INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAJAZEIRAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CALEB SOUSA E SOUSA

UMA ABORDAGEM DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM O GEOGEBRA

CAJAZEIRAS
2024

CALEB SOUSA E SOUSA

UMA ABORDAGEM DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM O GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito parcial à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Orientador(a):

Prof. Dr. Vinicius Martins Teodósio Rocha.

Cajazeiras

2024

CALEB SOUSA E SOUSA

UMA ABORDAGEM DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM O GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao **Curso de Licenciatura em Matemática** do **Instituto Federal da Paraíba**, como requisito parcial à obtenção do título de **Licenciado em Matemática**.

Data de aprovação: 04/09/2024

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br VINICIUS MARTINS TEODOSIO ROCHA
Data: 19/09/2024 08:18:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Vinicius Martins Teodósio Rocha
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
gov.br JOSE IVELTON SIQUEIRA LUSTOSA
Data: 19/09/2024 09:20:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Ivelton Siqueira Lustosa
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

Documento assinado digitalmente
gov.br FRANCISCO AURELIANO VIDAL
Data: 19/09/2024 14:55:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Francisco Aureliano Vidal
Instituto Federal da Paraíba - IFPB

IFPB / Campus Cajazeiras
Coordenação de Biblioteca
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S725a Sousa, Caleb Sousa e.
Uma abordagem das construções geométricas com o geogebra / Caleb Sousa e Sousa. – 2024.

90f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2024.

Orientador(a): Prof. Dr. Vinicius Martins Teodósio Rocha.

1. Geometria. 2. Construções geométricas. 3. Geogebra. 4. Ensino de geometria. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.

IFPB/CZ CDU: 514.12 (043.2)

A Josivânia, Reinaldo e Esther, os maiores tesouros que Deus me concedeu, com todo meu amor e gratidão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro e acima de tudo a Deus Uno e Trino, Onipotente e Eterno, do qual sou indigno servo e filho amado pelo Santo Batismo, pelo dom da vida, da saúde e pelas inúmeras graças concedidas ao longo dos anos, particularmente a graça de concluir o presente trabalho, apesar das numerosas tribulações, contrariedades e dificuldades. “Porque para Deus nada é impossível” (Lucas 1, 37).

Agradeço também à Bem-aventura Virgem Maria, Mãe de Deus e minha mãe, que jamais deixou-me desamparado e sempre veio em meu socorro nos momentos de aflição e angústia. Suas preces e intercessão são meios por onde Deus opera em mim os seus prodígios, como o presente trabalho.

Agradeço à corte dos Anjos e Santos de Deus, amigos e intercessores, particularmente destacando São José, Santo Antônio, Santo Tomás de Aquino e São Josemaría Escrivá. Suas vidas são faróis para mim e suas preces, força na minha fraqueza.

Agradeço a Reinaldo Pereira de Sousa e Josivânia de Sousa Ramalho, meus pais, por nunca terem medido esforços para me possibilitarem uma vida digna e uma educação completa. Os louros desse trabalho, bem como de tudo o que conquistei, são muito mais de vocês do que meus. Amo-lhes muito. Agradeço a Esther Sousa e Sousa, minha irmã e amiga, por ser um ombro amigo e uma inspiração para mim. Foste segunda só no nascer, em tudo o mais tens o primeiro lugar. Amo-te.

Agradeço a todos os meus professores do Educandário Lírio dos Vales, da Escola Técnica de Saúde de Cajazeiras (ETSC - UFCG) e do Instituto Federal da Paraíba (IFPB - campus Cajazeiras), destacando: Me. João Batista Siqueira Lustosa, meu primeiro mestre na matemática e quem me ensinou a amar os números; Me. Raimundo Gonçalo Cariri e Dr. Altemar Lobão de Sousa Júnior, por quem pude amadurecer o conhecimento matemático, aprendi a superar as contrariedades e entendi que ser professor é mais do que transmitir conteúdos, é transformar histórias; Me. Geraldo Herbetet de Lacerda e Dr. José Ivelton Siqueira Lustosa, por serem inspiração para todos os matemáticos bonitenses, seus nomes e legados ocupam cátedra definitiva entre os gigantes de nossa terra; Me. Francisco Aureliano Vidal por todo o suporte dado desde o início do curso e pelas valiosas contribuições para a realização desse trabalho; Dr. Vinícius Martins Teodósio Rocha, meu mestre e orientador desse trabalho, detentor de um saber ímpar, de uma genialidade unívoca e de uma paciência heroica, foi imprescindível para a realização e conclusão desse texto; Me. Ramon Formiga Figueira, meu mestre, modelo e inspiração na matemática, na vida e na fé, excepcional e humilde em tudo o que faz, diligente e magnânimo em cada projeto, me ensinou muito mais do que essas singelas páginas poderiam conter, pois, além da infinitude dos números, me ensinou sobre o inumerável, inigualável e incomparável amor de Deus. A todos vós, meus metres, minha eterna gratidão.

Agradeço a todos os meus colegas de turma no Curso de Licenciatura em Matemática do IFPB - campus Cajazeiras, destacando: Anderson Gonçalves da Silva, homem de um humor único, de uma persistência inabalável, de uma simpatia cativante e de uma criatividade sem paralelo; Tálison Gabriel Cavalcanti Lucena, matemático, poeta, filósofo, o referente exato da palavra gênio e um dos homens mais humildes com quem tive o prazer de conviver. Sem vocês, companheiros, eu não conseguiria findar essa jornada. Meu muito obrigado por tudo.

Agradeço a todos os meus queridos amigos, que encarnam a palavra de Eclesiástico 6, 14 - 15; "Um amigo fiel é poderosa proteção: quem o encontrou, encontrou um tesouro. Não há nada que se compare, é um bem inestimável. Um amigo fiel é um bálsamo de vida." Destaco, reconhecendo justo mérito e predileção: Herbert Henrique Pereira Paulino, Pedro Ávila de Sousa Pereira, Harthur Pereira Paulino, Ellen Barbosa Arruda, Ana Beatriz Barbosa da Silva, Pe. Francisco Pereira Mendes Silva, Pe. José Alberto Bezerra Ferreira, Pe. Francisco Félix Alves, Thiago Fernandes de Sousa, Romério Barbosa de Sousa, Bianca Alves Lisboa, Laura Rodrigues Pereira, Michelle Ramos Gonçalves e Ana Rachel Silva de Oliveira da Veiga. As páginas desse singelo trabalho não seriam suficientes para enumerar tanto bem que me fizeram e fazem. Cada um, a seu modo único, deixou algo de profundo, precioso e inigualável em minha história. Suas vidas e amizades são mais valiosas que o ouro e a prata. Tenho-lhes uma dívida existencial. Obrigado por tudo e por tanto.

Agradeço a todos os meus alunos, com quem tive e tenho o privilégio de partilhar momentos únicos e que são os grandes destinatários de toda a formação que recebi. Diariamente,vocês me ensinam que ser professor ultrapassa os limites do conteúdo programático e do tempo em sala de aula. Entendi que o ofício do magistério trata-se de um encontro de indivíduos que, ajudando-se mutuamente, edificam o futuro um do outro. Por causa de vocês, eu me torno, a cada dia, um profissional, um cidadão e um ser humano melhor. Obrigado por tudo.

Por fim, agradeço a todos os demais que, direta ou indiretamente, em maior ou menor grau, contribuíram para a minha caminhada até aqui. Não ouso citar todos nominalmente para não cometer a injustiça de, por limitação da memória, me esquecer de alguém. A todos vocês e a cada um em particular, muito obrigado.

Peço a Deus que, em sua infinita bondade e misericórdia, recompense tamanho bem que me fizeram. A todos, minha eterna gratidão!

"Sabemos que tudo coopera para o bem daqueles que amam a Deus, daqueles que são chamados segundo o seu desígnio."

Romanos 8, 28

RESUMO

O presente trabalho aborda a temática das Construções Geométricas com régua e compasso, tópico extremamente relevante na história da matemática. Estruturado a partir de uma pesquisa de revisão bibliográfica acerca do referido assunto, inicialmente é realizada uma contextualização histórica do mesmo, relacionando-o, sobretudo, com o desenvolvimento da matemática na antiga Grécia. No centro do trabalho está uma proposta de abordagem das Construções Geométricas utilizando-se das várias ferramentas disponíveis no software Geogebra. Por fim, é levantada uma breve discussão a respeito de Números Construtíveis e Construtibilidade, relacionando tópicos de Geometria e Álgebra. O trabalho visa contribuir com a prática em sala de aula de professores da Educação Básica e Superior, bem como apresentar essa temática, de uma maneira sintética e dinâmica, para entusiastas e estudiosos da matemática e, em particular, da Geometria.

Palavras-chave: Construções Geométricas. Geometria. Geogebra. Números Construtíveis.

ABSTRACT

This work addresses the theme of Geometric Constructions with ruler and compass, an extremely relevant topic in the history of mathematics. Structured based on a bibliographical review research on the subject, initially a historical contextualization of it is carried out, relating it, above all, to the development of mathematics in ancient Greece. At the center of the work is a proposed approach to Geometric Constructions using the various tools available in the Geogebra software. Finally, a brief discussion is raised about Constructible Numbers and Constructibility, relating topics from Geometry and Algebra. The work aims to contribute to the classroom practice of Basic and Higher Education teachers, as well as to present this topic, in a synthetic and dynamic way, to enthusiasts and scholars of mathematics and, in particular, Geometry.

Keywords: Geometric Constructions. Geometry. Geogebra. Constructible Numbers.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O fazer científico, bem como o ensino das várias ciências, jamais foi algo isolado e indiferente ao tempo e ao contexto social, político, econômico e tecnológico. Cada época, com as suas particularidades, influenciou de algum modo, positiva ou negativamente, a produção científica. A tecnologia disponível em cada época também interfere profundamente na construção dos saberes, a tal ponto que realidades consideradas fatos em uma determinada época podem vir a ser refutadas posteriormente em vista do surgimento de tecnologias mais avançadas e com maior grau de precisão.

Nos tempos hodiernos, as inovações tecnológicas impactam profundamente cada dimensão da vida humana e com a educação não seria diferente. A integração, articulação e utilização das novas tecnologias digitais nas práticas educacionais contemporâneas são tópicos amplamente difundidos e discutidos, dada a sua relevância e pertinência ante o contexto sociocultural atual, suscitando distintas visões a respeito dessa temática e constituindo um rico, amplo e profundo debate.

O conhecimento matemático, a despeito de outras áreas do saber humano, trabalha, em sua gênese, com objetos abstratos e imateriais, predominantemente números e formas, o que o torna, sob certo ponto de vista, menos sujeito a modificações e alterações substanciais. Sendo seus resultados basilares não decorrentes de aparatos tecnológicos, limitados pelo seu grau de precisão, mas sim de deduções lógico-racionais, os grandes resultados da matemática são imbuídos de um aspecto perene. Ainda assim, as tecnologias exercem uma significativa influência sobre o modo como pensamos, fazemos e, sobretudo, ensinamos matemática, pois expandem os horizontes de discentes e docentes para o alcance do saber matemático e possibilitam novas, distintas e criativas aplicações de conceitos já conhecidos.

Tendo vista essas concepções, o presente trabalho procura unir os dois aspectos do fazer matemático elencados anteriormente: o caráter atemporal de seus postulados e as abordagens dinâmicas possibilitadas pelas novas tecnologias. O tema sobre o qual esse estudo foi desenvolvido foram as Construções Geométricas, tópico muito antigo e importante da história da matemática visto que possibilitou o desenvolvimento da Geometria tal como hoje a conhecemos, bem como da elaboração lógico - dedutiva dos elementos e resultados matemáticos, influenciando toda a produção posterior ao longo dos séculos. A abordagem utilizada consiste em apresentar esse relevante tópico utilizando o software Geogebra com as suas diferentes funcionalidades e possibilidades.

Para tanto, o texto obedece a seguinte estrutura: no segundo capítulo, faz-se um breve apanhado histórico sobre o desenvolvimento da matemática, em particular da Geometria, na Grécia antiga, dando ênfase às Construções Geométricas e ao desenvolvimento do caráter demonstrativo do saber matemático; no terceiro capítulo, centro do presente trabalho, faz-se uma breve apresentação do software Geogebra e, em seguida, são apresentadas, detalhadamente, algumas das Construções Geométricas mais clássicas através das ferramentas disponíveis no software, bem como a justificativa da validade de cada construção; o quarto capítulo, por sua vez, contém uma discussão a respeito dos Números Construtíveis, tópico derivado diretamente das Construções Geométricas, juntamente com alguns resultados e propriedades elementares dos mesmos; por fim, as considerações finais apresentam observações gerais do autor a respeito do trabalho desenvolvido e de possíveis caminhos de continuação do mesmo.

Esse trabalho, longe de almejar ser definitivo na problemática elencada, procura, a partir de uma aplicação concreta, instigar uma reflexão sobre as possibilidades de se conjugar os novos aparatos tecnológicos com os conteúdos clássicos da matemática, dando-lhes uma nova roupagem e proporcionando uma abordagem mais dinâmica e acessível para os discentes do século XXI, tão imersos e envolvidos com a cultura digital.

1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O problema norteador do presente trabalho é: como o software de Geometria dinâmica Geogebra pode ser utilizado como instrumental para explorar a temática das Construções Geométricas de um modo mais criativo e lúdico, pensando-se na utilização em sala de aula?

1.2 OBJETIVO GERAL

O presente trabalho tem por objetivo central elaborar e apresentar de modo detalhado uma abordagem das Construções Geométricas por meio da ferramentas do software Geogebra que seja aplicável em sala de aula. Para fundamentar a temática discutida e ampliar o escopo da pesquisa, considera-se as origens históricas das Construções Geométricas na antiga civilização grega, um dos berços da cultura ocidental e da qual emerge a Matemática enquanto saber lógico-dedutivo, bem como se busca explicitar, de modo breve, sua relação direta e intrínseca com os Números Construtíveis.

1.2.1 Objetivos Específicos

- Realizar um compilado histórico da origem da Geometria e, especificamente, das Construções Geométricas na antiga Grécia, bem como do seu desenvolvimento e difusão entre os matemáticos posteriores, sendo a base para múltiplas e valiosas descobertas;

- Apresentar uma abordagem detalhada dos protocolos de elaboração de algumas Construções Geométricas clássicas através das ferramentas disponíveis no software Geogebra, assim como a justificativa lógica da validade de tais procedimentos;
- Discorrer, de modo breve, sobre o tópico de Números Construtíveis, com suas propriedades básicas, buscando evidenciar a íntima relação desse com as Construções Geométricas.

1.3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Em virtude da natureza da temática e dos objetivos elencados anteriormente, adotou-se um procedimento metodológico descritivo desenvolvido através de uma pesquisa qualitativa de revisão bibliográfica, fundamentada nos trabalhos de Boyer e Merzbach (1974); Almeida (2000); Eves (2004); Wagner e Carneiro (2007); Barbosa (2012); Dolce e Pompeo (2013), dentre outros autores consultados no decurso da realização do presente estudo.

A abordagem apresentada no segundo capítulo fundamentou-se, sobretudo, nos trabalhos de Costa et al. (2013), Júnior (2013) e Alves (2020) que exploraram a temática das Construções geométricas com régua e compasso, bem como as possibilidades de aplicação das mesmas em sala de aula. O presente estudo, seguindo a linha dos referidos autores, assim como as sugestões de continuidade deixadas pelos mesmos, buscou somar aos seus empenhos e resultados novas possibilidades de aplicação, norteando-se nas Construções descritas pelos mesmos e dando-lhes uma nova roupagem por meio das ferramentas disponíveis no software Geogebra, amplamente exploradas e utilizadas pelo autor ao longo do desenvolvimento dessa pesquisa.

Tendo, pois, esse capítulo como o centro sobre o qual se estruturou todo o trabalho desenvolvido, realizou-se uma busca por obras que possibilitassem fundamentar, expandir e enriquecer a temática abordada.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS

O presente capítulo tem por objetivo apresentar alguns dados de caráter histórico a respeito do surgimento e do desenvolvimento da Geometria, em especial das Construções Geométricas, com suas regras e características, e dos três clássicos problemas gregos, servindo de embasamento para a abordagem adotada no terceiro capítulo e para a posterior exposição sobre Construtibilidade no capítulo quatro.

2.1 A GEOMETRIA

No decorrer da história da humanidade, conforme os grupos humanos foram se organizando em sociedades, as demandas e os problemas concretos do dia a dia impulsionaram a curiosidade humana a formular conceitos, ordenar ideias, buscar respostas e soluções para as questões que lhes inquietavam.

Com o saber matemático, não foi diferente. Os conceitos matemáticos abstratos e rigorosamente formalizados que temos hoje são o resultado de um longo processo de formulação, difusão e refinamento do conhecimento que, em um primeiro instante, surge de situações concretas do cotidiano, através da observação e dos dados empíricos, isto é, oriundos da experimentação. As primeiras noções de números, contagem e sistemas de numeração, por exemplo, surgem da necessidade que as sociedades tinham de contabilizar seus rebanhos, os recursos naturais disponíveis e até mesmo populações de indivíduos.

> É claro que a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio biológico da "sobrevivência do mais apto" a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento no homem de conceitos matemáticos. A princípio as noções primitivas de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças - a diferença entre um lobo e muitos, a desigualdade de tamanho entre uma sardinha e uma baleia, a dissemelhança entre a forma redonda da lua e a retilínea de um pinheiro (Boyer e Merzbach, 1974, p. 1).

As noções e os conhecimentos geométricos, por sua vez, surgem das necessidades das comunidades de realizarem medições de comprimentos, de áreas superfícies como terrenos ou tecidos, de verificar formas e ângulos nas suas Construções, etc. A partir dessas problemáticas bastante palpáveis e cotidianas, pôde-se, aos poucos, construir as ideias e conceitos que hoje compõem o arcabouço do conhecimento geométrico.

A própria palavra Geometria, já na sua raiz etimológica, está intimamente vinculada à noção de medição visto que, de acordo com Cunha (2019, p. 315), *geo*, do grego, significa terra e *metrón*, também do grego, significa medida. Desse modo, Geometria, na sua etimologia, nos aponta a ciência da *"medida da terra"*. Sabe-se, hoje, que esse ramo da matemática abrange muitos outros conceitos e resultados, não necessariamente vinculados à noção de medida, mas é relevante destacar o quanto a geometria, no início, foi fundamentada por problemas práticos e palpáveis.

As pesquisas no ramo da história da matemática, sobretudo as mais atuais, apontam relevantes contribuições de inúmeros povos na construção e maturação dos saberes em Geometria, tais como assírios, babilônios, egípcios, entre outros. Podemos citar, por exemplo, a tábua babilônica *Plimpton 322*, guardada na Universidade de Colúmbia, que foi datada como sendo originária dentre os anos 1.900 e 1.600 a. C. Esta apresenta cinco colunas de números, dentre as quais há três que apontam para uma relação de cateto e hipotenusa de triângulos retângulos de lados inteiros, portanto, evidenciando um conhecimento sobre números pitagóricos muito tempo antes de Pitágoras.

Figura 2.1 – Plimpton 322

Fonte: (CASSELMAN, acesso em Julho de 2024)

Entretanto, é inegável que o conhecimento geométrico, tal como está formalizado e é estudado atualmente, encontra na sociedade da antiga Grécia o seu grande esplendor. Os filósofos e matemáticos gregos propuseram um modo totalmente novo de se estudar e compreender a matemática como um todo e, de um modo bastante particular, a Geometria.

A partir da segunda metade do século VI a. C., filósofos como Tales de Mileto (640 – 546 a. C.), Pitágoras de Samos (580 – 500 a.C.), Eudoxo de Cnido (408 – 355 a. C.), entre outros, começaram a trabalhar com a matemática de um modo inovador, saindo do tratamento especulativo e empírico para uma abordagem mais racional, onde os saberes e resultados são colocados ante o crivo do *por quê*. Para se afirmar algo não basta a simples observação, é necessário comprovar, por argumentos sólidos e ordenados, a veracidade daquele resultado.

> Os primeiros três séculos da matemática grega, começando com os esforços iniciais de Tales por uma geometria demonstrativa (por volta de 600 a.C.) e culminando com os notáveis Elementos de Euclides (por volta de 300 a.C.), constituem um período de realizações extraordinárias (Eves, 2004, p. 129).

Assim a Matemática, bem como a Geometria, estrutura-se como uma ciência lógico-dedutiva, composta de definições, postulados, cadeias de raciocínios, demonstrações e resultados abrangentes. A partir desse momento esses saberes começam a adquirir o caráter demonstrativo que lhes é tão próprio até a contemporaneidade.

Quando falamos da matemática grega também é importante destacar que a mesma não possuía o caráter segmentado e especializado, tão comumente visto na atualidade. Para os gregos, esse conhecimento não estava compartimentado em áreas (aritmética, geometria, probabilidade, etc.) como é próprio da organização moderna, pelo contrário, era vista de um modo unificado e que girava em torno do tratamento geométrico.

Como se pode facilmente constatar na obra *"Os Elementos"* de Euclides, texto áureo da matemática grega e fundamental na cultura intelectual do ocidente, toda a construção do saber matemático nesse período gira em torno da Geometria. Desse modo, um número natural designa a medida de um segmento de reta, o produto de dois números naturais indica a medida de uma superfície (uma área) e o produto de três números naturais indica a medida da extensão de um corpo no espaço (um volume). Nessa ótica, uma equação do tipo $ax = b$ não teria sentido, uma vez que se estaria igualando a área de um retângulo a um segmento de reta, ao passo que $ax = by$ teria sentido em ser solucionada, visto que indica uma igualdade entre as áreas de dois retângulos. Sobre essa questão, Alves (2020, p. 23) afirma que "na época de Euclides, aproximadamente século III a.C. as grandezas passaram a ser associadas a segmentos de reta, e deste modo a palavra *resolver* passou a ser o mesmo que *construir*".

Desse modo, torna-se evidente o quanto a interpretação e o tratamento geométrico dos problemas influenciou a forma e o conteúdo da matemática dos antigos gregos. Esse modo de compreensão dos objetos e das relações matemáticas originou uma rica e complexa abordagem que discutiremos a seguir.

2.2 AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Inicialmente, é necessário destacar a que nos estamos referindo quando falamos em Construções Geométricas. Diferentemente do que se poderia inferir pelo senso comum, não se trata da simples elaboração gráfica de figuras ou elementos geométricos. Quando se fala em *construção*, nesse contexto da geometria, entende-se, conforme Costa et al. (2013, p. 6), "uma parte da Matemática destinada a explicar ou justificar porque certos procedimentos conduzem a determinadas Construções".

As Construções Geométricas, ainda segundo Costa et al. (2013, p. 6), originaram-se a cerca de 2.500 anos e estão intimamente relacionadas com desenvolvimento da Geometria Euclidiana. Como fora dito anteriormente, a matemática dos antigos gregos se constrói profundamente vinculada a conceitos geométricos, de modo que resolver um problema que, para nossos dias, se classificaria como algébrico ou aritmético, equivaleria a elaborar uma construção.

Para se realizar tais Construções, no entanto, deveria-se observar algumas regras, a saber: utilizar, unicamente, *régua*, essa não graduada, e *compasso*, esse sendo dobradiço, conhecidos como *instrumentos euclidianos*; conforme Eves (2004, p. 134) discorre, com a régua se poderia traçar uma reta, de comprimento indefinido, que passa por dois pontos distintos, enquanto que com o compasso se poderia traçar uma circunferência com centro em um ponto dado e que passe por um segundo ponto qualquer dado. Ademais, é permitido obter pontos através de uma sequência de operações, tais como: intersecção de retas, intersecção de circunferências e intersecção de retas com circunferências; bem como utilizar esses novos pontos para determinar novas retas e circunferências.

Essas regras, bem como as Construções Geométricas às quais elas se dirigem, são atribuídas ao filósofo Platão (428 a.C. - 348 a.C., aproximadamente). Ele, apesar de não ter grandes descobertas na Matemática, contribuiu fortemente para o desenvolvimento desta ciência incentivando o seu estudo, pois compreendia que o caráter demonstrativo e abstrato da mesma era como um treinamento para o espírito e indispensável àqueles que buscavam o saber filosófico. Tal pensamento torna-se explícito no famoso lema que, segundo conta-se, situava-se à entrada da Academia de Platão: *Que aqui não adentrem aqueles não versados em Geometria.*

As Construções Geométricas com as suas regras, segundo Eves (2004, p. 134), eram encaradas na antiga Grécia não apenas como uma metodologia mas como um jogo, tornando-se bastante popular e sendo amplamente difundida entre os matemáticos da época, propiciando importantes contribuições para essa ciência. Entre essas muitas descobertas trazidas à matemática, podemos elencar os chamados três problemas clássicos da geometria: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo. Esses problemas de construção surgidos na antiguidade tem uma particular relevância na discussão sobre construtibilidade e, por isso, discorreremos sobre eles a seguir.

2.3 OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA GREGA

Como dito anteriormente, a ampla difusão das Construções Geométricas entre os antigos matemáticos gregos impulsionou os estudos e as descobertas nessa área, bem como elencou importantes indagações que se prolongaram pelos tempos seguintes despertando o interesse de muitos outros estudiosos da matemática, como os três notáveis problemas que ora discutimos.

A grande popularidade e relevância que esses enigmas da matemática conquistaram ao longo dos séculos está no fato de ser impossível solucioná-los, a não ser aproximadamente, usando os instrumentos euclidianos. Apesar das sucessivas tentativas de resolução encabeçadas por diversos matemáticos, provou-se, muitos séculos depois, que, considerando as regras de utilização da régua e do compasso euclidianos, não se pode chegar ao exato resultado. Entretanto, os esforços empreendidos na busca de resolvê-los possibilitaram o surgimento de novas abordagens e conceitos para a Geometria e áreas afins.

2.3.1 A Duplicação do Cubo

Esse problema pode ser enunciado da seguinte forma: Dado um cubo cuja aresta tem comprimento a, deve-se construir, usando exclusivamente régua não-graduada e compasso, um outro cubo de aresta b cujo volume seja o dobro do primeiro. Sendo a^3 o volume do cubo de aresta a e b^3 o volume do novo cubo a ser construído, teremos

$$b^3 = 2a^3 \Rightarrow b = a\sqrt[3]{2}.$$

O impasse do problema está na construção, dentro das condições impostas, do número $\sqrt[3]{2}$ que, posteriormente, provou-se impossível.

Segundo Eves (2004, p. 135), teríamos duas possíveis origens para esse famoso problema. A primeira estaria nas palavras de um antigo poeta grego (Eurípedes, possivelmente) não versado em matemática, que, descrevendo como o mítico rei Minos ficara insatisfeito com o tamanho do túmulo de seu filho Glauco e ordenara que se dobrasse o tamanho do mesmo, levou-o a pensar, erroneamente, que tal questão seria resolvida dobrando-se cada dimensão do túmulo.

A segunda, mais aprofundada em Wagner e Carneiro (2007, p. 103), estaria em uma antiga lenda segundo a qual os atenienses, buscando o fim de uma peste que assolava sua cidade, dirigiram-se ao oráculo de Apolo, situado na Ilha de Delos. A resposta do oráculo exigia que fosse construído um novo altar no templo da divindade com o dobro do tamanho do que ali já existia, cujo formato era cúbico. O povo de Atenas construiu o novo altar dobrando a aresta do antigo, o que fez o volume do novo ser oito vezes o do original. Como o problema não foi solucionado a peste continuou, dizimando um grande número de atenienses. Assim, a duplicação do cubo ficou conhecida como "problema de Delos".

Diversos matemáticos se aventuraram em busca da solução para esse interessante desafio. Ainda segundo Eves (2004, p. 135), podemos citar Hipócrates (c. 440 a.C.) como o primeiro a ter um real avanço no estudo dessa questão, reduzindo o problema à "construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta de comprimentos s e $2s$". Posteriormente, Arquitas (c. 400 a.C.), Eudoxo (c. 370 a.C.), Menaecmo (c. 350 a.C.), Eratóstenes (c. 230 a.C.), Apolônio (c. 225 a.C.), Dioclés (c. 180 a.C.) , entre outros grandes nomes da Matemática, fizeram suas tentativas de resolução e, mesmo não obtendo êxito na sua busca, obtiveram importantes contribuições a essa ciência.

Somente no século XIX, com Pierre Wantzel, provou-se a impossibilidade de solucionar o problema por meio dos instrumentos euclidianos.

2.3.2 A Trissecção do Ângulo

Dos três problemas clássicos esse é certamente o mais conhecido, seja porque é o mais simples de se compreender, seja porque como a bissecção de um ângulo é razoavelmente simples, muitos pensam que o mesmo acontecerá com esse outro problema. Podemos enunciá-lo da seguinte maneira: Dado um ângulo α qualquer, deve-se construir, usando somente régua não-graduada e compasso, um outro ângulo β cuja medida seja a terça parte de α.

Segundo Eves (2004, p. 137), o surgimento desse problema pode ter-se dado de uma tentativa dos matemáticos gregos de resolverem a multissecção de um ângulo como questão análoga à multissecção de um segmento de reta, cuja solução era bastante simples. Outra possível origem está na tentativa de se construir um polígono regular de nove lados, sendo preciso, para tal construção, realizar a trissecção do ângulo de 60°.

Buscando solucionar esse problema, os gregos conseguiram reduzi-lo ao chamado *problema de neusis* cuja solução levou à descoberta de curvas planas superiores, dentre as quais podemos destacar: a conchóide de Nicomedes (c. 240 a.C.), a quadratriz de Hípias (c. 425 a.C.) e a espiral de Arquimedes. Pode-se ainda elencar a solução apresentada por

Papus (c. 300 d.C.), utilizando a propriedade foco - diretriz das cônicas, algo com que os antigos ainda não estavam muito habituados, e também a criativa e curiosa solução do *machadinho*, cuja autoria é desconhecida.

2.3.3 A Quadratura do Círculo

Esse terceiro problema pode ser enunciado da seguinte maneira: Dado um círculo de raio r, construir, usando apenas régua não-graduada e compasso, um quadrado cuja área seja igual à do círculo. Sendo r o raio do círculo, sua área é dada por πr^2. Deseja-se construir um quadrado de lado l cuja área, dada por l^2, é igual à do círculo, isto é

$$l^2 = \pi r^2 \Rightarrow l = r\sqrt{\pi}.$$

Nesse caso, a grande dificuldade está na construção de um segmento cuja medida seja $\sqrt{\pi}$ que, posteriormente, se provaria impossível.

De acordo com Eves (2004, p. 140), existem inúmeras tentativas, desde a antiguidade até aos dias atuais, de se solucionar essa questão. Por volta de 1800 a. C. havia, entre os egípcios, uma suposta solução que consistia em tomar um quadrado cujo lado é $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo dado.

Entre os gregos, Anaxágoras (c. 499 - c. 427 a.C.) é primeiro nome associado a esse problema, apesar de ser desconhecida a sua contribuição. Além dele, Hipócrates de Quio (c. 470 - c. 410 a.C.) obteve êxito na quadratura de algumas lunas especiais, na expectativa de solucionar a questão da quadratura. Posteriormente, Hípias de Elis (c. 425 a.C.) inventou a curva chamada *quadratriz* que soluciona tanto o problema da trissecção de um ângulo como o da quadratura, embora haja dúvidas entre os historiadores se ele realmente teria empregado a sua descoberta na resolução desse último ou se algum geômetra posterior, talvez Dinostrato (c. 350 a.C.), teria realizado essa descoberta.

Ademais, pode-se citar várias outras contribuições e tentativas de resolução da quadratura ao longo da história, como, por exemplo, a que se utiliza da espiral de Arquimedes, até que, por meio das investigações a respeito das propriedades do número π e de suas potências, se provaria, por fim, ser impossível solucioná-lo utilizando-se apenas dos instrumentos euclidianos.

Como se pode observar, esses três famosos e curiosos problemas instigaram um grande número de estudiosos ao longo dos séculos que, na busca incessante por solucioná-los, chegaram a valiosas descobertas e contribuições para a geometria e a Matemática de um modo geral.

> O grande estímulo ao desenvolvimento da matemática, inclusive para a criação de novas teorias, dado pelos esforços continuados para se resolverem os três famosos problemas da Antiguidade, ilustra o valor heurístico de problemas matemáticos atraentes não resolvidos (Eves, 2004, p. 134).

Por fim, observando o quanto as Construções Geométricas tiveram impacto e relevância no desenvolvimento da matemática, possibilitando uma série de inovações e descobertas, verifica-se como o seu estudo pode ser esclarecedor e profundamente enriquecedor.

3 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

No presente capítulo, apresentamos uma aplicação concreta do conteúdo Construções Geométricas utilizando as ferramentas disponíveis no software *Geogebra*. Ao longo dessa seção, as Construções selecionadas são enunciadas, seguidas do detalhamento das etapas de elaboração por meio das ferramentas do software e, logo após, é feita uma justificativa geométrica da validade dos procedimentos adotados.

As Construções elencadas e apresentadas a seguir seguem um ordenamento crescente de dificuldade e detalhamento, isto é, enquanto as primeiras são bastante simples e elementares, as posteriores aumentam o seu grau de complexidade, muitas vezes sendo necessário retomar procedimentos de outras previamente demonstradas. É importante destacar também que, inicialmente, utilizamos somente as ferramentas mais básicas do software, nos limitando a traçar retas e circunferências dados dois pontos. À medida que avançamos nas demonstrações, são incorporadas novas ferramentas, uma vez que já se demonstrou como chegar naquele tipo de construção utilizando unicamente o instrumental básico.

Para a elaboração dos protocolos de construção, bem como das justificativas dos procedimentos, foram consultados os trabalhos de Wagner e Carneiro (2007), Barbosa (2012), Costa et al. (2013), Júnior (2013), Dolce e Pompeo (2013), Alves (2020), entre outros autores. O capítulo foi estruturado de maneira a servir de apoio para professores que queiram explorar essa abordagem em sala de aula, por isso é bastante objetivo e conciso nas exposições.

3.1 USO DAS NOVAS TECNOLOGIAS NO ENSINO

Na sociedade contemporânea, é evidente e inevitável a presença cada vez maior das tecnologias da informação nas diversas esferas da vida humana. Os indivíduos do século XXI tem uma facilidade de acesso, transmissão e recepção de informações que em nenhuma outra época se pôde ver. A internet, os aparelhos modernos de comunicação (smartphones, tablets, notebooks, etc.), o uso das redes sociais, entre outros recursos, possibilitam o acesso, por múltiplas mídias, a diversas informações sobre os mais variados assuntos a qualquer momento, em tempo real.

Em face a esse cenário, onde o conhecimento está cada vez mais facilmente à disposição dos que o buscam, a escola, enquanto instituição formadora de cidadãos e promotora de cultura, não pode ignorar ou estar alheia a essas inovações tecnológicas.

Para que seu papel na sociedade possa ser cumprido com o devido êxito, é imprescindível que, em sua práxis, seja capaz de integrar, utilizar e difundir adequadamente os múltiplos recursos que as novas tecnologias fornecem, possibilitando um autêntico diálogo com os discentes da "era da informação" e proporcionando-lhes uma aprendizagem realmente significativa.

Visando atingir tais objetivos, as diretrizes e documentos norteadores da educação brasileira na atualidade são unânimes e enfáticos ao incluir a promoção da "cultura digital" e a necessidade de integração e utilização dos múltiplos recursos tecnológicos nas estratégias pedagógicas entre os pilares fundamentais para a prática educacional na contemporaneidade. É evidente, pois, que os docentes de cada área do saber (Linguagens, Ciências Humanas, Ciências da Natureza e Matemática), com suas próprias metodologias e particularidades, devem enriquecer a sua didática e ação pedagógica com os múltiplos recursos fornecidos pelas inovações tecnológicas hodiernas.

A atual Base Nacional Comum Curricular, Brasil (2018), documento normativo fundamental para o modelo de práxis educacional vigente, dá grande enfoque à utilização das tecnologias no contexto do ensino, a tal ponto que propõe como sua quinta competência específica de matemática para o ensino fundamental:

> Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados (Brasil, 2018, p. 267).

O referido documento, ainda, quando elenca as competências específicas para matemática no ensino médio, novamente faz menção à necessidade de inclusão e utilização dos recursos tecnológicos na abordagem dos conteúdos:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 523).

Referindo-se, pois, à matemática, domínio do saber no qual se insere o presente trabalho, e o seu ensino, inúmeras são as ferramentas e recursos digitais desenvolvidos à disposição dos docentes dessa disciplina, com as quais esses podem dinamizar, inovar, aprofundar e enriquecer a sua prática em sala de aula, contribuindo para uma aprendizagem mais lúdica e significativa dos seus alunos. Dentro desse amplo repertório de ferramentas com potencial didático, optou-se, para a realização do presente trabalho, pelo software Geogebra, sobre o qual se discorrerá abaixo, devido à sua ampla gama de recursos e possibilidades aliada à praticidade de uso e compreensão.

3.1.1 Sobre o Geogebra

O Geogebra, conforme nos apresenta Morello (2022, p. 7), é um software de geometria dinâmica desenvolvido por Markus Hohenwarter entre os anos de 2001 e 2002 para utilização em escolas secundárias. Esse aplicativo está disponível gratuitamente ao público, podendo tanto ser instalado em computadores como também ser usado diretamente da internet. É mundialmente conhecido, já tendo sido traduzido para mais de 50 idiomas e sendo utilizado em cerca de 190 países.

Esse aplicativo oferece uma ampla gama de ferramentas, recursos gráficos e visuais, que permitem ao usuário explorar diversos campos da matemática, tais como: Geometria Plana, Geometria Espacial, Álgebra Elementar, Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Vetorial, Álgebra Linear, dentre outros. Para fim de exemplificação, as ferramentas do Geogebra permitem ao usuário: determinar pontos (arbitrários ou ordenados), determinar retas (dados dois pontos, paralelas, perpendiculares, transversais, tangentes, entre outras), semirretas e segmentos de reta, determinar circunferências e arcos de circunferência, determinar círculos e setor circular, delimitar ângulos, determinar polígonos (regulares ou não), calcular área de figuras, determinar cônicas (elipse, parábola e hipérbole), fazer interseção de objetos, delimitar vetores, determinar gráficos de funções reais, dentre outras inúmeras possibilidades.

Como se pode observar, é um recurso digital bastante rico em possibilidades de aplicação e que pode agregar bastante na prática em sala de aula à medida que possibilita uma abordagem mais lúdica, dinâmica e interativa de conteúdos considerados, por vezes, como “difíceis e desinteressantes”. O grande número de ferramentas à disposição dos discentes e docentes aliado a uma tela de comandos bastante simples de se compreender e explorar torna a experiência com o Geogebra extremamente atrativa e enriquecedora.

Em meio a um panorama onde os indivíduos estão profundamente imersos nas tecnologias digitais da informação, a utilização desse software como recurso didático pode favorecer a assimilação de conceitos e o desenvolver de competências à medida em que torna o processo de aprendizagem mais próximo da vivência dos discentes.

> Os alunos por crescerem em sociedade permeada de recursos tecnológicos, são hábeis manipuladores da tecnologia e a dominam com maior rapidez e desenvoltura do que seus professores. Mesmo os alunos pertencentes às camadas menos favorecidas têm contato com recursos tecnológicos na

> rua, na televisão etc., e sua percepção sobre tais recursos é diferente da percepção de uma pessoa que cresceu numa época em que o convívio com a tecnologia era muito restrito (Almeida, 2000, p. 108).

Na abordagem adotada no presente estudo, utilizou-se das ferramentas de Geometria Plana do Geogebra para abordar o tópico de Construções Geométricas, isto é, buscou-se seguir as tradicionais regras do uso dos instrumentos euclidianos para as referidas Construções, porém, substituiu-se a régua não-graduada e o compasso pelos recursos digitais disponibilizados por esse software para determinar retas e circunferências a partir de pontos e segmentos previamente conhecidos. Desse modo, procurou-se seguir a linha dos trabalhos de Costa et al. (2013), Júnior (2013) e Alves (2020) através de uma nova possibilidade de aplicação.

3.2 CONSTRUÇÕES ELEMENTARES

Na presente seção vamos iniciar a nossa abordagem das Construções Geométricas por meio das ferramentas do software Geogebra, partindo das Construções mais simples e basilares que, posteriormente, serão retomadas para embasar e justificar Construções mais complexas.

Nessa primeira etapa, vamos limitar consideravelmente o nosso instrumental de trabalho. Poderemos marcar pontos, traçar retas, segmentos de reta e circunferências a partir de pontos conhecidos e determinar interseções entre esses, que nos darão novos pontos. Desse modo, utilizaremos a ferramenta *Ponto* para marcar pontos, *Reta* e *Segmento de Reta* para traçar uma reta ou um segmento a partir de pontos conhecidos, *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos* e *Compasso* para determinar circunferências e *Interseção* para gerar novos pontos a partir do cruzamento desses entes geométricos.

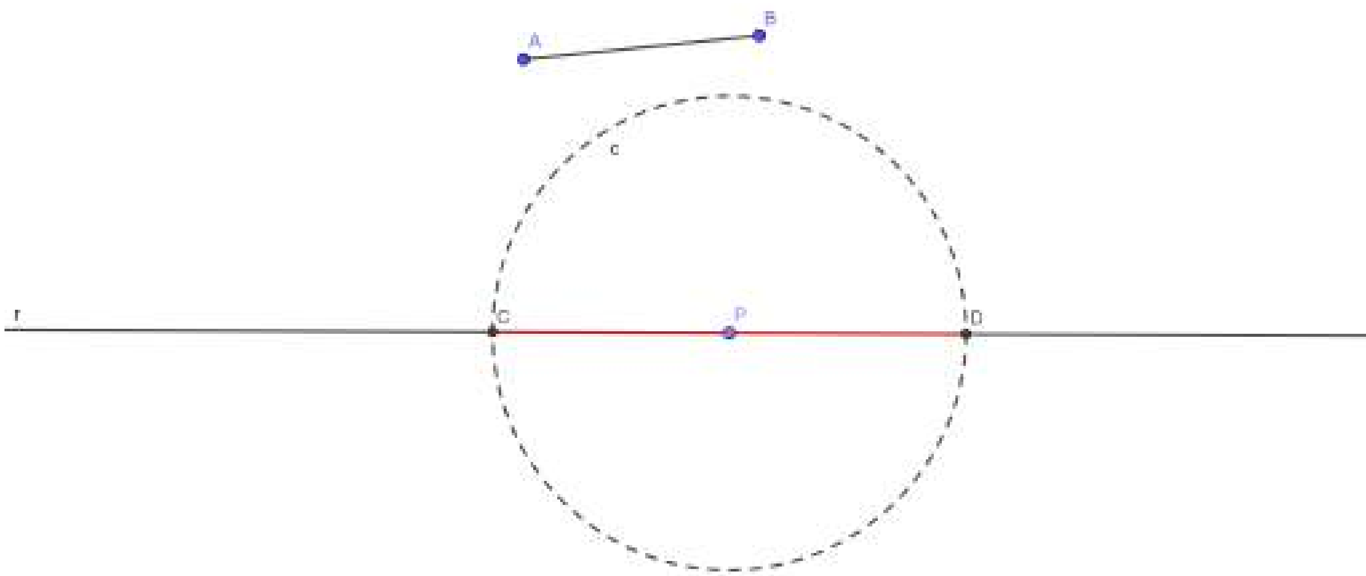
É importante destacar que o funcionamento da ferramenta *Compasso* disponibilizada pelo software distingue-se do uso clássico do compasso euclidiano, uma vez que enquanto aquela permite transportar segmentos a partir da construção de uma nova circunferência, esse somente admite construir uma circunferência dado o centro e um de seus pontos. Nesse ponto de vista, o *Compasso* do Geogebra é mais similar ao que utilizamos habitualmente na atualidade. Fundamentando-nos no trabalho de Alves (2020), faremos essa adaptação pontual visando simplificar algumas Construções e tornar mais sintético o texto. Tal adequação, porém, não viola as regras dos instrumentos euclidianos, podendo ser verificada através de algumas outras Construções auxiliares.

Ademais, após apresentarmos o passo a passo da elaboração de cada uma das referidas Construções, também elencamos uma breve argumentação geométrica que justifique a validade das mesmas.

3.2.1 Construção de um Segmento Congruente

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$ qualquer, pretendemos construir um outro segmento de reta, congruente a $\overline{AB}$, a partir de um ponto P situado sobre uma reta r qualquer.

Figura 3.1 – Segmentos $\overline{PC}$ e $\overline{PD}$ sobre a reta r, congruentes a $\overline{AB}$.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Descrição:

- Inicialmente, utilizando as ferramentas *Segmento* e *Reta*, vamos construir de maneira arbitrária o segmento $\overline{AB}$ e a reta r e, a seguir, com a ferramenta *Ponto*, determinamos o ponto P pertencente a r;
- Utilizando a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c centrada em P e cujo raio tem a mesma extensão que o segmento $\overline{AB}$;

- Por fim, determinamos a *Interseção* da reta r com a circunferência c, que nos dará dois pontos, aos quais chamaremos C e D. Selecionando qualquer um deles para ser a segunda extremidade do segmento, concluímos a nossa construção.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.1).

Justificativa:

Na construção da circunferência c, utilizamos a extensão do segmento $\overline{AB}$ como abertura para o raio dessa circunferência, logo, qualquer raio dessa é congruente a $\overline{AB}$. Ora, $\overline{PC}$ e $\overline{PD}$ são raios de c, portanto,

$$\overline{PC} \equiv \overline{PD} \equiv \overline{AB}.$$

3.2.2 Construção de um Ângulo Congruente

Dado um ângulo α de tamanho arbitrário, pretendemos construí-lo sobre uma reta r qualquer de tal modo que um de seus lados pertença à reta e seu vértice seja um ponto $P \in r$.

Descrição:

- Inicialmente, vamos construir um ângulo de valor arbitrário e determinar uma reta arbitrária. Para isso, usamos a ferramenta *Ponto* para determinar três pontos distintos, chamados A, B e O. A seguir, utilizando as ferramentas *Segmento* e *Ângulo*, respectivamente, determinamos os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$ e formamos o ângulo $\widehat{AOB}$, ao qual chamaremos α, e utilizando a ferramenta *Reta*, determinamos uma reta r, arbitrária, sobre a qual definimos um *Ponto* P qualquer;

- Com a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*, determinamos uma circunferência c_1, centrada em O, que intercepta os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$ e fazemos a *Interseção* de c_1 com ambos os segmentos, o que nos dará os pontos C e D;

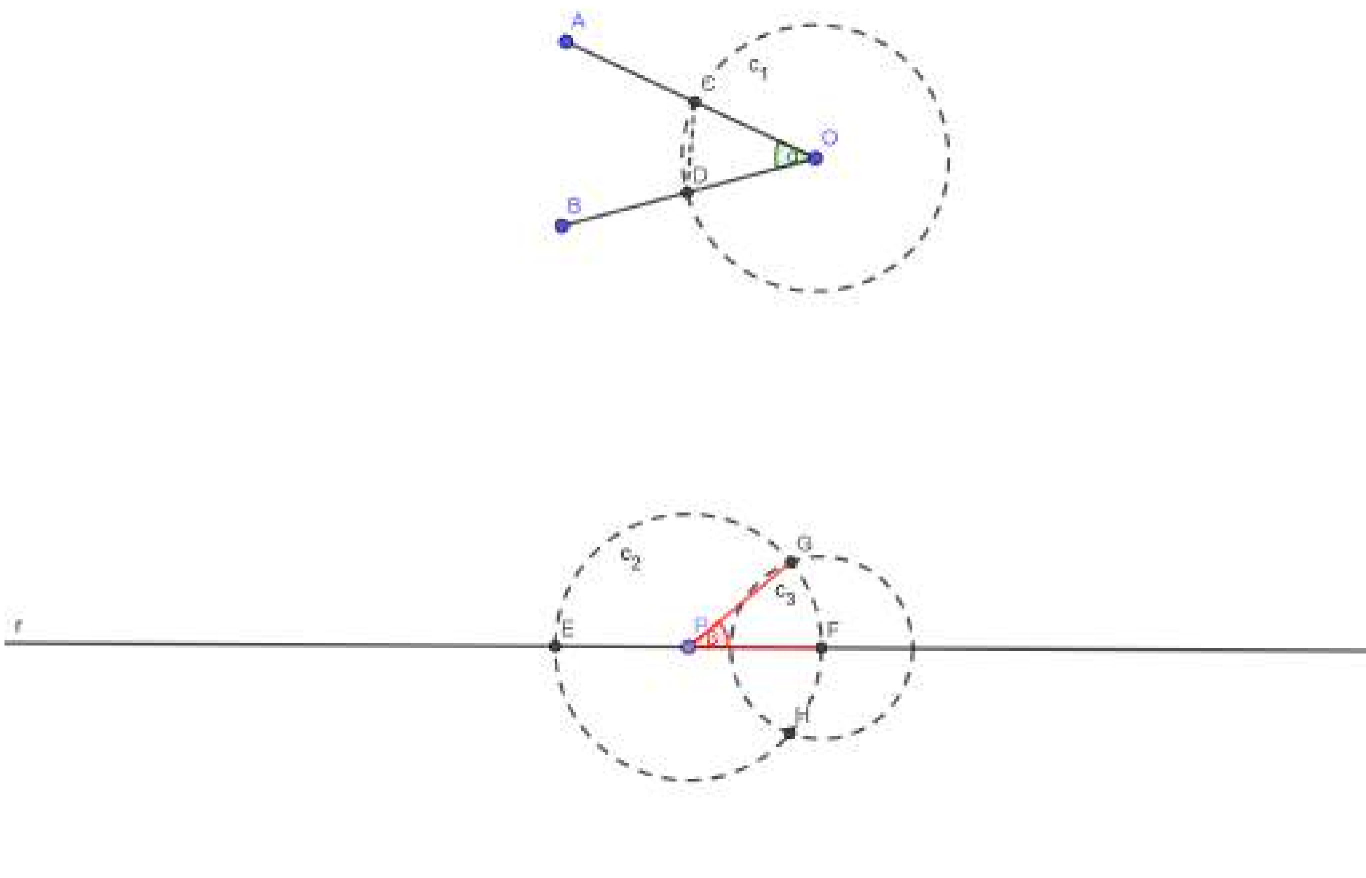
- Com a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_2 de centro P e raio congruente ao de c_1 e fazemos a *Interseção* de c_2 e r para obter dois novos pontos, chamados E e F;

- Utilizando novamente o *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_3 cujo centro é o ponto F (poderia também ser o ponto E) e o raio tem a mesma medida do segmento $\overline{CD}$. A seguir, fazemos a *Interseção* de c_2 e c_3, obtendo os pontos G e H;

- Com a ferramenta *Segmento*, vamos determinar o segmento $\overline{GP}$ (também poderíamos tomar o ponto H) e utilizando *Ângulo* novamente, determinamos o ângulo $\widehat{FPG}$, ao qual chamaremos β, que é congruente ao ângulo α.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.2).

Figura 3.2 – Ângulo $\widehat{FPG}$ congruente a $\widehat{AOB}$, sobre a reta r.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Justificativa:

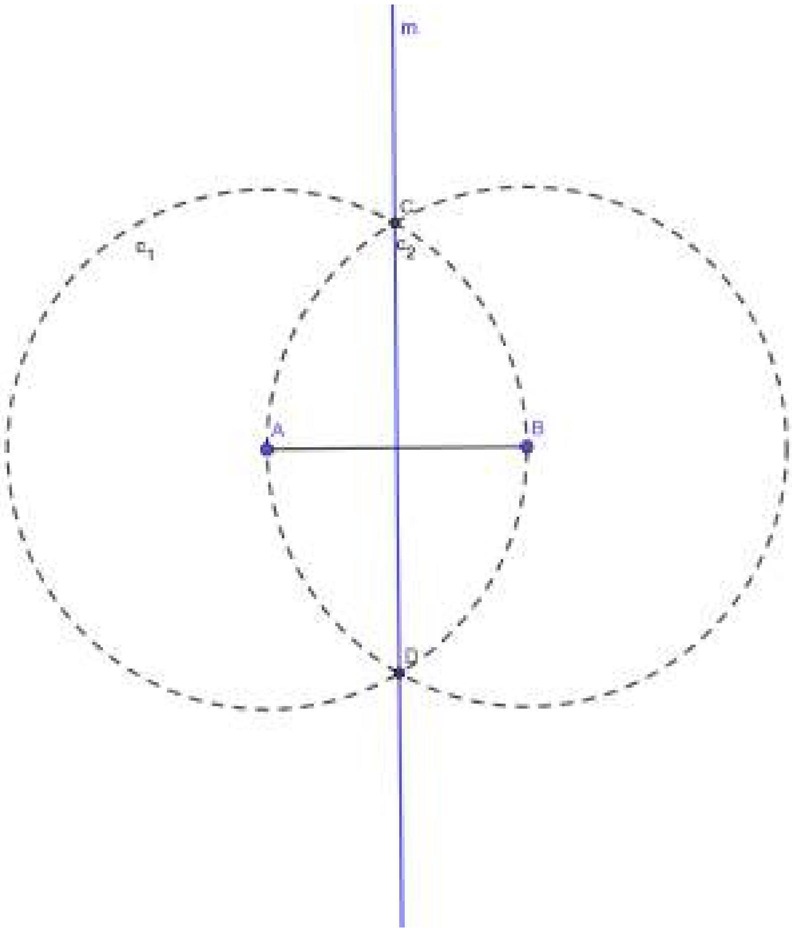
Observemos os triângulos $\triangle COD$ e $\triangle FPG$. Note que os segmentos $\overline{CO}$ e $\overline{DO}$, por serem raios da mesma circunferência c_1, são congruentes. Por argumento similar podemos afirmar que os segmentos $\overline{FP}$ e $\overline{GP}$ também são congruentes e, como c_2 foi construída com o mesmo raio de c_1 temos que $\overline{CO} \equiv \overline{DO} \equiv \overline{FP} \equiv \overline{GP}$.

Além disso, como a circunferência c_3 foi construída com raio congruente ao segmento $\overline{CD}$, temos que $\overline{GF} \equiv \overline{CD}$. Logo, pelo caso LLL, os triângulos $\triangle$COD e $\triangle$FPG são congruentes e, portanto, $\widehat{AOB} \equiv \widehat{FPG}$.

3.2.3 Construção da Mediatriz de um Segmento

Dado um segmento arbitrário $\overline{AB}$, pretendemos construir a reta mediatriz desse segmento.

Figura 3.3 – Mediatriz m do segmento $\overline{AB}$.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Descrição:

- Inicialmente, utilizando as ferramentas *Ponto* e *Segmento*, determinamos dois pontos arbitrários, A e B, e formamos o segmento $\overline{AB}$;
- Com a ferramenta *Compasso*, construímos duas circunferências, c_1 e c_2, centradas, respectivamente, em A e B e cujos raios são congruentes ao próprio segmento $\overline{AB}$;

- A seguir, fazemos *Interseção* das circunferências c_1 e c_2, encontrando dois novos pontos, C e D;
- Utilizando a ferramenta *Reta*, determinamos um reta m que passa pelos pontos C e D. Essa reta é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.3).

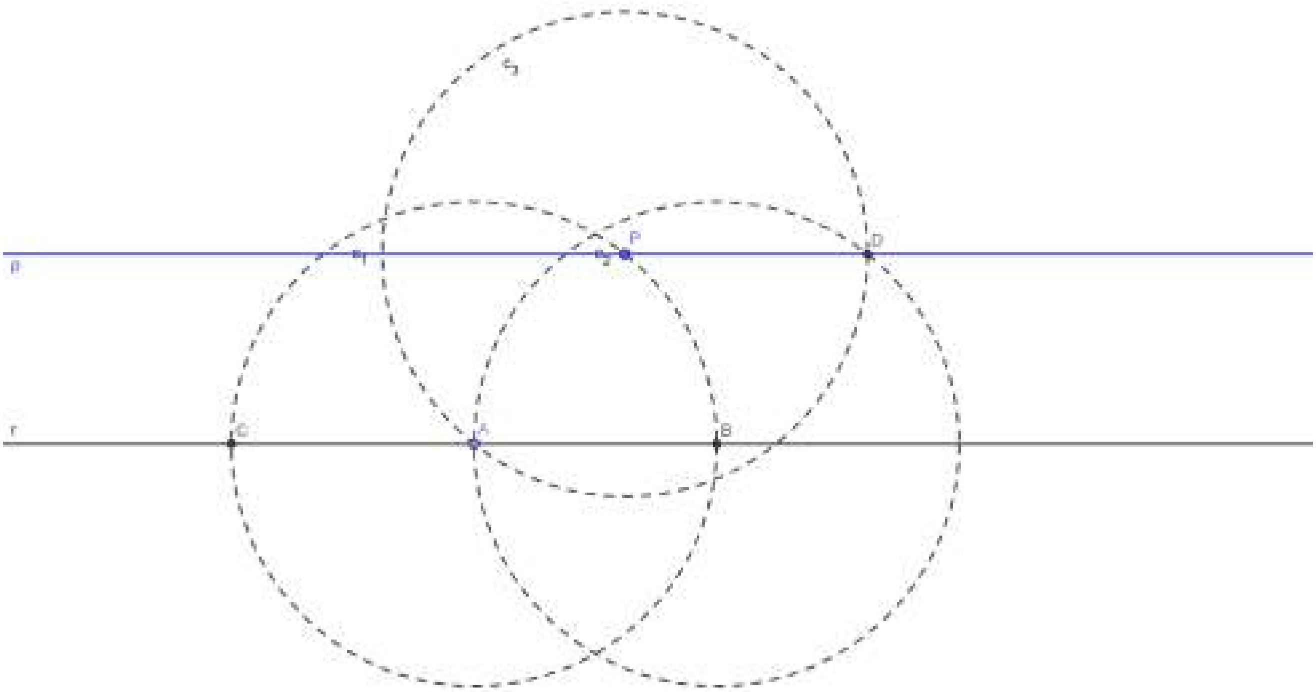
Justificativa:

Como as circunferências c_1 e c_2 possuem raios congruentes, temos que $\overline{AC} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{AD}$, logo, o quadrilátero ACBD é um losango de diagonais $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Em qualquer losango, as diagonais são perpendiculares e interceptam-se em seus pontos médios. Como o segmento $\overline{CD}$ pertence à reta m, temos que m é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e que o intercepta em seu ponto médio, logo, m é a mediatriz de $\overline{AB}$.

3.2.4 Construção de uma Reta Paralela

Dada uma reta r qualquer e um ponto P exterior a r, pretendemos construir uma reta paralela a r que contenha o ponto P.

Figura 3.4 – Reta p paralela à reta r.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Descrição:

- Inicialmente, utilizando as ferramentas *Reta* e *Ponto*, determinamos uma reta r arbitrária e um ponto P exterior a r;
- Utilizando novamente *Ponto*, definimos um ponto A qualquer sobre a reta r;
- A seguir, utilizando a ferramenta *Compasso*, construímos uma circunferência c_1 centrada em A e cujo raio é o segmento $\overline{AP}$;
- Fazemos a *Interseção* de c_1 e r e determinamos dois novos pontos, B e C;
- Utilizando novamente o *Compasso*, vamos construir outras duas circunferências, c_2 e c_3, centradas, respectivamente, em B (ou em C) e em P e cujos raios são congruentes ao segmento $\overline{AP}$;
- Fazendo a *Interseção* de c_2 e c_3 encontramos o ponto A, que definimos anteriormente, e um novo ponto que chamaremos de D;
- Utilizando a ferramenta *Reta*, determinamos um reta p que contém os pontos P e D. A reta p é paralela a r.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.4).

Justificativa:

Note que as circunferências c_1, c_2 e c_3 são congruentes, pois seus raios são todos congruentes ao segmento $\overline{AP}$. Desse modo, temos que $\overline{AP} \equiv \overline{DP} \equiv \overline{BD} \equiv \overline{AB}$, logo, o quadrilátero ABDP é um losango e, consequentemente, um paralelogramo. Todo paralelogramo possui seus lados opostos congruentes e paralelos, logo, $\overline{AB} \parallel \overline{PD}$. Como a reta r contém o segmento $\overline{AB}$ e a reta s contém o segmento $\overline{PD}$, portanto, $r \parallel s$.

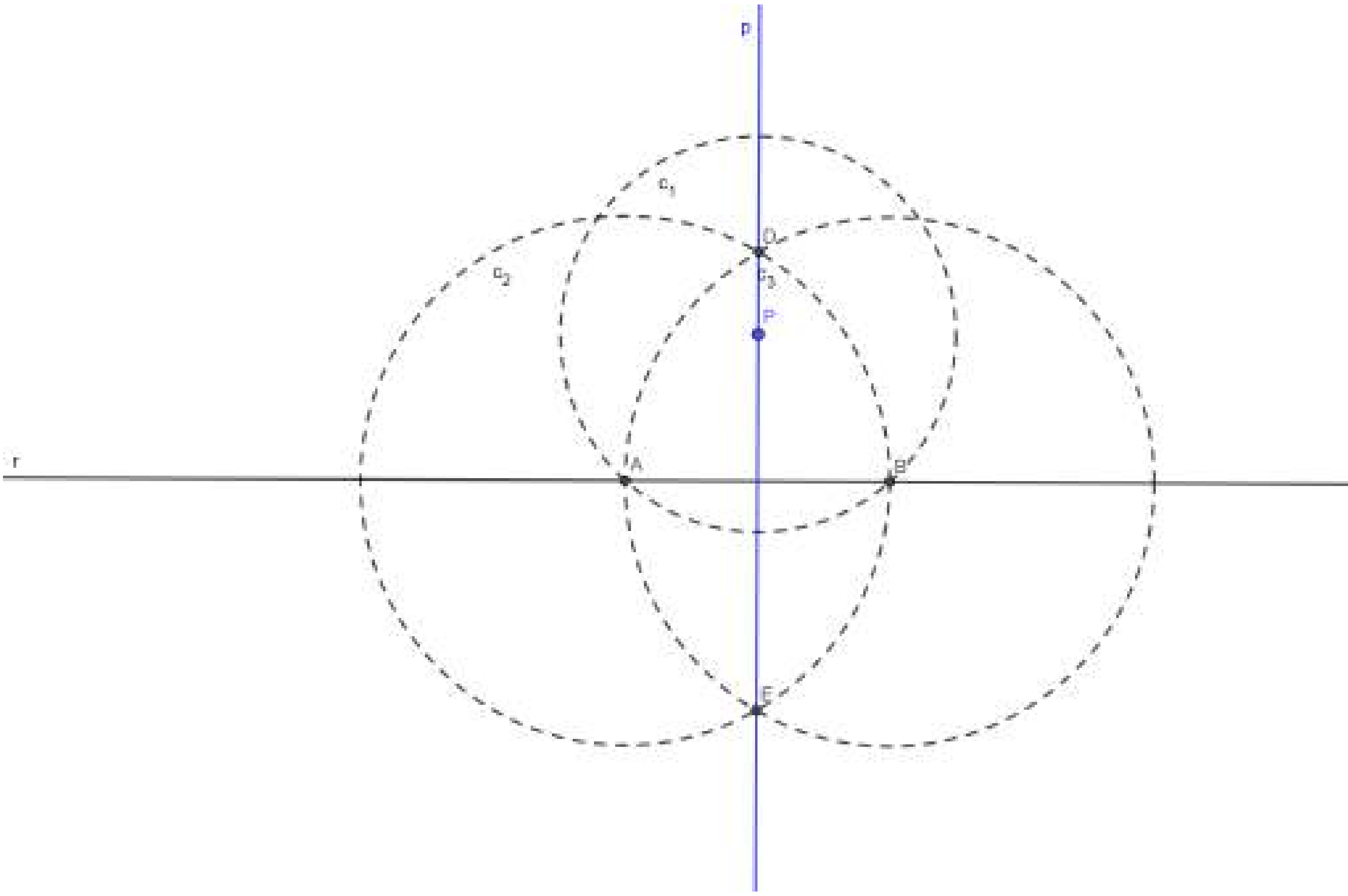
3.2.5 Construção de uma Reta Perpendicular a uma Reta r por um Ponto externo a r.

Dada uma reta r qualquer e um ponto P externo a r, pretendemos construir uma reta perpendicular a r que contenha o ponto P.

Descrição:

- Inicialmente, utilizando as ferramentas *Reta* e *Ponto*, respectivamente, vamos construir uma reta r arbitrária e um ponto P qualquer, externo a r;

Figura 3.5 – Reta *p*, perpendicular a *r*, que contém o ponto externo *P*.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

- Utilizando a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos* vamos construir uma circunferência c_1 centrada em P e cujo raio seja maior do que a distância entre P e r;
- Fazendo a *Interseção* entre c_1 e r, determinamos dois novos pontos, A e B;
- Conforme discutimos na subseção (3.2.3), vamos construir a reta p, mediatriz do segmento $\overline{AB}$. A reta p contém o ponto P e é perpendicular à reta r.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.5).

Justificativa:

Note que $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$ são raios da circunferência c_1, logo, o triângulo $\triangle APB$ é isósceles. Em todo triângulo isósceles, a altura, a mediana e a bissetriz referentes à base coincidem. No triângulo $\triangle APB$ esse segmento pertence à reta p, portanto, p é a perpendicular a r que contém o ponto P.

3.2.6 Construção de uma Reta Perpendicular a uma Reta r por um Ponto pertencente a r.

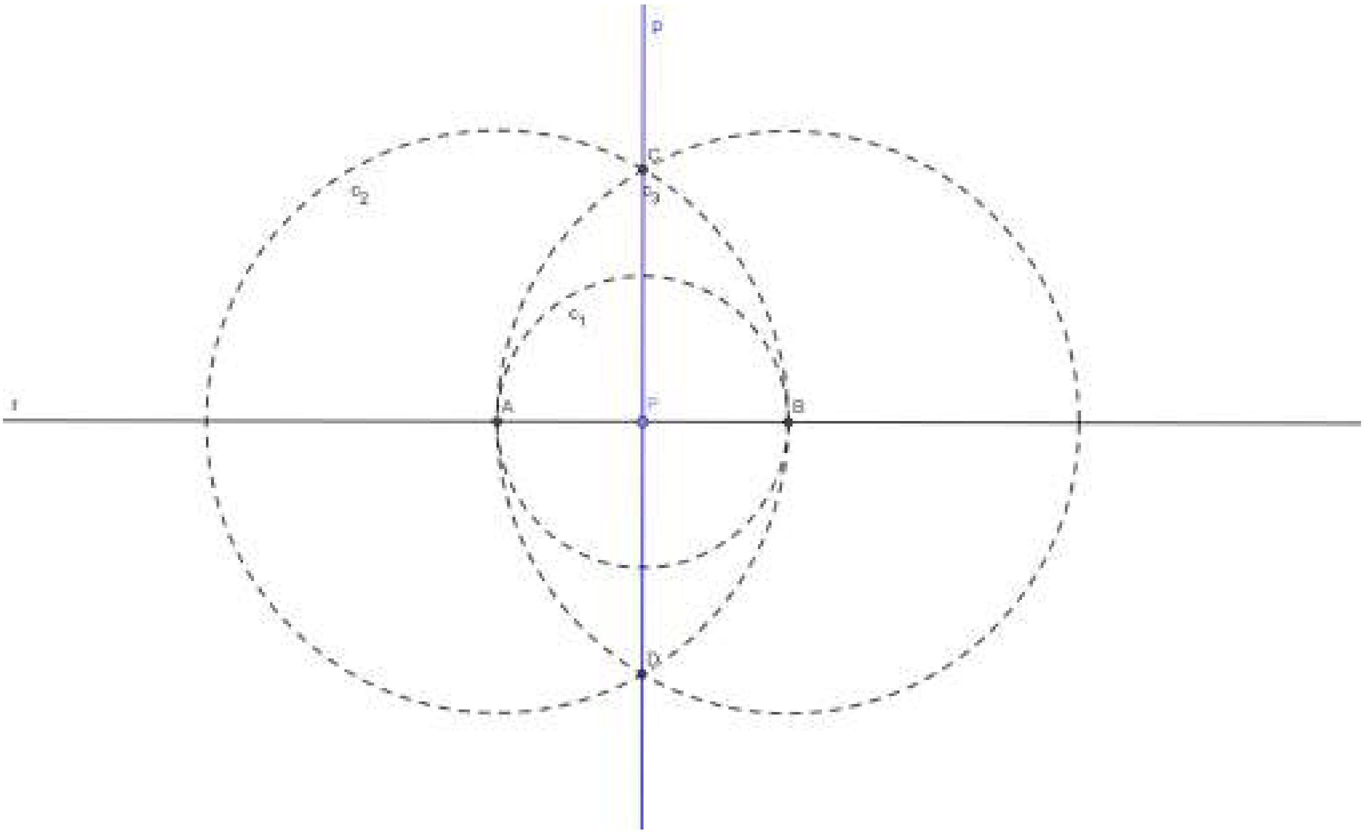
Dada uma reta r qualquer e um ponto $P \in r$, pretendemos construir uma reta perpendicular a r que contenha o ponto P.

Descrição:

- Inicialmente, utilizando as ferramentas *Reta* e *Ponto*, respectivamente, vamos construir uma reta r arbitrária e um ponto $P \in r$;
- Utilizando a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*, vamos construir uma circunferência c_1 centrada em P e com raio de medida arbitrária;
- Fazendo a *Interseção* entre c_1 e r, determinamos dois novos pontos, A e B;
- Conforme discutimos na subseção (3.2.3), vamos construir a reta p, mediatriz do segmento $\overline{AB}$. A reta p contém o ponto P e é perpendicular à reta r.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.6).

Figura 3.6 – Reta p, perpendicular a r, que contém o ponto interno P.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Justificativa:

Note que $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$ são raios da circunferência c_1. Logo, o ponto P é o ponto médio do segmento $\overline{AP}$. A reta p é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, portanto, é a reta perpendicular a r que contém o ponto P.

3.2.7 Construção da Bissetriz de um ângulo

Dado um ângulo α qualquer, pretendemos construir a sua reta bissetriz.

Descrição:

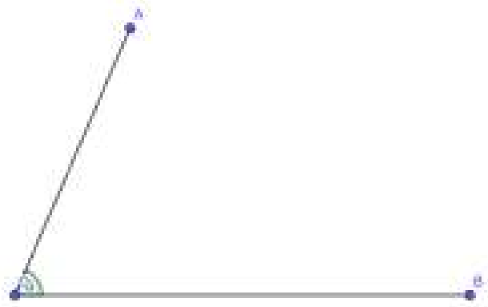
- Inicialmente, vamos construir um ângulo de valor arbitrário. Para isso, usamos a ferramenta *Ponto* para determinar três pontos distintos, chamados A, B e O. A seguir, utilizando as ferramentas *Segmento* e *Ângulo*, respectivamente, determinamos os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$ e formamos o ângulo $\widehat{AOB}$, ao qual chamaremos α.
- Utilizando a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*, vamos construir uma circunferência c_1 centrada em O e com raio arbitrário, de modo que c_1 intercepte os lados do ângulo $\widehat{AOB}$;
- Fazendo a *Interseção* de c_1, respectivamente, com os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, determinamos dois novos pontos, C e D;
- Utilizando as ferramentas *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos* e *Compasso*, vamos determinar duas circunferências secantes, c_2 e c_3, centradas, respectivamente, em C e D e que possuam o mesmo raio;
- Fazendo a *Interseção* de c_2 e c_3, determinamos dois novos pontos, E e F;
- Tomando o ponto O e o ponto E, compreendido na região interna do ângulo $\widehat{AOB}$, e utilizando a ferramenta *Reta*, construímos a reta b que contém esses pontos. Essa reta é a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.8).

Justificativa:

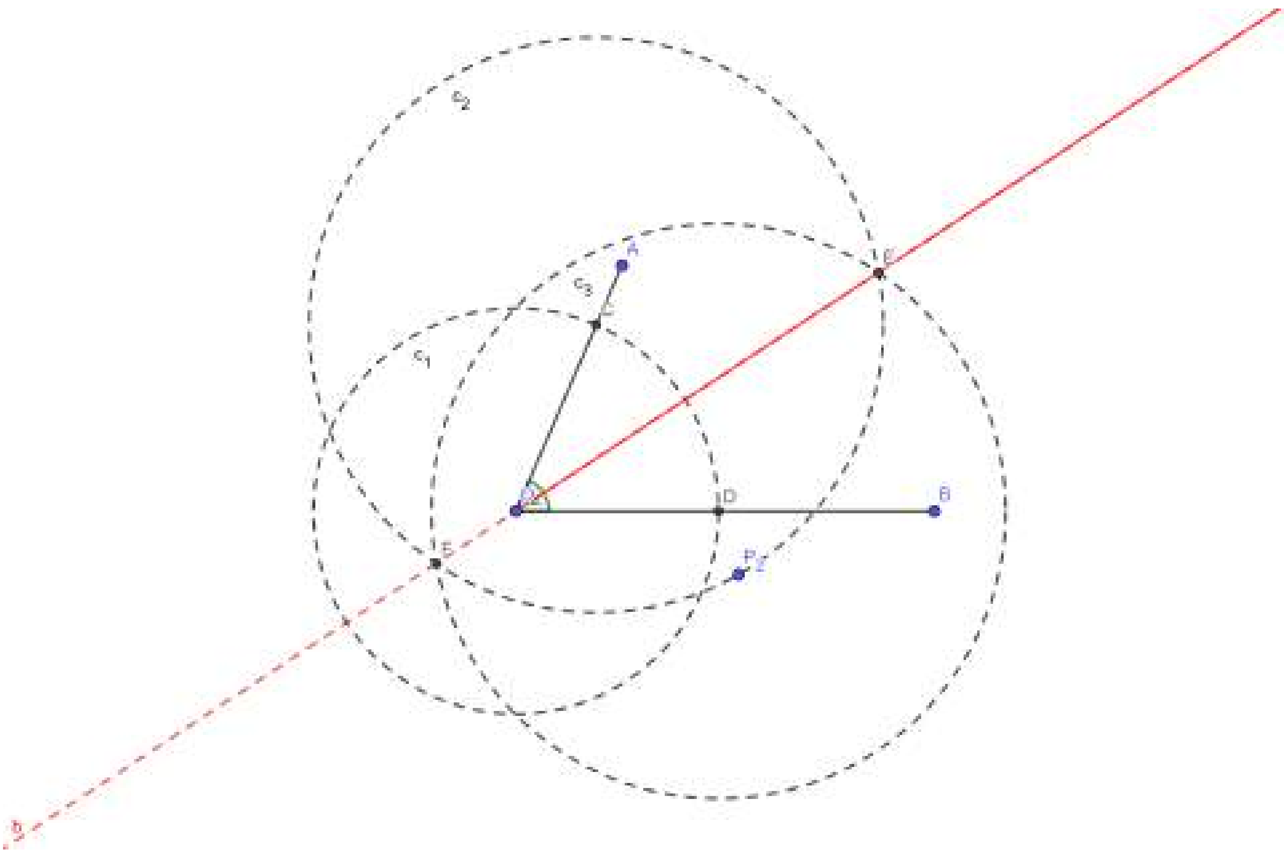
Inicialmente, note que $\overline{CO} \equiv \overline{DO}$, por serem raios da circunferência c_1. Além disso, como as circunferências c_2 e c_3 foram construídas com mesmo raio, temos que $\overline{CE} \equiv \overline{DE}$. Logo, pelo caso LLL, temos que os triângulos $\triangle$COE e $\triangle$DOE são congruentes. Essa congruência nos garante que $\widehat{COE} \equiv \widehat{DOE} = \frac{\alpha}{2}$ e, portanto, a reta b é bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$.

Figura 3.7 – Ângulo α.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Figura 3.8 – Reta b, bissetriz do ângulo α.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

3.3 CONSTRUÇÕES INTERMEDIÁRIAS

As próximas Construções que abordamos são um pouco mais complexas do que as que foram trabalhadas anteriormente. Para realizar essas novas Construções será necessário retomar outras previamente discutidas. No Geogebra, existem ferramentas específicas para isso e que agora poderemos utilizar, pois, já demonstramos a validade desses resultados pelas regras dos instrumentos euclidianos.

3.3.1 Circunferência Circunscrita a um Triângulo

Dados três pontos não colineares A, B e C, pretendemos construir a circunferência que contém os três pontos.

Descrição:

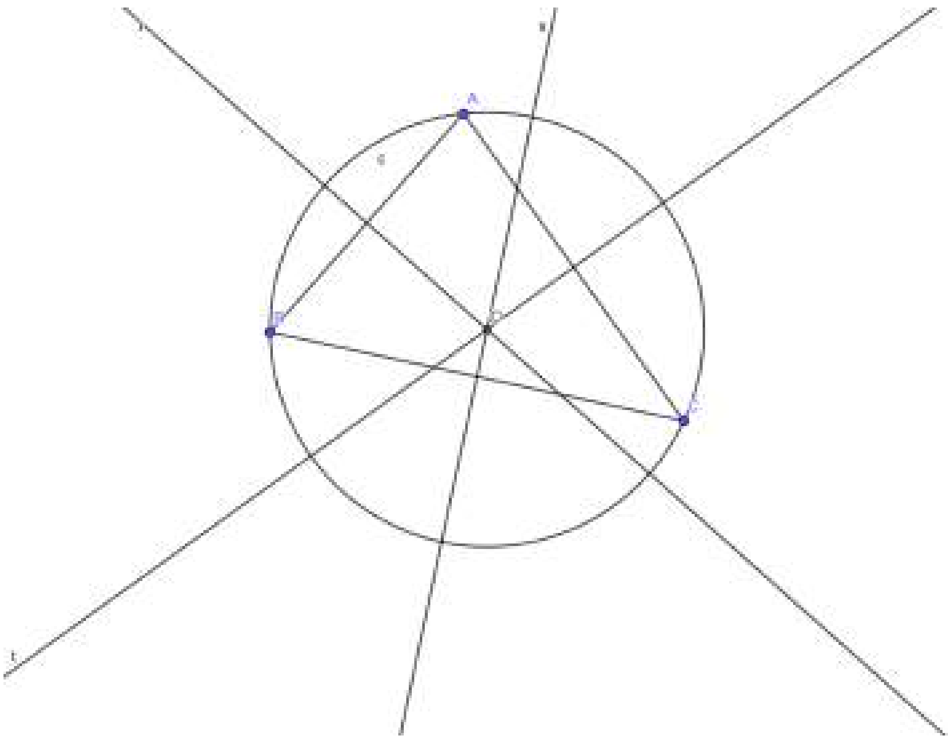
- Inicialmente, utilizando a ferramenta *Ponto*, vamos construir três pontos arbitrários aos quais chamaremos de A, B e C;
- Com a ferramenta *Segmento*, vamos construir os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$;
- Utilizando a ferramenta *Mediatriz*, vamos construir três retas: a reta r, mediatriz do segmento $\overline{AB}$, a reta s, mediatriz do segmento $\overline{BC}$ e a reta t, mediatriz do segmento $\overline{AC}$;
- Fazendo a *Interseção* das retas mediatrizes, determinamos um novo ponto que chamaremos de O;
- Por fim, utilizando a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos* e tomando o ponto O como centro, determinamos a circunferência c que contém os pontos A, B e C. A circunferência c é, portanto, circunscrita ao triângulo $\triangle$ABC.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.10).

Figura 3.9 – Três pontos dados para traçar a circunferência que os contém.

Fonte: Autoria Própria, 2024.

Figura 3.10 – Circunferência *c* circunscrita ao triângulo △ABC.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

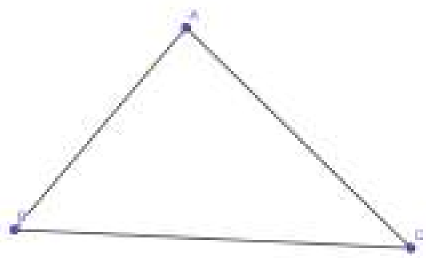
Justificativa:

Sabemos que as retas r, s e t são, respectivamente, as mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Note que as retas r e s não são paralelas pois, caso contrário, A, B e C seriam colineares. Logo, r e s possuem um ponto de interseção. Por serem as mediatrizes dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, seus pontos distam igualmente das extremidades. Assim, temos que $\overline{AO} = \overline{BO}$ e $\overline{BO} = \overline{CO}$ pois o ponto O pertence a r e a s. Analogamente, chegamos à mesma conclusão para a reta t. Logo, o ponto O pertence às três mediatrizes e equidista dos pontos A, B e C. Portanto, ele é o centro da circunferência que contém A, B e C.

3.3.2 Circunferência Inscrita em um Triângulo

Dados três pontos A, B e C, que formam o triângulo $\triangle$ABC, conforme apresentado na Figura (3.11), pretendemos construir a circunferência inscrita nesse triângulo, isto é, que tangencia os três lados deste.

Figura 3.11 – Triângulo para a construção da circunferência inscrita.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

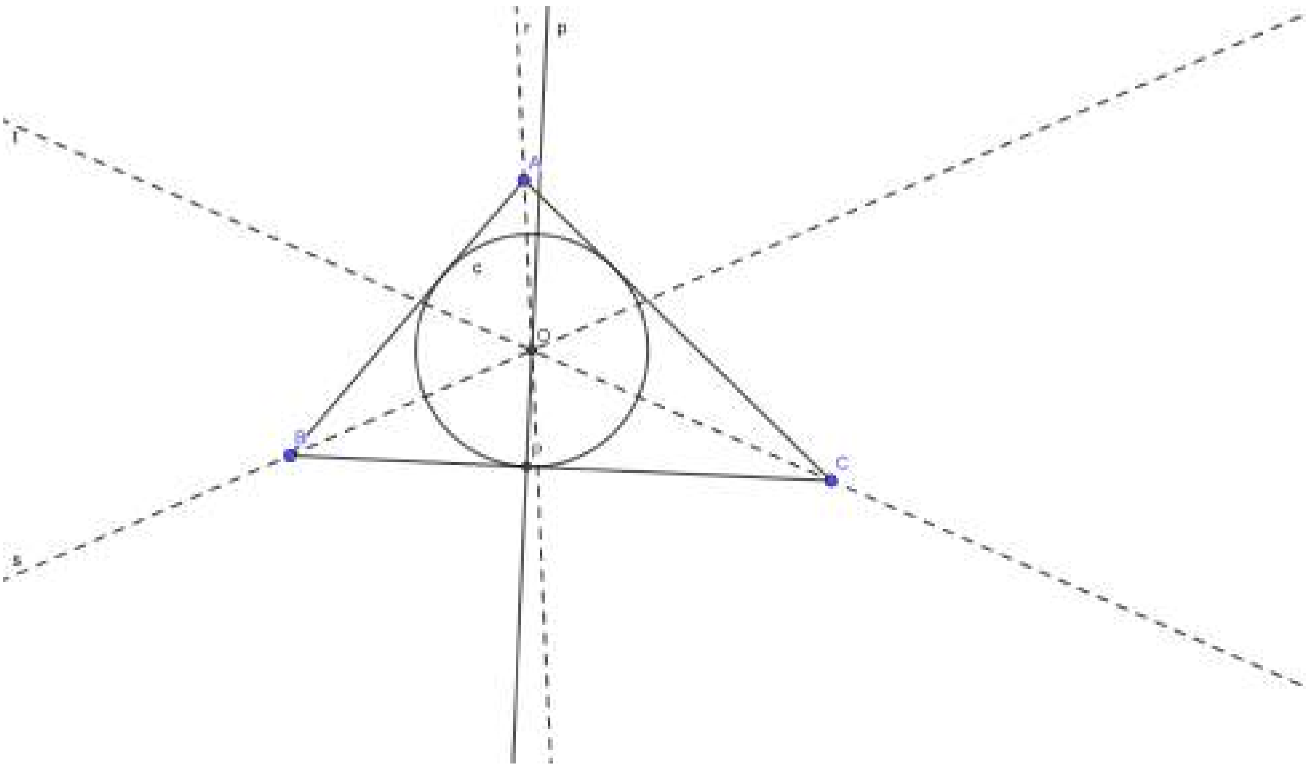
Descrição:

- Utilizando as ferramentas *Ponto* e *Segmento*, respectivamente, vamos determinar três pontos arbitrários A, B e C e construir o triângulo $\triangle$ABC;
- Com a ferramenta *Bissetriz*, vamos construir as retas r, s e t que são, respectivamente, as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$;

- Fazendo a *Interseção* das retas r, s e t, encontramos um novo ponto que chamaremos de O;
- Utilizando a ferramenta *Reta Perpendicular*, vamos determinar a perpendicular em relação a um dos lados do triângulo △ABC ($\overline{BC}$, por exemplo) que contém o ponto O;
- Fazendo a *Interseção* da reta perpendicular, que chamamos de p, com o lado $\overline{BC}$, determinamos um novo ponto que chamaremos de P;
- Com a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*, determinamos uma circunferência c, com centro O e que contém o ponto P. Essa circunferência tangencia os três lados do triângulo e, portanto, está inscrita no mesmo.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.12).

Figura 3.12 – Circunferência *c* circunscrita ao triângulo △ABC.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Justificativa:

Como as retas r, s e t são as bissetrizes dos ângulos do triângulo $\triangle ABC$, então os pontos pertencentes a elas equidistam dos lados do ângulo ao qual estão relacionadas.

Desse modo, o ponto O, que é a interseção das três bissetrizes, equidista de cada um dos lados desse triângulo, portanto, é o centro da circunferência inscrita no mesmo.

3.3.3 Determinar o centro de uma circunferência

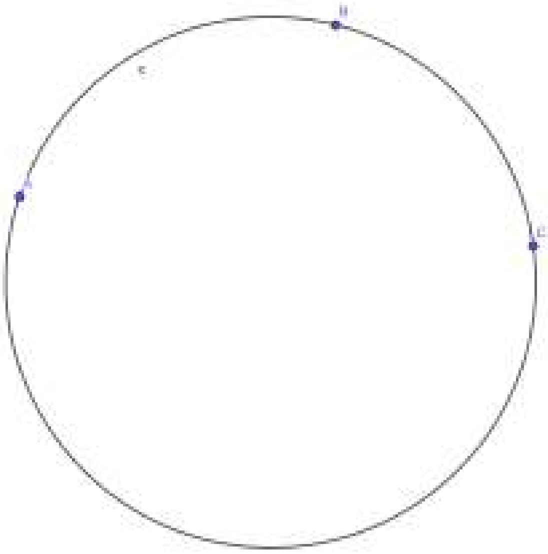
Dada uma circunferência c arbitrária, pretendemos determinar o seu centro.

Descrição:

- Inicialmente, com a ferramenta *Ponto*, vamos determinar três pontos arbitrários A, B e C;
- Utilizando a ferramenta *Círculo definido por Três Pontos*, construímos uma circunferência c que contém os pontos A, B e C e cujo centro é desconhecido;
- Com a ferramenta *Segmento*, vamos traçar uma corda, isto é, um segmento de reta que une dois pontos quaisquer da circunferência, digamos $\overline{AB}$;
- Utilizando a ferramenta *Mediatriz*, vamos construir a reta r, mediatriz de $\overline{AB}$;
- Agora, usando novamente a ferramenta *Segmento*, vamos traçar outra corda, $\overline{BC}$;
- Utilizando a ferramenta *Mediatriz* novamente, vamos construir a reta s, mediatriz do segmento $\overline{BC}$;
- Fazendo a *Interseção* das retas r e s, encontramos um novo ponto que chamaremos de O. Esse ponto é o centro da circunferência c;

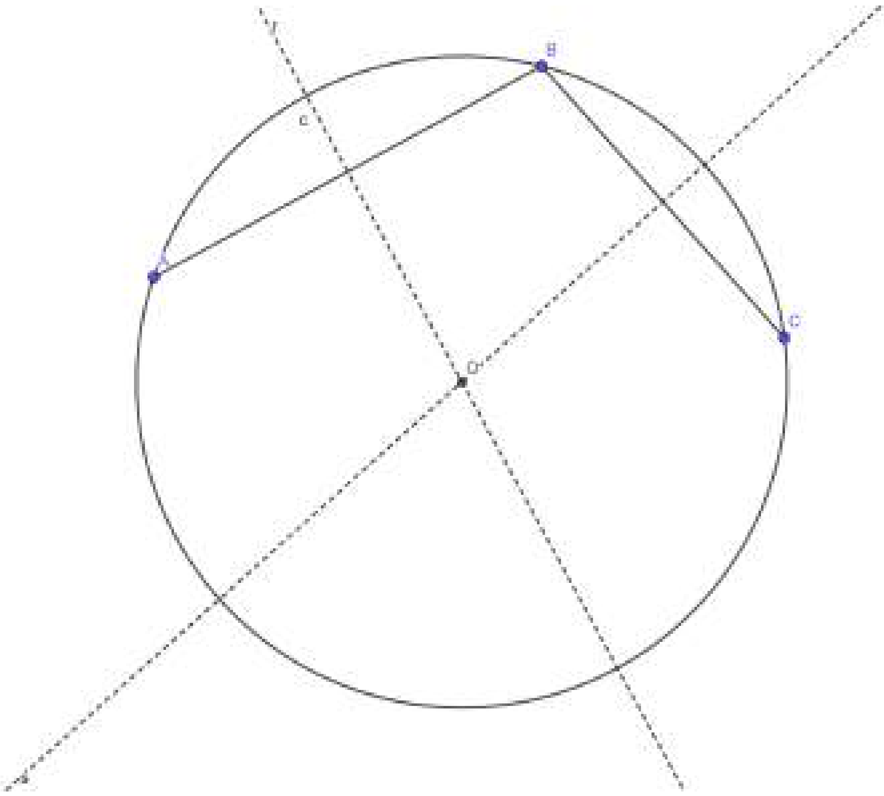
O resultado da construção é apresentado na Figura (3.14).

Figura 3.13 – Circunferência *c* para determinação do centro.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Figura 3.14 – Circunferência *c* com o centro *O* determinado.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Justificativa:

Note que o ponto O é a interseção das retas r e s, respectivamente, mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, ou seja, ele equidista tanto dos pontos A e B como de B e C. Como esses pontos foram tomados de modo arbitrário, teríamos que O equidista de quaisquer outros pontos de c, logo, ele é o centro dessa circunferência.

3.3.4 Traçar as tangentes a uma circunferência

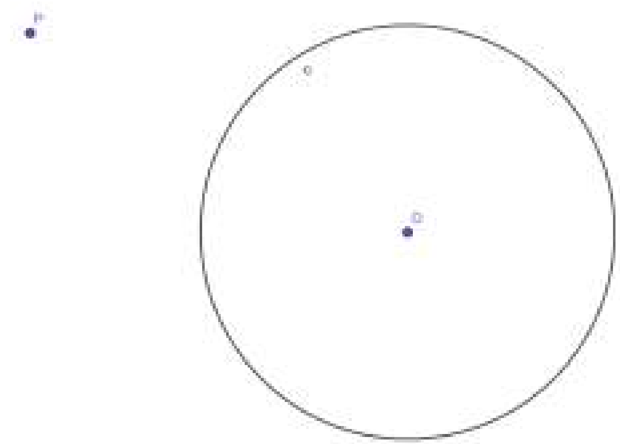
Dada uma circunferência c e um ponto P externo a ela, pretendemos determinar as retas tangentes a circunferência que contém o ponto P. Caso não se conheça o centro da circunferência, utiliza-se a construção descrita na subseção (3.3.3).

Descrição:

- Com a ferramenta *Segmento*, construímos o segmento de reta que une o ponto P ao centro da circunferência, que chamamos de O, formando, assim, o segmento $\overline{OP}$;
- Utilizando a ferramenta *Mediatriz*, vamos traçar a reta r, mediatriz do segmento $\overline{OP}$;
- Fazendo a *Interseção* da reta r com o segmento $\overline{OP}$, determinamos um novo ponto que chamaremos de M;
- Com a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*, construímos a circunferência c_1 que tem centro M e que contém os pontos O e P;
- Fazendo a *Interseção* das circunferências c e c_1, determinamos dois novos pontos que chamaremos de A e B;
- Com a ferramenta *Reta*, determinamos as retas t_1,que contém os pontos A e P, e t_2, que contém os pontos B e P. Essas retas são as tangentes a circunferência c que contêm o ponto P.

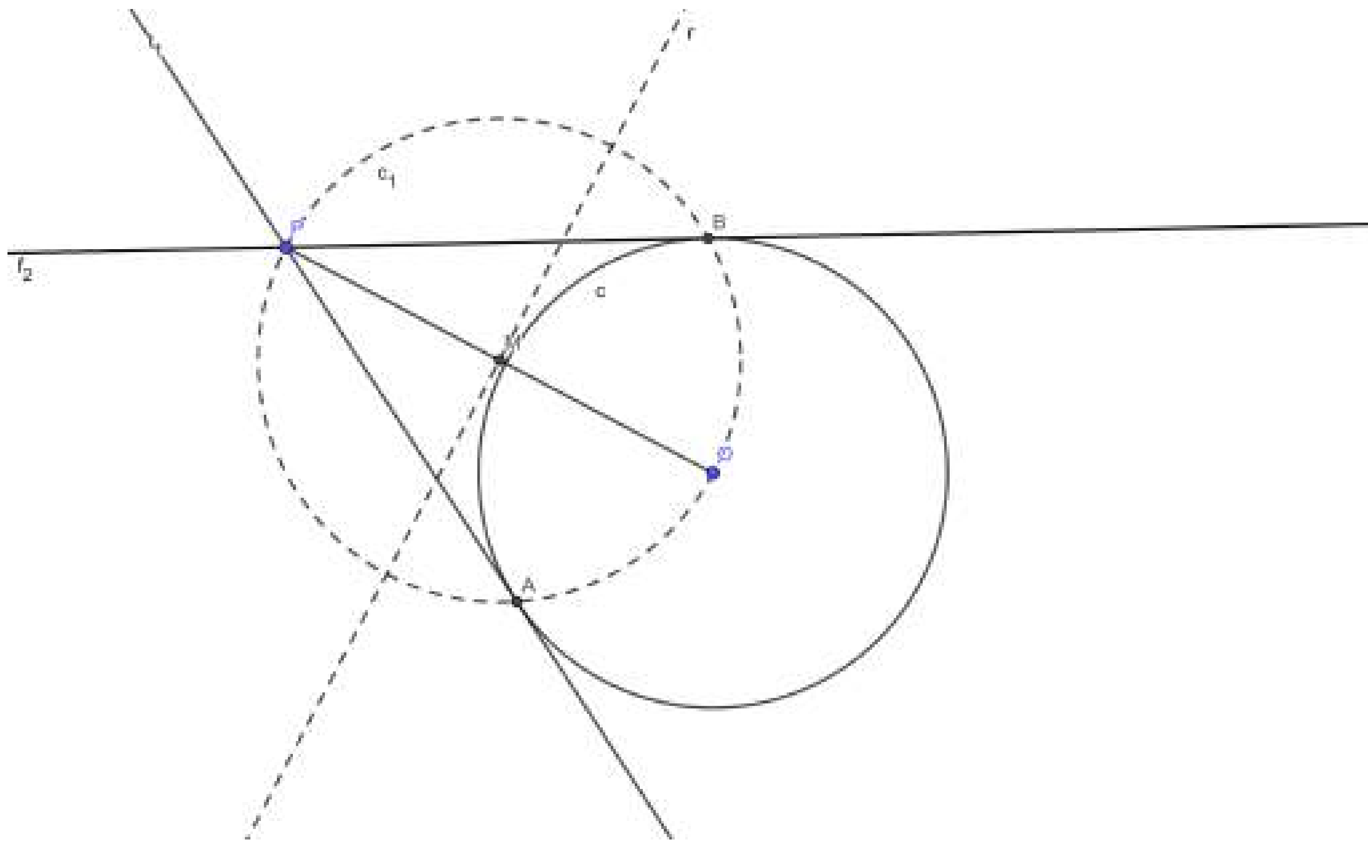
O resultado da construção é apresentado na Figura (3.16).

Figura 3.15 – Circunferência *c* e ponto *P* para determinação das tangentes.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Figura 3.16 – Circunferência *c* e tangentes t_1 e t_2 que contêm o ponto P.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Justificativa:

Observe que o ponto ângulo $\widehat{OAP}$ está inscrito em uma semicircunferência, então, pela propriedade do ângulo inscrito, sua medida é metade do arco correspondente (180°). Logo, $\widehat{OAP} = \frac{180°}{2} = 90°$. Como a reta t_1 intercepta a circunferência c em A e é perpendicular ao raio da mesma ($\overline{AO}$), concluímos que t_1 é tangente a c. Analogamente, concluímos que a reta t_2 também é tangente a c.

3.3.5 Divisão de um segmento em partes iguais

Dados um segmento de reta $\overline{AB}$, pretendemos dividi-lo em n partes congruentes. Para dividir um segmento de reta em duas partes iguais, por exemplo, basta determinarmos o seu ponto médio, procedimento esse que abordamos na subseção 3.2.3. Agora, vamos discutir como podemos dividir um segmento $\overline{AB}$ em três partes iguais e, a partir daí, generalizar para qualquer valor n de partes que se queira.

Figura 3.17 – Segmento para divisão em 3 partes iguais.

Fonte: Autoria Própria, 2024.

Descrição:

- Inicialmente, utilizamos a ferramenta *Reta* para construir uma reta r que contenha uma das extremidades do segmento $\overline{AB}$, por exemplo, o ponto A;

- Com a ferramenta *Ponto*, vamos determinar um ponto A_1 arbitrário sobre a reta r;
- Utilizando o mesmo procedimento da seção (3.2.1), vamos determinar outros dois pontos sobre r, aos quais chamaremos de A_2 e A_3, de modo que $\overline{AA_1} \equiv \overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_2A_3}$;
- Com a ferramenta *Reta*, vamos traçar uma reta s, que contém os pontos B e A_3
- Utilizando, agora, a ferramenta *Reta Paralela*, vamos traçar duas retas paralelas, p_1 e p_2 a s, que contenham, respectivamente, os pontos A_1 e A_2 e que interceptem o segmento $\overline{AB}$ nos pontos A'_1 e A'_2. Os segmentos $\overline{AA'_1}$, $\overline{A'_1A'_2}$ e $\overline{A'_2B}$ são congruentes.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.18).

Justificativa:

Note que as retas s, p_1, e p_2 formam um feixe de paralelas cortadas pela reta r e pelo segmento $\overline{AB}$. Assim sendo, pelo Teorema de Tales teremos que:

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{AA'_1}{A'_1A'_2}$$

e

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{A'_1A'_2}{A'_2B}.$$

Sabemos que, por construção, $\overline{AA_1} \equiv \overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_2A_3}$, isto é, $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$. Desse modo,

$$1 = \frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{AA'_1}{A'_1A'_2} \Rightarrow 1 = \frac{AA'_1}{A'_1A'_2} \Rightarrow AA'_1 = A'_1A'_2$$

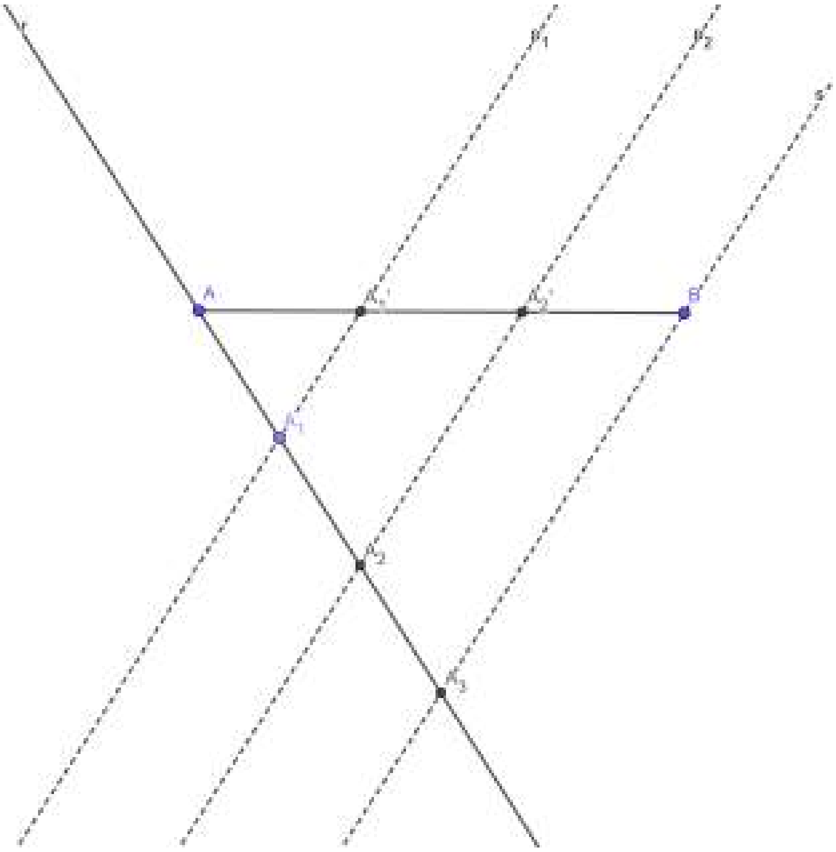
e

$$1 = \frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{A'_1A'_2}{A'_2B} \Rightarrow 1 = \frac{A'_1A'_2}{A'_2B} \Rightarrow A'_1A'_2 = A'_2B.$$

Portanto,

$$AA'_1 = A'_1A'_2 = A'_2B.$$

Figura 3.18 – Segmento dividido em 3 partes iguais.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Por fim, podemos generalizar esse procedimento para dividir um segmento em n partes congruentes. Basta construir n segmentos congruentes sobre a reta r e, utilizando retas paralelas, dividir o segmento $\overline{AB}$ em n partes de mesmo comprimento.

3.4 EXPRESSÕES ALGÉBRICAS ATRAVÉS DE CONSTRUÇÕES

Na presente seção, tratamos de Construções Geométricas ligadas a expressões algébricas. Por meio da discussão a seguir tornar-se-á mais visível a relação entre elementos algébricos e geométricos que, conforme exposto no Capítulo 2, era algo evidente e basilar na matemática grega, mas que no atual modelo de ensino, pautado pela cada vez maior separação dos saberes, aparentam, para muitos alunos e até professores, ser realidades desconexas e independentes. De modo similar ao que foi realizado na seção (3.3) do presente Capítulo, nas discussões a seguir utilizaremos Construções previamente apresentadas e justificadas.

3.4.1 Representação geométrica da expressão $\sqrt{a^2 \pm b^2}$

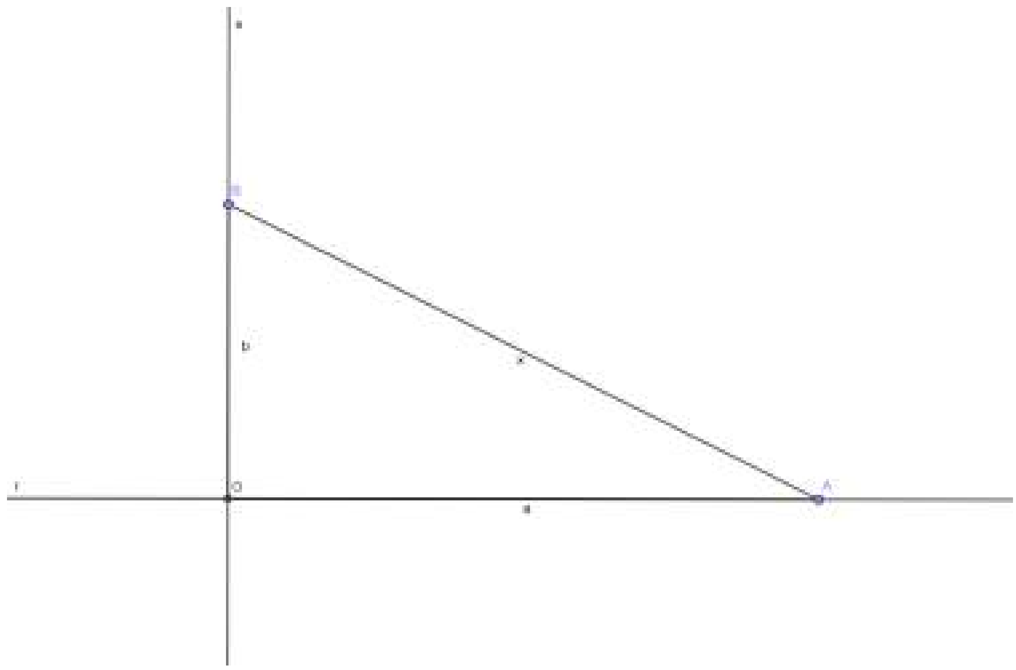
Caso tenhamos $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, onde a e b são os comprimentos de dois segmentos conhecidos, note que x é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos tem medidas a e b.

Descrição:

- Primeiramente, vamos utilizar a ferramenta *Reta* para construir uma reta r arbitrária;
- A seguir, com a ferramenta *Reta Perpendicular*, vamos construir uma reta s perpendicular a r;
- Fazendo a *Interseção* das retas r e s, determinamos um ponto que chamaremos de O;
- Com as ferramentas *Ponto* e *Segmento*, vamos construir o segmento $\overline{AO}$ sobre r e o segmento $\overline{BO}$ sobre s, de modo que $AO = a$ e $BO = b$;
- Por fim, com a ferramenta *Segmento*, construímos o segmento $\overline{AB}$ que chamaremos de x. Temos que $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.19).

Figura 3.19 – Segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Justificativa:

Como as retas r e s são perpendiculares, temos que o triângulo $\triangle$AOB é retângulo. Logo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$(AB)^2 = (AO)^2 + (BO)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

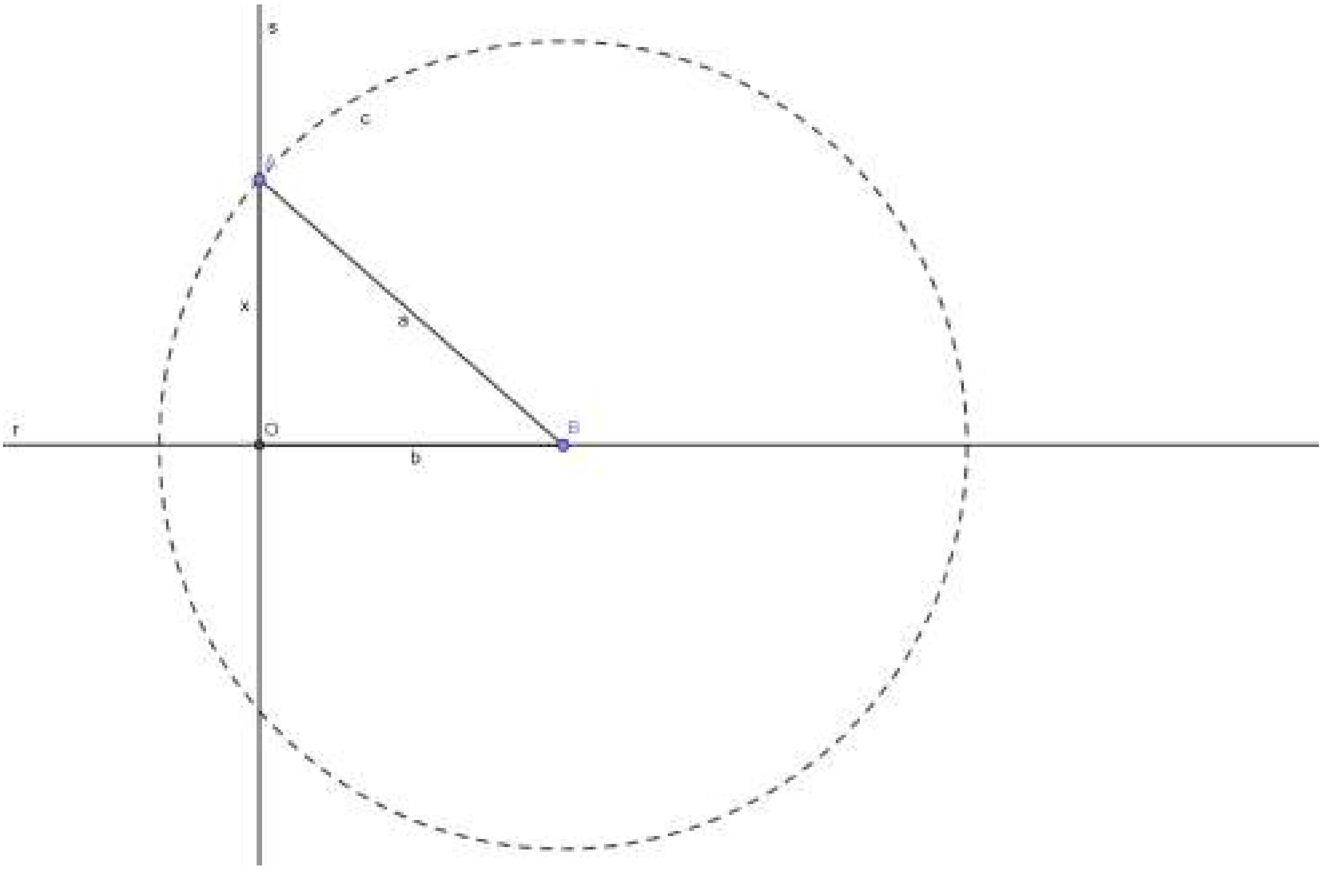
Caso tenhamos $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, onde a e b são os comprimentos de dois segmentos conhecidos, note que a é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são b e x.

Descrição:

- Primeiramente, vamos utilizar a ferramenta *Reta* para construir uma reta r arbitrária;
- A seguir, com a ferramenta *Reta Perpendicular*, vamos construir uma reta s perpendicular a r;
- Fazendo a *Interseção* das retas r e s, determinamos um ponto que chamaremos de O;
- Com as ferramentas *Ponto* e *Segmento*, vamos construir o segmento $\overline{BO}$ sobre r de modo que $BO = b$;
- Utilizando a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*, vamos construir uma circunferência c de raio a e cujo centro é o ponto B, que intercepta a reta s no ponto A;
- Com a ferramenta *Segmento*, vamos determinar os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AO}$. Temos, então, que $AB = a$ e $AO = x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.20).

Figura 3.20 – Segmento $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Justificativa:

Como as retas r e s são perpendiculares, temos que o triângulo $\triangle$AOB é retângulo. Logo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$
\begin{aligned}
(AB)^2 &= (AO)^2 + (BO)^2 \\
\Rightarrow a^2 &= x^2 + b^2 \\
\Rightarrow x^2 &= a^2 - b^2 \\
\Rightarrow x &= \sqrt{a^2 - b^2}.
\end{aligned}
$$

3.4.2 Representação geométrica de $a\sqrt{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$

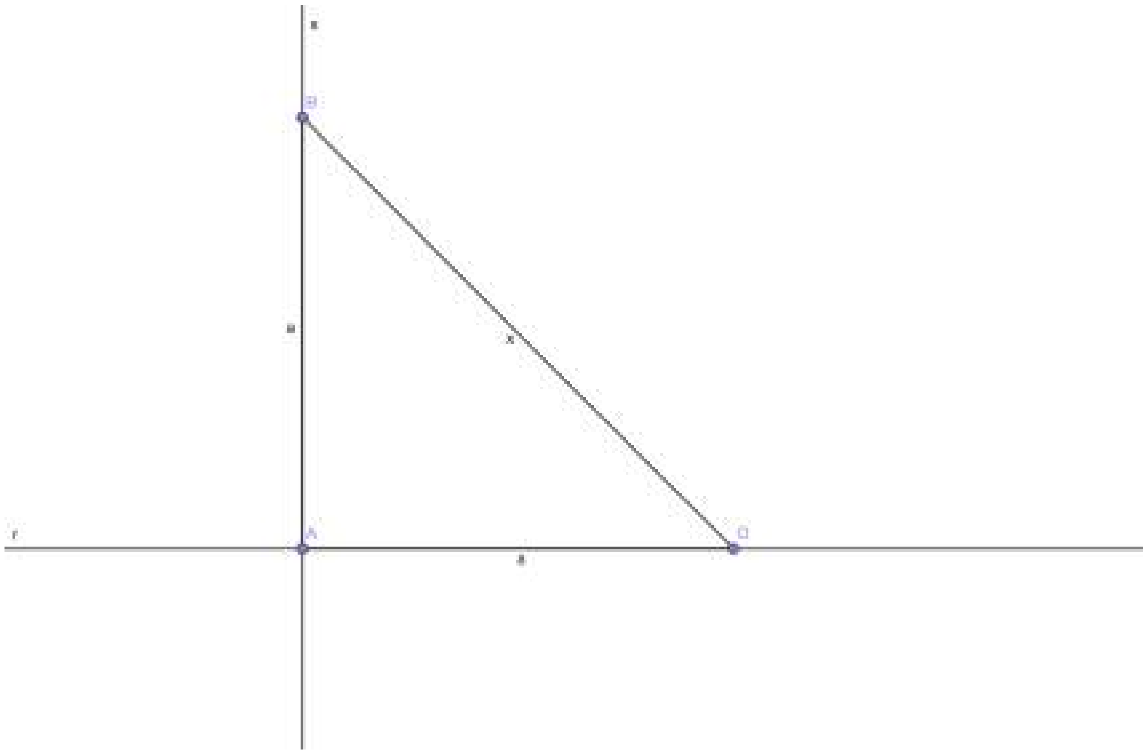
Por essa construção poderemos obter os termos da sequência $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}, a\sqrt{4}, ...$ Comecemos pelo caso $a\sqrt{2}$.

Descrição:

- Inicialmente, com a ferramenta *Reta*, construímos uma reta r arbitrária;
- Com as ferramentas *Ponto* e *Segmento*, vamos marcar dois pontos, A e O, sobre r e determinar o segmento $\overline{AO}$, de modo que $AO = a$;
- Utilizando a ferramenta *Reta Perpendicular*, vamos construir a reta s, perpendicular a r e que contém o ponto A;
- Com as ferramentas *Ponto* e *Segmento*, vamos determinar um segmento $\overline{AB}$ sobre a reta s de modo que $AB = a$;
- Por fim, com a ferramenta *Segmento*, vamos determinar o segmento $\overline{BO}$, que chamaremos de x. Temos, então, que $x = a\sqrt{2}$.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.21).

Figura 3.21 – Segmento $x = a\sqrt{2}$.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Justificativa:

Como as retas r e s são perpendiculares, temos que o triângulo $\triangle$AOB é retângulo. Logo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$(BO)^2 = (AB)^2 + (AO)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = a^2 + a^2$$
$$\Rightarrow x^2 = 2a^2$$
$$\Rightarrow x = a\sqrt{2}.$$

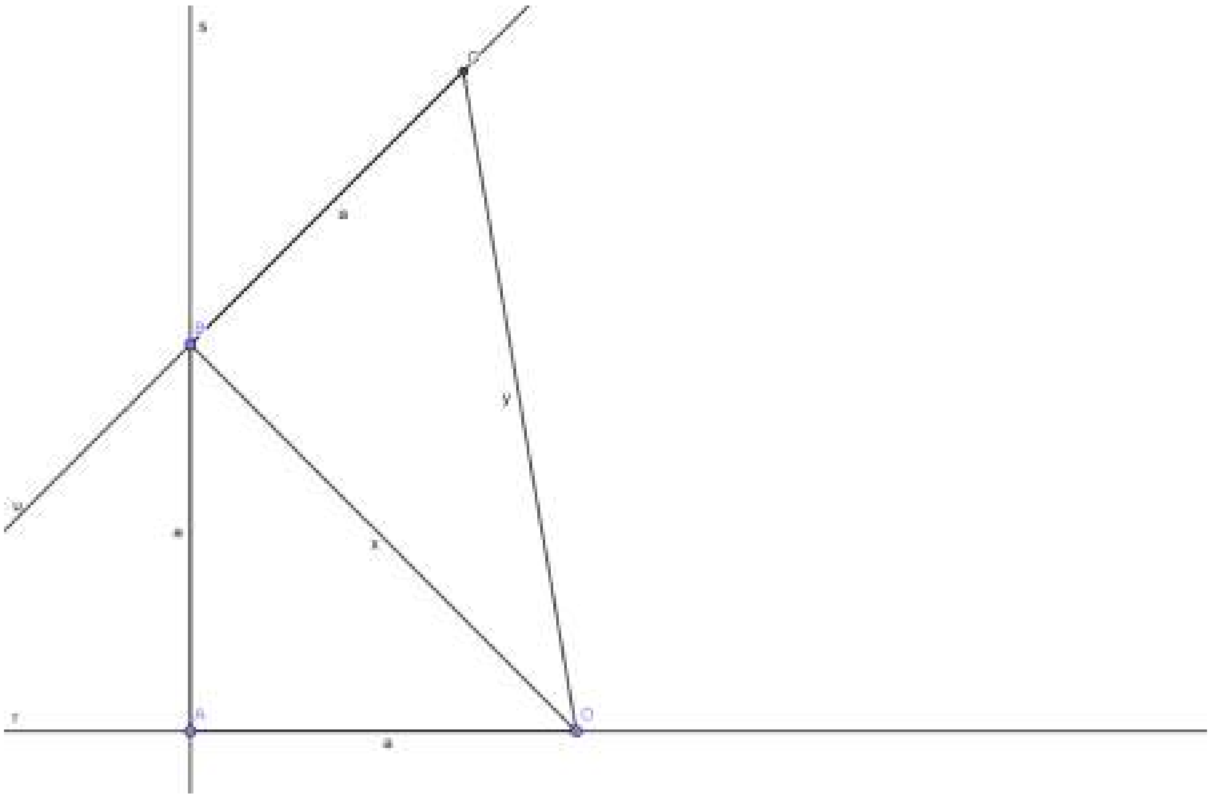
A construção do segmento $a\sqrt{3}$ será feita como continuação direta da construção anterior.

Descrição:

- Com a ferramenta *Reta Perpendicular*, vamos construir a reta u, perpendicular ao segmento $\overline{BO}$ e que contém o ponto B;
- Utilizando as ferramentas *Ponto* e *Segmento*, vamos construir um segmento $\overline{BC}$ sobre a reta u, de modo que $BC = a$;
- Novamente com a ferramenta *Segmento*, vamos determinar o segmento $\overline{CO}$, que chamaremos de y. Temos, então que, $y = a\sqrt{3}$.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.22).

Figura 3.22 – Segmento $y = a\sqrt{3}$.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Justificativa:

Como a reta u é perpendicular ao segmento $\overline{BO}$, temos que o triângulo $\triangle$BOC é retângulo em B. Logo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$(CO)^2 = (BC)^2 + (BO)^2$$

$$\Rightarrow y^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow y^2 = a^2 + 2a^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 3a^2$$

$$\Rightarrow y = a\sqrt{3}.$$

Da mesma maneira, a construção do segmento $a\sqrt{4}$, bem como a dos demais termos da sequência $a\sqrt{n}$, vem como continuação direta das anteriores.

Descrição:

- Com a ferramenta *Reta Perpendicular*, vamos construir a reta v, perpendicular ao segmento $\overline{CO}$ e que contém o ponto C;
- Utilizando as ferramentas *Ponto* e *Segmento*, vamos construir um segmento $\overline{CD}$ sobre a reta v, de modo que $CD = a$;
- Novamente com a ferramenta *Segmento*, vamos determinar o segmento $\overline{DO}$, que chamaremos de z. Temos, então que, $z = a\sqrt{4} = 2a$.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.23).

Justificativa:

Como a reta v é perpendicular ao segmento $\overline{CO}$, temos que o triângulo $\triangle$COD é retângulo. Logo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$(DO)^2 = (CD)^2 + (CO)^2$$

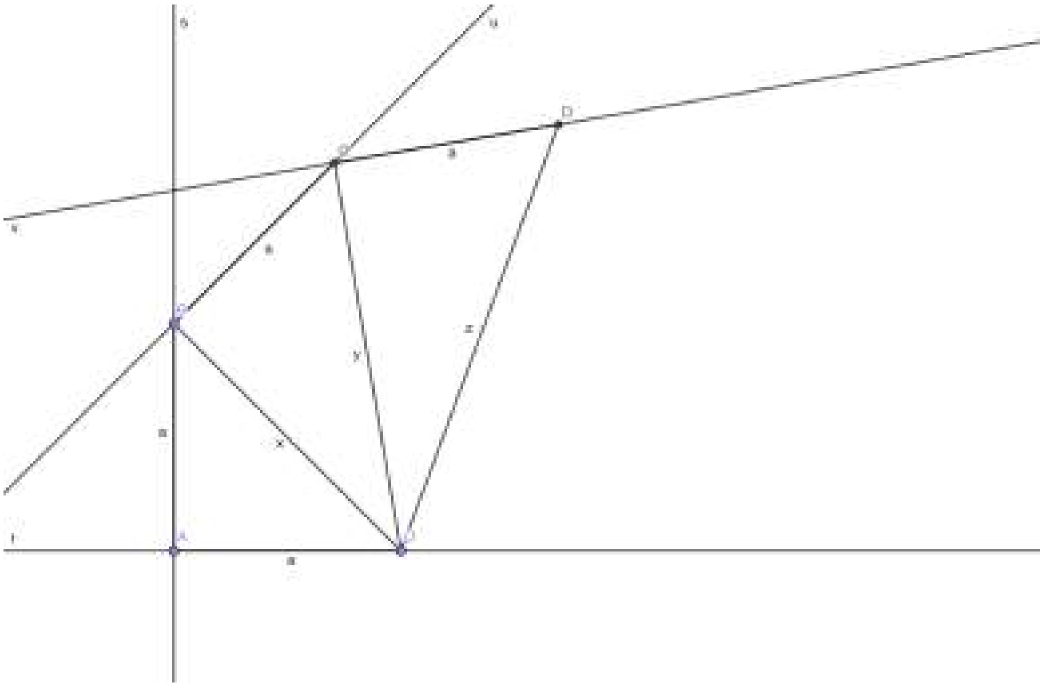
$$\Rightarrow z^2 = a^2 + (a\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow z^2 = a^2 + 3a^2$$

$$\Rightarrow z^2 = 4a^2$$

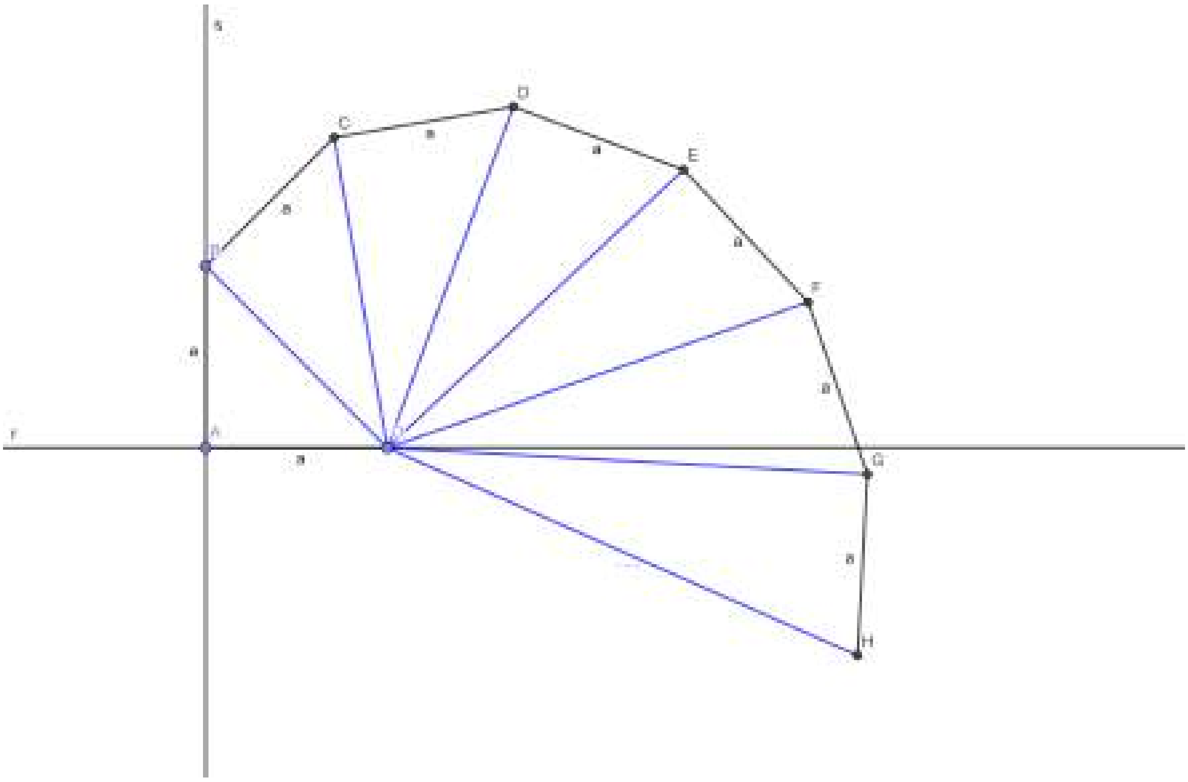
$$\Rightarrow z = a\sqrt{4} = 2a.$$

Figura 3.23 – Segmento $z = a\sqrt{4}$.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Figura 3.24 – Segmentos $a\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

3.4.3 Média Aritmética

Dados dois segmentos de comprimentos a e b, definimos a *média aritmética de a e b* como:

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

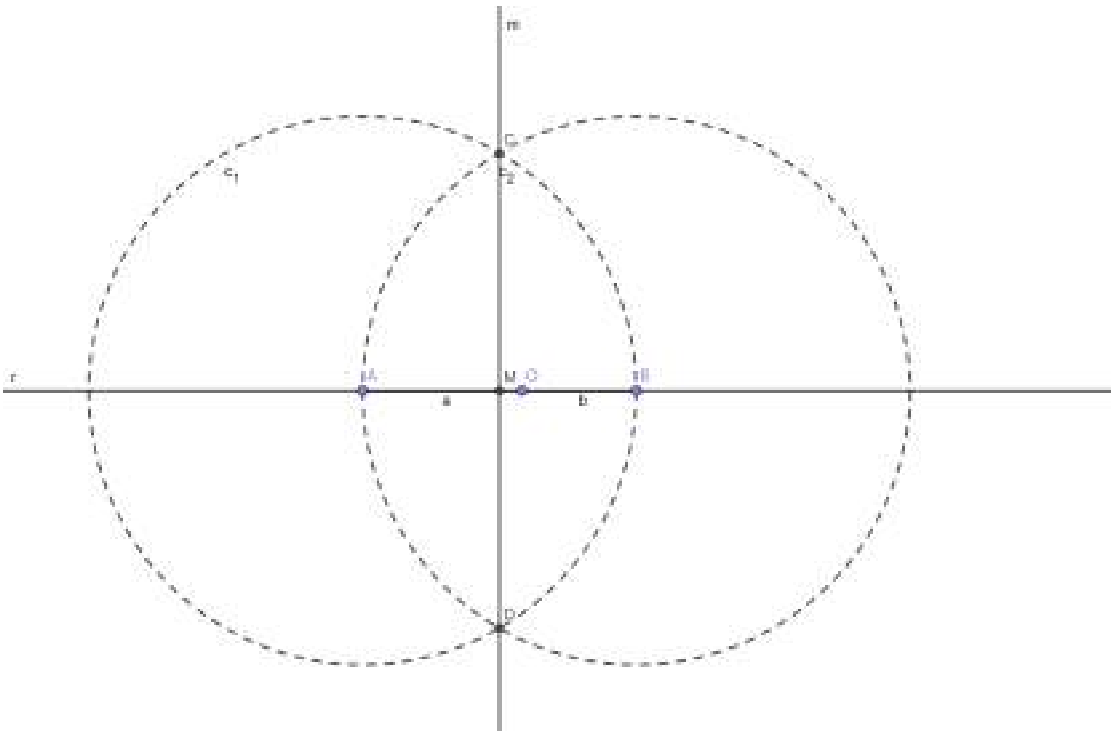
Descrição:

- Primeiramente, com a ferramenta *Reta*, construímos uma reta r arbitrária;
- Com as ferramentas *Ponto* e *Segmento*, vamos determinar dois segmentos,$\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, sobre r, de modo que $AO = a$ e $BO = b$;
- De modo similar à construção (3.2.3), determinamos a mediatriz m do segmento $\overline{AB}$;
- Fazendo a *Interseção* das retas r e m determinamos o ponto M, que é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

A média aritmética é a medida $\frac{a+b}{2} = AM = BM$.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.25).

Figura 3.25 – Média Aritmética.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Justificativa:

A presente construção, bem como a explicação da sua validade, é análoga a da subseção (3.2.3).

3.4.4 Média Geométrica

Dados dois segmentos de comprimentos a e b, definimos a *média geométrica de a e b* como:

$$g = \sqrt{ab}.$$

Descrição:

- Primeiramente, com a ferramenta *Reta*, construímos uma reta r arbitrária;
- Com as ferramentas *Ponto* e *Segmento*, vamos determinar dois segmentos,$\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, sobre r, de modo que $AO = a$ e $BO = b$;
- Utilizando a ferramenta *Mediatriz*, vamos determinar a reta m, mediatriz do segmento $\overline{AB}$;
- Fazendo a *Interseção* das retas r e m, determinamos o ponto M;
- Com a ferramenta *Compasso*, vamos determinar uma circunferência c, de centro M e raio $\overline{AM}$;
- Utilizando a ferramenta *Reta Perpendicular*, vamos determinar a reta p, perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e que contém o ponto O;
- Fazendo a *Interseção* da reta p com a circunferência c, determinamos dois pontos. Escolhemos, arbitrariamente, um deles que chamaremos de P.

A média geométrica é a medida $\sqrt{ab} = OP$.

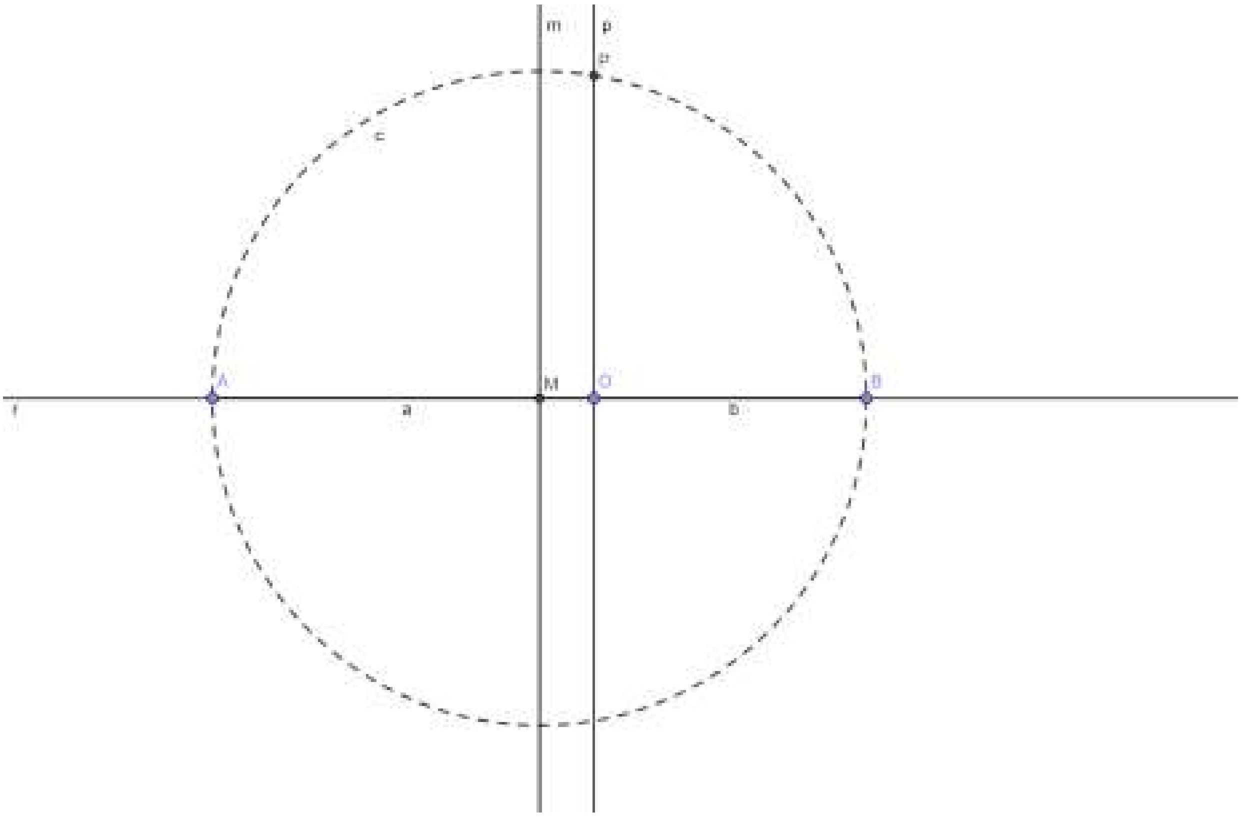
O resultado da construção é apresentado na Figura (3.26).

Justificativa:

Note que o segmento $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência c e que o triângulo $\triangle$ABP, pela propriedade do arco capaz, é retângulo em P. Aplicando a relação métrica da *igualdade entre quadrado da altura e o produto das projeções dos catetos*no triângulo retângulo $\triangle$ABP, temos que

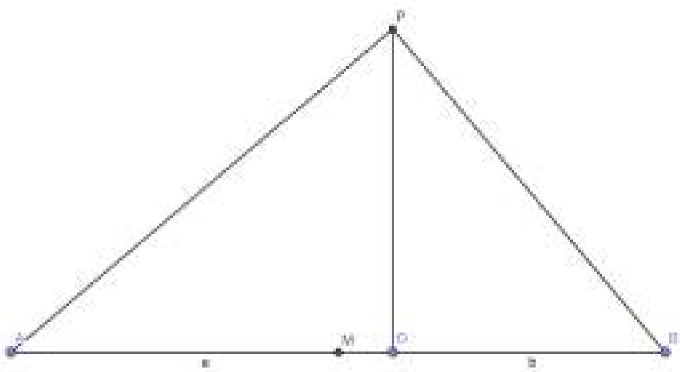
$$(OP)^2 = (AO)(BO) \Rightarrow (OP)^2 = ab \Rightarrow OP = \sqrt{ab}.$$

Figura 3.26 – Média Geométrica.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Figura 3.27 – Média Geométrica - Triângulo Retângulo.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

3.4.5 O Segmento Áureo

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$ e um ponto C interior a esse segmento. Denominaremos o segmento $\overline{AC}$ de *segmento áureo interno* de $\overline{AB}$ se tivermos

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Figura 3.28 – Segmento Áureo Interno.

Fonte: Autoria Própria, 2024.

Tomando $AC = m$, $BC = n$ e $AB = a = m+n$, teremos

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{m}{a} \Rightarrow m^2 = an \Rightarrow m^2 = a(a-m) = a^2 - am \Rightarrow m^2 + am - a^2 = 0.$$

Determinando as raízes da equação anterior na variável m, temos

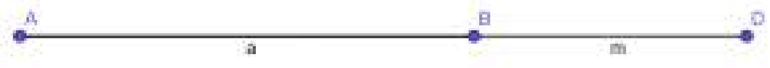
$$m = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(-a^2)}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{a(-1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

Logo, $AC = m = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Se, por outro lado, tomarmos o ponto D, externo ao segmento $\overline{AB}$, denominamos o segmento $\overline{AD}$ de *segmento áureo externo* de $\overline{AB}$ se tivermos

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{AD}.$$

Figura 3.29 – Segmento Áureo Externo.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Tomando $AB = a$, $BD = m$ e $AD = a + m$, teremos

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{m}{a} = \frac{a}{(a+m)} \Rightarrow a^2 = m(a+m) = am + m^2 \Rightarrow m^2 + am - a^2 = 0.$$

Determinando as raízes da equação anterior na variável m, temos

$$m = \frac{-(a) \pm \sqrt{(a)^2 - 4(-a^2)}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = a\frac{(-1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

Logo, $BD = a\frac{(-1+\sqrt{5})}{2}$ e, portanto,

$$AD = AB + BD = a + a\frac{(-1+\sqrt{5})}{2} = \frac{(2a - a + \sqrt{5}a)}{2} = \frac{(a + \sqrt{5}a)}{2} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}.$$

Multiplicando as raízes das duas equações, teremos

$$AC \cdot AD = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} \cdot \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2} = \frac{a^2(5 + \sqrt{5} - \sqrt{5} - 1)}{4} = \frac{4a^2}{4} = a^2.$$

Pelo fato de termos considerado $AB = a$ em ambos os casos, a última igualdade implica que

$$AB^2 = AC \cdot AD = a^2,$$

ou seja, AB é a média geométrica entre AC e AD.

Descrição:

- Inicialmente, vamos construir um segmento de reta $\overline{AB}$ utilizando as ferramentas *Ponto* e *Segmento*;
- Com a ferramenta *Reta*, vamos construir uma reta r que contém os pontos A e B;
- Utilizando a ferramenta *Mediatriz*, determinamos a reta m, mediatriz do segmento $\overline{AB}$;
- Fazendo a *Interseção* das retas m e r determinamos um novo ponto, que chamaremos de M;
- Com a ferramenta *Reta Perpendicular*, vamos determinar uma reta p, perpendicular a r e que contém uma das extremidades do segmento $\overline{AB}$, por exemplo, o ponto B;
- Utilizando a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_1, centrada em B e cujo raio é o segmento $\overline{BM}$;
- Fazendo a *Interseção* da circunferência c_1 com a reta p determinamos dois novos pontos, aos quais chamaremos O e P. Escolhemos, então, um deles, por exemplo, o ponto O;
- Utilizando, novamente, a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_2, centrada em O e cujo raio é o segmento $\overline{BO}$;
- Com a ferramenta *Reta*, vamos construir a reta u que contém os pontos A e O;
- Fazendo a *Interseção* da reta u com a circunferência c_2 determinamos dois novos pontos que chamaremos de A_1 e A_2;
- Utilizando a ferramenta *Compasso*, vamos construir as circunferências c_3, centrada em A e cujo raio é o segmento $\overline{AA_1}$, e c_4, centrada em A e cujo raio é o segmento $\overline{AA_2}$;
- Fazendo a *Interseção* de c_3 e r determinamos dois novos pontos. Tomemos o ponto contido no segmento $\overline{AB}$ e o chamamos de C;
- Fazendo a *Interseção* de c_4 e r determinamos dois novos pontos. Tomemos o ponto consecutivo ao ponto B e o chamamos de D;

Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ que determinamos são, respectivamente, o segmento áureo interno e o segmento áureo externo do segmento $\overline{AB}$.

O resultado da construção é apresentado na Figura (3.30).

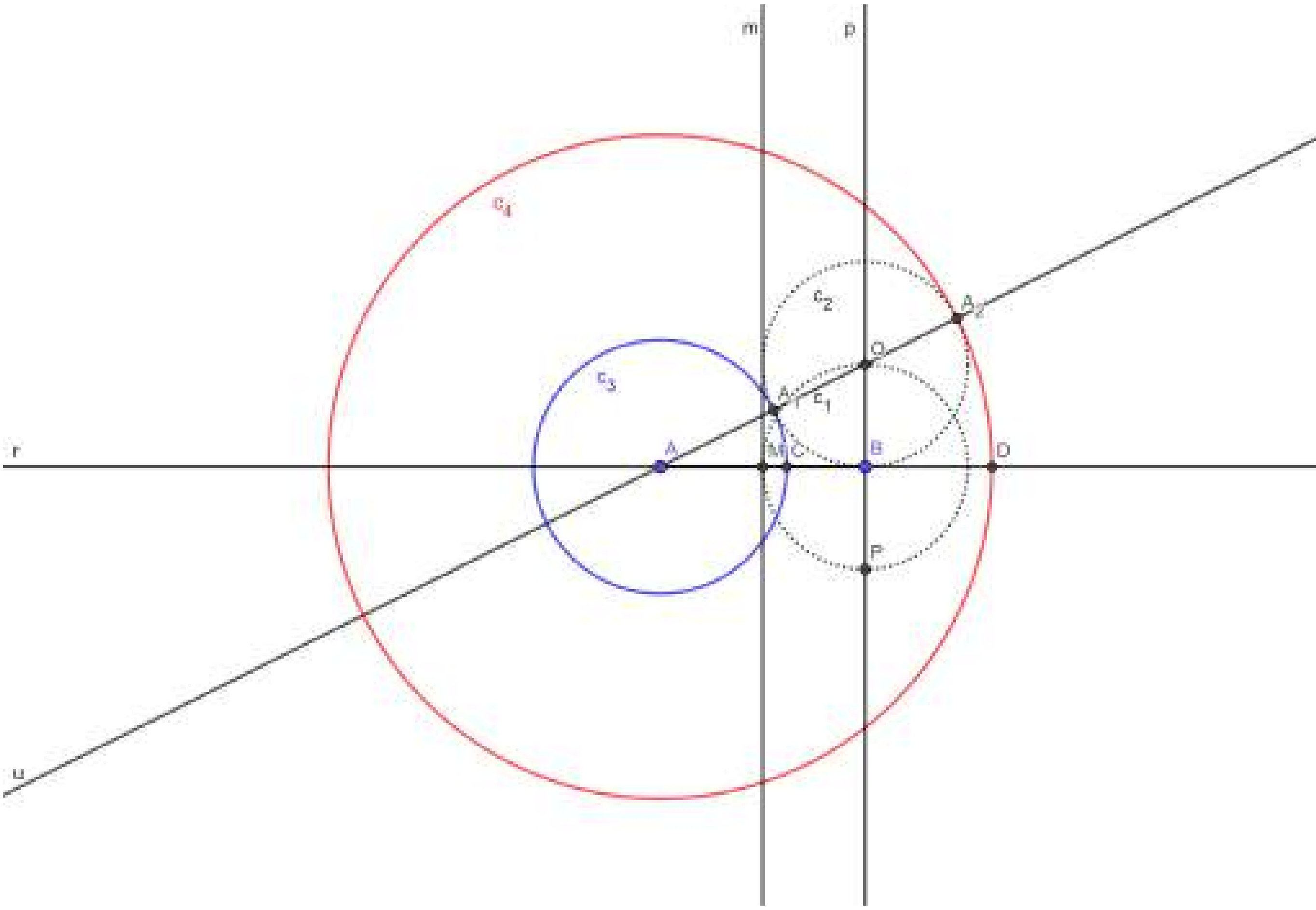
Justificativa:

Aplicando, na circunferência c_2, a propriedade da potência de ponto no caso onde, por um ponto externo, são traçadas uma secante e uma tangente à circunferência, teremos:

$$PT^2 = PA \cdot PB \Rightarrow AB^2 = AA_1 \cdot AA_2 \Rightarrow AB^2 = AC \cdot AD,$$

ou seja, AB é a média geométrica de AC e AD e esses, como havíamos demonstrado anteriormente, são seus segmentos áureos interno e externo respectivamente.

Figura 3.30 – Construção dos Segmentos Áureos



Fonte: Autoria Própria, 2024.

4 NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

Nesse capítulo apresentamos, de modo breve, a noção de Números Construtíveis e de Construtibilidade, tópicos que derivam diretamente das Construções Geométricas. A discussão aqui levantada fundamenta-se, sobretudo, em Wagner e Carneiro (2007) e Júnior (2013).

É importante pontuar que uma abordagem mais rigorosa do assunto exigiria uma ampla fundamentação em Álgebra, sendo necessário apresentar algumas estruturas algébricas com suas propriedades, bem como uma série de teoremas basilares para essa discussão. Para os propósitos desse trabalho, faremos uma abordagem mais geral, seguindo a proposta dos referidos autores, deixando esse aprofundamento algébrico como uma possibilidade de continuação do debate acerca dessa temática.

Pretende-se, com esse capítulo, evidenciar como o tópico de Construções Geométricas impactou o saber matemático, sendo a base para novos conceitos, problemas e resultados, o que justifica a relevância do seu estudo e ensino.

4.1 DEFININDO OS NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

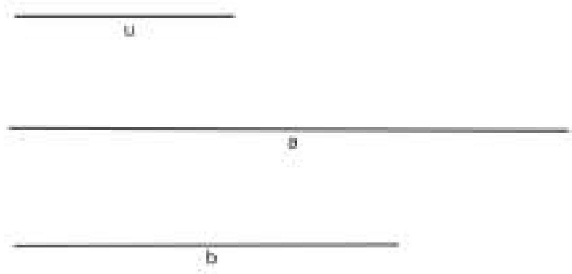
Definição 1. Um número real positivo a é chamado de *construtível* se, utilizando somente uma régua não graduada e um compasso, for possível construir, através de uma sequência finita de passos, um segmento de comprimento a, a partir de um outro segmento u tomado como a unidade.

Teorema 1. *Dados dois números reais positivos a e b, com $a > b$, construtíveis, então $a+b$, $a-b$, ab, $\frac{a}{b}$ e $\sqrt{a}$ também são construtíveis.*

Demonstração

Tomando um segmento de reta arbitrário cujo comprimento seja considerado como unidade, consideremos outros dois segmentos de reta de comprimentos construtíveis a e b.

Figura 4.1 – Segmentos de reta de comprimentos *u*, *a* e *b*.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

i) $a+b$ é construtível
Consideremos, então, um segmento $\overline{AB}$ tal que AB = a e tracemos um segmento $\overline{CD}$, tal que CD = b, conforme visto na construção 3.2.1 de modo que os pontos B e C coincidam e estejam compreendidos entre A e D. Note que o segmento $\overline{AD}$ é formado pela junção dos segmentos colineares $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, portanto, $AD = AB + CD = a + b$. (Ver Figura (4.2)).

ii) $a-b$ é construtível
Ainda sobre a reta AB, construímos uma circunferência c_1 centrada em B e cujo raio tem comprimento b. A interseção da circunferência com a reta nos dá o ponto D e um novo ponto que chamaremos de E. Note que o segmento $\overline{AE}$ que formamos resulta da sobreposição dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BE}$, ou seja, $AE = AB - BE = a - b$. (Ver Figura (4.3)).

iii) ab é construtível
Agora, sobre uma reta r, tracemos um segmento $\overline{AB}$ tal que AB = a. Pelo ponto A

traçamos uma reta s concorrente com r, sobre a qual marcamos o segmento unitário $\overline{AC}$. A seguir, sobre a reta s, marcamos o ponto D tal que AD = b (supomos, sem perda de generalidade, $b > 1$). Tracemos, então, a reta t que contém os pontos C e B e uma outra reta q, paralela a t, que contém o ponto D e intersecta a reta r em um ponto P.

Usando semelhança nos triângulos △ABC e △ADP, temos que:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AP} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{a}{AP} \Rightarrow AP = ab.$$

(Ver Figura (4.4)).

iv) $\frac{a}{b}$ é construtível

Utilizando as mesmas retas r e s do item anterior, vamos agora construir uma reta p que contém os pontos D e B e uma reta v, paralela a p, que contém o ponto C e intercepta a reta r no ponto Q. Aplicando semelhança nos triângulos △ADB e △ACQ teremos:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AQ} \Rightarrow \frac{b}{1} = \frac{a}{AQ} \Rightarrow b \cdot AQ = a \Rightarrow AQ = \frac{a}{b}.$$

(Ver Figura (4.5)).

v) $\sqrt{a}$ é construtível

Agora, vamos considerar uma reta r e um segmento $\overline{AB}$, tal que AB = a, sobre r. Tomemos um ponto C sobre r tal que a medida do segmento $\overline{BC}$ seja a unidade. Tracemos uma semicircunferência centrada no ponto médio de $\overline{AC}$, ao qual chamaremos M.

Passando pelo ponto B, tracemos uma reta p perpendicular a r e que intercepta a semicircunferência no ponto que chamaremos D. Desse modo, formamos o triângulo △ADC. Como esse triângulo está inscrito na semicircunferência, o ângulo do vértice D é reto e, portanto, o triângulo △ADC é retângulo em D. Das relações métricas no triângulo retângulo, tem-se que:

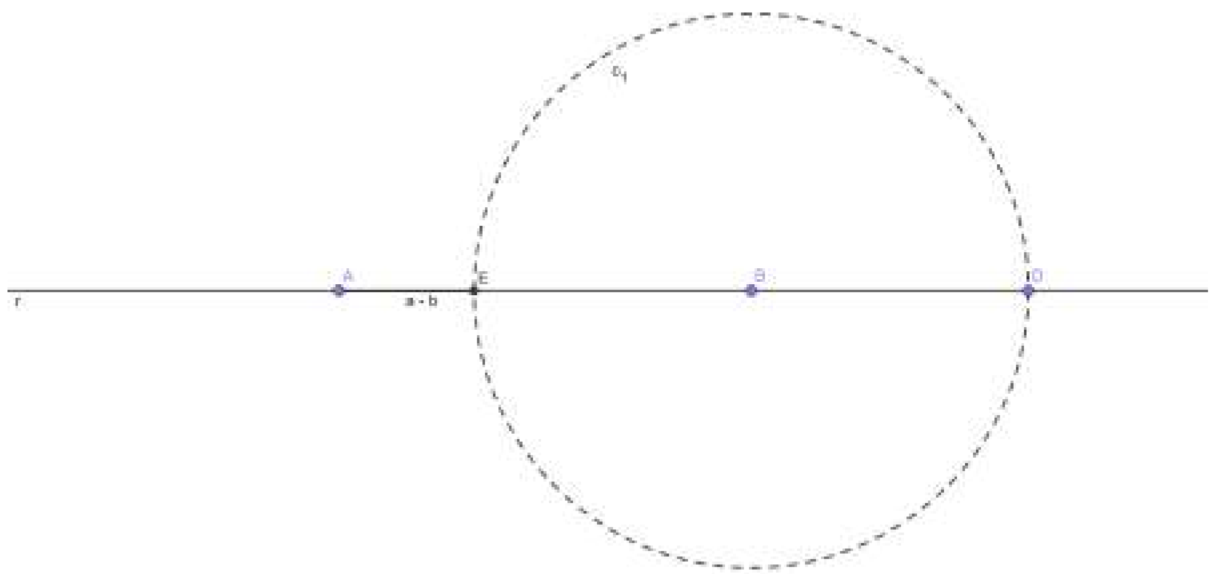
$$(BD)^2 = (AB)(BC) \Rightarrow (BD)^2 = a(1) \Rightarrow BD = \sqrt{a}.$$

(Ver Figura (4.6)).

Figura 4.2 – Segmento de reta de comprimento $a+b$.

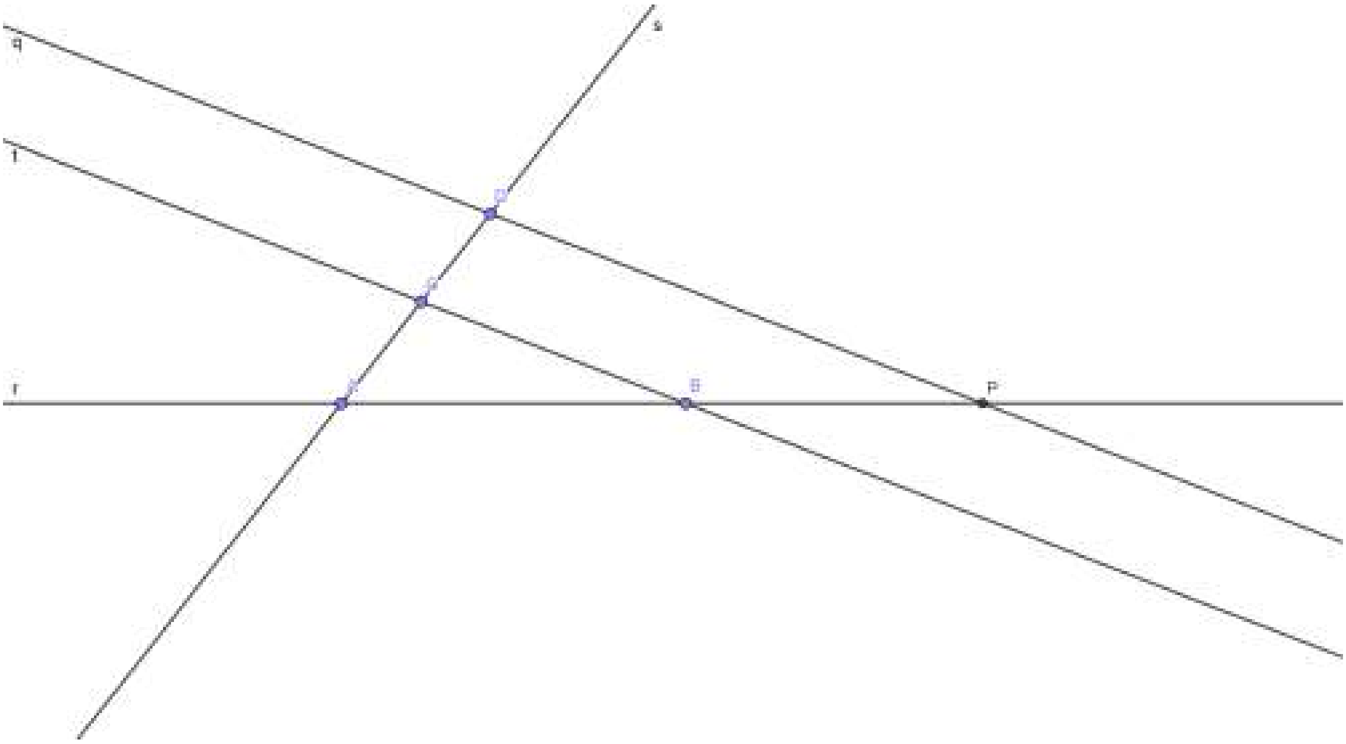
Fonte: Autoria Própria, 2024.

Figura 4.3 – Segmento de reta de comprimento $a-b$.



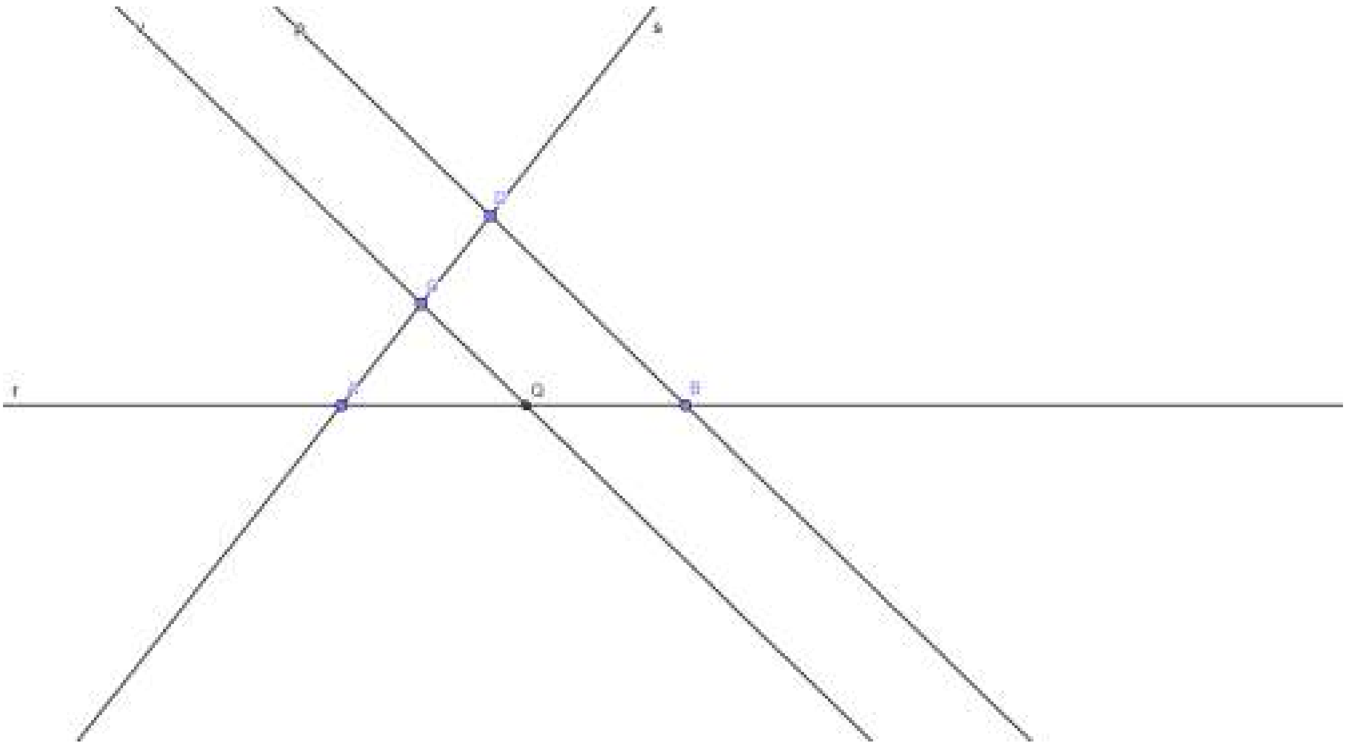
Fonte: Autoria Própria, 2024.

Figura 4.4 – Segmento de reta de comprimento ab.



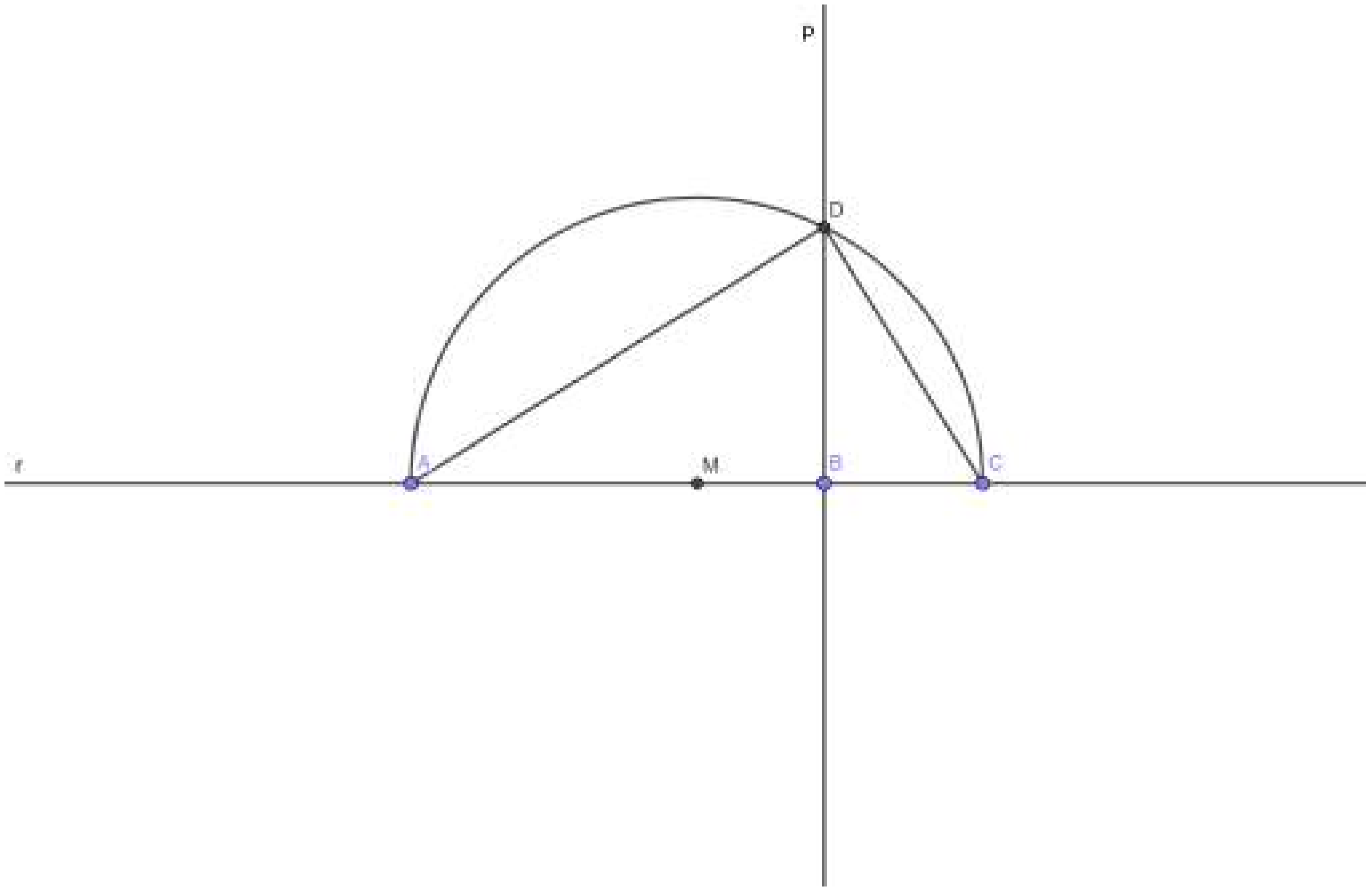
Fonte: Autoria Própria, 2024.

Figura 4.5 – Segmento de reta de comprimento $\frac{a}{b}$.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Figura 4.6 – Segmento de reta de comprimento $\sqrt{a}$.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

A partir desses resultados, podemos concluir que os números naturais, inteiros e racionais são todos construtíveis. Além disso, números irracionais do tipo $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$ são, também, construtíveis. Podemos concluir, ainda, que números como $3+\sqrt{5}, \sqrt{\frac{3}{5}-\sqrt{7}}, 2\sqrt{11-\frac{13}{17}}$ são construtíveis.

4.2 NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS NO PLANO

Com base nos resultados demonstrados acima, é possível ampliar a compreensão sobre números construtíveis para o Plano Cartesiano. Trabalhamos aqui com a noção de *Pontos Construtíveis*, isto é, um ponto *P(a,b)* contido no plano onde cada uma de suas coordenadas, a e b é dada por um número construtível.

> Os pontos obtidos por estas Construções (segundo as mesmas regras do jogo) serão chamados de *pontos construtíveis do plano*. Com este conceito, é imediato que um ponto $P = (a,b)$ será construtível se e somente se os números a e b forem construtíveis (Wagner e Carneiro, 2007, p. 96).

Conforme vimos na subseção (2.2), podemos construir um ponto através da interseção de duas retas, de uma reta e uma circunferência e de duas circunferências. Discutiremos, a seguir, cada uma das situações.

Um reta, no plano coordenado, que contém os pontos $A(\alpha_1,\beta_1)$ e $B(\alpha_2,\beta_2)$ de coordenadas racionais, admite a equação da forma:

$$ax+by+c=0,$$

com a, b e $c \in \mathbb{Q}$.

Por sua vez, o coeficiente angular m de uma reta que contém os pontos $P(x_1,y_1)$ e $Q(x_2,y_2)$ é expresso por:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Sendo $A(\alpha_1,\beta_1)$ e $B(\alpha_2,\beta_2)$, teremos

$$m=\frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2-\alpha_1}.$$

Substituindo m na equação reduzida da reta

$$y-y_p=m(x-x_p),$$

e tomando o ponto $A(\alpha_1,\beta_1)$ como referência, teremos:

$$y-\beta_1=\frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2-\alpha_1}(x-\alpha_1) \Rightarrow (y-\beta_1)(\alpha_2-\alpha_1)=(\beta_2-\beta_1)(x-\alpha_1)$$
$$\Rightarrow (\alpha_2 y-\alpha_1 y-\beta_1\alpha_2+\beta_1\alpha_1)=(\beta_2 x-\beta_2\alpha_1-\beta_1 x+\beta_1\alpha_1)$$
$$\Rightarrow (\beta_1-\beta_2)x+(\alpha_2-\alpha_1)y+(\beta_2\alpha_1-\beta_1\alpha_2)=0.$$

Tomando $a=\beta_1-\beta_2$, $b=\alpha_2-\alpha_1$ e $c=\beta_2\alpha_1-\beta_1\alpha_2$, obtemos:

$$ax+by+c=0,$$

onde os coeficientes a, b e c resultam de operações elementares com os racionais $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ e β_2. Logo, temos que a, b e $c \in \mathbb{Q}$.

Sendo assim, determinar o ponto de interseção de duas retas, no plano, equivale a determinar a solução um sistema

$$\begin{cases} ax & + & by & + & c & = & 0 \\ a_1x & + & b_1y & + & c_1 & = & 0 \end{cases}$$

que resolvendo, obtém-se

$$x = -\left(\frac{c_1b - cb_1}{ab_1 - a_1b}\right)$$

e

$$y = -\left(\frac{ac_1 - a_1c}{a_1b - ab_1}\right).$$

Portanto, x e $y \in \mathbb{Q}$, pois a, a_1, b, b_1, c e $c_1 \in \mathbb{Q}$.

Agora, uma circunferência de centro $C(\alpha, \beta)$ com coordenadas racionais e que contém o ponto $P(\alpha_1, \beta_1)$, de coordenadas também racionais, admite a equação:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2.$$

Sendo r da mesma medida do raio dessa circunferência, isto é, a distância entre o centro e um ponto qualquer da mesma. E, para $P(\alpha_1, \beta_1)$, teremos:

$$r = \sqrt{(\alpha_1-\alpha)^2 + (\beta_1-\beta)^2} \Rightarrow r^2 = (\alpha_1-\alpha)^2 + (\beta_1-\beta)^2.$$

Substituindo o valor de r na equação da circunferência e desenvolvendo-a, temos:

$$\begin{gathered} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (\alpha_1-\alpha)^2 + (\beta_1-\beta)^2 \\ \Rightarrow x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha + \alpha^2 + \beta_1^2 - 2\beta_1\beta + \beta^2 \\ \Rightarrow x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha - \alpha^2 - \beta_1^2 + 2\beta_1\beta - \beta^2 = 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2\alpha_1\alpha + 2\beta_1\beta - \alpha_1^2 - \beta_1^2 = 0. \end{gathered}$$

Se tomarmos $a = -2\alpha$, $b = -2\beta$ e $c = 2\alpha_1\alpha + 2\beta_1\beta - \alpha_1^2 - \beta_1^2$, teremos a equação:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

com a, b e $c \in \mathbb{Q}$.

Desse modo, determinar a interseção de uma reta e uma circunferência no plano coordenado equivale a solucionar um sistema da forma:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 & (1)\\ a_1x+b_1y+c_1=0, & (2)\end{cases}$$

onde os coeficientes são todos racionais.

Se esse sistema admitir solução, poderá ser um ou dois pontos de interseção (os casos de reta tangente e secante à circunferência, respectivamente), sendo suas coordenadas do tipo $p+q\sqrt{r}$, com p, q e $r \in \mathbb{Q}$ e $r \geq 0$.

De fato, isolando a variável y na equação da reta em (2), teremos:

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1}. \tag{3}$$

Substituindo, então, a expressão (3) em (1), teremos:

$$\begin{aligned} x^2+\left(-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1}\right)^2+ax+b\left(-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1}\right)+c=0\\ \Rightarrow x^2+\left(\frac{a_1^2}{b_1^2}x^2+2\frac{a_1c_1}{b_1^2}x+\frac{c_1^2}{b_1^2}\right)+ax-\frac{a_1b}{b_1}x-\frac{c_1b}{b_1}+c=0\\ \Rightarrow b_1^2x^2+a_1^2x^2+2a_1c_1x+c_1^2+ab_1^2x-a_1bb_1x-c_1bb_1+cb_1^2=0\\ \Rightarrow (a_1^2+b_1^2)x^2+(2a_1c_1+ab_1^2-a_1bb_1)x+(c_1^2-c_1bb_1+cb_1^2)=0. \end{aligned}$$

Se tomarmos $A=a_1^2+b_1^2, B=2a_1c_1+ab_1^2-a_1bb_1$ e $C=c_1^2-c_1bb_1+cb_1^2$, teremos uma equação para a abscissa x da forma:

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

cuja solução é da forma:

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

De modo análogo, a ordenada y será dada por uma expressão similar envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas com os coeficientes racionais a, a_1, b, b_1, c e c_1.

Por sua vez, determinar um ponto através da interseção de duas circunferências no plano equivale a solucionar o sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 & (4)\\ x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0, & (5)\end{cases}$$

onde os coeficientes são todos racionais.

O sistema de equações 4 e 5 é equivalente a:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 & (6)\\ (a-a_1)x+(b-b_1y)+(c-c_1)=0. & (7) \end{cases}$$

Como sistema de equações 6 e 7 é similar ao sistema de equações 1 e 2, então o método para obter a solução é análogo e nos dará pontos cujas coordenadas da forma $p+q\sqrt{r}$, com p, q e $r \in \mathbb{Q}$ e $r \geq 0$.

> Se partirmos de todos os pontos do plano com coordenadas racionais, e fizermos Construções com régua e compasso envolvendo apenas interseção de reta à reta, reta com círculo ou círculo com círculo, as coordenadas dos novos pontos obtidos, ou continuam sendo racionais ou, no máximo passam a ser da forma $a+b\sqrt{c}$, onde a, b e c são racionais e $c \geq 0$ (Wagner e Carneiro, 2007, p. 98).

Se, a partir dos pontos anteriormente determinados, forem construídas novas retas e circunferências e, através da interseção dessas, encontrarmos novos pontos no plano, suas coordenadas ou serão racionais ou serão da forma $a_1+b_1\sqrt{c_1}$, onde a_1, b_1 e c_1, por sua vez, também são da forma $a+b\sqrt{c}$, visto que foram determinados a partir de pontos de interseções anteriores. Conforme Wagner e Carneiro (2007, p. 98) exemplificam, se, ao final da primeira etapa de construção, obtivermos $1+\sqrt{2}$, poderíamos obter na segunda etapa, por exemplo, o valor $4(1+\sqrt{2})+5\sqrt{3(1+\sqrt{2})}$.

4.3 A NÃO-CONSTRUTIBILIDADE DE NÚMEROS

Discutimos a seguir sobre quando um número não pode ser representado na forma apresentada anteriormente e, portanto, não é construtível.

Tomemos, inicialmente, o número $\sigma = \sqrt{5}+\sqrt{1+\sqrt{7}}$. Como ele está expresso na forma indicada na seção anterior, é construtível. A partir dele podemos ter:

$$\sigma = \sqrt{5}+\sqrt{1+\sqrt{7}} \Rightarrow \sigma-\sqrt{5} = \sqrt{1+\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow (\sigma-\sqrt{5})^2 = 1+\sqrt{7} \Rightarrow \sigma^2-2\sqrt{5}\sigma+5 = 1+\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow \sigma^2+4 = 2\sqrt{5}\sigma+\sqrt{7}. \tag{8}$$

. Elevando ambos os membros da equação 8 ao quadrado novamente, obteremos:

$$(\sigma^2+4)^2 = (2\sqrt{5}\sigma+\sqrt{7})^2 \Rightarrow \sigma^4+8\sigma^2+16 = 20\sigma^2+4\sqrt{35}\sigma+7$$

$$\Rightarrow \sigma^4 - 12\sigma^2 + 9 = 4\sqrt{35}\sigma. \tag{9}$$

Elevando, novamente, ambos os membros da última igualdade da equação 9 ao quadrado, temos que:

$$(\sigma^4 - 12\sigma^2 + 9)^2 = (4\sqrt{35}\sigma)^2 \Rightarrow (\sigma^8 + 144\sigma^4 + 81 - 24\sigma^6 + 18\sigma^4 - 216\sigma^2) = 560\sigma^2$$

$$\Rightarrow (\sigma^8 - 24\sigma^6 + 162\sigma^4 - 216\sigma^2 + 81) - 560\sigma^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^8 - 24\sigma^6 + 162\sigma^4 - 776\sigma^2 + 81 = 0.$$

Concluímos, então, que o número σ é raiz de um polinômio ($x^8 - 24x^6 + 162x^4 - 776x^2 + 81 = 0$) de coeficientes racionais, e, nesse caso, até inteiros. Com esse exemplo, pretende-se ilustrar o fato de que um número que possa ser representado através das operações elementares (adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada) com números racionais sempre será raiz de algum polinômio de coeficientes inteiros. Esse fato nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 2. *Todo número construtível é raiz de uma equação polinomial (também chamada de algébrica) de coeficientes inteiros.*

Os números, reais ou complexos, que são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros são chamados *números algébricos*, enquanto os que não o são recebem o título de *números transcendentes*. Se tomarmos, por exemplo, os números $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[5]{3}$ é fácil perceber que são raízes, respectivamente, dos polinômios $x^3 - 2 = 0$ e $x^5 - 3 = 0$ e, portanto, são algébricos. Também não é difícil verificar que $2 + \sqrt[3]{5}$ é algébrico, pois, tomando $\alpha = 2 + \sqrt[3]{5}$, pelo mesmo processo realizado anteriormente, teríamos:

$$\alpha = 2 + \sqrt[3]{5} \Rightarrow \alpha - 2 = \sqrt[3]{5} \Rightarrow (\alpha - 2)^3 = (\sqrt[3]{5})^3$$

$$\Rightarrow \alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8 = 5$$

$$\Rightarrow \alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 13 = 0.$$

Portanto, $\alpha = 2 + \sqrt[3]{5}$ é raiz do polinômio $x^3 - 6x^2 + 12x - 13 = 0$.

Como pudemos observar, facilmente conseguimos encontrar inúmeros exemplos de números algébricos. Quando se trata, porém, dos números transcendentes, sabe-se que há uma infinidade deles, embora seja bastante complicado demonstrar a transcendência de um número específico.

> O primeiro a exibir números comprovadamente transcendentes foi Liouville (1809-1882); somente em 1973, Hermite mostrou que o famoso número e (base dos logaritmos naturais) é transcendente, e em 1882,

> Lindemann provou que o não menos famoso número π é transcendente, isto é - repetimos - não é raiz de equação algébrica alguma com coeficientes inteiros. A demonstração de que π é transcendente é longa e trabalhosa, além de envolver conhecimentos de diversas áreas da Matemática, principalmente de Cálculo Diferencial (Wagner e Carneiro, 2007, p. 100).

Para a presente discussão, o essencial é entender que todo número construtível tem que ser, antes de tudo, *algébrico*, isto é, os números transcendentes não são construtíveis. Podemos citar, em particular, que o número π não é construtível. Como, anteriormente, havíamos discutido que o famoso problema da quadratura do círculo gira em torno da construção de π podemos agora justificar melhor a sua impossibilidade de ser solucionado. Uma vez que π é um número não-construtível, concluímos que o círculo não é quadrável.

Sabendo, pois, que todo número construtível é algébrico, naturalmente surge a questão sobre a recíproca desse resultado: todo número algébrico é construtível? Nesse caso, a resposta é negativa.

Quando determinamos a equação polinomial solucionada pelo número construtível $\sigma = \sqrt{5}+\sqrt{1+\sqrt{7}}$, verificamos que ela possui grau 8. O procedimento que adotamos para encontrar essa equação, envolvendo elevar ambos os membros ao quadrado sucessivas vezes para eliminar os radicais, claramente nos conduzirá a uma equação cujo grau é uma potência de 2.

Tal fato por si só, no entanto, não é suficiente para nos fornecer um resultado definitivo. Tomemos, a título de exemplo, o número construtível $\sqrt[4]{7}$. Se, por um lado, ele é solução da equação $x^4-7=0$, de grau 4 (uma potência de 2), é igualmente verdade que também soluciona a equação $x^5-7x=0$, de grau 5. O ponto crucial é que, enquanto o polinômio x^5-7x pode ser fatorado em $x(x-7)$, o polinômio x^4-7 é *irredutível.* O ponto de interesse é: Todo número algébrico α é raiz de um único (excetuando-se um fator constante) polinômio de coeficientes inteiros irredutível (não fatorável em outros de menores graus positivos com coeficientes inteiros). O grau desse polinômio também determinará o *grau de* α.

Motivados pelas considerações feitas anteriormente, citamos o seguinte resultado, central na presente discussão:

Teorema 3. *Um número só será dito construtível se for algébrico e possuir grau igual a uma potência de 2.*

Os resultados aqui expostos não foram todos rigidamente demonstrados visto que o objetivo era ilustrá-los por meio dos fatos e exemplos levantados para torná-los plausíveis e compreensíveis. A prova formal dos mesmos demanda um aprofundamento na parte de Álgebra, especificamente em teoria dos grupos, teoria das extensões de corpos, teoria de Galois e alguns tópicos de Álgebra Linear.

4.4 DE VOLTA AOS CÉLEBRES PROBLEMAS GREGOS

Com base no que foi apresentado até aqui, vamos retomar os três clássicos problemas gregos e comentar, brevemente, sobre sua não-construtibilidade, que é equivalente a dizer que não são construtíveis com régua e compasso.

Tratemos, primeiramente, do problema da **duplicação do cubo**. Vimos, anteriormente, que o impasse desse gira em torno da construção do número $\sqrt[3]{2}$. Ora, pelo que vimos na seção (4.3), esse número, embora seja algébrico pois é solução da equação polinomial $x^3-2=0$, possui grau 3 (que não é potência de 2) e, portanto, não é construtível.

Podemos, ainda, provar, de uma segunda forma a não-construtibilidade de $\sqrt[3]{2}$, conforme propõe Júnior (2013, p. 21). Para isso, vamos demonstrar que esse número não pode ser escrito como $a+b\sqrt{c}$, com a,b e $c\in\mathbb{Q}$.

Vamos supor que $\gamma=\sqrt[3]{2}$ seja construtível e, portanto, existem a,b e $c\in\mathbb{Q}$, não nulos, tais que $\gamma=a+b\sqrt{c}$. Dessa igualdade, temos:

$$\gamma=a+b\sqrt{c}\Rightarrow(\gamma)^3=(a+b\sqrt{c})^3\Rightarrow\gamma^3=a^3+3a^2b\sqrt{c}+3ab^2c+b^3c\sqrt{c}$$

$$\Rightarrow a^3+3a^2b\sqrt{c}+3ab^2c+b^3c\sqrt{c}=2\Rightarrow(a^3+3ab^2c)+(3a^2b+b^3c)\sqrt{c}=2,$$

o que nos leva ao sistema:

$$\begin{cases} a^3 & + & 3ab^2c & = & 2\\ 3a^2b & + & b^3c & = & 0. \end{cases}$$

Sendo $\gamma=a+b\sqrt{c}$ solução da equação polinomial $x^3-2=0$, então $\gamma_1=\sqrt[3]{2}=a-b\sqrt{c}$ também o é, pois:

$$(\gamma_1)^3=(a-b\sqrt{c})^3\Rightarrow\gamma_1^3=a^3-3a^2b\sqrt{c}+3ab^2c-b^3c\sqrt{c}$$

$$\Rightarrow a^3-3a^2b\sqrt{c}+3ab^2c-b^3c\sqrt{c}=2$$

$$\Rightarrow(a^3+3ab^2c)-(3a^2b+b^3c)\sqrt{c}=2,$$

que nos leva ao mesmo sistema do caso anterior.

Daí, temos que

$$\gamma^3=\gamma_1^3\Rightarrow\gamma=\gamma_1\Rightarrow a+b\sqrt{c}=a-b\sqrt{c}$$

$$\Rightarrow b\sqrt{c} = -b\sqrt{c} \Rightarrow b = -b \Rightarrow b = 0.$$

Concluímos, pois, que $b = 0$ e $\gamma = a$, o que é absurdo, visto que postulamos $b \neq 0$. Além disso, sendo $c \neq 0$, poderíamos representar $\sqrt{c}$ como

$$\sqrt{c} = \frac{2-(a^3+3ab^2c)}{3a^2b+b^3c},$$

o que é absurdo, pois, sendo $\sqrt{c}$ um número irracional, não poderia ser expresso por uma razão de números racionais.

Concluímos, portanto, que $\sqrt[3]{2}$ não é construtível e, com isso, justificamos a impossibilidade de duplicação do cubo com régua e compasso.

Tratemos, agora, do problema da **trissecção do ângulo**. Primeiro, vamos entender o que significa dizer que um ângulo é *construtível*. De acordo com Wagner e Carneiro (2007, p. 102), um ângulo é dito *construtível com régua e compasso* se, e somente se, pudermos construir, no sentido estrito que aqui adotamos, o seu cosseno ou o seu seno. Para exemplificar, temos que os ângulos de 30° e 60° são construtíveis, visto que *sen* 30° = *cos* 60° = $\frac{1}{2}$, um número racional e, portanto, construtível.

De fato, podemos trisseccionar alguns ângulos como, por exemplo, o de 90°, o que equivale a construir o ângulo de 30° que, como visto anteriormente. é construtível. Porém, não é possível trisseccionar qualquer ângulo construtível. Para trisseccionar o ângulo de 60°, por exemplo, é necessário que o ângulo de 20° seja construtível, com como o seu cosseno. Tomando, então, $\theta = 20°$ e $\alpha = cos\ \theta$ na fórmula trigonométrica:

$$cos(3\theta) = 4cos^3\theta - 3cos\ \theta,$$

teremos que

$$cos(60°) = 4\alpha^3 - 3\alpha \Rightarrow \frac{1}{2} = 4\alpha^3 - 3\alpha$$
$$\Rightarrow 1 = 8\alpha^3 - 6\alpha \Rightarrow 8\alpha^3 - 6\alpha - 1 = 0.$$

Note que o polinômio $8\alpha^3 - 6\alpha - 1$, caso fosse fatorado em outros dois de graus positivos menores, teria um fator da forma $ax - b$, com a e b $\in \mathbb{Z}$, admitindo, então $\frac{b}{a}$ como raiz o que, conforme Júnior (2013, p. 23) apresenta, é uma impossibilidade (a prova se dá por argumentos de divisibilidade). Logo, $\alpha = cos\ 20°$ é raiz de uma equação polinomial irredutível de grau 3 e, como vimos na seção (4.3), não é construtível.

Concluímos, pois, que, não sendo possível construir com régua e compasso o *cos* 20°, e consequentemente o ângulo de 20°, é impossível a trissecção do ângulo de 60°. Portanto, é impossível trisseccionar qualquer ângulo α construtível.

Tratando-se do problema da **quadratura do círculo**, a justificativa a respeito de sua impossibilidade é bastante complexa e extrapola os fins do presente trabalho. Nos limitamos, então, à discussão levantada na seção (4.3). Na referida seção, afirmamos que todo número construtível é algébrico (raiz de um polinômio de coeficientes inteiros) e comentamos que o problema da quadratura equivale à questão da construtibilidade do número π. Sendo π um número *transcendente* (não algébrico), não é construtível e, portanto, constatamos a impossibilidade de construir, com régua e compasso, um quadrado com a mesma área de um círculo dado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino das várias ciências, dentre elas a matemática, sempre decorre em um diálogo harmônico do perene com o novo, isto é, dos saberes que vão sendo construídos e transmitidos ao longo da história humana com as inúmeras possibilidades de abordagem e de releitura que as inovações tecnológicas proporcionam. Não se pode engessar o conhecimento em um esquema acabado e imutável, mas, ao contrário, usando criativamente de todo o instrumental disponível, ser capaz de apresentar, de novas e distintas formas, os saberes acumulados no arcabouço do conhecimento humano.

As Construções Geométricas, conforme discorremos ao longo do texto, tiveram um papel de extrema importância no desenvolvimento da matemática na antiga Grécia e, consequentemente, em todas civilizações que posteriormente incorporaram as descobertas dessa, sendo, inclusive, basilar para o surgimento de novos conceitos e discussões como, por exemplo, os Números Construtíves. Apesar disso, é uma temática pouco explorada nos currículos atuais, tanto no ensino básico como no superior. Estudá-las não é uma forma de desenterrar um conteúdo ultrapassado apenas para fins de saber histórico, mas redescobrir o saber geométrico como algo rico, amplo, criativo e, até mesmo, lúdico.

A proposta de abordar esse tema servindo-se do software Geogebra como instrumento de trabalho foi uma tentativa de atrair a atenção, bem como a curiosidade, dos estudantes para o estudo da geometria, usando-se dos recursos tecnológicos digitais, tão familiares e presentes na vida dos discentes da “era da informação”. Foi também uma tentativa de contribuir com a prática de professores que, embora tenham o interesse em dinamizar a sua prática em sala de aula por meio do uso das novas tecnologias digitais, encontrem dificuldades ao buscarem um modo de concretizá-lo.

A escolha do Geogebra como instrumento basilar para a realização desse estudo se mostrou profundamente acertada e eficaz. A grande diversidade de ferramentas, mecânicas e recursos, bem como a praticidade de compreensão e de uso da interface desse software, foram de grande valia no decurso do presente trabalho, sendo determinantes para atingir a sua meta: abordar a temática de maneira dinâmica e acessível.

O desafio principal de trabalhar com esse assunto é que, dada a extensão das definições, proposições e teoremas dos ramos da geometria plana e da álgebra, seria extremamente árduo abordar com rigidez e formalidade cada um desses, além de que, optar por esse caminho tornaria o trabalho demasiadamente longo e poderia tornar menos evidente o objetivo central do mesmo. Em vista disso, optou-se por um tratamento mais conciso da temática, dado o tipo de trabalho realizado bem como o seu público alvo. Entretanto, esse desafio, de nenhuma maneira, diminui a relevância do trabalho mas, ao contrário, evidencia diferentes possibilidades de tratamento dessa temática, tornando mais rico e profundo o debate acerca da mesma.

Como possibilidades para continuação das pesquisas e debates acerca da temática trabalhada, pode-se expandir a discussão geométrica através de uma fundamentação mais ampla e detalhada das definições, postulados e teoremas que embasam a Geometria Plana. Ao mesmo tempo, se pode trabalhar o tópico de Números Construtíveis através de uma construção mais rigidamente elaborada no âmbito da Álgebra, definindo os objetos, demonstrando os resultados e evidenciando, por meio da teoria algébrica, a íntima conexão desses com as Construções Geométricas. Tais aprofundamentos possibilitarão uma compreensão mais ampla do tema, bem como poderão expandir a aplicação da abordagem apresentada também para o Ensino Superior.

Por fim, esse trabalho não teve a pretensão de fornecer uma metodologia de abordagem definitiva nem exaurir o assunto em toda a sua extensão, mas contribuir com a construção e a difusão do saber matemático que é, antes de tudo, extremamente belo e profundamente fascinante.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. E. B. de. **Informática e formação de professores**. Brasília: SEED/MEC, 2000.

ALVES, J. D. **Números construtíveis e construções geométricas**. Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro, 2020.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. São Paulo: Editora Blucher, 1974.

BRASIL, M. da E. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CASSELMAN, B. **The Babylonian tablet Plimpton 322**. acesso em Julho de 2024. Https://personal.math.ubc.ca/ cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html.

COSTA, V. C. d. et al. **Números construtíveis**. Universidade Federal de Campina Grande, 2013.

CUNHA, A. G. D. **Dicionário etimológico da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Lexikon Editora, 2019.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana**. São Paulo: Atual, 2013.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora UNICAMP, 2004.

JÚNIOR, L. P. d. S. **Construções Geométricas Por Régua e Compasso e Números Construtíveis.** Universidade Federal de Campina Grande, 2013.

MORELLO, M. **O GeoGebra como ferramenta tecnológica para ensinar função quadrática na 1a série do Ensino Médio**. Palmas: Editora Dialética, 2022.

WAGNER, E.; CARNEIRO, J. P. Q. **Construções geométricas**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

APÊNDICE A – PROPOSTA DE ATIVIDADES

O apêndice a seguir apresenta algumas propostas de atividades para serem realizadas em sala de aula, com o Geogebra, para abordar a temática de Construções Geométricas, buscando estimular os discentes a aplicar seus conhecimentos de geometria plana através das ferramentas disponibilizadas pelo software.

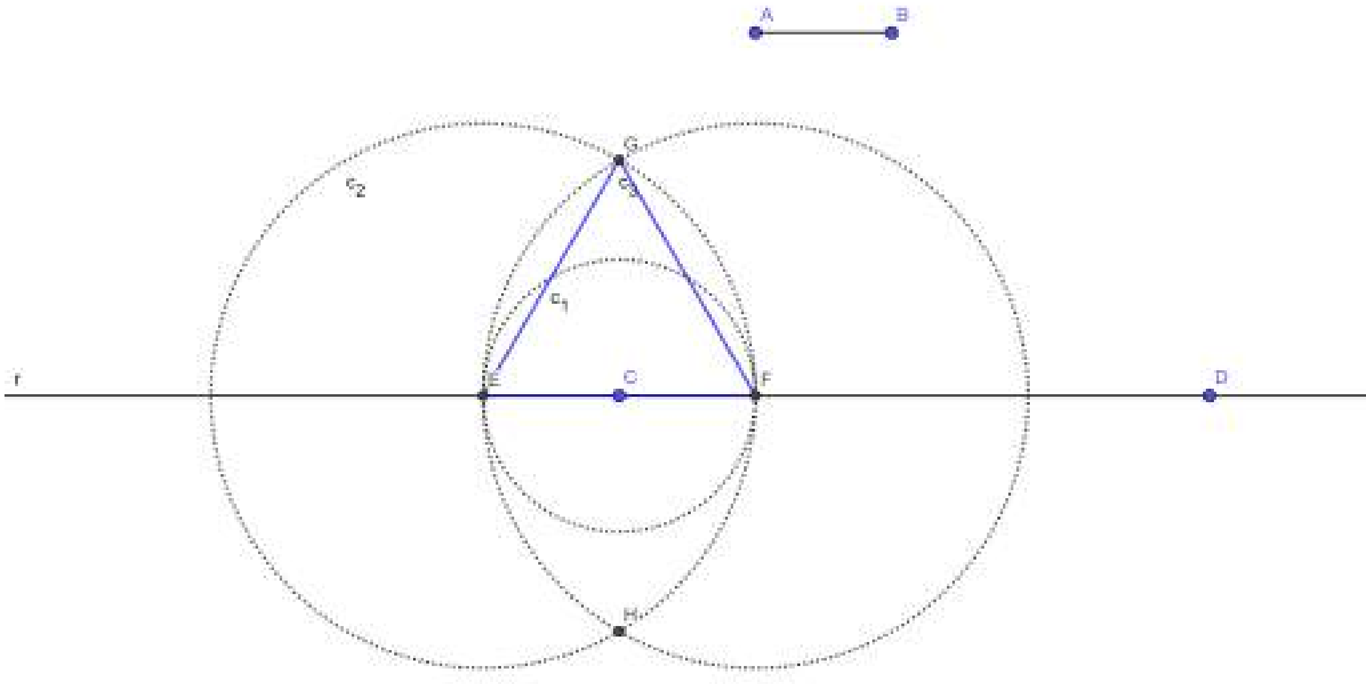
As atividades foram elaboradas tendo como público-alvo estudantes dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio. Vale ressaltar, porém, que cada turma tem uma realidade própria de saberes acumulados bem como de lacunas a serem trabalhadas. Sendo assim, cabe a cada professor avaliar o nível em que se encontram os seus alunos para adequar a dificuldade das atividades a suas demandas.

Problema 1: Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, construa um triângulo equilátero cuja medida dos lados seja o dobro do comprimento de $\overline{AB}$.

Solução:

- Inicialmente, marcamos dois pontos, C e D, e, com a ferramenta *Reta*, vamos determinar uma reta r que servirá de suporte para nossa construção;
- Com a ferramenta *Compasso*, vamos construir um circunferência c_1 centrada em C e cujo raio tem a mesma extensão que o segmento $\overline{AB}$;
- Fazemos a *Interseção* da reta r com a circunferência c_1, obtemos dois pontos, E e F;
- Utilizando, novamente, a ferramenta *Compasso*, vamos construir duas novas circunferências, c_2 e c_3, centradas, respectivamente, em E e F e cujo raio tem a mesma extensão do segmento $\overline{EF}$;
- Fazemos a *Interseção* das circunferências c_2 e c_3 e obtemos dois novos pontos, G e H;
- Selecionando um desses pontos, digamos G, e utilizamos a ferramenta *Segmento* para construir os segmentos $\overline{EG}$ e $\overline{FG}$;
- Obtemos, pois, o triângulo $\triangle$EFG que é equilátero e cujos lados medem o dobro da medida do segmento $\overline{AB}$.

Figura A.1 – Resolução do Problema 1.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

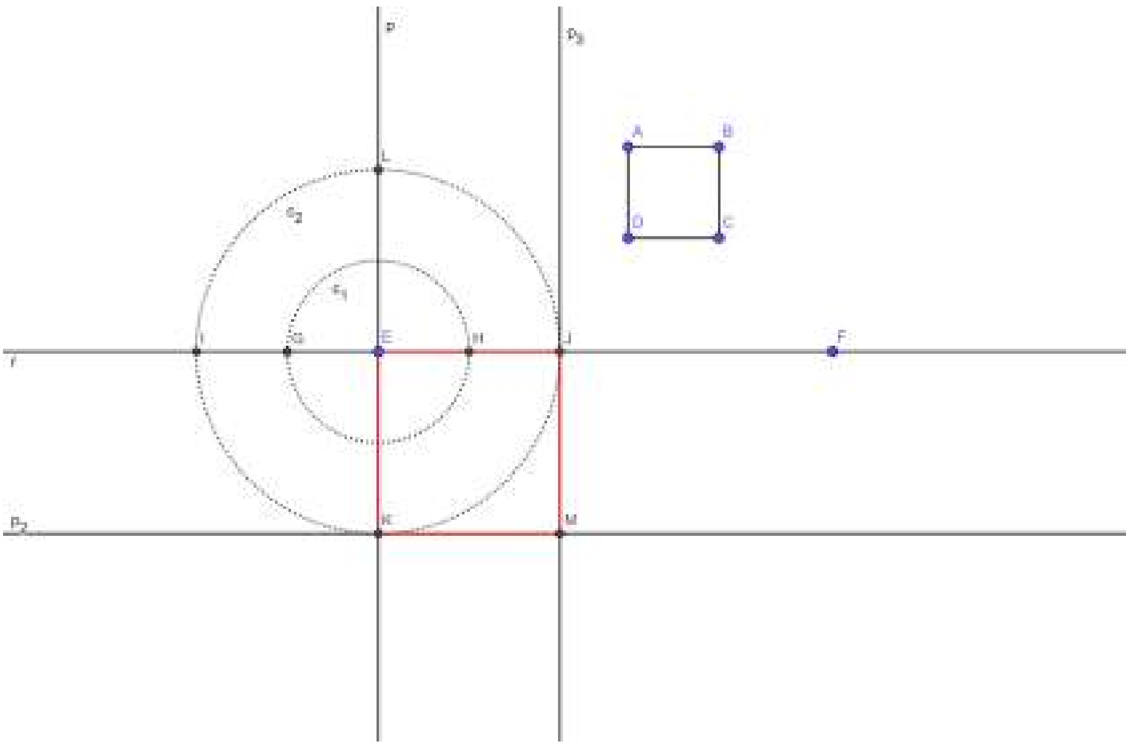
Problema 2: Dado um quadrado ABCD, construa um outro quadrado cuja área seja o quádruplo da área do original.

Solução:

- Inicialmente, vamos determinar dois pontos, E e F, e, com a ferramenta *Reta*, vamos determinar uma reta r que servirá de suporte para nossa construção;
- Com a ferramenta *Reta Perpendicular*, vamos construir uma reta p, perpendicular a r e que passa pelo ponto E;
- Com a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_1, centrada em E e cujo raio tem o mesmo comprimento que o lado do quadrado ABCD;
- Fazendo a *Interseção* da reta r com a circunferência c_1, determinamos dois pontos, G e H;

- Utilizando novamente a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_2, centrada em E e cujo raio tem mesma extensão que o segmento $\overline{GH}$;
- Fazendo a *Interseção* da circunferência c_2 com a reta r, vamos obter dois novos pontos, I e J, dos quais escolheremos um, digamos J;
- Fazendo, agora, a *Interseção* da circunferência c_2 com a reta p, vamos obter outros dois pontos, K e L, dos quais escolheremos um, digamos K;
- Utilizando a ferramenta *Reta Paralela*, vamos traçar um reta p_2, paralela a r e que passa pelo ponto K;
- Utilizando, novamente, a ferramenta *Reta Paralela*, vamos traçar uma reta p_3, paralela a p e que passa pelo ponto J;
- Fazendo a *Interseção* das retas p_2 e p_3, determinamos um novo ponto, M;
- Construímos, pois, o quadrado EJKM, que tem o quádruplo da área do quadrado ABCD.

Figura A.2 – Resolução do Problema 2.



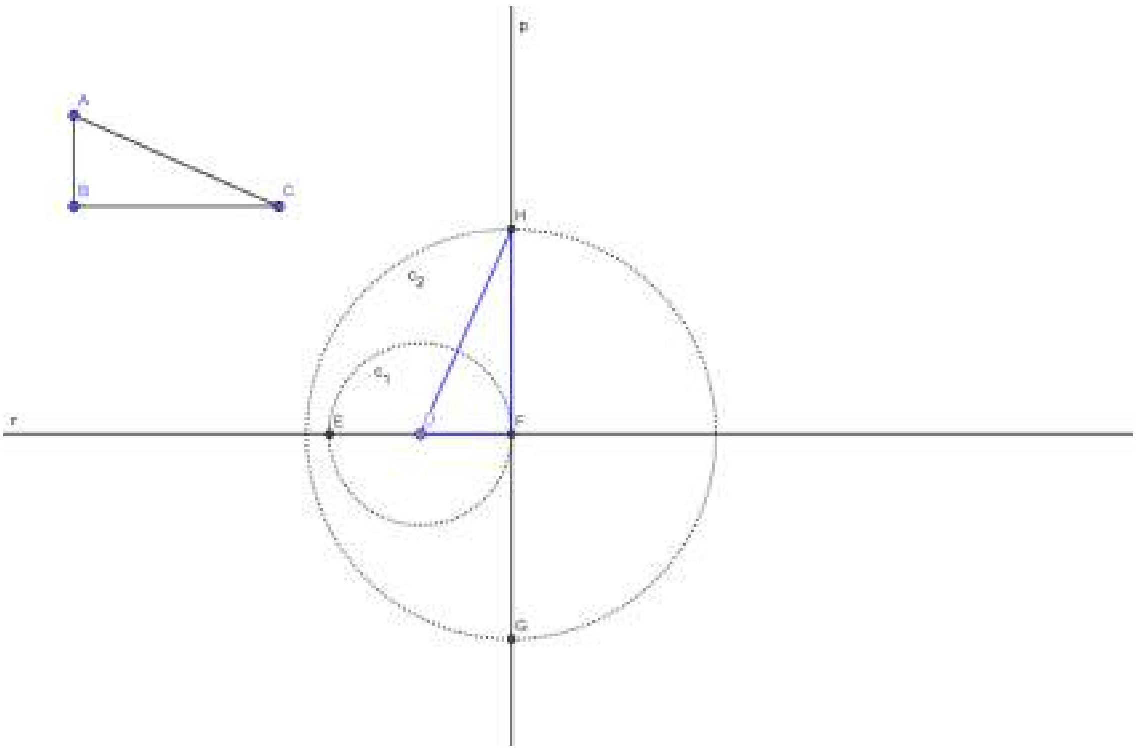
Fonte: Autoria Própria, 2024.

Problema 3: Dado um triângulo retângulo $\triangle$ABC , transporte-o para uma reta r usando o cateto menor como base.

Solução:

- Inicialmente, com a ferramenta *Ponto*, determinamos um Ponto D sobre a reta r;
- Utilizando a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_1 centrada em D e cujo raio tem a mesma extensão que o cateto menor do triângulo;
- Fazendo a *Interseção* da reta r com a circunferência c_1, determinamos dois novos pontos, E e F, dos quais escolhemos um, digamos F;
- Com a ferramenta *Reta Perpendicular*, vamos construir uma reta p, perpendicular a r, que passa pelo ponto F;
- Utilizando a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_2 centrada em F e cujo raio tem a mesma extensão que o cateto maior do triângulo;
- Fazendo a *Interseção* da reta p com a circunferência c_2, determinamos dois novos pontos, G e H, dos quais escolhemos um, digamos H;
- Utilizando a ferramenta *Segmento*, vamos determinar o segmento de reta $\overline{DH}$;
- O triângulo △DFH que determinamos é congruente ao triângulo original, mas tem como base o seu cateto menor sobre a reta r.

Figura A.3 – Resolução do Problema 3.



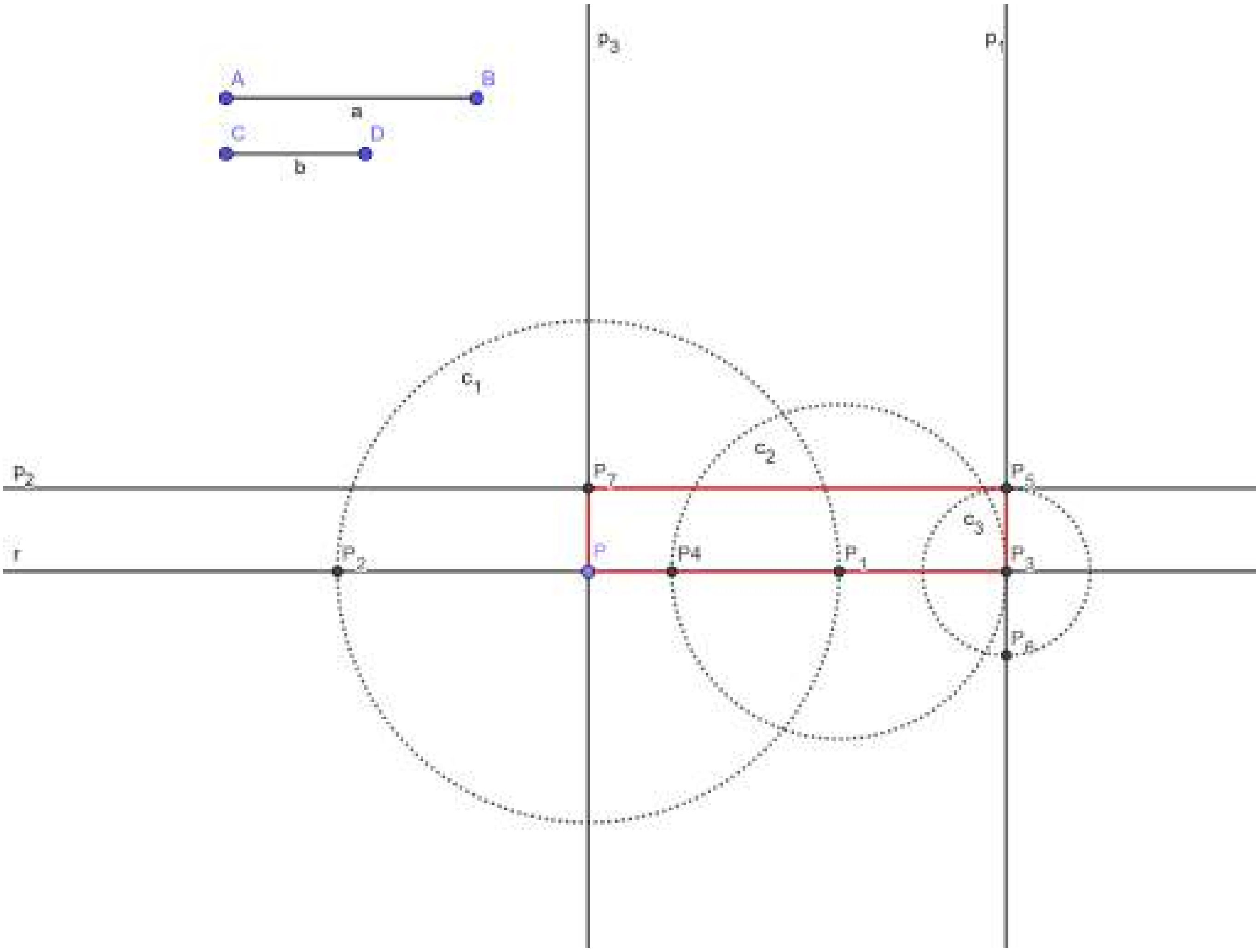
Fonte: Autoria Própria, 2024.

Problema 4: Dados dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, tais que $AB = a$ e $CD = b$, com $a > b$, construa um retângulo cujos lados sejam $a+b$ e $a-b$.

Solução:

- Inicialmente, com a ferramenta *Reta*, vamos construir uma reta r para servir de suporte para nossa construção;
- Com a ferramenta *Ponto*, tomemos um ponto P sobre r;
- Com a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_1 centrada em P e cujo raio tem a mesma extensão do segmento $\overline{AB}$;
- Fazendo a *Interseção* da reta r com a circunferência c_1, encontramos dois novos pontos, aos quais chamaremos P_1 e P_2. Tomemos, então, um desses pontos, digamos P_1;
- Utilizando, novamente, a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_2 centrada em P_1 e cujo raio tem a mesma extensão do segmento $\overline{CD}$;
- Fazendo a *Interseção* da reta r com a circunferência c_2, encontramos dois novos pontos, aos quais chamaremos P_3 (o ponto consecutivo a P_1) e P_4 (o ponto situado entre P e P_1);
- Com a ferramenta *Reta Perpendicular*, vamos construir umas reta p_1, perpendicular a r e que contém o ponto P_3;
- Com a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_3 centrada em P_3 e cujo raio tem mesma a extensão do segmento $\overline{PP_4}$;
- Fazendo a *Interseção* da reta p_1 com a circunferência c_3, encontramos dois novos pontos, aos quais chamaremos P_5 e P_6. Tomemos, então, um desses pontos, digamos P_5;
- Com a ferramenta *Reta Paralela*, vamos determinar duas retas: p_2, paralela a r e que contém o ponto P_5, e p_3, paralela a p_1 e que contém o ponto P;
- Por fim, fazendo a *Interseção* das retas p_2 e p_3, determinamos um novo ponto que chamaremos de P_7;
- Construímos, então, o retângulo $PP_3P_5P_7$ tal que $PP_3 = P_5P_7 = a+b$ e $P_3P_5 = PP_7 = a-b$.

Figura A.4 – Resolução do Problema 4.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

Problema 5: Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, tal que $AB = a$, construir um trapézio retângulo cujas medidas das bases sejam $2a$ e $6a$ e cuja medida da altura seja $4a$.

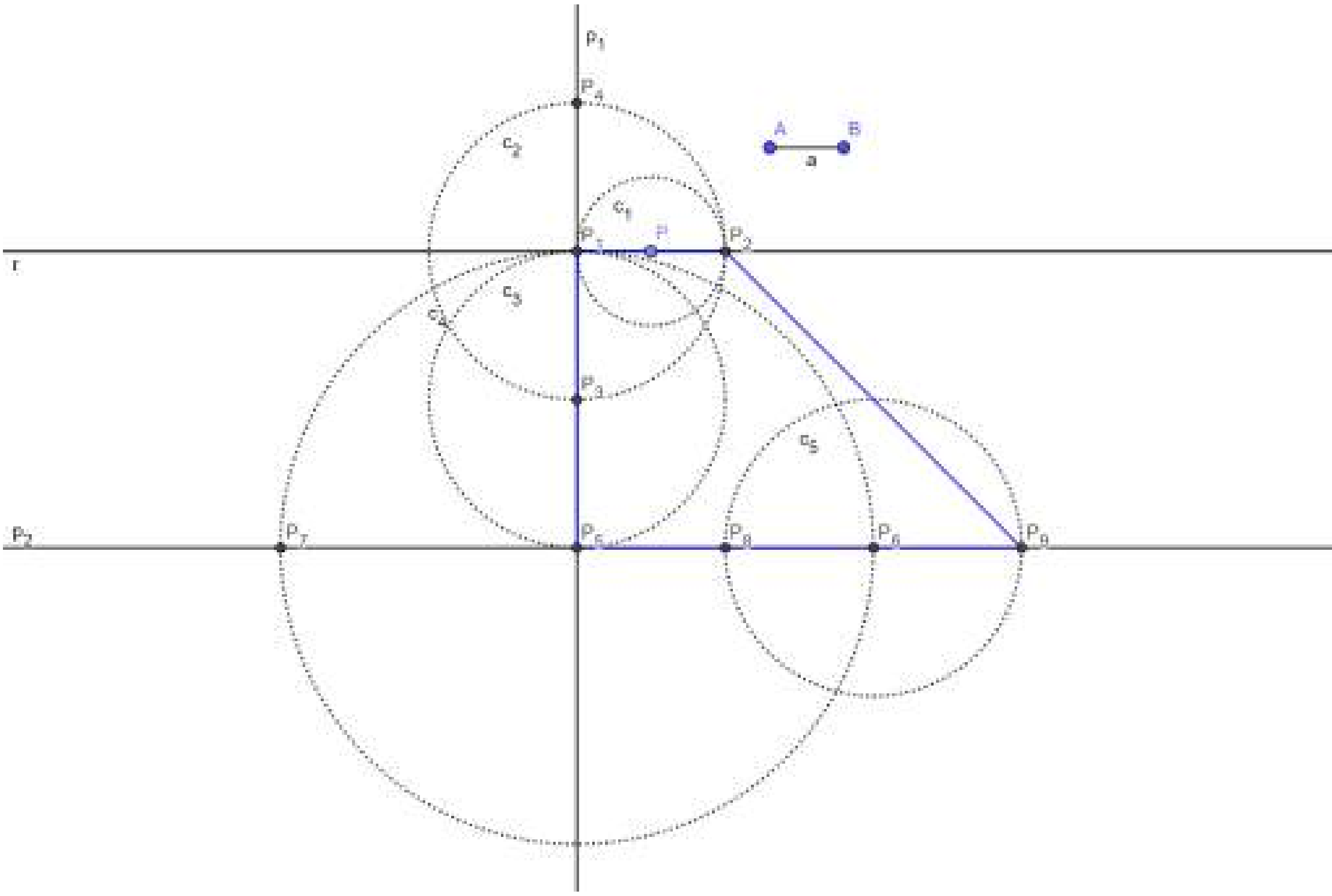
Solução:

- Inicialmente, com a ferramenta *Reta*, vamos construir uma reta r para servir de suporte para nossa construção;
- Com a ferramenta *Ponto*, tomemos um ponto P sobre r;
- Com a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_1 centrada em P e cujo raio tem mesma a extensão do segmento $\overline{AB}$;
- Fazendo a *Interseção* da reta r com a circunferência c_1, encontramos dois novos pontos, aos quais chamaremos P_1 e P_2. Tomemos, então, um desses pontos, digamos

P_1;

- Com a ferramenta *Reta Perpendicular*, vamos construir uma reta p_1 perpendicular a r e que contém o ponto P_1;
- Utilizando, novamente, a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_2 centrada em P_1 e cujo raio tem a mesma extensão do segmento $\overline{P_1P_2}$;
- Fazendo a *Interseção* da reta p_1 com a circunferência c_2, encontramos dois novos pontos, aos quais chamaremos P_3 e P_4. Tomemos, então, um desses pontos, digamos P_3;
- Com a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_3 centrada em P_3 e cujo raio tem a mesma extensão do segmento $\overline{P_1P_2}$;
- Fazendo a *Interseção* da reta p_1 com a circunferência c_3, encontramos dois pontos, o próprio ponto P_1 e um novo ponto que chamaremos de P_5;
- Com a ferramenta *Reta Paralela*, vamos determinar uma reta p_2 paralela a r e que contém o ponto P_5;
- Com a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_4 centrada em P_5 e cujo raio tem a mesma extensão do segmento $\overline{P_1P_5}$;
- Fazendo a *Interseção* da reta p_2 com a circunferência c_4, encontramos dois novos pontos, aos quais chamaremos P_6 e P_7. Tomemos, então, um desses pontos, digamos P_6;
- Com a ferramenta *Compasso*, vamos construir uma circunferência c_5 centrada em P_6 e cujo raio tem a mesma extensão do segmento $\overline{P_1P_3}$;
- Fazendo a *Interseção* da reta p_2 com a circunferência c_5, encontramos dois novos pontos, um situando entre os pontos P_5 e P_6, ao qual chamaremos P_8, e outro consecutivo a P_6, ao qual chamaremos P_9;
- Por fim, com a ferramenta *Segmento*, vamos determinar o segmento de reta $\overline{P_2P_9}$
- Construímos, então, o trapézio retângulo $P_1P_5P_9P_2$ tal que $P_1P_2 = 2a$, $P_1P_5 = 4a$ e $P_5P_9 = 6a$.

Figura A.5 – Resolução do Problema 5.



Fonte: Autoria Própria, 2024.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Cajazeiras - Código INEP: 25008978
Rua José Antônio da Silva, 300, Jardim Oásis, CEP 58.900-000, Cajazeiras (PB)
CNPJ: 10.783.898/0005-07 - Telefone: (83) 3532-4100

Documento Digitalizado Restrito

TCC do aluno Caleb Sousa e Sousa

Assunto:	TCC do aluno Caleb Sousa e Sousa
Assinado por:	Caleb Sousa
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Restrito
Hipótese Legal:	Direito Autoral (Art. 24, III, da Lei no 9.610/1998)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Caleb Sousa e Sousa, ALUNO (201912020015) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAJAZEIRAS**, em 19/09/2024 15:13:16.

Este documento foi armazenado no SUAP em 19/09/2024. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1254025
Código de Autenticação: be5fcc811a