ESPECIALIZAÇÃO - FELIPE BEZERRA DA SILVA
Assinado por:	Felipe Silva
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Restrito
Hipótese Legal:	Informação Pessoal (Art. 31 da Lei no 12.527/2011)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Felipe Bezerra da Silva**, **DISCENTE (202212210012) DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 27/03/2024 17:30:23.

Este documento foi armazenado no SUAP em 27/03/2024. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1128705
Código de Autenticação: cd7dfe222e