



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
CAMPUS CAJAZEIRAS  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**LUCAS BEZERRA DA SILVA**

**RELAÇÃO PARTE-TODO DOS NÚMEROS RACIONAIS: LEVANTAMENTO  
BIBLIOGRÁFICO DE PRODUÇÕES NOS ANAIS DO ENCONTRO NACIONAL DE  
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM)**

**CAJAZEIRAS-PB**

**2024**

**LUCAS BEZERRA DA SILVA**

**RELAÇÃO PARTE-TODO DOS NÚMEROS RACIONAIS: LEVANTAMENTO  
BIBLIOGRÁFICO DE PRODUÇÕES NOS ANAIS DO ENCONTRO NACIONAL DE  
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM)**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Orientador(a):** Profa. Dra. Fernanda Andréa Fernandes Silva.

**CAJAZEIRAS-PB**

**2024**

**LUCAS BEZERRA DA SILVA**

**RELAÇÃO PARTE-TODO DOS NÚMEROS RACIONAIS: LEVANTAMENTO  
BIBLIOGRÁFICO DE PRODUÇÕES NOS ANAIS DO ENCONTRO NACIONAL DE  
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM)**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Data de aprovação: 13/09/2024

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente  
 **FERNANDA ANDREA FERNANDES SILVA**  
Data: 25/09/2024 16:56:53-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Profa. Dra. Fernanda Andréa Fernandes Silva - Orientadora**  
**Instituto Federal da Paraíba – IFPB**

Documento assinado digitalmente  
 **WILLIAM DE SOUZA SANTOS**  
Data: 25/09/2024 17:00:08-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Prof. Dr. William de Souza Santos - Membro Interno**  
**Instituto Federal da Paraíba – IFPB**

Documento assinado digitalmente  
 **VALERIA MARIA DE LIMA BORBA**  
Data: 25/09/2024 16:01:46-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Profa. Dra. Valéria Maria de Lima Borba - Membro Externo**  
**Universidade Federal de Campina Grande - UFCG**

IFPB / Campus Cajazeiras  
Coordenação de Biblioteca  
Biblioteca Prof. Ribamar da Silva  
Catalogação na fonte: Cícero Luciano Félix CRB-15/750

S586r	Silva, Lucas Bezerra da. Relação parte-todo dos números racionais : levantamento bibliográfico de produções nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) / Lucas Bezerra da Silva. – 2024.  108f. : il.  Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2024.  Orientador(a): Prof <sup>a</sup> . Dra. Fernanda Andréa Fernandes Silva..  1. Números racionais. 2. Relação parte-todo. 3. Pesquisa bibliográfica. 4. Matemática. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. II. Título.
-------	---

IFPB/CZ

CDU: 51(043.2)

Dedico esta pesquisa aos meus  
pais, irmãos e esposa.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiro agradeço a Deus por estar sempre ao meu lado, principalmente nos momentos mais difíceis;

Aos meus pais que me deram apoio, pois foi através deles que obtive a educação necessária para me tornar o homem que sou hoje;

Aos meus irmãos que muitas vezes me ajudaram e motivaram de forma direta ou indireta por meios de incentivos e conselhos;

A minha esposa que desde o início estava presente nos momentos que mais precisei, me incentivou me ajudando e não me deixando desistir;

A professora Fernanda Andréa Fernandes Silva, pelas suas instruções, paciência e compreensão no decorrer deste trabalho;

Aos professores da graduação a quem agradeço por todos os momentos de aprendizagem, os quais me fizeram crescer;

Aos bons amigos que foram pessoas verdadeiras, que me auxiliaram em momentos difíceis.

Muito obrigado!

*O maior inimigo do conhecimento não é a  
ignorância, mas a ilusão do conhecimento.*

Daniel Boorstin.

## RESUMO

Este estudo teve como objetivo analisar as tendências e abordagens da relação parte-todo dos números racionais, a partir de pesquisas publicadas nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), no período de 2010 a 2022. A pesquisa se caracteriza por ser de caráter bibliográfico, com uma abordagem qualitativa. Temos como fundamentação teórica as pesquisas de Silva (2013) para os significados dos números racionais; Lima (2012), que discute as condições de existência de frações segundo Piaget e em Silva e Câmara dos Santos (2020), que propõem uma classificação para os tipos de figuras geométricas utilizadas para trabalhar a relação parte-todo dos números racionais. Na etapa inicial da pesquisa, foram utilizadas seis palavras-chaves, sendo selecionados 67 artigos. A segunda etapa contou com a leitura completa dos trabalhos para a identificação das pesquisas que trabalhavam a relação parte-todo dos números racionais, sendo selecionados 27 artigos. Concluímos que os trabalhos analisados se concentraram entre pesquisas do tipo diagnóstica, intervenção didática e análise documental ou de livro didático, demonstrando uma tendência em pesquisas que possuem uma relação direta com o ensino e a aprendizagem da relação parte-todo dos números racionais. Do ponto de vista dos sujeitos envolvidos nestes estudos, predominaram alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, professores pedagogos ou licenciados em matemática. A análise dos artigos evidenciou erros comuns entre estes sujeitos de pesquisa, apesar dos seus distintos níveis de estudo ou formação, como o uso do procedimento da dupla contagem; utilização da relação parte-parte; a falta de compreensão de que as partes (na relação parte-todo) devem, necessariamente, ser congruentes; dificuldades em relacionar as figuras com as suas representações numéricas e, por último, tendem a assumir a compreensão da fração como dois números sobrepostos. Outro ponto importante é o fato das pesquisas privilegiarem a relação parte-todo com quantidades contínuas, totalmente particionadas, com uso de materiais manipuláveis ou não, em detrimento das quantidades discretas. Além disso, verificamos que a relação parte-todo foi trabalhada mesmo quando os conteúdos abordados envolveram outros significados dos números racionais e até mesmo as operações aritméticas desse campo numérico para atribuir sentido aos procedimentos desenvolvidos por meio dos cálculos.

**Palavras-chave:** Números racionais, relação parte-todo, pesquisa bibliográfica.

## ABSTRACT

This study aimed to analyze the trends and approaches to the part-whole relationship of rational numbers, based on research published in the annals of the National Meeting of Mathematics Education (ENEM), in the period from 2010 to 2022. The research is characterized by be of exploratory and bibliographical character, with a qualitative approach. Our theoretical basis is the research by Silva (2013) into the meanings of rational numbers; Lima (2012) who discusses the conditions for the existence of fractions according to Piaget and in Silva and Câmara dos Santos (2020) who proposes a classification for the types of geometric figures used to work on the part-whole relationship of rational numbers. In the initial stage of the research, six keywords were used, 67 articles were selected. The second stage involved the complete reading of the works to identify research that worked on the part-whole relationship of rational numbers, with 27 articles being selected. We concluded that the works analyzed were concentrated between diagnostic research, didactic intervention and document or textbook analysis, demonstrating a trend in research that has a direct relationship with teaching and learning the part-whole relationship of rational numbers. From the point of view of the subjects involved in these studies, students in the final years of Elementary School, pedagogical teachers or mathematics graduates predominated. The analysis of the articles highlighted common errors among these research subjects, despite their different levels of study or training, such as the use of the double counting procedure; use of the part-part relationship; the lack of understanding that the parts (in the part-whole relationship) must necessarily be congruent; difficulties in relating the figure with its numerical representations and, finally, they tend to understand the fraction as two overlapping numbers. Another important point is the fact that research favors the part-whole relationship with continuous quantities, fully partitioned, using materials that can be manipulated or not, to the detriment of discrete quantities. Furthermore, we verified that the part-whole relationship was worked on even when the content covered involved other meanings of rational numbers and even the arithmetic operations of this numerical field to give meaning to the procedures developed through calculations.

**Keywords:** Rational numbers, part-whole relationship, bibliographic research.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Representações distintas de um mesmo número racional .....	19
Figura 2. Significado parte-todo trabalhado em quantidades contínuas e discretas .....	20
Figura 3. Representações da existência do todo .....	23
Figura 4. Representações da quantidade de partes .....	23
Figura 5. Retângulo totalmente dividido em partes iguais sem restar sobras. ....	24
Figura 6. Relação entre total de unidades de uma coleção, unidades por agrupamento e quantidades de agrupamentos .....	24
Figura 7. Relação entre número de cortes e partes do todo .....	25
Figura 8. Representações geométricas divididas em partes homogêneas e heterôgenas de mesma área.....	26
Figura 9 . Conjuntos de objetos e seus agrupamentos em quantidades iguais .....	26
Figura 10. Representações de todos que estão aptos de novas divisões .....	27
Figura 11. Particionamento e recomposição do todo .....	28
Figura 12. Figuras perceptuais (um inteiro) .....	29
Figura 13. Figuras perceptuais que representam mais de um inteiro.....	30
Figura 14. Figuras operatórias por inclusão das partes ou subfiguras .....	30
Figura 15. Figuras operatórias por divisão .....	31
Figura 16. Figuras operatórias por modificação das formas .....	32
Figura 17. Figuras operatórias por modificação das formas e das áreas' .....	32
Figura 18. Layout dos Anais do X - ENEM.....	35
Figura 19. Layout da página inicial dos anais do XI ENEM.....	37
Figura 20. Layout da página inicial dos anais do XII - ENEM .....	38
Figura 21. Layout da página inicial dos anais do XIII – ENEM .....	39
Figura 22. Layout da página inicial dos anais do XIV – ENEM.....	40
Figura 23. Atividade proposta.....	48
Figura 24. Resposta do aluno 15 da atividade proposta.....	49
Figura 25. Representações dos alunos do item 3° letra A.....	51
Figura 26. Representações do aluno do item 3.....	52
Figura 27. Representação do aluno E do item 3 letra B .....	53
Figura 28. Representações do aluno D do item 3 letras B .....	53
Figura 29. Representações do aluno do item 3° letra B .....	54
Figura 30. Representações dos alunos do item 2, letras B e C.....	55
Figura 31. Representação do aluno B do item 4° letra B.....	55
Figura 32. Representação do aluno D do item 4° letra B .....	56
Figura 33. Primeira atividade.....	59
Figura 34. Segunda atividade.....	60
Figura 35. Situação 1 disposta no livro analisado.....	62
Figura 36. Problema 2 disposto no livro analisado .....	63
Figura 37. Problema 3 disposto no livro analisado .....	64
Figura 38. Proposta de Ensino A .....	65
Figura 39. Proposta de Ensino B .....	67

Figura 40. Parte da Tarefa 1.....	69
Figura 41. Transcrição 1 .....	70
Figura 42. Transcrição 2 .....	70

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Trabalhos selecionados em cada etapa.....	42
Gráfico 2. Trabalhos da etapa 1 por ENEM .....	43
Gráfico 3. Trabalhos da etapa 2 por categorias .....	43
Gráfico 4. Trabalhos da etapa 2 por ENEM .....	44

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Artigos categorizados como tendo o objetivo de discutir a relação parte-todo .....	46
Quadro 2. Pesquisas diagnósticas .....	72
Quadro 3. Intervenção didática .....	74
Quadro 4. Análise de livro didático .....	76
Quadro 5. Pesquisas diagnósticas .....	81
Quadro 6. Pesquisas de intervenções didáticas .....	87
Quadro 7. Pesquisas diagnósticas .....	94
Quadro 8. Outras categorias: Pesquisa Bibliográfica e Teórica .....	97

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>NÚMEROS RACIONAIS .....</b>	<b>19</b>
2.1	Definição, representações e significados dos números racionais .....	19
2.2	Relação parte-todo dos números racionais .....	22
2.3	Tipos de figuras geométricas que podem ser trabalhadas a relação parte-todo dos números racionais.....	28
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA.....</b>	<b>34</b>
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DOS ARTIGOS CUJO OBJETIVO ENVOLVEU A RELAÇÃO PARTE-TODO .....</b>	<b>46</b>
4.1	Síntese da discussão dos artigos que têm como objetivo discutir a relação parte-todo.....	72
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DOS ARTIGOS EM QUE A RELAÇÃO PARTE-TODO NÃO FAZ PARTE DO OBJETIVO DA PESQUISA.....</b>	<b>77</b>
5.1	Pesquisas diagnósticas .....	77
5.2	Intervenção Didática.....	83
5.3	Pesquisa documental e de livro didático.....	89
5.4	Outras categorias: pesquisa bibliográfica e teórica.....	96
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>98</b>
	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>101</b>
	<b>ANEXO:TEXTOS QUE FORAM CITADOS NAS OBRAS ANALISADAS, MAS QUE NÃO FORAM LIDOS. ....</b>	<b>107</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os números surgiram a partir da necessidade de solucionar problemas do dia a dia. Dessa forma, ao longo do tempo novos problemas foram levantados, e com eles, ‘novos números’ foram agregados aos existentes. Os números racionais nasceram da necessidade da representação numérica de medições das quais os números naturais não conseguiam abranger. De acordo com Merlini (2005),

[...] as frações, em suas diferentes representações, surgem com frequência em diversas situações relacionadas à expressão de medidas e de quantidades, evidenciando a necessidade da extensão do conjunto dos números naturais. (MERLINI, 2005, p.10).

No sistema educacional brasileiro, os números racionais são implementados a partir dos anos iniciais, conforme a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, documento normativo que estabelece o conjunto de aprendizagens essenciais a serem desenvolvidas durante a educação básica,

No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa em relação a essa temática é que os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, [...] Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária. (BRASIL, 2017, p. 268 e 269).

A BNCC também estabelece que, a partir do 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental - EF, os significados, parte-todo e quociente dos números racionais sejam introduzidos e trabalhadas as representações fracionárias e decimais (positivas) e as porcentagens. Esses significados e representações devem ser ampliados durante os anos finais do EF e aprofundados no Ensino Médio.

Os diferentes significados e representações dos números racionais acarretam dificuldades de aprendizagem deste campo numérico, conforme Silva (2013). A autora afirma que “A dificuldade cognitiva em reconhecer dois registros de representações de um mesmo objeto reside no fato de esses registros serem parciais, não apresentando ou explicitando o mesmo conteúdo do objeto.” (SILVA, 2013, p. 35). Como, por exemplo, a dificuldade de reconhecer 0,25 como igual a  $\frac{1}{4}$  (MARANHÃO; IGLIORI, 2003), representações distintas do mesmo número racional.

Behr et al. (1983) consideram os números racionais como um conhecimento matemático complexo e importante trabalhado na educação básica, pois de um ponto de vista prático, saber lidar com esses números favorece a resolução de problemas do cotidiano; de um ponto de vista psicológico, proporcionam o desenvolvimento de estruturas mentais, bases do intelecto; e de um ponto de vista matemático, ajudam a compreensão das operações algébricas elementares.

Além disso, o significado parte-todo é apontado por *ibidem* como essencial para a construção dos outros significados dos números racionais e consequente desenvolvimento conceitual deste campo numérico. Como também, segundo Kieren (1981 apud Silva (2018) este significado, é o gerador da linguagem dos números racionais.

Apesar da importância deste campo numérico, a dificuldade de ensino e aprendizagem é evidenciada em pesquisas na área (MERLINI, 2005, MOUTINHO (2005), SILVA (2018); SILVA, VIDAL, CARVALHO FILHO (2023) e ainda é um dos desafios enfrentados no campo da educação matemática. Portanto, temos como pergunta de pesquisa, quais são as principais tendências e abordagens das pesquisas sobre a relação parte-todo dos números racionais? E quais dificuldades, quanto ao ensino e aprendizagem deste campo numérico, podem ser identificadas a partir desta análise?

Assim, esta pesquisa tem como objetivo principal analisar as tendências e abordagens da relação parte-todo dos números racionais, a partir da análise das pesquisas publicadas nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) no período de 2010 a 2022 (edição mais atualizada do ENEM).

A escolha do Encontro Nacional de Educação Matemática ocorreu devido a ser um evento de grande credibilidade que teve início em 1987 em São Paulo, no qual já contribui com pesquisas na área da matemática a mais de três décadas. Desta forma, serão abrangidas as cinco últimas edições do ENEM, que se configura na atualidade como o maior evento brasileiro da Educação Matemática, as quais oferecerão uma amostra recente e relevante da produção e das tendências de pesquisas nesta área.

E temos como objetivos específicos selecionar na X, XI, XII, XIII e XIV edições do ENEM as produções que tratam do tema de números racionais na relação parte-todo, estabelecer uma classificação para as pesquisas selecionadas e investigar estas quanto ao objetivo, fundamentação teórica, metodologia e análise dos resultados que envolvem a relação parte-todo dos racionais.

Desse modo, no capítulo 1 deste trabalho abordamos a relevância do tema, justificativa, pergunta de pesquisa, objetivo geral e específicos. No capítulo 2 serão discutidos a definição, representações e significados dos números racionais, a relação parte-todo e os tipos de figuras que podem ser trabalhadas a relação parte-todo dos números racionais.

No capítulo 3 serão dispostos os métodos e critérios adotados no estudo para a seleção dos artigos, assim como iremos apresentar o quantitativo de trabalhos selecionados em cada etapa da pesquisa e a categorização adotada no nosso estudo.

No capítulo 4, analisaremos os trabalhos selecionados cujo objetivo envolveu a relação parte-todo dos números racionais, quanto ao tipo, objetivo, fundamentação teórica, metodologia e principais resultados que envolvem a relação parte-todo. Além disso, traremos uma síntese dessa análise.

No capítulo 5, analisaremos os trabalhos selecionados, em que a relação parte-todo está presente, mas não compõe o objetivo da pesquisa. Assim como, também faremos uma síntese das discussões do capítulo. Por fim, nas considerações finais, retomaremos o objetivo e responderemos às perguntas de pesquisa.

## 2 NÚMEROS RACIONAIS

Neste capítulo, discorreremos sobre a definição dos números racionais, assim como das representações e significados destes números, focando posteriormente na discussão envolvendo especificamente a relação parte-todo e, por último, nos tipos de figuras geométricas que podem ser trabalhadas esta relação.

### 2.1 Definição, representações e significados dos números racionais

Os números racionais são definidos formalmente como sendo um número escrito na forma  $\frac{a}{b}$  em que  $a, b \in \mathbb{Z}$  e  $b \neq 0$ , em que 'a' é chamado numerador e 'b', denominador. Entretanto, esta definição revela pouco ou quase nada da complexidade que abarca este campo numérico. Além disso, para Behr et al. (1983) ele desempenha um papel crucial na matemática envolvendo operações e expressões algébricas, Merlini (2005) também afirma que os números racionais é relevante na aprendizagem e na vida cotidiana, assim como em atividades profissionais, o exemplo mais comum seria na engenharia civil.

Além da representação fracionária, os números racionais se apresentam na representação decimal, porcentagem, como também, pode ser representados por figuras geométricas, ou como um ponto na reta numérica, conforme Figura 1.

Figura 1. Representações distintas de um mesmo número racional



Fonte: autoria própria, 2024.

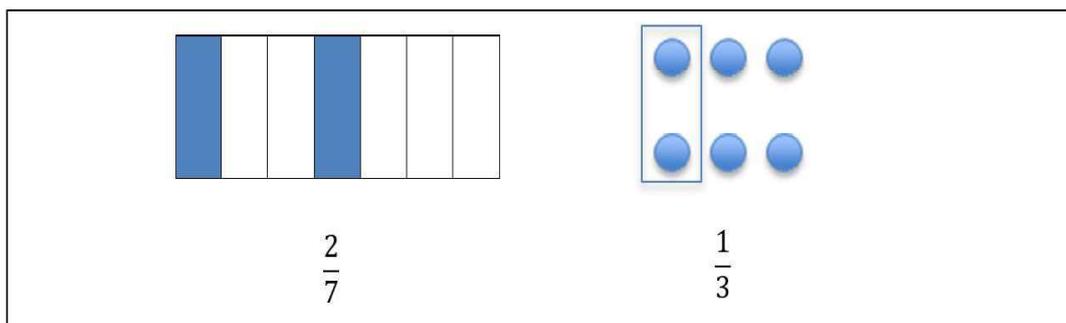
Na Figura 1 temos as representações de um mesmo número racional. Cada uma delas apresenta um conteúdo distinto e parcial de um mesmo objeto matemático. Assim como apresentam operações e propriedades distintas que precisam ser compreendidas e relacionadas entre si para que possam ser percebidas como

representações e não como o próprio objeto do conhecimento. Portanto,  $0,4 = \frac{2}{5} = 40\%$  que também podem ser representados pela figura geométrica particionada em cinco partes congruentes e pintadas duas delas e pelo ponto A, representado na reta numérica.

Além das diversas representações, os números racionais possuem também diferentes significados, de acordo com o contexto em que estão inseridos. Esses significados ou interpretações do número racional são bastante discutidos na literatura na área, sem, contudo, haver um consenso de uma classificação para estes significados ou interpretações. Entretanto, alguns estão consolidados na área. No nosso estudo, discutiremos a classificação adotada por Silva, (2013): relação parte-todo (ou medida), quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade, número na reta numérica e porcentagem.

A relação parte-todo (ou significado medida) trabalha a ideia de número racional enquanto partição de algo que seja apto de divisões, seja ele em quantidades contínuas ou conjuntos de objetos discretos, em que as partições (contínuo) ou agrupamentos (discreto) são necessariamente iguais, explícita ou implicitamente, conforme Figura 2.

Figura 2. Significado parte-todo trabalhado em quantidades contínuas e discretas



Autoria própria (2024)

A Figura 2 representa uma superfície contínua particionada em sete partes congruentes, tendo sido tomadas duas destas partes. A representação fracionária  $\frac{2}{7}$  carrega a ideia da representação das partes pintadas do todo (numerador) sobre as partes congruentes em que foi dividido este todo (denominador). Enquanto a Figura II representa um conjunto discreto particionado em subconjuntos dois a dois, tendo sido

circulado um dos subconjuntos. A fração  $\frac{1}{3}$  representa a ideia de uma parte do conjunto composto de três partes iguais.

No significado quociente, o número racional na forma  $a/b$ , com  $a, b, \in \mathbb{Z}$ , com  $b \neq 0$  implica na ideia de uma divisão para resolução do problema. Exemplo disso seria o problema que pede para encontrar a quantidade de chocolate que cada criança vai receber quando se tem 3 barras de chocolate e se quer dividir em partes iguais para 5 crianças. O que nos leva à fração  $\frac{3}{5}$ .

O significado razão trabalha com a ideia da relação de comparação de dependência entre duas variáveis, sejam elas de mesma grandeza ou grandezas diferentes. Um exemplo seria para se fazer leite, é indicado usar duas colheres de leite em pó (aproximadamente 20g) para 200ml de água. A razão entre o leite e a água pode ser representada pela fração  $\frac{20}{200}$ , em que se lê 20 gramas de leite para 200 ml de água.

A fração, enquanto operador multiplicativo, assume um papel de alterar grandezas, sejam elas contínuas ou discretas. Por exemplo, se eu tenho um salário de R\$1.412,00 e desejo aplicar metade desse dinheiro, o valor a ser aplicado seria calculado pela operação,  $\frac{1}{2}$  de R\$1412,00 e obteríamos R\$706,00. Neste caso, a fração  $\frac{1}{2}$  operou sobre a quantia de R\$1412,00 diminuindo este valor para encontrar a resposta necessária. Agora, se eu digo que terei um aumento e esse valor é igual a 3 vezes a metade do salário anterior, teríamos 3 vezes  $\frac{1}{2}$  de R\$1412,00 que seria a mesma coisa que  $\frac{3}{2}$  de R\$1412,00, correspondendo a R\$2118,00. Assim, a fração  $\frac{3}{2}$  operou sobre R\$1412,00, aumentando este valor.

No significado de probabilidade, a fração indica as possibilidades de um evento ocorrer, envolvendo contextos de lançamento de dados, chances de se tirar determinada carta de um baralho, entre outros. Geralmente, em situações que envolvem lançamentos de dados é questionado as chances de determinado número sair, como, por exemplo, um número par e menor que seis. Neste caso, o numerador representa a quantidade dos possíveis resultados (os resultados podem ser 2 ou 4, portanto duas possibilidades), o denominador seria o quantitativo total de números no

dado (6), assim a fração  $\frac{2}{6}$  representa as possibilidades de se obter um número par e menor que seis no lançamento de um dado.

O número na reta numérica representa a ideia da fração enquanto lugar geométrico na reta numérica. Tomemos como exemplo o número racional  $\frac{1}{2}$  em que está localizado na reta numérica entre os números 0 e 1.

O significado de porcentagem é considerado em situações que envolvem taxa percentual. Este significado mantém uma relação importante com o operador multiplicativo. Mas, como mantém suas especificidades, muitos pesquisadores o consideram à parte. Como exemplo de situação que envolve o significado de porcentagem, tem aquela que pede para calcular um percentual de um todo, como calcular 15% de 200, em que a taxa percentual é transformada em uma fração centesimal para ser encontrada a resposta procurada.

Apesar de discutirmos os significados que podem ser atribuídos aos números racionais, dependendo do contexto em que estão sendo utilizados, nosso estudo tem como foco a relação parte-todo. Portanto, nos próximos tópicos focaremos na discussão deste significado.

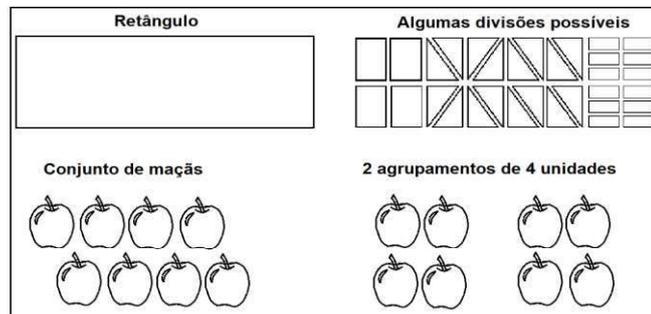
## **2.2 Relação parte-todo dos números racionais**

De acordo com Piaget apud Lima (2012), existem sete condições essenciais para a existência de fração: a existência de uma totalidade divisível; existência de um número determinado de partes; o esgotamento do todo; relação entre o número de partes e o número de cortes; Igualização das partes; conceptualização de cada fração como parte de um todo em si, susceptível de novas divisões e atendimento ao princípio da invariância: a soma das frações constituídas é igual ao todo.

Essas condições são importantes na nossa pesquisa, pois têm relação direta com o significado parte-todo dos números racionais, que é o foco da nossa pesquisa. A 'existência de uma totalidade divisível' requer a compreensão de que o todo pode 'ser decomposto em partes separáveis' (LIMA, 2012 p. 108), seja esta uma grandeza

contínua<sup>1</sup> ou discreta<sup>2</sup>. Na Figura 3, temos as representações de um retângulo e de uma coleção de maçãs, que por sua vez são aptas de divisões.

Figura 3. Representações da existência do todo

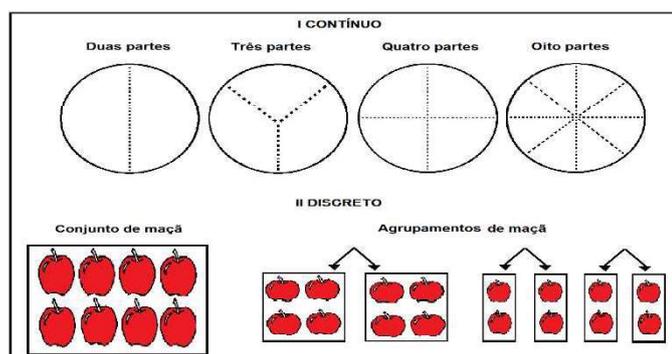


Fonte: de autoria própria, 2024

No retângulo da Figura 3, as possibilidades de divisões são várias, podendo as partes de mesma área serem formadas por figuras geométricas de diferentes formas. Enquanto no conjunto de 8 maçãs, podem ser realizados 2 agrupamentos de 4 maçãs, ou ainda, 4 agrupamentos de 2 maçãs.

A condição de 'existência de um número determinado de partes' considera que o número de partes é limitado, como podemos ver na Figura 4. Há várias formas de dividirmos uma mesma representação geométrica, por exemplo, e cada uma delas nos fornece um número determinado de partes.

Figura 4. Representações da quantidade de partes



Fonte: de autoria própria, 2024

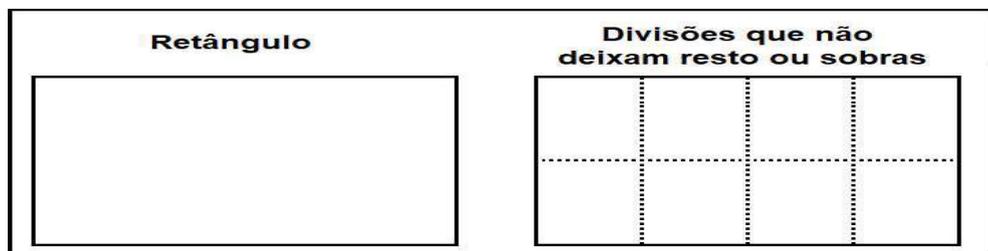
<sup>1</sup> Grandezas contínuas são aquelas compostas de elementos que podem ser divisíveis, como por exemplo, figuras planas.

<sup>2</sup> Grandeza discreta é aquela que é constituída por elementos que podem ser contados, mas que são indivisíveis, como por exemplo, um conjunto de lápis.

Na Figura 4, percebemos que ao aumentar o número de partes do todo, menor será a área de cada parte. Sendo este um conceito relevante da relação parte-todo dos números racionais. Uma particularidade das quantidades discretas é que o número de agrupamentos a serem formados é sempre um divisor da quantidade total da coleção ou conjunto discreto.

O 'esgotamento do todo' indica que a unidade (todo) deve ser dividida totalmente em partes, de modo que não restem sobras, como podemos ver na Figura 5, com a representação geométrica de um retângulo que foi totalmente dividido em 8 partes iguais.

Figura 5. Retângulo totalmente dividido em partes iguais sem restar sobras.

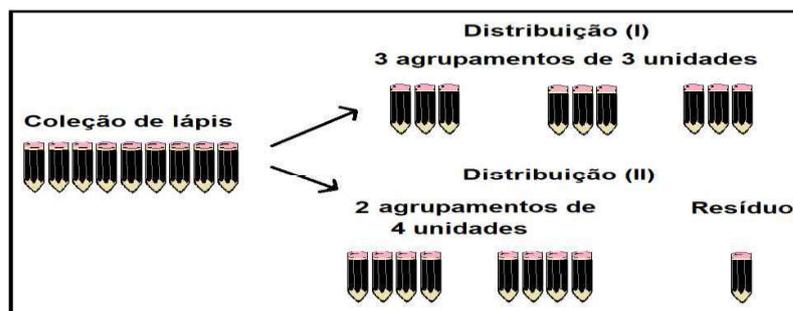


Fonte: de autoria própria, 2024

Na Figura 5 percebemos que o todo foi totalmente dividido em partes congruentes, sem que essa divisão resultasse em partes sobressalentes.

Nas coleções de quantidades discretas, o número total de objetos deve ser múltiplo da quantidade de objetos distribuídos por agrupamentos. Quando isso não ocorre, a distribuição por agrupamentos deixa resto, conforme Figura 6.

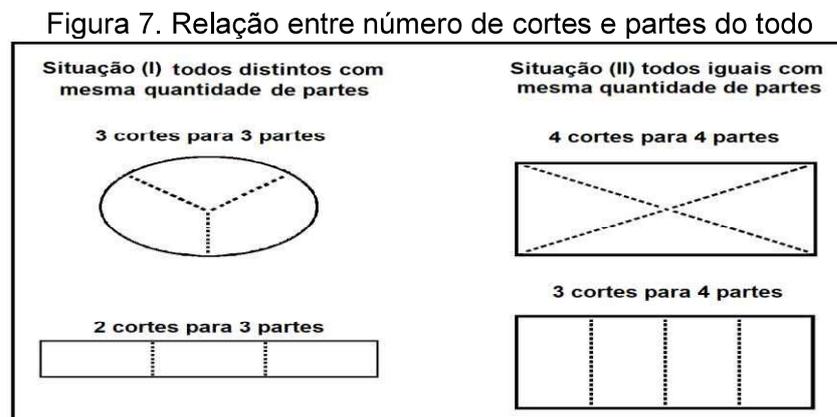
Figura 6. Relação entre total de unidades de uma coleção, unidades por agrupamento e quantidades de agrupamentos



Fonte: autoria própria, 2024

Na Figura 6, temos uma coleção de 9 lápis. Na distribuição (I), foram formados 3 agrupamentos de 3 lápis. Enquanto no (II) foram distribuídos 4 lápis por agrupamento, formando 2 agrupamentos e um resíduo de uma unidade. Como 9 não é múltiplo de 4, foram formados 2 agrupamentos, ficando um resíduo de uma unidade. E desta, essa distribuição não caracteriza cada parte como uma fração da coleção, pois não houve o esgotamento do todo ao sobrar uma unidade.

A ‘relação entre o número de partes e o número de cortes’ dependerá da representação geométrica bidimensional que está sendo considerada e da forma das partes, sendo assim, o número de cortes pode ser igual ou diferente do número de partes. Acreditamos que essa ideia se aplica apenas para quantidades contínuas, conforme a Figura 7.



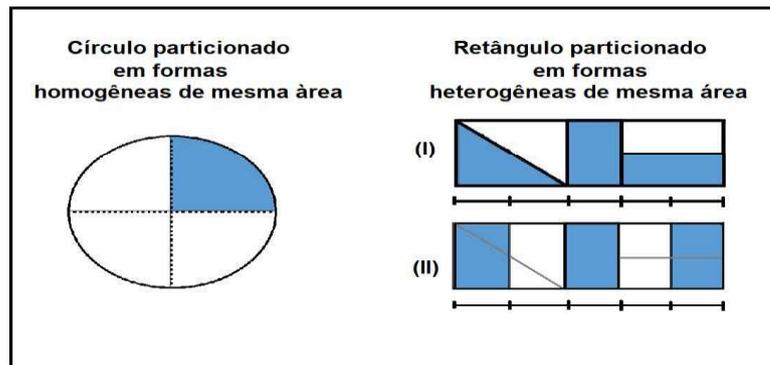
Fonte: autoria própria, 2024

Na Figura 7, a situação (I) contém ‘todos’ de formas distintas (circunferência e retângulo), na qual é mostrada na representação geométrica da circunferência, que foram necessários 3 cortes para se obter 3 partes. Enquanto que na representação geométrica do retângulo, apenas 2 cortes foram suficientes para se obter o mesmo número de partes.

Na situação (II), temos dois retângulos congruentes (mesma área e forma) que estão divididos de modo que a quantidade das partes é igual, mas o formato das partes é diferente (triângulo e retângulo), sendo que as formas influenciam na quantidade de cortes, visto que em um dos retângulos foram 2 cortes enquanto no outro, 3.

A ‘igualização das partes’ considera que as partes que compõem o todo devem ter a mesma área, ou a mesma quantidade de objetos quando se tratar de quantidades discretas. Na Figura 8, temos representações geométricas contínuas com partes congruentes de formas homogêneas (I) e heterogêneas (II).

Figura 8. Representações geométricas divididas em partes homogêneas e heterogêneas de mesma área

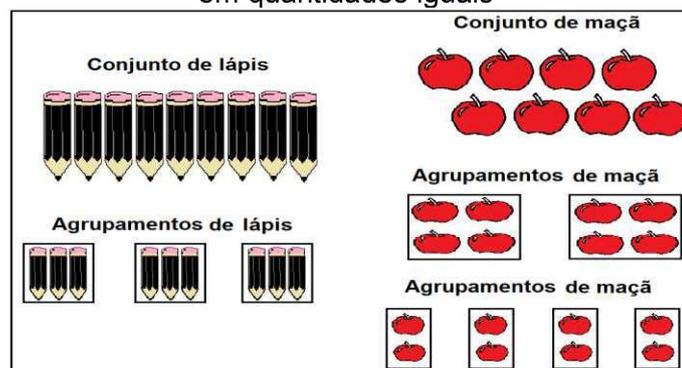


Fonte: adaptada de Silva, 2018

Na figura 8, o retângulo (I) está particionado em partes de formas distintas, mas de mesma área, e o (II) representa as modificações no retângulo inicial que transformam as partes de modo que suas formas sejam homogêneas para verificação da congruência entre as suas áreas, segundo Silva (2018).

Enquanto as coleções devem conter agrupamentos com a mesma quantidade de objetos, conforme Figura 9.

Figura 9 . Conjuntos de objetos e seus agrupamentos em quantidades iguais



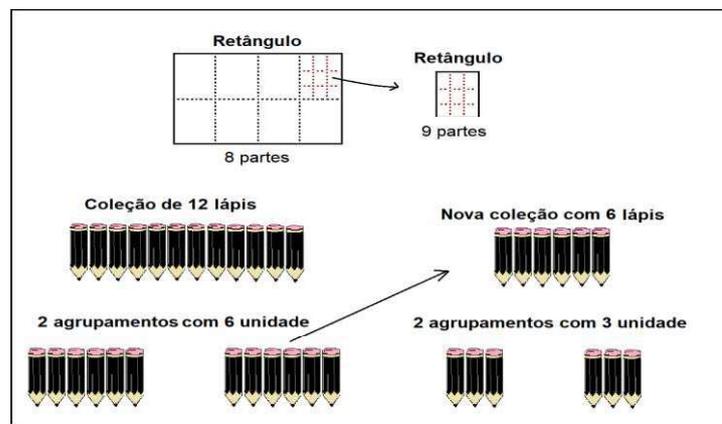
Fonte: autoria própria, 2024

Na figura 9, os agrupamentos possíveis dependeram do número correspondente ao valor total de objetos e suas possíveis divisões inteiras. Tomemos o conjunto de 9 lápis, o qual só possui uma única divisão inteira (9 dividido por 3), sendo possível um único arranjo composto de 3 agrupamentos com 3 unidades cada (sem contar com aqueles agrupamentos de apenas uma unidade, cada parte), já o conjunto de 8 maçãs possui a possibilidade de dois arranjos, já que o número 8 possui

duas divisões inteiras (8 dividido por 4 ou por 2), sendo composto por 2 agrupamentos de 4 unidades ou 4 agrupamentos de 2 unidades.

A ‘conceptualização de cada fração como parte de um todo em si, susceptível de novas divisões’ considera que a parte pode ser visualizada como um todo que pode ser submetido a uma nova sucessão de divisões, sejam elas partes de uma quantidade contínua ou discreta, conforme a Figura 10.

Figura 10. Representações de todos que estão aptos de novas divisões

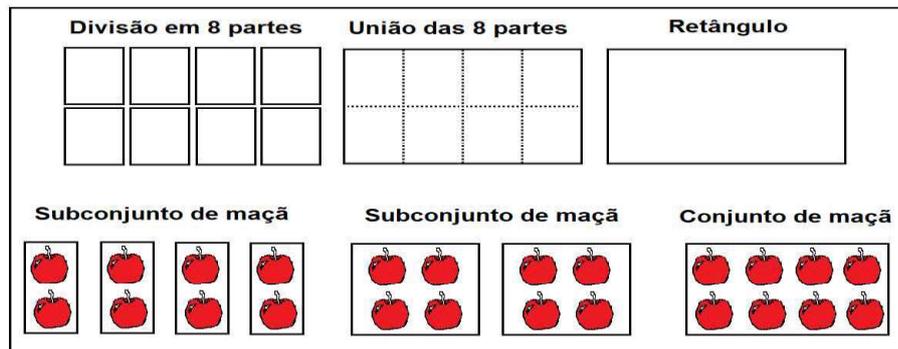


Fonte: autoria própria, 2024

Na Figura 10, podemos observar que as possibilidades de divisões envolvendo quantidades contínuas são mais abrangentes do que aquelas relacionadas às quantidades discretas, pois nestas as divisões devem ser realizadas de forma que não desconstrua a integridade do objeto (lápiz).

E finalmente, a última condição é o ‘atendimento ao princípio de invariância: a soma das frações constituídas é igual ao todo. Neste caso, sempre que particionamos o todo, o conjunto das partes deve reconstituir o todo, ou seja, a sua totalidade inicial, conforme Figura 11.

Figura 11. Particionamento e recomposição do todo



Fonte: autoria própria, 2024

Na Figura 11, podemos ver que as divisões são reversíveis e que, ao estudarmos os conceitos de fração, devemos dominar essa habilidade de ida (particionamento do todo) e volta (reconstituição do todo). Para Lima (2012), a compreensão da conservação das áreas é essencial para o atendimento desta condição. Além disso, o autor afirma que a conservação envolvendo quantidades discretas é mais fácil de ser compreendida, visto que antes mesmo de se estudar áreas de figuras planas, os alunos estão familiarizados com a conservação de partes envolvendo conjuntos de objetos.

No próximo tópico, iremos discutir as especificidades para estabelecer a relação parte-todo quando consideramos apenas grandezas contínuas, como as figuras geométricas planas.

### 2.3 Tipos de figuras geométricas que podem ser trabalhadas a relação parte-todo dos números racionais

De acordo com Silva e Câmara dos Santos (2020), as figuras que trabalham a relação parte-todo dos números racionais apresentam elementos visuais que podem facilitar ou dificultar a passagem da representação da figura geométrica plana para a fracionária. Dessa forma, os autores apresentaram uma classificação para essas figuras que corrobora com o nosso estudo.

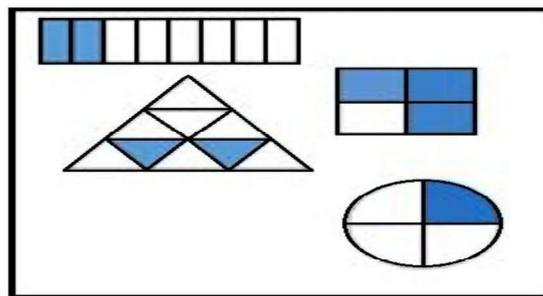
A classificação é constituída de seis graus de não congruência semântica, ou seja, de seis níveis de dificuldades semiocognitivas<sup>3</sup> que cada figura pode apresentar para o estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais: figuras perceptuais que representam um inteiro, figuras perceptuais que representam mais

<sup>3</sup> Dificuldades de origem semiótica e cognitiva.

de um inteiro, figuras operatórias por inclusão das partes ou subfiguras, figuras operatórias por divisão, figuras operatórias por modificação das formas, figuras operatórias por modificação das formas e das áreas.

As figuras perceptuais que representam um inteiro, de acordo com os autores mencionados, são polígonos, círculos em que o particionamento em áreas congruentes é explícito. Além disso, as partes possuem formas homogêneas e áreas congruentes, sendo algumas delas pintadas ou hachuradas, conforme a Figura 12.

Figura 12. Figuras perceptuais (um inteiro)

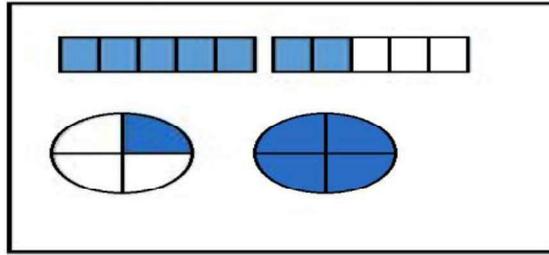


Fonte: Silva e Santos (2020, p.4)

Na representação 12, as figuras perceptuais são pertencentes ao grau um de não congruência semântica, pois para conversão da representação figural geométrica para o registro fracionário numérico é necessário identificar a quantidade de partes em que o inteiro foi dividido, em seguida aplicar a 'dupla contagem' que consiste em contar as partes que estão (hachuradas) e o total de partes (congruentes). De fato, os elementos presentes nestes tipos de figuras, como cores, as demarcações da divisão, as formas das partes serem homogêneas e as áreas serem congruentes, facilitam as conversões de um registro para outro.

No grau dois estão figuras perceptuais que representam mais de um inteiro. Nesse caso, o método da dupla contagem não é bem adaptado às figuras deste nível, pois o valor total das partes que representam o denominador deverá levar em conta apenas um dos inteiros. Ou seja, a visualização de qual é o todo (referencial) vai ser fator decisivo que pode determinar o acerto ou erro do indivíduo. Na Figura 13 temos dois exemplos de figuras que representam a relação parte-todo dos números racionais com mais de um inteiro.

Figura 13. Figuras perceptuais que representam mais de um inteiro

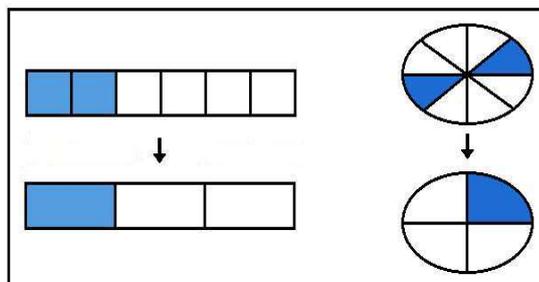


Fonte: Silva e Santos (2020 p.4)

Na figura 13, considerando como unidade o retângulo (referencial), a quantidade total de partes pintadas representa um valor maior do que um inteiro. Portanto, o numerador da fração é 7 (sete) e o denominador 5 (cinco). Enquanto, observando o círculo, teremos 5 (cinco) para o numerador e 4 (quatro) para o denominador da fração. Entretanto, é comum os estudantes considerarem como unidade as duas figuras (os dois inteiros sendo o referencial), obtendo o valor dez e oito como denominadores, respectivamente, da fração que representa as partes pintadas do retângulo e do círculo.

No grau três estão as figuras operatórias por inclusão das partes ou subfiguras. Nesse nível, as figuras geométricas possuem os mesmos elementos daquelas do Grau 1, como: cor, demarcações internas da divisão explícitas, as formas das partes homogêneas e as áreas congruentes. Contudo, permitem transformações que incluem partes, gerando uma figura com um número de partes menor que a inicial, podendo trabalhar frações equivalentes e irredutíveis, como na Figura 14.

Figura 14. Figuras operatórias por inclusão das partes ou subfiguras

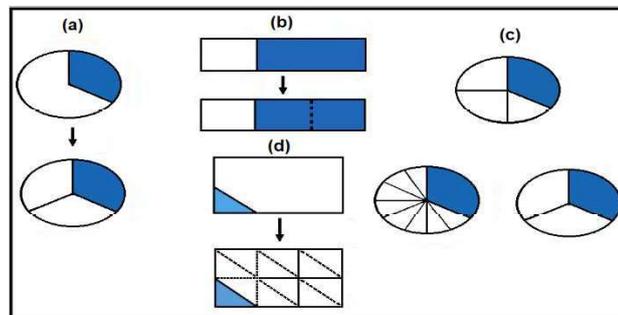


Fonte: Silva e Santos (2020 p.9)

Na Figura 14, de acordo Silva e Câmara dos Santos (2020), a figura geométrica pode ser reestruturada, por meio da inclusão das partes ficando com 3 três) partes congruentes que corresponde ao denominador da fração e desta forma o quantitativo de partes pintadas que corresponde ao numerador passa a ser 1 (um).

No grau quatro, estão as figuras operatórias por divisão. Neste nível, as figuras não possuem todas as partições explícitas, dificultando a percepção da parte, ou seja, para se ter o conjunto de todas as partes que formam o todo, é necessário que o indivíduo identifique uma unidade-parte<sup>4</sup> e, por meio dela, realize as divisões em partes congruentes, conforme a Figura 15.

Figura 15. Figuras operatórias por divisão



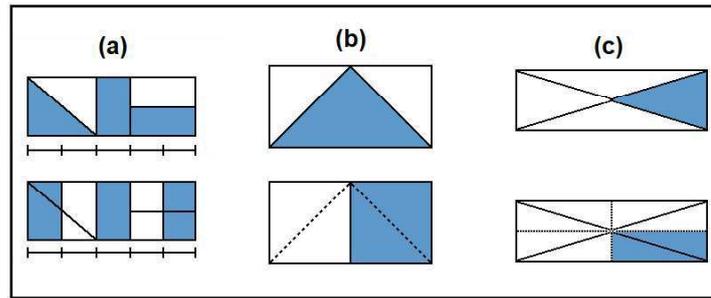
Fonte: Silva e Santos (2020 p.12)

Na Figura 15, podemos perceber o nível de dificuldade para se realizar as conversões da figura geométrica para sua representação fracionária, visto que o particionamento está visualmente incompleto. Além disso, é comum a não visualização da unidade-parte pelos alunos, que por sua vez ignoram a necessidade de transformar a figura, e como consequência, aplicam o procedimento da dupla contagem, causando equívocos, segundo Silva (1997 apud Silva e Santos, 2020, p.14).

No grau cinco estão as “figuras operatórias por modificação das formas”, nesse nível as figuras estão totalmente particionadas, contudo, apresentam partes de formas distintas que dificultam a visualização das áreas congruentes, conforme a Figura 16.

<sup>4</sup> A unidade-parte foi definida em Silva e Câmara dos Santos (2020) como a parte ou subfigura que será utilizada como medida padrão do particionamento da figura geométrica inicial.

Figura 16. Figuras operatórias por modificação das formas

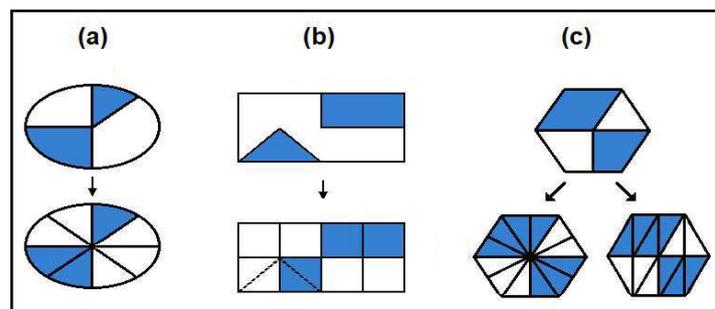


Fonte: Silva e Santos (2020 p.12)

Na Figura 16, a visualização das partes que constituem o todo, por terem formas distintas, necessita ser reconfigurada de forma que as áreas congruentes fiquem evidentes e assim possam ser convertidas para fração.

No grau seis estão as “figuras operatórias por modificação das formas e das áreas”. Nesse nível, tanto as áreas como as formas das partes são diferentes, conforme a Figura 17.

Figura 17. Figuras operatórias por modificação das formas e das áreas’



Fonte: Silva e Santos (2020 p.20)

Na Figura 17, as figuras geométricas iniciais necessitam de uma reconfiguração que envolve modificação por rotação e/ou translação das suas partes para que a congruência entre as áreas destas seja evidente. Assim, nesse grau, os elementos que facilitam a conversão para a representação fracionária são escassos, necessitando do indivíduo um maior esforço cognitivo para realizá-la, pois, como afirmam Silva e Câmara dos Santos (2020),

Quanto menos ‘transparecem’ os elementos figurais que estabelecem a relação parte-todo na representação geométrica a ser convertida para o registro simbólico fracionário mais elementos figurais deverão ser ‘descobertos’ ou colocados de forma ‘explícita’” (Silva e Câmara dos Santos, 2020, p.3).

Nesse sentido, os referidos autores entendem que a relação parte-todo dos números racionais envolvendo grandezas contínuas deve ser trabalhada na educação básica, contemplando todos os tipos de figuras geométricas propostas em seu estudo para que seja superado o procedimento da dupla contagem e construídos os conceitos que envolvem esta relação na representação geométrica bidimensional e fracionária.

No próximo capítulo, discutiremos o caminho metodológico utilizado na nossa pesquisa.

### **3 METODOLOGIA**

Esta pesquisa possui uma abordagem qualitativa e segundo Prodanov e Freitas (2013), do ponto de vista dos procedimentos técnicos é do tipo bibliográfica, pois coloca “o pesquisador em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa” (PRODANOV; FREITAS, 2013 p. 54). Tem como objetivo analisar as tendências e abordagens da relação parte-todo dos números racionais, a partir da análise das pesquisas publicadas nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) no período de 2010 a 2022 (edição mais atualizada do ENEM).

A escolha dos “anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)” ocorreu devido ser esse um evento nacional com reconhecida credibilidade na área, realizado pela primeira vez em 1987 na Universidade Católica de São Paulo. O evento buscava ser um marco em que profissionais da área da Educação Matemática pudessem compartilhar seus conhecimentos de forma a contribuir para o ensino e para novas pesquisas.

De acordo com os Anais do IV ENEM (1995), o sucesso do evento deu força para uma sequência, no ano seguinte, sediada dessa vez na universidade estadual de Maringá, onde foi criada a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), que passou a ser a organizadora dos ENEM. Desde a edição de 1992 (quarta edição), o encontro ocorre a cada 3 anos, devido ao grande acréscimo de participantes que acarreta um tempo maior para análises dos trabalhos submetidos.

A pesquisa foi limitada as 5 últimas edições (ENEM X – XIV), que envolve os anos de 2010 a 2022 por envolver um período correspondente a um pouco mais de uma década. O nosso critério de escolha considerou artigos classificados como comunicação científica e a busca iniciou-se pelo título dos trabalhos, envolvendo 6 palavras-chaves: Número Racional, Racional, Racionais, fração, frações e fracionário.

O levantamento dos trabalhos iniciou-se pelos anais do X ENEM, evento esse que foi realizado entre 7 e 9 de junho de 2010, em Salvador- BA, com o tema: Educação Matemática, Cultura e Diversidade. No primeiro momento, foi feito um reconhecimento e familiarização com a plataforma, que está organizada com as abas: Abertura | Apresentação | Comissões | Sumário | Apoios | Editoras. Como exposto na figura 18.

Figura 18. Layout<sup>5</sup> dos Anais do X - ENEM

Fonte: <https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/>. Acessado em: 08 dez. 2023.

Na aba sumário encontram-se os tipos de publicações e as ferramentas de pesquisas. Inicialmente, foi feita a pesquisa usando a ferramenta buscar. Foi aplicada a palavra-chave ‘Número racional’, entretanto, não foi encontrado nenhum resultado. A segunda palavra-chave, ‘Racional’ obteve 5 resultados, dos quais três eram comunicações científicas, um minicurso e uma mesa redonda.

Entre as comunicações científicas, apenas um trabalho tinha relação direta com o conteúdo pesquisado. Então, nesta fase, temos a primeira dificuldade encontrada, pois ao ler o título desse trabalho percebemos a presença da palavra-chave anterior “número racional”, na qual a “busca” havia informado não haver nenhum resultado. Logo procuramos entender o porquê de isso ter acontecido e voltando às informações de como se faz a busca, a informação dizia “inserir apenas uma palavra com três caracteres ou mais” descartando, por sua vez, palavras-chaves compostas. Todavia, essa restrição de uma palavra ainda podia ser contornada e demos continuidade para as próximas palavras-chave.

Na terceira palavra-chave, “Racionais”, obtivemos 10 resultados, dos quais 6 eram comunicações científicas, 2 minicursos, 1 mesa redonda e 1 relato de experiência. Dentre as 6 comunicações científicas, 4 trabalhos tinham relação com o conteúdo que nos interessa. Novamente, a presença da palavra-chave “número racional” foi vista em alguns títulos. As palavras-chave, “fracionário”, ‘fração’ e ‘frações’, aplicadas não foram encontradas nenhum resultado.

<sup>5</sup> Layout refere-se à organização e disposição dos elementos visuais em uma página, tela ou espaço físico.

Desta forma, obtivemos apenas 5 trabalhos relacionados ao nosso interesse inicial. Porém, ao realizar novamente a pesquisa e digitar sem acento agudo a palavra-chave “fracionário”, obteve-se um resultado de um trabalho sobre uma mesa redonda que anteriormente a ferramenta buscar havia definido como nenhum trabalho encontrado.

Novamente, retornou-se às informações da busca, a qual informava: “utilize somente caracteres alfabéticos, acentuados ou não”, que nos mostra que não deveria ter saído um resultado novo, mesmo que a palavra tenha sido escrita sem acento, logo percebeu-se um erro ao fazer as pesquisas usando palavras-chaves na ferramenta buscar. Testamos novamente a palavra-chave frações sem o ‘ç’ e sem o acento no “o” e obtivemos 13 resultados, dos quais 4 eram comunicações científicas, 3 minicursos, uma mesa redonda, 3 relatos de experiência e 2 pôsteres.

Dentre as 4 comunicações científicas, 3 trabalhos estavam relacionados ao assunto que nos interessa. Nesse momento, percebemos que poderia haver mais alguns trabalhos que a busca não identificou por algum erro de programação ou outro fator desconhecido.

No que diz respeito a essas pesquisas, decidimos encontrar os possíveis trabalhos que a busca não localizou, então mudamos de ferramenta, optando pela pesquisa por tema, na qual foram divididos em 22 abas, assim a verificação de cada aba resultou nos 8 trabalhos encontrados na busca e mais um acréscimo de 2 trabalhos, totalizando 10 trabalhos encontrados. Esse erro foi prejudicial a nossa pesquisa, pois tivemos que usar dois métodos diferentes para encontrar os trabalhos, levando muito tempo nesse processo e ainda nos deixando com dúvidas se realmente encontramos todos ou se deixamos passar algum.

O XI ENEM foi realizado em Curitiba-PR, entre 18 e 21 de junho de 2013, com o tema: retrospectivas e perspectivas da Educação Matemática no Brasil, sendo palco do aniversário de 25 anos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM. Ao seguir os mesmos passos utilizados no levantamento dos trabalhos nos anais do X ENEM, fizemos um reconhecimento da plataforma dos anais do XI ENEM, a qual possuía pequenas diferenças da anterior. O layout da página dos anais da décima edição, apresenta as opções de navegação no canto inferior da página, sendo os tópicos pouco evidenciados. Nesta décima primeira edição, nos deparamos com o layout da página com as opções de navegação na parte superior e mais destacadas,

possibilitando uma melhor navegação em comparação com os anais da edição anterior, como na Figura 19.

Figura 19. Layout da página inicial dos anais do XI ENEM



Fonte: <http://www.sbemrevista.com.br/files/XIENEM/>. Acessado em: 15 dez. 2023

Após esse primeiro contato com a página, nos dirigimos aos trabalhos classificados como comunicações científicas, que nos permitem visualizar os títulos dos trabalhos, autores, co-autor(es), contendo 13 páginas. Percebemos que nessa plataforma a ferramenta 'buscar' não existe, assim adaptamos a pesquisa por 'título', utilizando as palavras-chaves já definidas, encontrando um total de 14 trabalhos.

Na edição do XII ENEM, realizada em São Paulo, entre 13 e 16 de julho de 2016, teve como tema: "A Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades". Ao fazer o reconhecimento da plataforma dos anais do XII, ENEM notamos que não houve mudanças significativas com a organização da página, em comparação com a edição dos anais do XI ENEM, possuindo uma estrutura semelhante, diferenciando apenas alguns detalhes de cor e títulos, como exposto na Figura 20.

Figura 20. Layout da página inicial dos anais do XII - ENEM

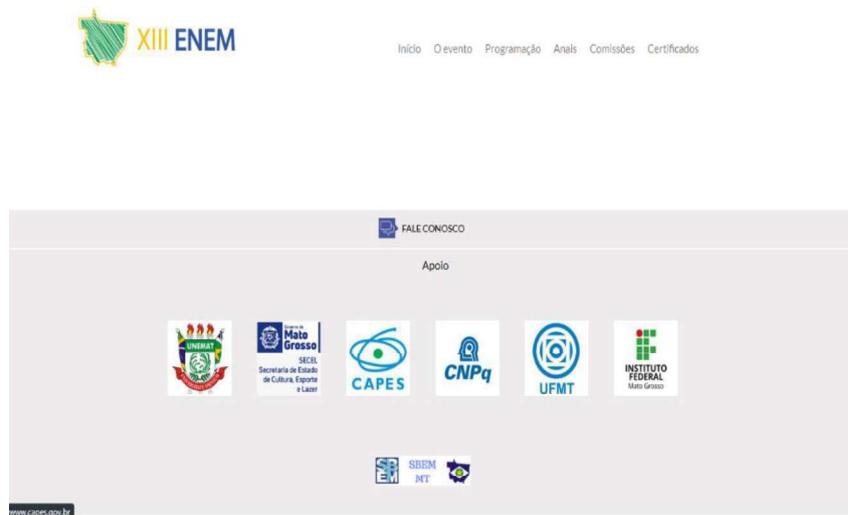


Fonte: <https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/>. Acessado em: 21 dez. 2023

Após o primeiro contato com a plataforma, partimos para o levantamento dos trabalhos. Na opção ‘comunicações científicas’, executamos a pesquisa usando o mesmo método realizado na edição anterior. Como já foi dito, a plataforma seguiu o mesmo padrão de organização dos anais do XI ENEM, por isso fizemos a leitura dos títulos e selecionamos todos que possuíam as palavras-chave do nosso estudo. Foram 17 abas pesquisadas, sendo selecionados 21 trabalhos, quantitativo este que supera o das duas últimas edições, cada uma.

O XIII ENEM foi realizado na Arena Pantanal - Cuiabá/MT, entre 14 e 17 de julho de 2019, com o tema: “Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: Interfaces entre pesquisas e salas de aula”. A plataforma dos anais desta edição nos trouxe complicações quanto ao levantamento dos trabalhos, começando pelo seu reconhecimento. Pois, a mesma apresenta erros de programação que impedem que sejam encontrados os arquivos referentes aos trabalhos publicados. A interface está organizada com as opções de navegação na parte superior da página, sendo elas: Início, O evento, Programação, Anais, Comissões e Certificados. Como exposto na Figura 21.

Figura 21. Layout da página inicial dos anais do XIII – ENEM



Fonte: <https://www.sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/anais.php>\_ Acessado em:

Ao ser verificada cada opção de navegação, não encontramos nenhum trabalho. No entanto, suspeitamos que deveriam estar na opção anais que se encontra em branco por algum motivo. Depois de procurar na plataforma sem obter resultado, cogitamos enviar um e-mail aos organizadores e, enquanto isso, pulamos para a próxima edição (XIV ENEM) para não perdermos tempo.

Nesse contexto, mais adiante, pesquisando os anais da outra edição, retornamos para verificar novamente a plataforma e enviar o e-mail. Ao clicar no link dos anais do XIII ENEM que se encontra na aba 'anais' da página da SBEM, iniciou-se, automaticamente, um download que continha um conjunto de pastas com os trabalhos publicados. Duas dessas pastas eram intituladas, respectivamente, 'mesas redondas' e 'palestras' e as outras 25 pastas eram intituladas em sub-eixos do XIII ENEM, com cada um referente a um campo de pesquisa da educação matemática.

A princípio, não entendemos por que o arquivo com os trabalhos foi baixado automaticamente, mas já que tínhamos acesso a eles, poderíamos dar continuidade à pesquisa e, após encerrar a busca nos anais do XIV ENEM, demos início à pesquisa nos anais do XIII ENEM. A pesquisa foi realizada nos 25 sub-eixos, pois, diferente dos anais anteriores, este não deixou claro quais trabalhos eram comunicações científicas, e também os arquivos em PDF estavam intitulados com códigos numéricos em sequência, portanto, seguindo a sequência, verificamos todas as pastas e títulos.

O método para realização da pesquisa era bastante simples: abrir o arquivo, olhar o título do trabalho e, se tivessem as palavras-chave que estávamos utilizando,

selecionávamos esse trabalho. Assim, alcançamos 27 trabalhos que estavam relacionados ao assunto que nos interessa. Maior quantitativo encontrado nessa primeira parte do levantamento bibliográfico.

O XIV ENEM ocorreu entre 11 e 15 de junho de 2022 e, nesse momento, o país ainda passava pela pandemia da Covid 19, sendo necessário adaptar o evento para uma forma totalmente online. O tema escolhido foi Educação Matemática, Escola e Docência - o que nos trouxe Ubiratan D'Ambrósio. Nesse evento, foi feita uma homenagem ao professor D'Ambrósio que esteve presente na primeira edição dos anais do ENEM e que havia falecido no ano anterior. Assim, partimos para o reconhecimento e familiarização da plataforma deste evento.

A página da web se mostra diferente das anteriores, possuindo um pôster bem maior em comparação as outras versões, com as opções de navegação abaixo do pôster. A ferramenta de busca descartada anteriormente nos anais do XI, XII e XIII ENEM retorna com auxílio de filtro que facilita ainda mais a pesquisa, como exposto na Figura 22.

Figura 22. Layout da página inicial dos anais do XIV – ENEM

Fonte: <https://www.even3.com.br/anais/xivenem2022/>. Acessado em: 04 jan. 2024

Apesar da ferramenta “buscar” estar novamente disponível, optamos pelo método de pesquisa por título, que é o padrão que utilizamos nos anais dos ENEMs

anteriores. Foi selecionado o filtro 'comunicações científicas', no qual foram disponibilizadas 36 abas. Nelas tínhamos acesso apenas aos títulos, para acessar mais informações como, nome dos autores, data de publicações, modalidade temática e o arquivo em PDF (para visualizar ou baixar) era necessário clicar no título, assim a página era redirecionada a uma nova aba que continha essas informações.

Portanto, das 36 abas verificadas, selecionamos 8 trabalhos, o menor quantitativo encontrado até o momento. Encerramos a primeira parte do levantamento com um total de 80 trabalhos que foram separados em 5 pastas de acordo com cada edição do ENEM.

Na segunda etapa do levantamento, a partir dos artigos selecionados, adotamos como categoria o artigo que trabalha a relação parte-todo dos números racionais para dar início às leituras interpretativas e sistemáticas dos trabalhos.

As primeiras leituras foram feitas nos trabalhos encontrados no X ENEM, compreendendo todo o artigo, nos permitindo ampliar os conhecimentos e potencializar nosso critério, pois a leitura completa do artigo permitiu um maior entendimento, tornando a aplicação do critério mais acurada. Por sua vez, no X ENEM, na primeira etapa, foram encontrados 10 trabalhos, e após as leituras e aplicação do critério, obtivemos apenas 3 trabalhos.

No XI ENEM, dos 14 trabalhos, 8 foram selecionados e no XII ENEM, de 21 trabalhos, selecionamos 8, também. Enquanto no XIII ENEM, dos 27 trabalhos, apenas 4 foram selecionados. Isso ocorreu porque, ao fazermos as leituras, verificamos a presença de trabalhos que não eram comunicações científicas, pois nos artigos pesquisados nesse ENEM o acesso aos trabalhos não foi pelo site e sim por um arquivo baixado para o nosso computador.

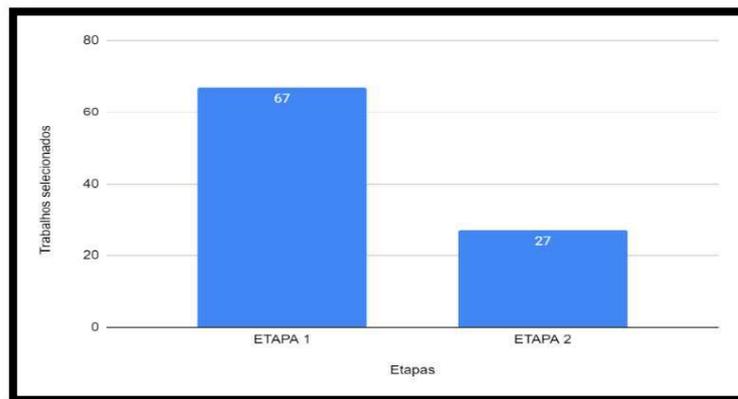
Dessa forma, o arquivo citado acima continha um conjunto de pastas nas quais acreditávamos que estavam divididas entre mesa redonda, palestra e sub-eixos que supomos serem os trabalhos classificados como comunicações científicas. Porém, essa suposição foi equivocada e tivemos que fazer a separação desses trabalhos. A grande questão era como faríamos isso, pois não tínhamos tido necessidade até o momento de classificar os trabalhos em comunicações científicas, minicursos, palestras, entre outros.

No entanto, o site dos anais do ENEM, tinha disponível os certificados dos participantes que continham nome do(s) autor(es), título e modalidade. Com essas informações, executamos a separação dos trabalhos que, após feito isto, o

quantitativo caiu de 27 para 14. E essa queda contribuiu para o resultado citado anteriormente, pois no XIV ENEM, dos 8 trabalhos, 4 foram selecionados, assim encerrando a segunda etapa com um total de 27 trabalhos.

Em síntese, os quantitativos dos trabalhos encontrados na etapa 1 e 2 estão apresentados no Gráfico 1.

Gráfico 1. Trabalhos selecionados em cada etapa

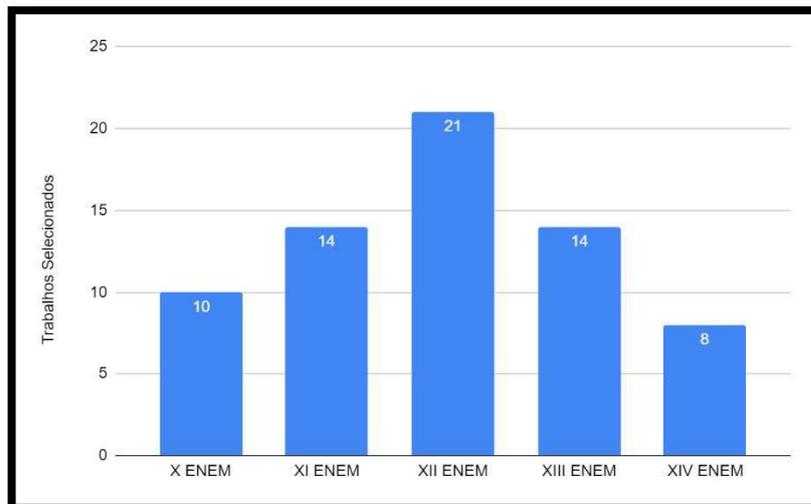


Fonte: Autoria própria (2024)

Na etapa 1, os trabalhos foram encontrados usando as 6 palavras-chaves determinadas na pesquisa (Número Racional, Racional, Racionais, fração, frações e fracionário); e na etapa 2, escolhidos a partir da leitura dos artigos selecionados da etapa 1, a qual permitiu identificar os trabalhos que estavam de acordo com nossos objetivos (trabalhos que discutem ou estudam os significados da relação parte-todo).

Ainda na etapa 1, os trabalhos foram classificados por edição do ENEM. O XII ENEM apresentou um maior quantitativo de trabalhos selecionados (31%), conforme Gráfico 2.

Gráfico 2. Trabalhos da etapa 1 por ENEM

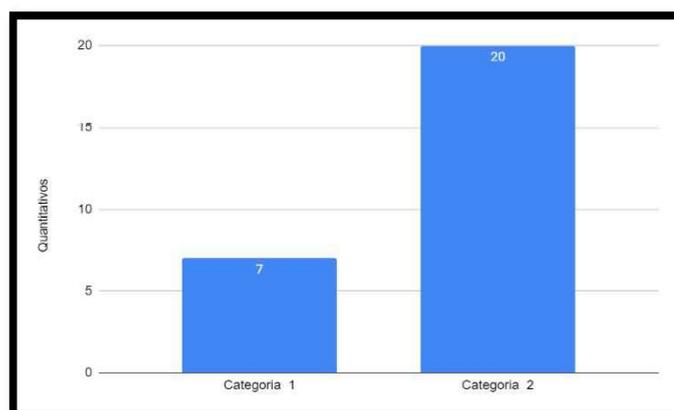


Fonte: Autoria própria (2024)

De acordo com o Gráfico 2, entre o X e o XII ENEM, houve um crescimento no quantitativo de trabalhos selecionados que envolvem a relação parte-todo dos números racionais. Contudo, o XIII ENEM e o XIV ENEM apresentaram uma queda no quantitativo de trabalhos nesta área.

Os trabalhos da segunda etapa foram organizados em duas categorias, conforme o gráfico 3.

Gráfico 3. Trabalhos da etapa 2 por categorias

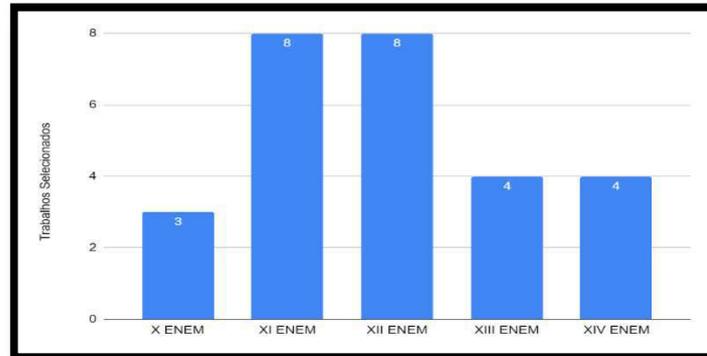


Fonte: Autoria própria (2024)

Na categoria 1 estão os trabalhos que discutem a relação parte-todo dos números racionais como objetivo principal (26%); e na categoria 2, os trabalhos que discutem a relação parte-todo, mas não a têm como objetivo principal (74%).

Os trabalhos da etapa 2 foram classificados por edição do ENEM, conforme Gráfico 4.

Gráfico 4. Trabalhos da etapa 2 por ENEM



Fonte: Autoria própria (2024)

Nesta etapa, o XI ENEM e o XII ENEM apresentaram o mesmo quantitativo de trabalhos que abordam a relação parte-todo dos números racionais (30%), assim como nos XIII ENEM e XIV ENEM (15%).

A terceira e última etapa consistiu em classificar os trabalhos da etapa 2 em pesquisa diagnóstica, pesquisa teórica, pesquisa bibliográfica, intervenção didática e análise documental e de livro didático. De modo que 9 deles abordavam alguma intervenção didática ou proposta de intervenção, 9 trabalhos realizaram uma pesquisa diagnóstica, 7 trabalhos envolveram análise documental, 1 trabalho configurou-se como pesquisa teórica e 1 trabalho como pesquisa bibliográfica.

Dos 7 trabalhos da categoria 1, 3 envolvem intervenção didática, 3 deles são pesquisas diagnósticas e 1 trabalho corresponde à análise documental. Enquanto na segunda categoria, 6 trabalhos tratam de intervenções didáticas, 6 desenvolvem pesquisas diagnósticas, 6 realizam análise documental ou de livro didático, 1 corresponde à pesquisa teórica e 1 à pesquisa bibliográfica, conforme a Tabela 1.

Tabela 1. Classificação dos tipos de artigos por categoria

Tipos de artigos	Nº	Categoria 1: a relação parte-todo faz parte do objetivo da pesquisa	Categoria 2: a relação parte-todo não faz parte do objetivo da pesquisa
Pesquisa diagnóstica	9	3	6
Pesquisa teórica	1	0	1
Pesquisa bibliográfica	1	0	1
Intervenção didática	9	3	6
Análise documental ou de livro didático	7	1	6
<b>total</b>	<b>27</b>	<b>7</b>	<b>20</b>

Fonte: Autoria própria (2024)

Nos próximos capítulos iremos discorrer sobre as pesquisas que foram selecionadas e classificadas por tipo e categoria.

#### **4 ANÁLISE DOS ARTIGOS CUJO OBJETIVO ENVOLVEU A RELAÇÃO PARTE-TODO**

Neste capítulo, serão analisados os trabalhos selecionados nesta categoria quanto ao tipo, objetivo, fundamentação teórica, metodologia e principais resultados que envolvem a relação parte-todo. Enquanto no tópico 4.1 será realizada uma síntese da discussão deste capítulo.

Os artigos que têm como objetivo a discussão da relação parte-todo foram um total de 07 (sete), entre as edições do X ENEM e XIV ENEM, conforme Quadro 1.

Quadro 1. Artigos categorizados como tendo o objetivo de discutir a relação parte-todo

<b>Autores</b>	<b>Instituição de Ensino Superior - IES</b>	<b>ENEM</b>	<b>Classificação do artigo</b>
Silva e Câmara dos Santos (2010)	UFRPE	X	Intervenção didática
Utamura e Curi (2016)	Universidade Cruzeiro do Sul	XII	Intervenção didática
Mandarino et al. (2022)	Colégio Pedro II/EDMAR	XIV	Intervenção didática
Gaviraghi e Battisti (2013)	Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUI	XI	pesquisa diagnóstica
Santos Filho e Câmara dos Santos (2019)	UFPE	XIII	pesquisa diagnóstica
Jama-Antônio et al. (2019)	UNICAMP	XIII	pesquisa diagnóstica
Bordin et al (2016)	UFFS/UFSC	XII	análise documental

Fonte: autoria própria, 2024

De acordo com o Quadro 1 podemos perceber que, em todas as edições dos ENEM's pesquisados, houve pelo menos um trabalho que abordasse a relação parte-todo dos números racionais como objetivo da pesquisa. No XIII ENEM, houve dois trabalhos classificados como pesquisa diagnóstica.

Ao analisar as IES do Quadro 1 por estado, São Paulo e Pernambuco se sobressaíram com relação ao número de pesquisas (4) do nosso interesse, sendo

duas pesquisas de São Paulo e duas de Pernambuco, desenvolvidas em IES e edições do ENEM distintas. As pesquisas restantes (3) foram realizadas em Santa Catarina, Rio Grande do Sul e Rio de Janeiro.

A análise dos artigos será realizada por ordem do ENEM, iniciando da edição mais antiga. O primeiro trabalho analisado foi publicado no X ENEM, intitulado por *Análise dos Efeitos Didáticos Emergentes de uma Sequência de Atividades na Aprendizagem do Significado Parte/Todo do Número Racional*, dos autores Santos e Câmara dos Santos (2010). Esse artigo foi classificado como Intervenção Didática e teve como objetivo analisar os Efeitos Didáticos Emergentes de uma Sequência Didática trabalhada no livro de matemática adotado na rede de ensino e a aprendizagem do significado parte-todo dos números racionais.

A sua fundamentação teórica tem como aporte a Teoria das Situações Didáticas formulada por Guy Brousseau<sup>6</sup>. Dessa forma, as discussões foram realizadas conforme o olhar da teoria, entretanto, pudemos observar que os autores não trazem uma fundamentação teórica para uma discussão da relação parte-todo dos números racionais, apesar desta relação ser objeto de análise do artigo.

A pesquisa realizou-se numa escola da rede pública de Recife – PE, em uma turma do 5º ano dos anos iniciais da Educação Básica, contando com a participação da professora e 40 alunos. Foi aplicada uma sequência didática composta por 19 atividades envolvendo o significado parte-todo dos números racionais, utilizando quantidades contínuas ou discretas. Apesar de terem sido abordadas na pesquisa 19 atividades, os autores discutem apenas uma delas no artigo.

A atividade discutida pelos autores Santos e Câmara dos Santos (2010) no artigo inicia com um pequeno texto de introdução sobre frações, apresentando o significado da palavra fração no que tange seu significado matemático e sua representação numérica, além de reforçar sua aplicabilidade no cotidiano para determinar partes de objetos (discreto ou contínuo). Ou seja, quantidades que possam ser divididas em partes iguais ou agrupadas igualmente.

Ainda na atividade do artigo, além do texto introdutório, dois exemplos são apresentados, no qual o primeiro aborda uma coleção de 12 selos que foram

---

<sup>6</sup> A obra de Guy Brousseau (1986) não foi lida pelo autor dessa pesquisa, ele aparece na pesquisa que foi analisada.

agrupados em 3 grupos, sendo que cada grupo possui 4 selos; e o segundo, uma figura geométrica (hexágono particionado em 6 partes iguais, sendo que uma delas está pintada de vermelho e as demais de azul), onde a parte vermelha representa  $1/6$  (um sexto da figura) e as outras partes em azul em  $5/6$  (cinco sextos da figura).

Em seguida, são dispostas 4 atividades, ordenadas nas letras a, b e c, que trabalham a relação parte-todo com quantidades discretas, e a letra D, que trabalha a relação parte-todo com quantidade contínua. Conforme a Figura 23.

Figura 23. Atividade proposta



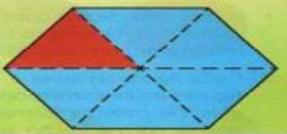
## Frações

No dia-a-dia, a palavra **fração** significa parte ou pedaço. Em Matemática também usamos essa palavra. Vejamos o seu significado matemático. As frações da Matemática são representadas com símbolos como estes:  $\frac{1}{4}$  (um quarto),  $\frac{2}{3}$  (dois terços),  $\frac{5}{6}$  (cinco sextos) etc. Às vezes esses símbolos são usados em situações do cotidiano. Eles servem para indicar partes de objetos, figuras ou quantidades **que foram divididos em partes iguais**. Veja os exemplos:

As meninas dividiram os selinhos da cartela em 3 grupos iguais. Cada grupo corresponde à fração  $\frac{1}{3}$  (um terço). Portanto,  $\frac{1}{3}$  dessa cartela de selinhos corresponde a 4 selinhos.



O polígono de 6 lados foi dividido em 6 partes iguais. A parte vermelha corresponde à fração  $\frac{1}{6}$  (um sexto). A parte azul corresponde à fração  $\frac{5}{6}$  (cinco sextos).



• Usando o que você aprendeu na leitura do texto, faça o que se pede:

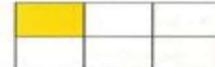
- Escreva por extenso o símbolo  $\frac{1}{4}$ : \_\_\_\_\_
- $\frac{1}{4}$  da cartela de selinhos corresponde a quantos selinhos? \_\_\_\_\_
- Meu caderno tem 96 folhas e  $\frac{1}{4}$  delas está em branco. Efetue uma conta e descubra quantas são essas folhas.  $96 \div 4 = 24$
- As figuras estão divididas em partes iguais. Escreva a fração que corresponde à parte pintada de amarelo.



$\frac{1}{4}$



$\frac{2}{3}$



$\frac{1}{6}$

Fonte: Silva e Câmara dos Santos (2010) p. 6

Na letra A, usando os conhecimentos adquiridos no texto introdutório, os alunos deveriam transcrever a fração  $1/4$  que está na sua representação numérica para sua representação em língua natural. Das respostas obtidas, os autores contabilizaram um total de 92% (noventa e dois por cento) de acerto e afirmaram que o resultado se justifica devido aos exercícios anteriores trabalhados que envolveram transições entre os registros de representação do número racional, dentre eles o pictórico, língua natural e simbólico fracionário. Ou seja, os alunos já estavam familiarizados com a tarefa e, por isso, conseguiram realizá-la sem dificuldades.

Na letra B, os alunos, por meio da fração  $1/4$ , deveriam indicar quanto a fração representava do total (12 selos da cartela). Os autores afirmam que, dos 37 alunos, apenas 1 teve êxito na resposta ( $1/4$  equivale a 3 selinhos). Além disso, os demais

alunos deram respostas erradas, pois utilizaram informações no texto para responderem, e fizeram operações com números naturais de soma e subtração e ainda, por meio das frações presentes no texto, selecionaram aleatoriamente numerador, denominador ou até o todo como respostas.

Na letra C, a relação parte-todo é trabalhada por meio do conjunto de folhas de um caderno, no qual  $\frac{1}{4}$  (um quarto) representa as folhas que ainda estão em branco e, por meio disso, os alunos deveriam executar um cálculo que determine quantas folhas do caderno equivalem a  $\frac{1}{4}$  (um quarto) deste.

Das respostas encontradas, na letra C, apenas dois alunos conseguiram realizar a atividade satisfatoriamente. 34 alunos apresentaram erros semelhantes aos encontrados na letra b, contudo 14 alunos, na busca pela solução, aplicaram uma subtração onde o todo (96 folhas) menos a fração  $\frac{1}{4}$  seria a resposta procurada. Porém, a fração  $\frac{1}{4}$  foi tomada como o número natural 14, em que a dezena (10) foi tomada como numerador e as unidades (4), como denominador.

Ainda na letra C, o protocolo do aluno 15 mostra outro dado importante, no qual o aluno compreendeu que deveria realizar uma divisão e até executar o algoritmo da divisão corretamente, contudo, em vez de dividir o todo (96 folhas) por 4, ele o divide por 2, conforme a Figura 24.

Figura 24. Resposta do aluno 15 da atividade proposta

Usando o que você aprendeu na leitura do texto, faça o que se pede:

a) Escreva por extenso o símbolo  $\frac{1}{4}$ : um quarto

b)  $\frac{1}{4}$  na cartela de selinhos corresponde a quantos selos? quatro selinhos

c) Meu caderno tem 96 folhas e  $\frac{1}{4}$  delas está em branco. Efetue uma conta e descubra quantas são essas folhas.

$$\begin{array}{r} 96 \\ 26 \\ \hline (0) \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ 48 \end{array}$$

Fonte: Silva e Câmara dos Santos (2010) p. 8

Na Figura 24, percebe-se que o aluno considerou a metade do todo (96 folhas), em vez de considerar um quarto do todo. E de acordo com os autores, isso pode ter ocorrido devido a um excesso de exercícios que trabalham com a fração  $\frac{1}{2}$ , tornando-se familiarizados com ela.

Na letra D são dispostos 3 retângulos, dois deles estão particionados em três partes congruentes e o último está particionado em 6 partes congruentes. No primeiro

retângulo, apenas uma parte de três está pintada ( $1/3$ ), no segundo retângulo, duas das três partes estão pintadas ( $2/3$ ) e no terceiro retângulo, uma parte de seis está pintada ( $1/6$ ). Assim, os alunos precisam apenas representar a fração na sua representação numérica correspondente às partes pintadas das figuras.

Ainda na letra D, nas respostas dadas pelos alunos no primeiro retângulo, 14 estavam corretas, no segundo, 16 e no terceiro foram 21 respostas corretas. Além disso, os autores identificaram em 3 protocolos respostas dadas em que se verifica a presença de mais de um registro de representação (língua natural e a representação fracionária), a relação parte-parte, a relação todo-parte e a realização de uma operação de adição ou subtração do número de partes pintadas e partes em branco.

Por sua vez, os autores chegaram à conclusão de que as atividades pertencentes à sequência didática retirada do livro de matemática trabalham prioritariamente com situações em que a relação parte-todo é explorada com grandezas contínuas. Além disso, constataram que os alunos pesquisados tiveram dificuldades ao trabalhar com grandezas discretas. E ainda, verificaram que a sequência didática aplicada não é suficiente para a aprendizagem dos estudantes, no que se refere à relação parte-todo dos números racionais.

Destacou-se também que partes das soluções foram feitas pelos alunos sem a compreensão da relação parte-todo, pois os erros se repetiram no decorrer das atividades em situações e contextos distintos, ao realizarem as transformações entre as representações fracionárias, linguagem natural e pictórica dos números racionais.

O segundo trabalho analisado foi o artigo intitulado por *Número Racional na Representação Fracionária Ideia Parte-Todo: Entendimentos Produzidos por Alunos*, dos autores Gaviraghi e Battisti (2013), selecionado no XI ENEM, classificado como Pesquisa Diagnóstica. O objetivo da pesquisa foi o de identificar entendimentos produzidos por alunos acerca dos números racionais na representação fracionária, ideia parte-todo.

Em sua fundamentação teórica, trazem autores que discutem a respeito do processo de ensino e aprendizagem dos números racionais, como Nunes e Bryant (1997), Bezerra, Magina e Spinillo (2002), Merlini (2005) e Moutinho (2005)<sup>7</sup>. Contudo, as reflexões e discussões teóricas centrais do trabalho foram embasadas em Van de

---

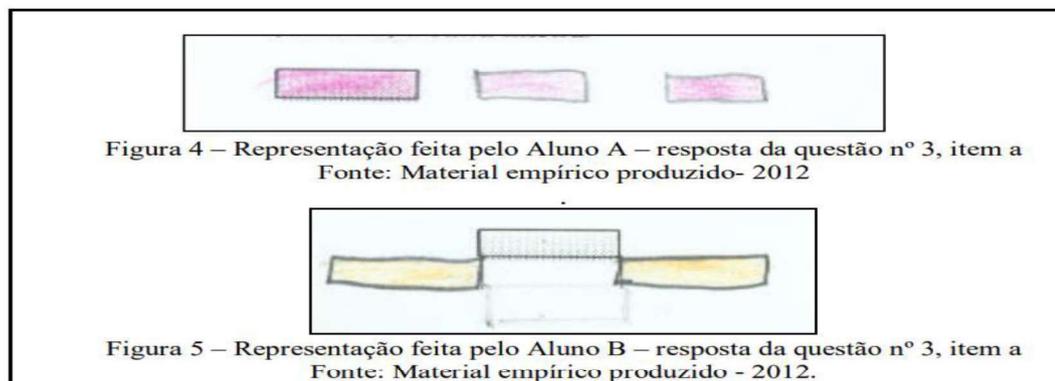
<sup>7</sup> Das obras dos autores Nunes e Bryant (1997), Bezerra, Magina e Spinillo (2002), Merlini (2005), Moutinho (2005) e Van de Walle (2009), apenas Merlini (2005) e Moutinho (2005) foram lidas pelo autor dessa pesquisa.

Walle (2009). Foram aplicadas oito questões para uma turma que iniciava o 6º ano dos anos finais do Ensino Fundamental, composta por 8 alunos, com duração de 2 horas aulas, em uma escola do município de Coronel Bicaco, interior do Rio Grande do Sul.

Das 8 questões aplicadas, as questões 2 (letras B e C), 3 e 4 foram discutidas no artigo. A primeira questão apresentada foi a 3, letras A e B, que tinha como objetivo instigar a percepção do todo a partir de uma parte, trabalhando o simbolismo fracionário e representações pictóricas (figuras geométricas planas) dos números racionais.

No item 3, letra A, foi disposta para os alunos uma representação pictórica de  $\frac{1}{3}$  de uma barra de chocolate e solicitado que representem a barra inteira. Nas respostas dadas pelos alunos, os autores identificaram que os mesmos entendem, a partir da representação pictórica  $\frac{1}{3}$ , que o chocolate foi partido em três partes, pois desenharam as partes que faltavam na tentativa de representar a barra inteira, como podemos ver na Figura 25.

Figura 25. Representações dos alunos do item 3º letra A

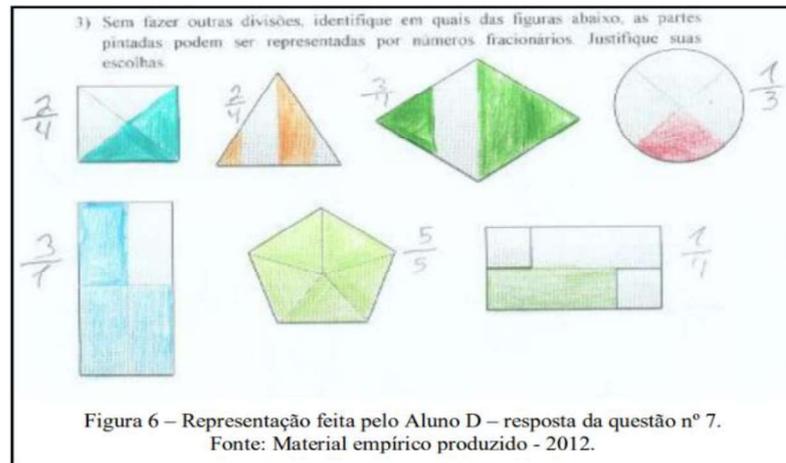


Fonte: Gaviraghi e Battisti (2013) p.8

Gaviraghi e Koltermann (2013) afirmam que os alunos contaram o número de partes em que o todo foi dividido e o consideraram como denominador. Além disso, contaram o número de partes pintadas e o consideraram como numerador. Contudo, a compreensão do novo número não se concretizou, pois os mesmos se prenderam apenas ao fato de contar as partes onde o resultado é um número inteiro. Isso faz com que os alunos não consigam relacionar os dois números inteiros, fazendo com que a ideia de numerador e de denominador seja perdida e a compreensão de número fracionário não seja alcançada.

No item 3, foram dispostas 7 figuras planas particionadas, as quais os alunos deveriam verificar se as partes pintadas poderiam ser representadas por frações e justificar as respostas, conforme a Figura 26.

Figura 26. Representações do aluno do item 3.



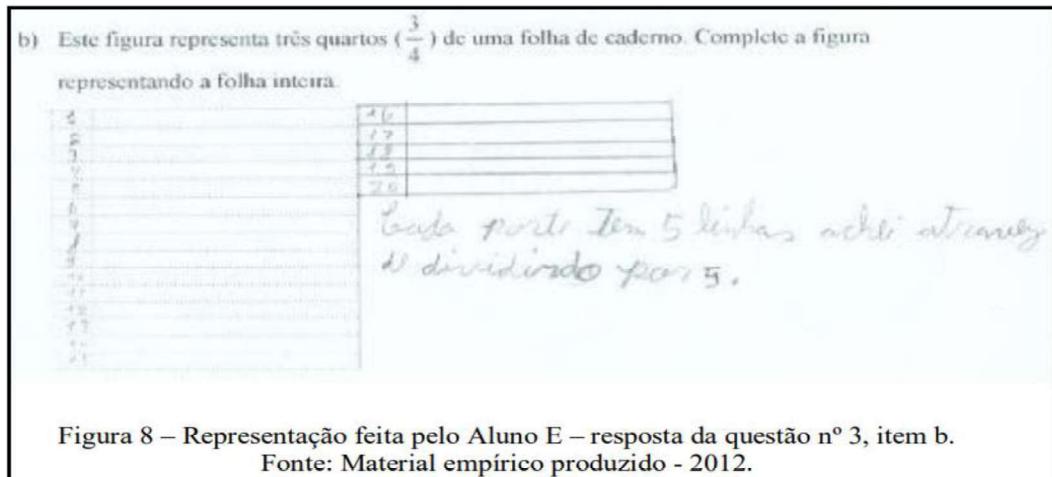
Fonte: Gaviraghi e Battisti (2013) p.11.

A partir da resposta dada pelo aluno D, os autores afirmam que o mesmo não possui clareza na representação fracionária envolvendo a relação parte todo, pois percebe o número fracionário como dois números naturais, não levando em consideração se as partes possuem áreas congruentes. Ao complementar, ainda, a análise do autor, inferimos que o mesmo utiliza a relação parte-parte em duas figuras (círculo e retângulo com partes pintadas de azul-celeste).

Na figura do círculo, podemos perceber que ele pensou em 1 parte pintada para 3 não pintadas, e no retângulo, 3 partes pintadas para 1 não pintada. O método da dupla contagem também se mostra presente no retângulo com partes pintadas de verde, no qual ele conta as partes pintadas e as partes em que o todo está dividido, ignorando as áreas.

No item 3, letra B, foi dada a fração  $\frac{3}{4}$  (em língua materna e na representação numérica) no enunciado, a qual representava três quartos de uma folha de papel, e solicitado aos alunos que representem a folha completa. Como mostra a Figura 27.

Figura 27. Representação do aluno E do item 3, letra B.

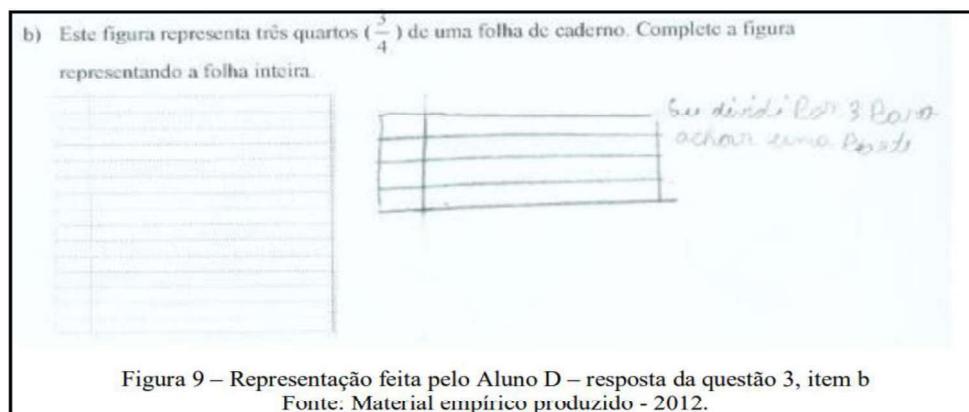


Fonte: Gaviraghi e Battisti (2013) p.11.

Na resposta apresentada pelo aluno, os autores afirmam que ele entendeu a fração  $\frac{3}{4}$  e conseguiu deduzir que cada parte da folha necessitava de 5 linhas. Contudo, na afirmação exposta pelo mesmo, quando diz que dividiu a figura por 5, fica claro que a divisão, na verdade, foi feita por 3. Acreditamos que a afirmação do aluno leva em consideração que ele dividiu a figura em partes de 5 linhas, e com isso afirmou que havia feito uma divisão por 5.

Enquanto o aluno D representou uma parte da folha contendo 4 (quatro) linhas, mas afirmou ter dividido a figura por 3 (três), conforme a Figura 28.

Figura 28. Representações do aluno D do item 3 letras B.



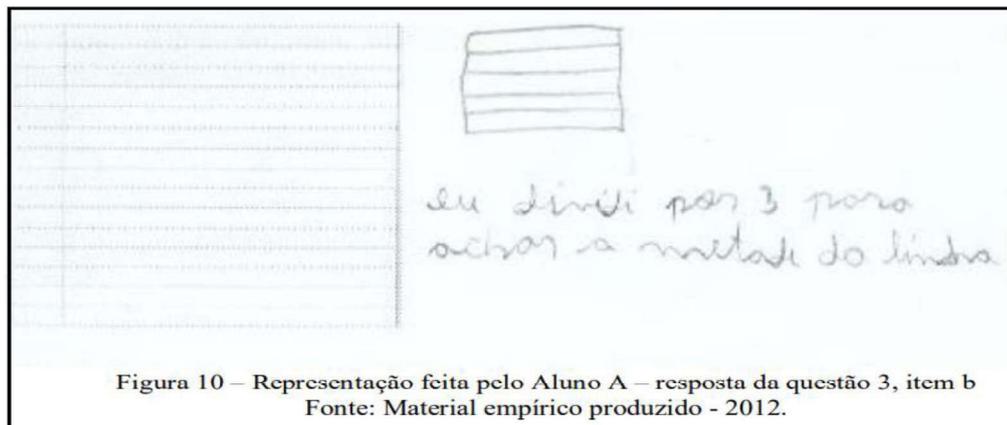
Fonte: Gaviraghi e Battisti (2013) p.11.

A análise que os autores fazem da resposta do aluno D considera que ele pode ter se confundido ao assumir os traços pretos como linhas, ao invés dos espaços entre

eles. Desta forma, contou 5 (cinco) linhas e não 4 (quatro), como se visualiza na figura. Outros alunos também deram a mesma resposta para esse item.

Outra resposta para o item foi a estabelecida pelo aluno A, a qual desenhou uma parte contendo 5 (cinco) linhas, mas afirmou haver dividido a figura por 3 para encontrar a metade da linha, de acordo com a Figura 29.

Figura 29. Representações do aluno do item 3º letra B.

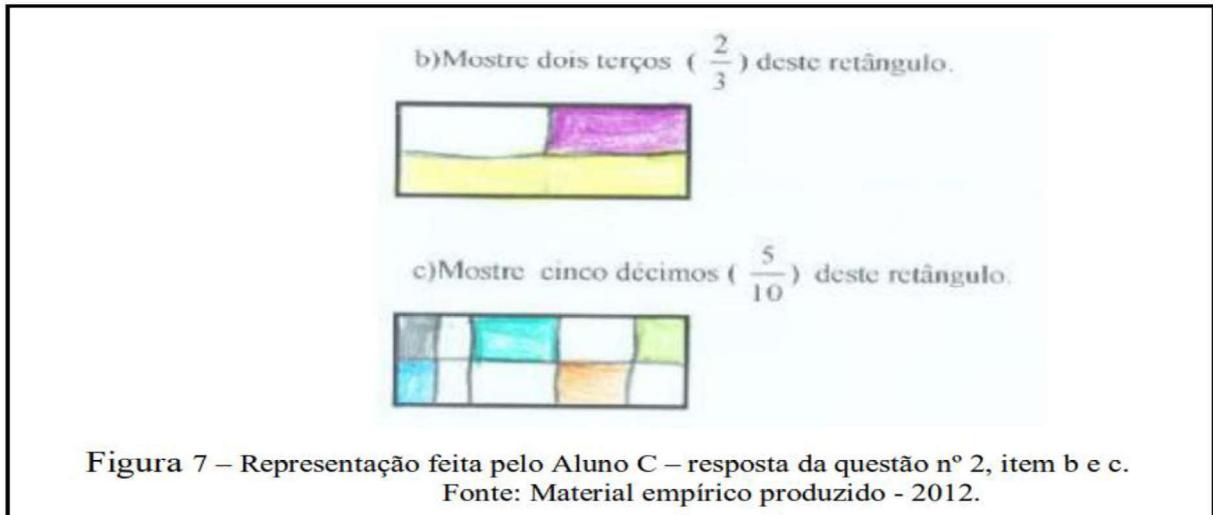


Fonte: Gaviraghi e Battisti (2013) p.12

Segundo os autores, o aluno A utiliza a palavra 'metade' como sinônimo de uma parte/quantidade. Desta forma, faz a divisão de forma correta, encontrando partes de 5 (cinco) linhas, além de afirmar corretamente em quantas partes dividiu o inteiro, mas erra ao considerar parte, como 'metade'.

O item 2, letra B e C, contém a representação pictórica de um inteiro, não particionado, sendo solicitado a representação da fração (dada em língua materna e na representação numérica) na figura. Dessa forma, o objetivo da questão era representar a fração na figura (não particionada), conforme a Figura 30.

Figura 30. Representações dos alunos do item 2, letras B e C.

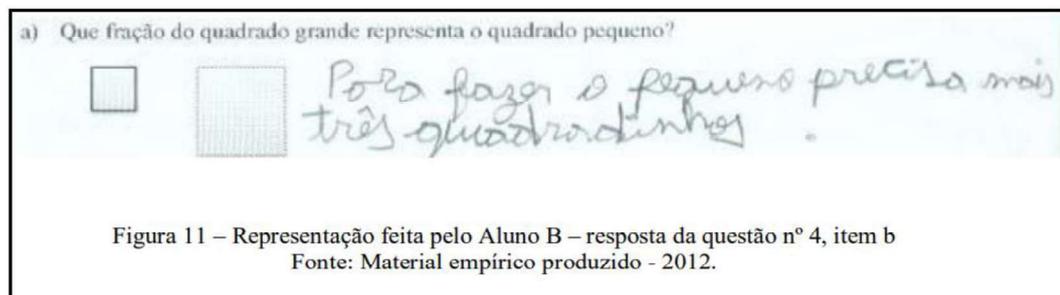


Fonte: Gaviraghi e Battisti (2013) p.10

Gaviraghi e Koltermann (2013) afirmam que os alunos conseguem perceber que o denominador representa o número de partes em que a figura está dividida. Porém, não compreendem que para a existência da fração é necessário que as partes sejam congruentes.

No item 4, letra A, foram dadas duas representações geométricas de um quadrado, um menor que equivale a  $\frac{1}{4}$  da área do quadrado maior. Sendo solicitada na questão a fração do quadrado maior que corresponde ao quadrado menor, como podemos ver na Figura 31.

Figura 31. Representação do aluno B do item 4º letra B.



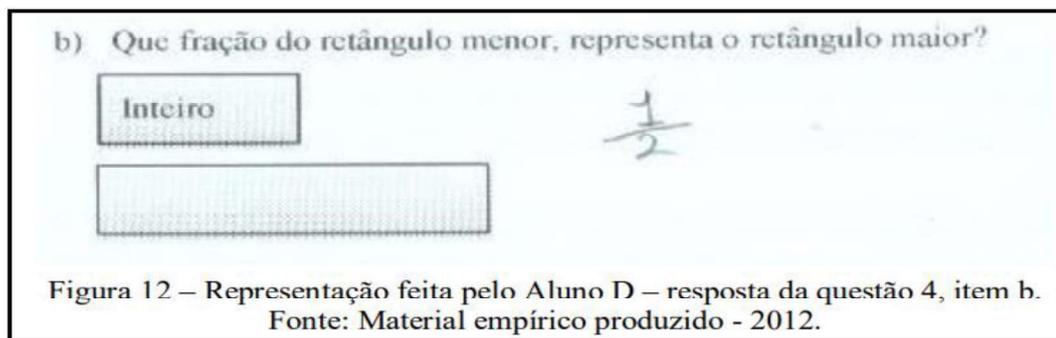
Fonte: Gaviraghi e Battisti (2013) p.12

Na resposta dada pelo aluno B, ao afirmar que precisa de mais três quadradinhos, mostra-se que ele percebeu que para formar a figura inteira (quadrado maior) são

necessárias 4 partes que equivalem, cada uma, ao quadrado menor. Além deste aluno, outros três responderam dessa forma.

No item 4, letra B, foram dadas duas representações geométricas de um retângulo, um pequeno que representa o inteiro e outro maior, que equivale ao dobro do menor. Sendo solicitada a fração que representa o retângulo maior, tendo como unidade o retângulo menor, conforme a Figura 32.

Figura 32. Representação do aluno D do item 4° letra B.



Fonte: Gaviraghi e Battisti (2013) p.13

Os autores afirmam que os alunos não veem o retângulo menor como um inteiro, mas sim como metade ( $1/2$ ) do retângulo grande. Desta forma, nenhum aluno conseguiu representar a fração ( $2/1$ ) que o retângulo maior representa tomando como unidade de medida o menor. Segundo Van de Walle (2009 apud Gaviraghi e Battisti, 2013, p.13)

As perguntas que envolvem a fração maior que o inteiro são mais difíceis de serem respondidas e podem frustrar os alunos iniciantes, pois se tem uma tradição no ensino de fração de que são representações feitas sempre de modelos padrões e com fração sempre menor que a unidade, as quais não levam o aluno a pensar sobre elas, e então este não sabe ou não usa corretamente os modelos no desenvolvimento do conceito de fração (Van de Walle, 2009 p.324 apud Gaviraghi e Battisti, 2013 p.13).

Os autores concluem afirmando que, em seu estudo, verificaram erros comuns evidenciados em outras pesquisas. Os alunos apresentam dificuldades em relacionar a representação fracionária com a representação figural do número racional, devido a não compreensão do significado parte-todo. Além disso, demonstram compreender que o denominador representa a quantidade de partes em que o inteiro está dividido, contudo não levam em consideração que as partes devem ser congruentes.

Outro dado evidenciado refere-se ao procedimento da dupla contagem, pois ao contarem as partes pintadas e posteriormente a quantidade de divisões do todo para escrever, respectivamente, o numerador e o denominador da fração, ignoram que as partes devem possuir áreas congruentes. Por fim, inferem que os alunos não compreendem a relação parte-todo quando se tem mais de um inteiro, e que grande parte disso se deve às atividades aplicadas em sala de aula que seguem um padrão de trabalhar com frações menores que a unidade.

O terceiro trabalho analisado foi o artigo intitulado *Algumas revelações de alunos e professoras do 4º. ano do ensino fundamental sobre o significado parte-todo dos números racionais*, dos autores Utimura e Curi (2016), selecionado no XII ENEM, classificado como Intervenção Didática. Seu objetivo é apresentar os resultados do desenvolvimento de duas atividades de material didático, que tratam da representação fracionária dos números racionais no significado parte-todo.

A pesquisa teve como referencial teórico e metodológico ‘Estudos de aula’ (Lesson study), que foi criada no Japão e disseminada para outros países. Os autores tiveram como base Ponte et al. (2012) e Ponte (2014)<sup>8</sup>, os quais afirmam que esta metodologia promove o estudo de teorias pelos professores e pesquisadores, além do compartilhamento de experiências e recursos didáticos.

Além disso, os autores já mencionados têm também como base Elliot (2012), que aponta para uma abordagem exploratória e investigativa do ensino de matemática proporcionada pela metodologia e que favorece aos alunos o aprofundamento, a investigação e a construção de conceitos matemáticos; além de proporcionar momentos de discussão coletiva.

A metodologia Estudos de Aula inicialmente promove uma discussão entre professores e pesquisadores para a identificação de um problema a ser trabalhado e, em seguida, ocorre a etapa de planejamento das aulas, com a seleção dos materiais relevantes (didáticos e sobre o tema em questão para estudo) e identificação das necessidades dos alunos, pelos professores e pesquisadores (ULTIMURA; CURI, 2016).

Ademais, na etapa seguinte ocorre a ‘implementação das aulas’ que pode ser observada por professores e pesquisadores universitários. E na etapa de ‘reflexão e

---

<sup>8</sup> As obras dos autores Ponte et al. (2012), Elliot (2012), Ponte (2014) e a metodologia ‘Estudos de aula’ (Lesson study) não foram lidos pelo autor dessa pesquisa.

análise das aulas' os professores e observadores refletem sobre as etapas anteriores e algumas aulas podem ser replanejadas, implementadas e refletidas pelo grupo.

A intervenção didática proposta nesse artigo teve como base a metodologia Estudos de Aula e foi realizada através de um curso de extensão que tinha como propósito estudar o material do Projeto Educação Matemática dos anos Iniciais do Ensino Fundamental (EMAI) e adaptá-lo para uso com os alunos do estudo. E foi desenvolvida durante o curso, tendo uma duração de 180 horas, distribuídas em encontros quinzenais aos sábados, contando com 7 participantes, professoras do 4º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Ainda sobre a intervenção didática, durante os encontros com os pesquisadores e professoras, foram elaborados procedimentos metodológicos e didáticos que posteriormente foram problematizados com os alunos. Além disso, houve o compartilhamento de estudos teóricos sobre a metodologia de Estudos de Aula, sobre números racionais e EMAI para o desenvolvimento de uma prática colaborativa entre os participantes do grupo.

No EMAI, das 5 atividades propostas na sequência 18, 3 envolvem números racionais, e destas duas tratam da relação parte-todo e da representação fracionária. Os pesquisadores iniciaram o trabalho com as professoras buscando verificar se todas conseguiam identificar as expectativas de aprendizagem relacionadas às atividades: compreender os significados quociente e parte-todo dos números racionais; resolver situações-problema envolvendo os significados quociente e parte-todo dos números racionais; ler números racionais na representação fracionária que tenham uso frequente e reconhecer metades e terças partes no contexto diário.

Nesse contexto, algumas professoras questionaram o quantitativo de atividades do material didático do EMAI, considerando-o pequeno em relação ao quantitativo de aulas semanais. Mas essa concepção foi sendo desconstruída pela pesquisadora formadora ao longo do trabalho.

Desa forma, o planejamento das aulas em que seriam utilizadas as atividades do EMAI ocorreu de forma conjunta entre as professoras, que discutiram e refletiram as possibilidades de resoluções, retomando conceitos matemáticos. Elas foram orientadas a ter uma conversa inicial com os alunos, problematizar as situações, dividir a turma em pequenos grupos e intervir sempre que possível de forma individual ou em grupos.

Das duas atividades que tratam da relação parte-todo e da representação fracionária, a primeira está dividida em duas situações: (1) dois amigos repartem em partes iguais um sanduíche, cabendo a cada um,  $\frac{1}{2}$  do sanduíche. (2) Três amigos repartem igualmente uma barra de chocolate, cabendo para cada um  $\frac{1}{3}$  do chocolate ou  $\frac{2}{6}$  do chocolate, de acordo com a hipótese de respostas dos alunos que as professoras apontaram. A primeira questão é apresentada na Figura 33.

Figura 33. Primeira atividade.

1. Antônio tinha sete bolachas e resolveu reparti-las igualmente entre ele e seus três amigos. A princípio ficou na dúvida em como fazer, mas achou uma solução. Observe a ilustração e explique o que ele fez: Mariana e Antônio, enquanto os colegas brincavam, foram tomar lanche. Mariana, que não estava com muita fome, repartiu seu sanduíche com o amigo e procurou dividir bem certinho, em partes iguais. Observe os desenhos e responda:



A. Em quantas partes iguais foi dividido o sanduíche de Mariana?

B. Que parte do sanduíche receberá Antônio?

C. Escreva numericamente a representação de cada uma das partes do lanche de Mariana.

2. Para retribuir, Antônio dividiu sua barra de chocolate com Mariana e Pedro, que acaba de chegar. Veja como ficou:



A. Cada criança receberá que parte do chocolate?

B. Você conhece uma escrita numérica que possa representar cada uma das partes? Qual?

Fonte: Utimura e Curi (2016 p.6).

A segunda atividade também é composta de duas situações. A primeira busca que os alunos analisem o relato de amigos sobre o consumo de pizza, por meio de figuras, para identificar o número de partes iguais em que cada pizza foi dividida e como representar numericamente cada pedaço de pizza. Na atividade, são trabalhadas as representações numéricas e na língua materna de frações.

Nas orientações didáticas ao professor, é indicado que os alunos sejam dispostos em duplas, entregues círculos de papel do mesmo tamanho e as suas hipóteses sejam socializadas. As professoras resolveram entregar três círculos para

facilitar na atividade que pergunta qual representação é maior ( $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{6}$  ou  $\frac{1}{8}$ ). A Figura 34 apresenta a segunda atividade.

Figura 34. Segunda atividade

Assim como Mariana, Antônio e Pedro, você já deve ter repartido muitas coisas com as pessoas com quem convive. Mariana contou que em sua casa comeram uma pizza e fez o seguinte comentário:



Nossa pizza foi dividida em 6 partes iguais.  
Cada parte é  $\frac{1}{6}$  (um sexto) da pizza e já comemos  $\frac{2}{6}$  (dois sextos).  
Estão sobrando  $\frac{4}{6}$  (quatro sextos) dessa pizza.

Você concorda com o comentário de Mariana? Por quê?

---

Antônio relatou que sua família adora pizzas e que comeram duas no dia anterior. Observe como foi feita a divisão e preencha o quadro:

	Número de partes em que foi dividida a pizza	Escrita numérica que representa cada pedaço
A.		
B.		

Se os discos de pizza consumidos pela família de Mariana e de Antônio forem de mesmo tamanho, em que caso o pedaço de pizza é maior?

---

Nesse caso, o que é maior:  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{6}$  ou  $\frac{1}{8}$ ?

---

Fonte: Utimura e Curi (2016) p.7

O primeiro resultado apontado pelos pesquisadores é que as práticas de compartilhamento desde o planejamento das aulas contribuíram para o ensino, pois, entre outras coisas, as professoras se envolveram nas etapas de Estudos de Aulas, ampliando as estratégias metodológicas e didáticas, do domínio do conceito do significado parte-todo e da representação fracionária dos números racionais, dando segurança no desenvolvimento das aulas.

O segundo resultado mostrou aos pesquisadores que os alunos aprenderam o significado parte-todo na representação fracionária ao serem mediados pelas ações dos professores e pela interação entre alunos. Uma vez que 72% dos alunos atingiram o objetivo proposto. Dos 28% restantes, foi inferido que seriam necessárias intervenções individuais em algumas turmas e, em outras, coletivas. Na atividade da

barra de chocolate, como previsto, os alunos também deram como respostas a fração  $\frac{2}{6}$  para a quantidade de chocolate que cada um iria receber.

Diante do que foi exposto, isso levou as professoras a trabalharem a equivalência entre  $\frac{2}{6}$  e  $\frac{1}{3}$ . Na atividade da segunda questão, em que se pergunta em que caso o pedaço de pizza é maior, 52% acertaram, indicando o caso A, em que a pizza foi dividida em 4 partes e cada parte equivale a  $\frac{1}{4}$ . Ainda nesta atividade, foi percebido pelos pesquisadores a falta de compreensão do enunciado da atividade pelos alunos e algumas professoras. Portanto, a atividade foi retomada em outro momento.

Os pesquisadores concluíram que o curso de extensão, por meio da metodologia de Estudos de Aulas, pode proporcionar uma parceria entre formadora, professoras e alunos. Os desafios foram no sentido de organizar o trabalho em grupo, porque as professoras não estavam trabalhando na mesma sequência; na condução das atividades em sala de aula, pois o protagonismo é de cada professora, além dos alunos que avançam em momentos distintos, entre outros.

Por outro lado, inferem que quando o material didático é bem explorado e o professor permite que o aluno faça reflexões e troque ideias entre eles, com a sua mediação, é possível a compreensão do significado parte-todo e da representação fracionária dos números racionais.

O quarto trabalho analisado foi o artigo intitulado *A Presença das Etapas de Identificação, Fissuração e Superação de Obstáculos de Aprendizagem no Ensino de Frações no Livro Didático*, dos autores Bordin, Lira, Menoncini (2016), selecionado no XII ENEM, classificado como Análise Documental, que teve como objetivo analisar e discutir como o conceito de frações numéricas é apresentado no livro didático do 5º ano do ensino fundamental.

Em relação aos trabalhos anteriores, esse quarto trabalho em particular não traz no seu objetivo a relação parte-todo, contudo o conceito de fração apresentado no livro está vinculado à relação parte-todo dos números racionais, e por isso, todas as análises e discussão do livro envolvem a relação parte-todo, sendo esse o motivo desse trabalho estar na categoria 1.

Na fundamentação teórica, os autores buscam identificar nas situações problemas do livro três etapas necessárias a aprendizagem formulada pelo francês

Jean-Pierre Astolfi (1993)<sup>9</sup>, são elas: identificação, fissuração e superação de obstáculos. Com base nesse autor e em outros como Oliveira (2007), Lopes (2008), Sá (2011), Monteiro e Groenwald (2014), Novaes e Venites (2015), os autores constroem sua fundamentação teórica sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais e a importância de analisar como eles estão sendo abordados nos livros didáticos.

Vale ressaltar ainda, que a metodologia consistiu em três fases: determinação do tema, escolha do material para análise e investigar o conteúdo na perspectiva de Astolfi (1993). Ainda sobre a análise do conteúdo, foram discutidas 3 situações dispostas no livro que trabalham o número racional relação parte-todo.

Na primeira situação, é dado um pequeno contexto para introduzir o conceito de fração, em que uma criança, ao comprar uma barra de chocolate que está dividida em 5 partes iguais, dá uma das partes para seu amigo e, por meio dessa situação, são expostas várias informações, dentre elas a representação fracionária e figural do inteiro (barra de chocolate), parte dada ao amigo e das partes restantes. Por meio das frações, é feita a indicação do numerador, denominador e seus significados, conforme a Figura 35.

Figura 35. Situação 1 disposta no livro analisado.

1. Beto comprou uma barra de chocolate. A barra veio dividida em 5 partes iguais. A fração  $\frac{5}{5}$  indica a barra de chocolate inteira. Beto deu 1 das partes para Pedro e ainda ficou com 4 partes. Beto deu a quinta parte ou  $\frac{1}{5}$  da barra para Pedro.  $\frac{4}{5}$  é a fração da barra de chocolate que ficou para Beto. Na fração  $\frac{4}{5}$ , 4 é o **numerador**, e 5 é o **denominador**.

régua, trena, termômetro, balança etc.  
Explora-se aqui o número racional, representado na forma fracionária, em situações diversas, tendo implícita a relação parte-todo.

numerador → 4 → número de partes da barra que ficou para Beto.  
denominador → 5 → número de partes iguais em que a barra veio dividida.

DEI UM QUINTO DO CHOCOLATE PARA PEDRO. SOBRARAM QUATRO QUINTOS PARA MIM.

Fonte: Bordin; Lira; Menoncini (2016 p.8).

A primeira situação analisada corresponde à etapa de identificação, na qual é apresentada a ideia de fração para o aluno e o conceito da divisão das partes em

<sup>9</sup> As obras dos autores Astolfi (1993), Oliveira (2007), Lopes (2008), Sá (2011), Monteiro e Groenwald (2014), Novaes e Venites (2015), não foram lidos pelo autor dessa pesquisa..

áreas iguais. Os autores afirmam que esse exemplo, que aborda uma situação cotidiana, favorece um maior envolvimento dos alunos e permite ao professor levantar os conhecimentos prévios e obstáculos que os mesmos apresentam.

Na segunda situação, são apresentadas duas crianças em que uma delas, ao desenhar a figura geométrica triângulo, pinta parte da sua área de vermelho e a representa como sendo  $\frac{1}{3}$  da figura. Seu amigo logo pensa que a sua representação está equivocada. Em seguida, é realizada uma pergunta para o leitor, conforme Figura 36.

Figura 36. Problema 2 disposto no livro analisado.



Fonte: Bordin, Lira e Menoncini (2016 p.9)

Nesta situação, temos a segunda etapa necessária da aprendizagem, a fissuração, pois a figura apresentada possui partições de distintas áreas, ou seja, a ideia da figura ser particionada em áreas iguais está sendo questionada, podendo gerar dificuldades na resolução da questão. Segundo Bordin et al. (2016) apud Astolfi (1993), esse problema permite que o aluno entre em contradição com a primeira etapa, que é a identificação presente na primeira situação apresentada, pois inicialmente a barra de chocolate está dividida em 5 partes iguais, enquanto no triângulo não está claro a igualdade das partes, justificando uma fissuração no aprendizado.

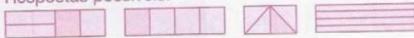
Na terceira situação, o enunciado sugere que o aluno use uma folha quadriculada e desenhe quatro representações geométricas retangulares iguais, sendo particionadas em 4 partes com áreas congruentes e cada figura deve possuir divisões distintas. Além disso, em cada figura deve-se pintar  $\frac{1}{4}$  (um quarto) da

mesma e, logo após, comparar com os colegas as partes que foram pintadas, conforme Figura 37.

Figura 37. Problema 3 disposto no livro analisado

6. Usando uma folha quadriculada, desenhe quatro retângulos iguais. Depois, divida cada um dos retângulos em quatro partes de mesma área, mas de modos diferentes. Pinte  $\frac{1}{4}$  de cada retângulo.

Respostas possíveis.



COMPARE COM UM COLEGA A FORMA COMO CADA UM PINTOU AS FIGURAS.



Adalberto Cornavaca

Fonte: Bordin; Lira; Menoncini (2016 p.10)

No terceiro problema analisado, o livro aborda novamente a necessidade das partes serem iguais, permitindo superar a etapa da fissuração que, por sua vez, conclui a terceira etapa. Além disso, permite que os alunos percebam que existem mais de uma maneira de dividir um todo, levando a ideia de diversidade de respostas.

Na conclusão, os autores destacam que a maneira como o livro inicia o conteúdo sobre frações por meio de situações-problemas envolvendo a relação parte-todo é comum em outras obras. Em outro momento, afirmam que o livro analisado está em concordância com as propostas de Astolfi (1993), pois no primeiro problema está a presença da identificação, no qual o aluno é apresentado a ideia de fração e o conceito da divisão das partes em áreas iguais. Enquanto, no segundo exemplo, o aluno se depara com a fissuração quando é apresentada uma figura em partições distintas, ou seja, a ideia de ser partida em áreas iguais está sendo questionada, assim o aluno é surpreendido com uma dificuldade.

Por fim, no terceiro exemplo, ele traz um reforço ao fato das divisões serem necessariamente iguais. Além disso, os autores afirmam que o conceito de fração não foi formalizado na introdução do assunto e que o livro foca principalmente na compreensão da ideia de fração, ideia que é aceita pelos autores, pois acreditam que a inserção da nomenclatura e do formalismo matemático pode ficar para os anos seguintes.

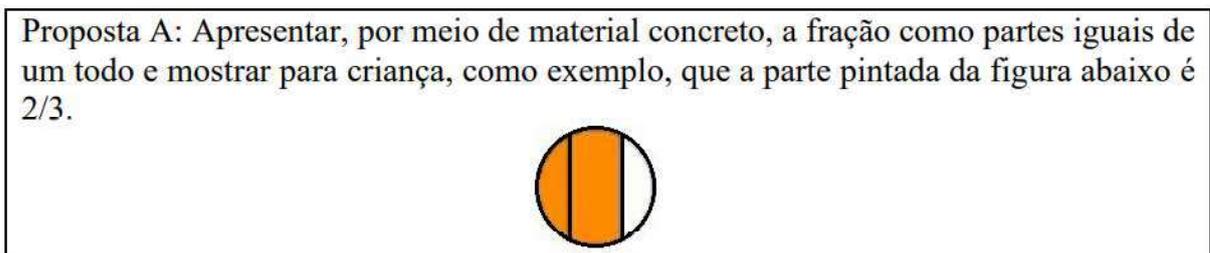
O quinto trabalho analisado foi o artigo intitulado *O Ensino de Frações como Partes Iguais de um Todo e as Quantidades Contínuas e Discretas*, de Santos Filho e Câmara dos Santos (2019), selecionado no XIII ENEM, classificado como Pesquisa

Diagnóstica, que teve como objetivo investigar o conhecimento do professor dos anos iniciais, na acepção de Ball et al. (2008), quando este julga propostas de ensino para o trabalho com os números racionais. Sua fundamentação teórica se baseia principalmente em Ball et al. (2008), porém há presença de outros autores como Campos et al. (1995), Nunes e Bryant (1997), Canova (2006), Damico (2007)<sup>10</sup>, que discutem a respeito dos números racionais em seus trabalhos.

Nesse sentido, a metodologia do quinto trabalho consistiu na aplicação de um questionário que continha 20 propostas para o ensino de frações, sendo estas divididas em grupos de 4 de forma a atender cada uma das 5 expectativas de aprendizagem dos números racionais para os anos iniciais contidas nos Parâmetros Curriculares de Matemática de Pernambuco. Ou seja, para cada expectativa de aprendizagem foram elaboradas 4 propostas de ensino, as quais os participantes analisavam, e em seguida, deveriam classificar em certas ou erradas, justificando suas conclusões. Dos 152 participantes, 70 eram professores do 4º ano e 82 eram professores do 5º ano dos anos iniciais.

Destas propostas de ensino, apenas duas delas foram analisadas neste trabalho, da expectativa de aprendizagem: “Reconhecer frações como partes iguais de um todo” que foram as propostas A e B. A proposta A teve como objetivo ‘investigar como os professores julgam uma situação de ensino de fração como partes iguais de um todo em quantidade contínua, em que não se considerou a conservação da área da figura’, conforme Figura 38.

Figura 38. Proposta de Ensino A.



Fonte: Filho e Câmara dos Santos (2019) p.7

Na proposta de ensino, a figura geométrica trabalhada não está particionada em partes iguais, e conseqüentemente, não representa a fração  $\frac{2}{3}$ . Desta forma, trata-se de uma proposta errada de ensino. Contudo, 60% dos professores afirmaram

<sup>10</sup> As obras dos autores Campos et al. (1995), Nunes e Bryant (1997), Canova (2006), Damico (2007) e Ball et al. (2008) não foram lidos pelo autor dessa pesquisa..

que a proposta estaria correta, ou seja, esses professores apenas contaram as partes pintadas usando o método da dupla contagem, sem levar em consideração a conservação das áreas.

Santos Filho e Câmara dos Santos (2019) afirmam que Campos et al. (1995), Canova (2006), Nunes e Bryant (1997) também encontraram em suas pesquisas a aplicação do procedimento da dupla contagem em figuras planas para estabelecer a relação parte-todo, sem que fosse considerada a conservação das áreas entre as partes.

Ainda com referência a Proposta A, os pesquisadores analisaram as justificativas apresentadas pelos professores ao considerarem a proposta errada, e que totalizam 81%, nas demais respostas desta categoria, não houve explicações. As justificativas dadas foram classificadas como sendo: adequada consistente, adequada inconsistente e inadequada. Sendo 75% das justificativas consideradas 'consistentes', pois os professores demonstram ter conhecimento comum do conteúdo ao perceberem a não conservação da área entre as partes e a impossibilidade das partes serem representadas pela fração  $2/3$ .

Dentre esses professores envolvidos na pesquisa, dois sujeitos ainda propõem trabalhar a proposta em sala de aula para que os alunos possam identificar uma situação em que a relação parte-todo não pode ser empregada, demonstrando um conhecimento especializado do conteúdo, segundo Ball et al. (2008).

Enquanto 10% das justificativas foram classificadas como 'adequada inconsistente' por apenas citarem que o material não está correto, sem que tenha sido mencionado a não conservação das áreas entre as partes. E ainda, 15% classificadas como inadequadas. Sendo assim, os professores que tiveram as suas justificativas consideradas como 'adequadas inconsistentes' e 'inadequadas' foram considerados não demonstrar conhecimento sobre a proposta de ensino analisada.

Na proposta de ensino B, os autores propuseram trabalhar com a relação parte-todo numa quantidade discreta por meio de um conjunto de 6 bonés, dos quais 2 eram azuis e 4 eram vermelhos, reforçando que os bonés são iguais e mostrando que a parte dos bonés azuis pode ser representada por  $2/6$  e a dos vermelhos por  $4/6$ , conforme Figura 39, com o objetivo de que os professores julguem a proposta de ensino.

Figura 39. Proposta de Ensino B.

Proposta B: Dizer para a criança que todos os bonés da figura abaixo são do mesmo tamanho, e explicar-lhe que a quantidade de bonés azuis pode ser representada pela fração  $2/6$ .



Fonte: Santos Filho e Câmara dos Santos (2019) p.10

Os pesquisadores verificaram que 6% dos sujeitos da pesquisa julgaram a proposta como sendo errada, pois não consideram o todo como sendo representado pelo conjunto de bonés e as partes como sendo divididas em quatro bonés vermelhos e dois azuis. Desta forma, não demonstram conhecimento matemático para o ensino de frações com quantidades discretas.

Contudo, 91% dos julgamentos consideraram a proposta correta. Entretanto, apenas 12% apresentaram justificativas classificadas como ‘adequadas consistentes’ revelando conhecimento comum do conteúdo sobre frações com quantidades discretas. Além disso, 63% das justificativas foram classificadas como sendo ‘adequadas inconsistentes’ e 25%, inadequadas por não trazerem o conteúdo matemático discutido na proposta.

Em sua conclusão, Santos Filho e Câmara dos Santos (2019) apontam que mais da metade dos professores julga erroneamente a proposta A correta, não considerando a necessidade da conservação das áreas entre as partes. Já na proposta B, apesar de 91% dos professores a considerarem como correta, apenas 12% das justificativas foram consideradas ‘adequadas consistentes’. Portanto, apenas 10 professores de um total de 152 apresentaram justificativas que consideram o conteúdo matemático sobre frações com quantidades discretas, apontando para a preocupação que se deve ter com esses resultados, pois os Parâmetros Curriculares de Pernambuco orientam para o trabalho com frações nas quantidades contínuas e discretas.

O sexto trabalho analisado foi o artigo intitulado *Conhecimento Especializado do Professor no Âmbito das Frações: Um Foco nos Sentidos e nas Representações*, de Jama-António et al. (2019), selecionado no XIII ENEM, classificado como pesquisa diagnóstica, teve como objetivo ‘identificar e melhor entender o conhecimento matemático especializado, revelado por Professores que Ensinam Matemática (PEM),

sobre os sentidos e as representações de frações' por meio de duas atividades desenhadas para formação de professores.

Portanto, ainda sobre o sexto trabalho citado acima, os autores buscaram identificar os conhecimentos especializados dos professores no que tange aos significados dos números racionais e suas representações. Entretanto, na análise e discussões, identificamos apenas a relação parte-todo, como significado discutido, e por esse motivo o selecionamos para a categoria 1.

Nesse contexto, sua fundamentação teórica foi construída a partir do modelo teórico encontrado em Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK (CARRILLO et al., 2018<sup>11</sup>), que está dividido em dois eixos, Mathematical Knowledge – MK e Pedagogical Content Knowledge – PCK e cada eixo possui 3 sub-eixos. Visto que os autores usaram apenas dois sub-eixos, Knowledge of Topics (KoT); Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM), que fazem parte do eixo MK. Esse modelo tem como propósito retratar os saberes que os professores devem ter, seja ele profissional, específico ou especializado.

Em relação às discussões que envolvem números racionais, o estudo citado acima teve como base teórica Behr et al. (1983), Kieren (1988), Charalambous; Pita-Pantazi (2007), Campos; Magina; Nunes (2006) e Pinto; Ribeiro (2013). Desta forma, realizaram um Workshop (curso extensivo) na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) em janeiro de 2019, que teve duração de 8 horas e participação de 25 professores (pedagogos e licenciados em matemática) que atuam na educação básica da Educação Infantil ao Ensino Médio.

Na ocasião, durante o curso, os professores formaram grupos de 5 pessoas de forma que cada grupo tivesse representantes de todos os segmentos da educação básica. Foram aplicadas duas atividades que tinham como propósito trabalhar os significados parte-todo, medida, quociente e operador, no qual os professores respondiam à tarefa utilizando qualquer método e justificavam suas respostas. Em seguida, foram feitas duas sessões gravadas em áudio e vídeo que buscaram discutir as estratégias de respostas utilizadas pelos professores.

Vale ressaltar que as discussões trazidas para o artigo consideraram duas perguntas: 'o que é fração? e qual fração é a maior?'. Visto que a pergunta "qual fração

---

<sup>11</sup> Das obras dos autores Behr et al. (1983), Kieren (1988), Charalambous; Pita-pantazi (2007), Campos; Magina; Nunes (2006), Pinto; Ribeiro (2013) e CARRILLO et al., 2018, apenas Behr et al. (1983) foi lido pelo autor dessa pesquisa.

é a maior?” está presente no material disposto para os professores como primeira tarefa, de acordo com a Figura 40.

Figura 40. Parte da Tarefa 1

**Tarefa 1** - Qual é maior?  
 Considere as frações a seguir.

i)  $\frac{3}{4}$   
 ii)  $\frac{5}{7}$

a) Qual das duas frações considera ser a maior? Apresente o raciocínio que utilizou para responder a essa pergunta (você pode usar cálculos, desenhos ou qualquer outro tipo de registro que considerar mais conveniente para justificar a sua argumentação).

b) Considerando o registro que utilizou (entre cálculos, desenhos ou outros tipos), apresente uma justificativa dos motivos que o levaram a considerar este tipo registro como sendo o mais adequado para explicitar o seu raciocínio.

Fonte: Jama-António et al. (2019) p.8

O objetivo dessa tarefa, de acordo com Jama-António et al. (2019 p. 9), ‘era avaliar os conhecimentos dos participantes em relação à diversificação de registros e o conceito de fração, bem como sua compreensão em relação às regras de conformidade das representações’. Os professores utilizaram em suas respostas sempre duas ou mais representações (pictóricas, linguagem natural) para identificar qual das duas frações seria a maior. Desta forma, os autores inferem que os professores entendem que quanto mais representações distintas das frações, maior será a compreensão sobre a comparação entre elas e isso está associado a um saber não superficial com relação às frações.

Os autores afirmam que, neste tipo de tarefa, há a necessidade por parte do formador possuir um documento auxiliar que possa ajudar os professores (sujeitos da pesquisa) a compreender melhor a pergunta. Desse modo, os formadores possuem perguntas que ajudem os professores no desenvolvimento do raciocínio para, assim, responderem à tarefa. No documento, a primeira pergunta que o formador deve fazer aos professores é “o que é fração?”. Dessa forma, registraram em duas transcrições as respostas dos professores, como podemos ver nas Figuras 41 e 42.

Figura 41. Transcrição 1

- [1] *Ana* : Parte de um todo.  
 [2] *Carmem*: É uma divisão, por exemplo quando a gente dividir a pizza por dois, estamos a fazer uma divisão igual.  
 [3] *Danilo*: Divisão e parte de um todo

Fonte: Jama-Antônio et al. (2019) p.9

Na análise das respostas da questão proposta, foi identificado nas falas dos professores na pergunta sobre o que é fração, o conhecimento do significado dos números racionais no que tange a relação parte-todo, pois sempre associavam a fração a termos como, partes de um todo e divisão em partes iguais, ficando claro que reconhecem o numerador como representando as partes tomadas de um todo que foi totalmente dividido em partes iguais, representadas pelo denominador.

Desse modo, relacionam a fração ao tema parte-todo que no sub-eixo kot está relacionada à questão da fenomenologia (kot-fenomenologia). Além disso, fazem menção à necessidade da igualdade entre as partes (princípio da igualdade), ou seja, uma propriedade que está relacionada às frações (kot-propriedades).

Os autores identificaram ainda nas respostas dos professores sobre “o que é fração?” Conforme a Figura 42, alguns deles necessitam de um contexto que possa auxiliar na formulação do sentido da fração.

Figura 42. Transcrição 2

- [1] *Ana*: Mas você tá fazendo comparação  
 [5] *Carmen*: Me da um contexto e eu digo que tipo de fração é.  
 [33] *Ana*: Que que ela está fazendo ela está medindo. Comparação medindo o que é grande que é pequeno.  
 [34] *Bela*: Medir comparar.  
 [35] *Carmen*: Aí nós estamos a trabalhar com a ideia de quantos cabem.

Fonte: Jama-Antônio et al. (2019) p.10

Além disso, ficou evidenciada também a presença do (kot-procedimento) quando a professora compara as partes tendo como unidade de medida uma dessas partes para indicar ‘quantas cabem’, ou seja, nesse contexto o sentido atribuído foi o de fração como medida.

Por fim, os autores concluíram que a maioria dos professores possui conhecimento a respeito das propriedades e conceitos envolvendo os significados parte-todo e medida dos números racionais e consegue transitar com facilidade entre

os tipos de representações, tais como pictórica, numérica e linguagem natural. A única dificuldade dos professores identificada foi a de não conseguir usar a terminologia correta para representações das frações quando, em suas falas, usavam a palavra desenho para representação pictórica da fração.

O sétimo trabalho analisado foi o artigo intitulado *Números Racionais nos Anos Iniciais – despertando para uma nova ideia de números*, dos autores Mandarino et al. (2022), selecionado no XIV ENEM, classificado como Intervenção Didática, que teve como objetivo trazer à reflexão caminhos e recursos didáticos que podem favorecer a iniciação da ideia de número racional no princípio da escolarização. Apesar da relação parte-todo não estar explícita no objetivo, ela se faz presente a todo momento no artigo, pois quando os números racionais são introduzidos na escola, quase sempre, se inicia pela relação parte-todo e os autores seguiram esta mesma ideia, aplicando situações que envolvem a relação parte-todo com quantidades contínuas e discretas.

Nesse sétimo trabalho, sua fundamentação teórica foi construída a partir das ideias de Piaget, que acredita que as ações mentais são essenciais para a construção do conceito do número racional, tendo formulado 7 condições necessárias para a aprendizagem de frações, das quais 5 delas foram utilizadas na análise das atividades. Além de Piaget, foram usadas ideias de D'Ambrósio (2019) e Skovsmose (2000)<sup>12</sup> que buscam em seus estudos uma aprendizagem significativa desprovida de procedimentos e mecanização das regras, devendo ocorrer em diferentes cenários e ambientes de aprendizagens. E ainda, foram utilizados autores como Lima (2001), Abrahão (2016) e Bezerra, Magina e Spinillo (2009).

Na ocasião, do sétimo trabalho, foram realizadas reuniões com um grupo de pesquisa que tinha como propósito estudar publicações que tratavam a respeito dos números racionais. Em seguida, foram feitas atividades práticas extraescolares com um grupo de 4 crianças com idade entre 5 e 7 anos, devido ao estado de pandemia da Covid-19 vivido entre 2019 e 2022. As atividades foram realizadas com materiais concretos encontrados no dia a dia das crianças e embasadas nas ideias de Piaget.

Nesse contexto, ao todo, foram trabalhadas 11 atividades e apenas 3 foram discutidas no trabalho. Na primeira atividade, foi analisada a relação parte-todo com quantidades contínuas por meio de um conjunto de 20 folhas. Foi solicitado a uma criança de 7 anos que dividisse o conjunto das folhas em duas partes iguais. Então,

---

<sup>12</sup> Das obras dos autores Skovsmose (2000), Lima (2001), Bezerra, Magina e Spinillo (2009). Abrahão (2016), D'Ambrósio (2019) e Piaget não foram lidos pelo autor dessa pesquisa.

os autores verificaram, por meio das respostas, que os alunos compreendem que o todo é repartível, que as partes não deixam restos e que as divisões sempre devem ser iguais, totalizando três condições formuladas por Piaget.

Na atividade 2, utilizaram material dourado, utilizando 20 barrinhas com 10 unidades cada, novamente trabalhando com a relação parte-todo com quantidades discretas. Dando prosseguimento, foi solicitado a duas crianças com idades de 5 e 8 anos que determinassem a metade das barrinhas e depois um terço. A análise dessa atividade considerou as três condições da atividade anterior, com um acréscimo da condição referente à determinação do número de partes em que o todo está dividido.

Na última atividade, foi utilizada massinha de modelar para trabalhar a relação parte-todo com quantidade contínua, sendo solicitado à criança de 8 anos que determinasse a metade e, em seguida, a terça parte da massinha. Nessa atividade, foram identificadas as 4 condições presentes das anteriores mais o acréscimo da quinta condição, que a soma das partes é igual a um inteiro.

Por fim, concluíram que atividades lúdicas e práticas possibilitam uma maior aprendizagem na construção das ideias iniciais a respeito dos números racionais e que é possível uma compreensão de quantidades discretas da relação parte-todo antes da inicialização formal dos conceitos, ressaltando também que uma criança de 8 anos, por meio de situações vividas, consegue compreender parcialmente uma quantidade contínua.

#### **4.1 Síntese da discussão dos artigos que têm como objetivo discutir a relação parte-todo**

Neste tópico, buscamos sintetizar a discussão das pesquisas que compõem o Capítulo 4, de acordo com a classificação adotada neste trabalho. O Quadro 2 apresenta a síntese das pesquisas classificadas como diagnósticas.

Quadro 2. Pesquisas diagnósticas

<b>Autores</b>	<b>Sujeitos de pesquisa</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Principais resultados</b>
Gaviraghi e Koltermann (2013)	Alunos do 6º ano	Identificar entendimentos produzidos por alunos do 6º ano acerca dos	- Não compreendem a necessidade das partes (de grandezas contínuas) serem congruentes;

		números racionais na representação fracionária, ideia parte-todo.	-Utilizam o procedimento da dupla contagem; - Não compreendem a relação parte-todo quando se tem mais de um inteiro; - Apresentam dificuldades em relacionar a representação fracionária com a figural.
Santos Filho e Câmara dos Santos (2019)	Professores do 4° e 5° ano	Investigar o conhecimento do professor dos anos iniciais, na acepção de Ball et al. (2008), quando este julga propostas de ensino para o trabalho com os números racionais.	-Alguns professores fizeram uso do procedimento da dupla contagem -Ignoram a necessidade das partes (de grandezas contínuas) serem congruentes - Não conseguem trabalhar a relação parte-todo com quantidades discretas
Jama-Antônio et al. (2019)	professores pedagogos e licenciados em matemática	Identificar e melhor entender o conhecimento matemático especializado, revelado por Professores que Ensinam Matemática (PEM), sobre os sentidos e as representações de frações' por meio de duas atividades desenhadas para formação de professores	- A única dificuldade encontrada pelos autores em relação aos professores foi não conseguir usar a terminologia correta para representações das frações quando em suas falas usavam a palavra desenho para representação pictórica da fração

Fonte: autoria própria, 2024

Nos trabalhos classificados como pesquisa diagnóstica, percebemos que os autores buscaram avaliar a compreensão da relação parte-todo dos números racionais, sendo os sujeitos de pesquisa alunos do 6° ano do Ensino Fundamental, professores pedagogos ou licenciados em matemática. Inferimos que foram identificados erros comuns entre estes sujeitos de pesquisa, apesar dos distintos níveis e formações, como o uso do procedimento da dupla contagem e a não compreensão de que as partes (na relação parte-todo) devem, necessariamente, ser congruentes, sendo esta última uma das sete condições de existência de fração, segundo Piaget (LIMA, 2012). Além de apresentar dificuldades em relacionar as figuras com suas representações numéricas.

Outro fator que podemos perceber nas pesquisas é que há uma prevalência de exercícios que trabalham com a relação parte-todo usando quantidades contínuas,

totalmente particionadas. Uma vez que apenas um dos três trabalhos apresenta um exercício envolvendo quantidades discretas, nos quais os sujeitos apresentaram dificuldade ao trabalhar com elas. Silva e Câmara dos Santos (2020) afirmam a necessidade de se trabalhar a relação parte-todo com figuras geométricas que não estão totalmente particionadas em áreas e formas congruentes para que os conceitos envolvendo esta relação possam ser construídos.

No Quadro 3 estão apresentadas as sínteses das pesquisas classificadas como sendo de intervenção didática.

Quadro 3. Intervenção didática

Autores	Sujeitos de pesquisa	Objetivo	Principais resultados
Santos e Câmara dos Santos (2010)	Uma turma do 5° ano dos anos iniciais da Educação Básica, contando com a participação da professora e 40 alunos.	Analisar os Efeitos Didáticos Emergentes de uma Sequência Didática, trabalhada no livro de matemática adotado na rede de ensino e a aprendizagem do significado parte-todo do número racionais.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- As atividades pertencentes a sequência didática retiradas do livro de matemática, trabalham prioritariamente com situações em que a relação parte-todo é explorada com grandezas contínuas.</li> <li>- Os alunos pesquisados tiveram dificuldades ao trabalhar com grandezas discretas.</li> <li>- Verificaram que a sequência didática aplicada não é suficiente para a aprendizagem dos estudantes no que se refere a relação parte-todo dos números racionais. Partes das soluções foram feitas pelos alunos sem a compreensão da relação parte-todo, pois os erros se repetiram no decorrer das atividades em situações e contextos distintos, ao realizarem as transformações entre as representações, fracionária, linguagem natural e pictórica dos números racionais.</li> </ul>
Utamura e Curi (2016)	Participaram 7 professoras do 4° ano do fundamental.	Busca apresentar os resultados do desenvolvimento de duas atividades do material didático, que trata da representação fracionária dos números racionais do significado parte-todo.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Metodologia de Estudos de Aulas pode proporcionar uma parceria entre formadora, professoras e alunos.</li> <li>- Os desafios foram no sentido de organizar o trabalho em grupo, porque as professoras não estavam na mesma sequência.</li> <li>- Quando o material didático é bem explorado e o professor permite que o aluno faça reflexões e troque ideias entre eles, com a sua mediação, é possível a compreensão do significado parte-todo e da representação fracionária dos números racionais.</li> </ul>

Mandarino et al. (2022)	um grupo de 4 crianças com idade entre 5 e 7 anos.	Trazer à reflexão caminhos e recursos didáticos que podem favorecer a iniciação da ideia de número racional no princípio da escolarização.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Atividades lúdicas e práticas possibilitam uma maior aprendizagem na construção das ideias iniciais a respeito dos números racionais</li> <li>- É possível uma compreensão de quantidades discretas da relação parte-todo antes da inicialização formal dos conceitos.</li> <li>- Uma criança de 8 anos por meio de situações vividas consegue compreender parcialmente uma quantidade contínua.</li> </ul>
-------------------------	--	--	--

Fonte: autoria própria, 2024

Os três artigos classificados como intervenção didática, que buscaram, por meio de diferentes estratégias, contribuir com o ensino e a aprendizagem da relação parte-todo dos números racionais, trabalham com sujeitos de pesquisas de níveis de formação distintos. Santos e Câmara dos Santos (2010) realizaram sua intervenção focando nos exercícios dispostos no livro didático, analisando as dificuldades que os alunos apresentam ao respondê-los e o nível da compreensão dos conceitos abordados no que tange à relação parte-todo dos números racionais.

Enquanto Utimura e Curi (2016) buscaram focar na melhoria da metodologia de ensino de professores dos anos iniciais por meio da aplicação de um curso de extensão, levando-os a discutirem e implementarem sequências de ensino em que algumas atividades envolveram a relação parte-todo, permitindo que os mesmos desenvolvessem melhor seus conhecimentos e, por sua vez, melhorassem seus métodos de ensino.

Mandarino et al. (2022) realizou uma intervenção didática com crianças que não tinham tido nenhum contato anterior com a relação parte-todo dos números racionais, diferindo dos artigos anteriores que trabalharam com sujeitos que já tinham alguma familiaridade com este conhecimento. Mesmo que cada pesquisa possua olhares distintos, suas contribuições se complementam, pois o livro didático, o professor e os alunos constituem o sistema didático.

Vale ressaltar, que as três pesquisas trabalharam com a relação parte-todo envolvendo quantidades contínuas e apenas duas delas abordaram quantidades discretas em uma quantidade menor de atividades que aquelas destinadas às grandezas contínuas. Além disso, em Silva e Câmara dos Santos (2010), foram evidenciadas dificuldades dos sujeitos de pesquisa em trabalhar com quantidades

discretas. O mesmo resultado foi evidenciado em Santos Filho e Câmara dos Santos (2019), pesquisa categorizada como 'diagnóstica'. Curiosamente, Mandarino et al. (2022) evidenciaram que alunos, por meio de jogos lúdicos, conseguem compreender melhor a relação parte-todo com quantidades discretas.

Assim, inferimos que, quando se trabalha quase que exclusivamente com grandezas que envolvem quantidades contínuas, as ideias que perpassam as quantidades discretas não são contempladas, podendo gerar dificuldades de compreensão com esta grandeza, como visto em Silva e Câmara dos Santos (2010), Santos Filho e Câmara dos Santos (2019).

E finalmente, no Quadro 4, apresentamos a única pesquisa classificada em nosso estudo como análise de livro didático, mostrando as situações observadas relacionadas ao conteúdo parte-todo.

Quadro 4. Análise de livro didático.

<b>Autores</b>	<b>Livro analisado</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Principais resultados</b>
Autores Bordin et al (2016)	Livro didático do 5º ano do Ensino Fundamental.	Analisar e discutir como o conceito de frações numéricas é apresentado no livro didático do 5º ano do ensino fundamental.	- As três situações analisadas no livro didático envolvendo a relação parte-todo apresentam as ideias de Astolfi (1993): identificação, fissuração e superação do obstáculo de aprendizagem (a divisão do inteiro em partes iguais). - Os autores não focaram nos aspectos formais do conceito de fração, mas na compreensão da ideia de frações.

Fonte: autoria própria, 2024

Podemos verificar que as situações problemas analisadas no livro didático trabalham, especificamente, com quantidades contínuas, sendo um ponto comum em todas as pesquisas. Com relação a quantidades discretas, não está claro se os autores não trouxeram discussões a respeito por não terem relação com as propostas de Astolfi (1993), ou se no livro não há situações que envolvam a relação parte-todo com quantidades discretas.

## 5 ANÁLISE DOS ARTIGOS EM QUE A RELAÇÃO PARTE-TODO NÃO FAZ PARTE DO OBJETIVO DA PESQUISA

Neste capítulo, analisaremos os 20 trabalhos selecionados nesta categoria, classificados em pesquisa diagnóstica (6), intervenção didática (6), análise documental (6), pesquisa teórica (1) e pesquisa bibliográfica (1), como apresentado na Tabela 1 do Capítulo 3. E ao final de cada classe de pesquisas, faremos uma síntese da discussão.

### 5.1 Pesquisas diagnósticas

O primeiro trabalho analisado foi o artigo intitulado, *O Ensino de Frações Segundo a Opinião Docente*, dos autores Silva et al. (2010), selecionado no X ENEM, que teve como objetivo realizar um diagnóstico do ensino de frações. A pesquisa foi realizada por meio da elaboração e aplicação de um questionário para professores do 5° e 6° ano do Ensino Fundamental e tinha como propósito levantar a opinião dos docentes a respeito da abordagem do ensino de frações e do grau de dificuldades de aprendizagem deste conteúdo. Os autores apresentam discussões a respeito dos 5 significados que o número racional assume, de acordo com Merlini (2005), e a relação parte-todo se faz presente na fundamentação teórica e na análise dos dados.

Na discussão dos resultados, é apresentada uma tabela que traz a classificação do grau de dificuldade de aprendizagem apontado pelos professores com relação aos conceitos e operações envolvendo frações. Nesta, as três últimas linhas estão mais direcionadas às ideias que envolvem a relação parte-todo. A antepenúltima linha apresenta 'problemas em que se conhece o todo e deseja-se conhecer uma parte' com um quantitativo de 52% dos professores que os consideram difícil e muito difícil a aprendizagem. Na penúltima linha estão os problemas em que se conhecem uma parte e deseja-se conhecer o todo, com 55% dos sujeitos de pesquisa considerando-os difícil, e muito difícil.

E finalmente, na última linha da tabela estão os problemas em que se conhece uma parte e deseja-se conhecer outra parte com, 63% dos docentes classificando-os em difícil e muito difícil. Nas considerações finais, os autores, tendo como base Nunes e Bryant (1997), afirmam que há uma falta de conexão entre o conteúdo de números racionais trabalhado na escola e aquele vivenciado no cotidiano, devendo ser

ultrapassado o ensino visando apenas a linguagem da relação parte-todo para aquele que considera os demais significados de fração.

O segundo trabalho analisado foi o artigo intitulado, *Fração e seus Diferentes Registros de Representação Semiótica: Uma Análise da Percepção de Futuros Pedagogos*, dos autores Santana et al. (2013), selecionado no XI ENEM, que teve como objetivo investigar a compreensão da fração e seus registros de representação semiótica por parte de alunos do curso de Pedagogia, futuros professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, responsáveis pela introdução formal deste conceito no processo de escolarização básica.

Nessa perspectiva, a pesquisa consistiu na aplicação de testes individuais com 10 alunos da graduação em Pedagogia. Nesses testes, apenas as respostas da questão 6 foram analisadas. A questão solicitou a representação do número racional, 'dois terços', em quatro tipos diferentes de representação. Assim, a relação parte-todo se fez presente (principalmente) nas representações percentual e figural, envolvendo quantidades contínuas e discretas. Os autores evidenciaram que um aluno, ao representar  $\frac{2}{3}$  na representação figural, não considerou que as partes necessitavam ser iguais. Outro dado importante foi o quantitativo de representações figurais de grandeza discreta (1), em que a representação figural de grandeza contínua foi 9.

Portanto, o resultado encontrado envolvendo a grandeza discreta nessa pesquisa mencionada acima, foi justificado pelos autores, levando em consideração que o ensino de frações prioriza a aprendizagem com grandezas contínuas.

O terceiro trabalho analisado foi o artigo intitulado, *Estratégias Utilizadas pelos Alunos da Educação Básica na Resolução de Questões sobre Números Racionais na Prova do SAEPE/Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco*, dos autores Santos, Câmara dos Santos, Campos (2013), selecionado no XI ENEM, que teve como objetivo analisar as estratégias utilizadas por alunos da Rede Municipal de ensino do Recife ao responderem questões do SAEPE/Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco sobre números racionais.

Nessa ocasião do terceiro trabalho, foi elaborado um instrumento com 8 questões a partir dos 15 descritores que trabalham os números racionais na prova do SAEPE. Das 8 questões, apenas 4 foram analisadas no artigo, sendo duas envolvendo a relação parte-todo dos números racionais em quantidades contínuas e discretas e as restantes trabalharam com a representação de número fracionário na reta numérica.

Na fundamentação teórica, os significados dos números racionais foram abordados de acordo com Nunes et al. (2003): parte-todo, medida, número, quociente e operador multiplicativo. Na primeira questão, que trabalhou com a relação parte-todo, envolvendo quantidades discretas, os autores identificaram que a maioria dos alunos não considera a relação entre numerador e denominador, compreendendo a fração  $\frac{2}{3}$  como dois números sobrepostos. Na segunda questão, que trabalhou a relação parte-todo com quantidade contínua, foi identificado que os alunos utilizaram, predominantemente, a relação parte-parte, que considera a parte pintada e a não pintada da figura para representar a fração.

O quarto trabalho analisado foi o artigo intitulado: *O que Falta no Ensino de Números Racionais para os Alunos Surdos?* das autoras Silva e Assis (2013), selecionado no XI ENEM, que teve como objetivo interpretar os diferentes significados associados aos números racionais, a partir das observações dos sujeitos surdos, resolvendo problemas acerca do tema. Foram elaborados 7 problemas que trabalham os subconstrutos propostos por Nunes e Bryant (1997). Dos problemas elaborados, apenas dois trabalham a relação parte-todo, sendo um utilizando quantidade contínua e o outro problema, quantidade discreta.

No primeiro problema desse quarto trabalho, continha a representação de uma barra de chocolate em que duas dessas partes foram consumidas, solicitando a representação das partes tomadas. Assim, foi explorada a relação parte-todo com quantidade contínua.

As autoras Silva e Assis (2013) identificaram que os dois sujeitos de pesquisa representaram de modo diferente, por meio dos sinais de libras, a relação entre as partes e o todo. Um deles representa o número de partes congruentes que foi dividido pelo inteiro em uma das mãos. Na parte superior e na outra mão, o número de partes retiradas do inteiro, na parte inferior se aproximando da representação parte todo, o outro sujeito de pesquisa representa em uma das mãos a quantidade de partes retiradas do inteiro e na outra mão, na parte inferior, o número um, significando o inteiro. Desse modo, se aproxima da representação parte-todo, em que no todo não é considerada a quantidade de partes congruentes particionadas, sendo esta uma condição para a existência de fração, conforme Lima (2012).

No segundo problema, tinha-se uma figura contendo o conjunto de três bonés, sendo dois deles azuis e o outro branco, e era solicitado a representação fracionária numérica dos bonés brancos em relação ao todo. Um dos sujeitos concorda com a

resposta dada pelo intérprete à questão e o outro sujeito representa com as mãos o que os autores entenderam como a relação todo-parte.

O quinto trabalho analisado foi o artigo intitulado *Dificuldades na Aprendizagem dos Números Racionais: Confrontando dois Níveis de Escolaridade*, de Oliveira (2016), selecionado no XII ENEM, que teve como objetivo investigar algumas dificuldades apresentadas pelos alunos em relação ao conjunto dos números racionais, em dois níveis de escolaridade.

Nessa pesquisa diagnóstica, que tinha como propósito abordar os significados dos números racionais como ponto na reta e a relação parte-todo na representação fracionária, foi aplicado um questionário de 11 questões aos estudantes do 9º ano do ensino fundamental e 3º ano do ensino médio, das quais apenas duas foram analisadas. Das duas questões analisadas, a relação parte-todo com quantidade contínua esteve presente na segunda questão. Os participantes da pesquisa mostraram dificuldade em relacionar a parte com o todo da fração, indicando que a fração  $\frac{1}{3}$  é maior que  $\frac{1}{2}$ , pois 3 é maior que 2 (OLIVEIRA, 2016).

Em síntese, sobre a pesquisa diagnóstica, os autores afirmaram que as dificuldades persistem ao longo dos anos, pois tanto os participantes do 9º ano do ensino fundamental quanto os do 3º ano do ensino médio apresentaram dificuldades semelhantes, em particular, na transformação da representação pictórica para representação fracionária de um número racional.

O sexto trabalho analisado foi o artigo intitulado, *Números Racionais: uma Abordagem com Enfoque na Análise dos Erros*, do autor Gama, Lima, (2016), selecionado no XII ENEM, que teve como objetivo analisar os erros no processo de ensino e aprendizagem envolvendo as operações de soma e subtração com os números racionais. Nessa pesquisa diagnóstica, os autores aplicaram um questionário de 7 questões para uma turma de 21 alunos do 6º ano, que tinha como propósito averiguar como as diferentes representações do número racionais eram abordadas em questões algorítmicas.

A relação parte-todo com quantidade contínua esteve presente em uma das questões analisadas no sexto trabalho, na qual o autor buscou trabalhar a habilidade de transformar a representação da figura geométrica do número racional para a representação fracionária. Houve mais de 65% de erros na questão. Os alunos apresentaram dificuldades na passagem entre as representações, trocando

numerador por denominador ou fazendo associação parte-parte, ao invés da relação parte-todo (GAMA; LIMA, 2016)

Além disso, identificamos que ao menos um sujeito de pesquisa aplicou também o método da dupla contagem para representar a fração do item b, além de inverter o numerador com o denominador. Desta forma, escreveu  $8/6$ , ao invés da resposta correta de  $6/4$ . Mas esse erro (de aplicar a dupla contagem) não foi descrito pelo autor.

O Quadro 5 apresenta a síntese das pesquisas discutidas neste tópico. Verificamos que houve um maior número de artigos desta categoria na edição de 2013.

Quadro 5. Pesquisas diagnósticas.

<b>Autores</b>	<b>Títulos</b>	<b>Objetivos das pesquisas</b>	<b>Principais resultados envolvendo a relação parte-todo</b>
Silva et al. (2010)	O Ensino de Frações Segundo a Opinião Docente.	Averiguar como o conteúdo de fração está sendo abordado pelos professores em sala de aula e mapear o nível de dificuldade que os alunos apresentam no ensino.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 52% dos docentes classificaram os problemas em que se conhece o todo e deseja se conhecer uma parte' como sendo difícil e muito difícil;</li> <li>- 55% dos professores pesquisados apontaram os problemas em que se conhecem uma parte e deseja-se conhecer o todo, como sendo, difícil e muito difícil.</li> <li>- 63% dos docentes afirmaram serem os problemas em que se conhece uma parte e deseja-se conhecer outra parte, de difícil e muito difícil compreensão.</li> </ul>
Santana et al. (2013)	Fração e seus Diferentes Registros de Representação Semiótica: Uma Análise da Percepção de Futuros Pedagogos.	Investigar a compreensão da fração e seus registros de representação semiótica por parte de alunos do curso de Pedagogia, futuros professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, responsáveis pela introdução formal deste conceito no processo de escolarização básica.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- A relação parte-todo se fez presente (principalmente) nas representações, percentual e figural, envolvendo quantidades contínuas e discretas;</li> <li>- Um graduando ao representar <math>2/3</math> na representação figural não considerou que as partes necessitavam ser iguais.</li> <li>- 9 das 10 respostas utilizaram grandezas contínuas na representação figural;</li> </ul>
Santos, Câmara dos Santos, Campos (2013).	Estratégias Utilizadas pelos Alunos da	Analisar as estratégias utilizadas por	-A maioria dos alunos não consideraram a relação entre numerador e denominador,

	Educação Básica na Resolução de Questões sobre Números Racionais na Prova do SAEPE/Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco.	alunos da Rede Municipal de ensino do Recife ao responderem questões do SAEPE/Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco sobre números racionais.	compreendendo a fração $\frac{2}{3}$ como dois números sobrepostos; -Os alunos utilizaram, predominantemente, a relação parte-parte, que considera a parte pintada e a não pintada da figura para representar a fração;
Silva e Assis (2013)	O que Falta no Ensino de Números Racionais para os Alunos Surdos?	Interpretar os diferentes significados associados aos números racionais, a partir das observações dos sujeitos surdos resolvendo problemas acerca do tema.	- No primeiro problema um sujeito representa o número de partes congruentes que foi dividido o inteiro em uma das mãos (na parte superior) e na outra mão o número de partes retiradas do inteiro (na parte inferior), se aproximando da relação parte-parte. E o outro sujeito representa em uma das mãos a quantidade de partes retiradas do inteiro e na outra mão, na parte inferior, o número um, significando o inteiro, se aproximando da relação parte-todo. -No segundo problema, um dos sujeitos concorda com a resposta dada pelo intérprete que deduz corretamente a representação numérica da relação parte-todo da questão e o outro sujeito representa com as mãos o que seria a relação todo-parte.
Oliveira (2016)	Dificuldades na Aprendizagem dos Números Racionais: Confrontando dois Níveis de Escolaridade.	Investigar algumas dificuldades apresentadas pelos alunos em relação ao conjunto dos números racionais, em dois níveis de escolaridade.	-Os participantes da pesquisa mostraram dificuldade em relacionar a parte com o todo da fração, indicando que a fração $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{2}$ , pois 3 é maior que 2. -As dificuldades encontradas nos participantes do 9º ano também foram evidenciadas nos participantes do 3º ano, principalmente, na transformação da representação pictórica para representação fracionária de um número racional.
Gama, Lima, (2016).	Números Racionais: Uma Abordagem com Enfoque na Análise dos Erros.	Analisar os erros no processo de ensino e aprendizagem envolvendo as operações de soma e subtração com os números racionais.	- Os sujeitos apresentaram dificuldades na passagem entre as representações geométricas e numérica dos racionais, trocando numerador por denominador ou fazendo associação parte-parte, ao invés da relação parte-todo; - Identificamos que ao menos um sujeito de pesquisa aplicou também o método da dupla contagem para representar a fração do item b, além de inverter o numerador com o denominador. Desta forma, escreveu $\frac{8}{6}$ , ao invés de $\frac{6}{4}$ . Mas esse erro (de aplicar a dupla contagem) não foi descrito pelos autores. - Quantitativo de erros foi de 65%.

Fonte: autoria própria, 2024.

No Quadro 5, podemos verificar que as pesquisas diagnósticas apresentam resultados semelhantes quanto aos erros cometidos pelos sujeitos de pesquisa envolvendo a relação parte-todo, como a dupla contagem, a relação parte-parte, a compreensão de fração como dois números sobrepostos, a dificuldade em passar de uma representação de números racionais para outra. O uso da relação parte-parte foi predominante em duas pesquisas: Santos, Câmara dos Santos, Campos (2013) e Gama, Lima, (2016).

Enquanto, ainda se referindo ao quadro 5, a dificuldade em passar de uma representação para outra foi relatada nas pesquisas de Oliveira (2016) e Gama, Lima, (2016). Além disso, na maioria das pesquisas, a relação parte-todo é trabalhada predominantemente com quantidades contínuas, sendo que, de quatro pesquisas que analisaram questões, apenas duas continham não apenas questões com quantidades contínuas, mas também, envolvendo quantidades discretas.

## **5.2 Intervenção Didática.**

O primeiro trabalho analisado foi o artigo intitulado, *Sobre a Pesquisa e o Ensino de Números Racionais na sua Representação Fracionária*, dos autores Campos et al. (2010), selecionado no X ENEM, que teve como objetivo identificar que contribuições um ensino de fração, sendo introduzido a partir de um determinado significado – seja parte-todo, quociente, quantidades intensivas ou operador multiplicativo – traz para o bom desempenho dos alunos de 3ª e 4ª séries da Educação Básica ao lidar com situações de fração com os outros significados.

A proposta de intervenção trabalhou resoluções de problemas envolvendo os significados de frações: relação parte-todo, quociente, quantidade extensiva e operador multiplicativo. Com aplicação de um pré-teste e pós-teste. A relação parte-todo foi discutida na fundamentação teórica e trabalhada por meio de exercícios, contudo os autores não trouxeram nenhuma questão para ser discutida nas análises, mostrando apenas os resultados quantitativos do pré-teste e pós-teste em um gráfico de colunas que relaciona o percentual de sucesso com os significados de frações (relação parte-todo, quociente, quantidade extensiva e operador multiplicativo).

Desse modo, a relação parte-todo obteve o maior percentual de sucesso e o significado quociente foi o de menor percentual. Os autores afirmaram que os resultados obtidos quanto a relação parte-todo foram devido aos alunos serem apresentados a frações sempre por meio de situações problemas envolvendo este significado, assim estariam mais familiarizados com o mesmo.

O segundo trabalho analisado foi o artigo intitulado, *O Problema da Medida: Construindo o Significado dos Números Racionais com o Auxílio do frac-soma 235*, das autoras Pereira, Mendonça (2013), selecionado no XI ENEM, que teve como objetivo desenvolver e aplicar um projeto de ensino dos números racionais, utilizando o significado medida, por meio do material de apoio *frac-soma 235*. Na proposta de intervenção construída, os autores trabalharam com um texto introdutório, abordando a origem dos números racionais e seis fichas de atividades. A relação parte-todo está presente nas fichas de atividades que contêm comparação de frações, adição, subtração, divisão e multiplicação de fração envolvendo o material *frac-soma 235*.

Em cada operação envolvendo frações, Pereira e Mendonça (2013) fazem uso das representações numéricas fracionárias e das figuras geométricas dos números racionais, as quais estão associadas à relação parte-todo. Pois, ao fazer a conexão da fração com a figura dividida em partes iguais em que uma determinada parte está pintada, a ideia remete a esta relação. Contudo, a relação parte-todo está sendo usada para trabalhar o significado 'medida' abordado na pesquisa. Entre os resultados obtidos, foi destacado que as atividades favoreceram para que estudantes do Ensino Médio dessem significado às operações envolvendo números racionais na representação fracionária.

O terceiro trabalho analisado foi o artigo intitulado, *O uso de Jogos no Ensino de Fração*, dos autores Lopes, Patricio (2013), selecionado no XI ENEM, que teve como objetivo contribuir com o ensino de frações de forma lúdica, introduzindo o conteúdo por meio de jogos que trabalham com frações. Nessa Intervenção Didática dos três jogos propostos, dois deles têm relação com significado parte-todo, o dominó de frações e o Papa todas.

O primeiro jogo, que é o dominó de frações, trabalha com a representação numérica fracionária e as figuras geométricas, e consiste em emparelhar ambas as representações de um mesmo número racional. O segundo jogo, Papa todas, utiliza uma tabela com 11 tirinhas de mesmo comprimento, sendo que a primeira não possui

divisão, a segunda é dividida ao meio, a terceira em três partes iguais, e assim sucessivamente, até a décima parte que é dividida em dez partes iguais.

Enquanto a décima primeira tirinha é particionada em dezesseis partes iguais. Cada uma dessas partes apresenta a sua representação numérica fracionária. O jogo trabalha a comparação entre frações com o auxílio da representação da figura geométrica, leitura de frações e identificação do numerador e denominador da fração. Os autores concluíram que o ensino por meio de jogos é mais significativo, pois os alunos se tornam mais participativos.

O quarto trabalho analisado foi o artigo intitulado, *Sala de Aula Invertida na Educação Matemática: uma proposta para o ensino de frações*, da autora Fernandes e Silva (2022), selecionado no XIV ENEM, que teve como objetivo analisar como a Sala de Aula Invertida pode contribuir para o ensino e aprendizagem do conteúdo de Frações em uma turma do 6º ano dos anos finais do Ensino Fundamental, bem como, verificar as mudanças de comportamento dos alunos, no que se refere à interação, participação e cooperação entre eles, em razão da concretização da proposta da Sala de Aula Invertida.

Nessa Intervenção Didática, a relação parte-todo foi trabalhada em uma atividade prática na qual os autores disponibilizaram duas folhas de papéis em formato de círculo e retângulo e foi solicitado para que os alunos realizassem divisões dessas figuras, imaginando que estavam cortando um bolo na representação do círculo e uma torta na representação do retângulo. Foi dito que uma parte do bolo e da torta foram vendidas e os alunos deveriam representar, em fração, a parte restante e a parte vendida.

A relação parte-todo foi trabalhada com quantidades contínuas e, por meio dessas situações propostas aos alunos, estes identificaram que as frações podem ser representações de figuras divididas em partes iguais, além de perceberem que, se dividirem a pizza ou a torta em fatias pequenas, irão obter uma maior quantidade de fatias, e conseqüentemente, levantarem um valor maior com a venda destas (FERNANDES; SIVA, 2022). O conceito de quanto maior o número de partes menor é a sua área é considerado por Piaget como uma condição para a existência de fração, segundo Lima (2012).

O quinto trabalho analisado foi o artigo intitulado, *Uma Abordagem Exploratória para Frações: os Processos de Reflexão e Ação na Prática Docente*, dos autores Santos et al. (2022a), selecionado no XIV ENEM, que teve como objetivo abordar e

refletir sobre as experiências de criação e aplicação de uma sequência de atividades sobre frações pensadas para o sétimo ano do Ensino Fundamental.

Nessa intervenção, a relação parte-todo está presente na atividade que buscou trabalhar a comparação de frações por meio do quebra-cabeça, tangram, que trabalha com figuras geométricas planas. Como este jogo está dividido em triângulos quadrados e paralelogramo, a atividade proposta buscou fazer que os alunos relacionassem o quadrado menor com o quadrado grande formado com todas as peças que o compõe.

Dessa forma, segundo Santos et al (2022a) poderiam verificar que o quadrado menor corresponde a um oitavo do quadrado maior. Entretanto, os autores perceberam que o material utilizado para a construção do tangram (EVA) dificultou esta comparação, por ser flexível, levando os alunos ao erro. Foi necessário trabalhar com um software gráfico que possibilitou a sua construção e a comparação pretendida.

O sexto trabalho analisado foi o artigo intitulado, *Uma Experiência com Adição de Frações no Contexto Remoto Através da Resolução de Problemas*, dos autores Santos et al. (2022b) selecionado no XIV ENEM, que teve como objetivo ensinar adição de frações com denominadores distintos, no contexto de ensino remoto emergencial por meio do serviço de comunicação Google Meet e da metodologia de Ensino – Aprendizagem - Avaliação de Matemática através das Resoluções de Problemas.

Nessa intervenção didática, a relação parte-todo se mostra presente no problema envolvendo a roleta de um cofre, sendo solicitado que os alunos representassem a fração correspondente ao giro da roleta necessário para abrir o cofre. Foram apresentadas três imagens de uma roleta de cofre dividida, respectivamente, em quartos, oitavos e dezesseis avos e em cada uma delas havia uma seta significando o movimento a ser representado por uma fração que era solicitada a partir das três perguntas que foram realizadas. Além disso, havia subdivisões numeradas de 10 em 10.

Assim, os autores evidenciaram as dificuldades de os alunos representarem a fração correspondente ao giro da roleta do cofre, atribuindo alguns dos erros a falta de compreensão do que estava sendo solicitado na questão, que poderia ter sido reescrita para que ficasse mais clara, como também, a dificuldade de compreender o

movimento descrito pela seta, visualizando e representando apenas o ponto em que as mesmas finalizavam e não o intervalo descrito por elas.

A respeito dos trabalhos classificados como intervenção didática, buscamos sintetizar algumas ideias no Quadro 6 abaixo.

Quadro 6. Pesquisas de intervenções didáticas.

<b>Autores</b>	<b>Títulos</b>	<b>Objetivos das pesquisas</b>	<b>Principais resultados envolvendo a relação parte todo</b>
Mendonça et al. (2010)	<i>Sobre a Pesquisa e o Ensino de Números Racionais na sua Representação Fracionária.</i>	Identificar que contribuições um ensino de fração, sendo introduzido a partir de um determinado significado – seja parte-todo, quociente, quantidades intensivas ou operador multiplicativo – traz para o bom desempenho dos alunos de 3ª e 4ª séries da Educação Básica ao lidar com situações de fração com os outros significados.	A relação parte-todo obteve o maior percentual de sucesso e o significado quociente foi o de menor percentual. Os autores afirmaram que os resultados obtidos quanto a relação parte-todo foi devido aos alunos serem apresentados a frações sempre por meio de situações problemas envolvendo este significado, assim estariam mais familiarizados com o mesmo.
Pereira; Mendonça (2013)	<i>O Problema da Medida: Construindo o Significado dos Números Racionais com o Auxílio do frac-soma 235.</i>	Desenvolver e aplicar um projeto de ensino dos números racionais utilizando o significado medida por meio do material de apoio <i>frac-soma 235</i> .	Entre os resultados obtidos foi destacado que as atividades (com figuras geométricas, que remetem a relação parte-todo dos números racionais, para a partir delas encontrar as representações fracionárias) favoreceram para que estudantes do Ensino Médio dessem significado as operações envolvendo números racionais na representação fracionária.
Lopes; Patricio (2013)	<i>O uso de Jogos no Ensino de Fração</i>	Contribuir com o ensino de frações de forma lúdica, introduzindo o conteúdo por meio de jogos que trabalham com frações.	O jogo trabalha a comparação entre frações com o auxílio da representação da figura geométrica, leitura de frações e identificação do numerador e denominador da fração (que remete à relação parte-todo). Os autores concluíram que o ensino de frações por meio de jogos é mais significativo, pois os alunos se tornam mais participativos.
Fernandes; Silva (2022)	<i>Sala de Aula Invertida na Educação Matemática: uma proposta para o ensino de frações</i>	Analisar como a Sala de Aula Invertida pode contribuir para o ensino e aprendizagem de frações em uma turma do 6º ano dos anos finais do Ensino Fundamental, bem como verificar as mudanças de	A relação parte-todo foi trabalhada com quantidades contínuas e, por meio dessas situações propostas aos alunos, estes identificaram que as frações podem ser representações de figuras divididas em partes iguais, além de perceberem que se dividirem a pizza ou a torta em fatias

		comportamento dos alunos, no que se refere à interação, participação e cooperação entre eles.	pequenas, irão obter uma maior quantidade de fatias.
Santos et al. (2022a)	<i>Uma Abordagem Exploratória para Frações: os Processos de Reflexão e Ação na Prática Docente</i>	Abordar e refletir sobre as experiências de criação e aplicação de uma sequência de atividades sobre frações para o sétimo ano dos anos finais do Ensino Fundamental.	O material utilizado para a construção do tangram (EVA) dificultou a comparação da parte (quadrado menor) com o todo (quadrado formado com todas as peças do tangram), por ser flexível, levando os alunos ao erro. Foi necessário trabalhar com um software gráfico que possibilitou a sua construção e a comparação pretendida (o quadrado menor é $\frac{1}{8}$ do quadrado maior).
Santos et al. (2022b)	<i>Uma Experiência com Adição de Frações no Contexto Remoto Através da Resolução de Problemas</i>	Ensinar adição de frações com denominadores distintos, no contexto do ensino remoto emergencial por meio do serviço de comunicação Google Meet, utilizando a metodologia de Ensino - Aprendizagem - Avaliação de Matemática através das Resoluções de Problemas.	Os autores evidenciaram as dificuldades dos alunos em representar a fração correspondente ao giro da roleta do cofre, atribuindo alguns dos erros à falta de compreensão do que estava sendo solicitado na questão. Como também, a dificuldade de compreender o movimento descrito pela seta, visualizando e representando apenas o ponto em que as mesmas finalizavam e não o intervalo descrito por elas.

Fonte: autoria própria, 2024

No Quadro 6, podemos perceber que as pesquisas de Pereira, Mendonça (2013), Lopes, Patricio (2013), Fernandes e Silva (2022) e Santos et al. (2022) buscaram trabalhar com números racionais usando recursos manipuláveis e envolveram a relação parte-todo com quantidades contínuas. Os resultados obtidos evidenciaram que os recursos manipuláveis favoreceram a compreensão dos conteúdos trabalhados, com exceção de Santos et al. (2022) que destacaram a inviabilidade do uso de EVA flexível para a comparação entre as peças que compõem as partes do tangram e o quebra-cabeça completo (unidade).

Além disso, percebemos que a relação parte-todo é trabalhada mesmo quando os conteúdos abordados envolvem outros significados dos números racionais, ou ainda, as operações aritméticas desse campo numérico.

### 5.3 Pesquisa documental e de livro didático.

O primeiro trabalho analisado foi o artigo intitulado, *Significados e Representações dos Números Racionais Abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – Enem 2011*, das autoras Silva e Lins (2013), selecionado no XI ENEM, que teve como objetivo analisar os itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 que envolvem os números racionais nas suas diferentes representações e significados.

O referencial teórico adotado foi a Teoria dos Registros de Representações Semióticas e os significados de números racionais. Os itens que trabalhavam números racionais foram classificados de acordo com os diferentes significados de números racionais trabalhados: medida (parte-todo), quociente, razão, operador multiplicativo, número na reta numérica, probabilidade e porcentagem. Para a análise dos itens, foram discriminados cinco passos: estratégia base de resolução do item, outra(s) estratégia(s) de resolução; análise do suporte; estrutura do item, quanto aos registros de representações envolvidos; comentários referentes às habilidades necessárias à resolução do item e outros conceitos exigidos.

Dos quarenta e cinco itens da prova de matemática do ENEM de 2011, dez deles envolviam os significados e representações dos números racionais e apenas um abordou o significado da medida (parte-todo). O item envolvendo a relação parte-todo apresentou em sua estrutura o registro numérico fracionário, podendo ser mobilizados o registro numérico fracionário e o decimal. As conversões que poderiam ser realizadas, tendo como registro de partida a língua materna, tinham como registro de chegada o numérico fracionário e o decimal. As conversões entre registros dos números racionais ocorreram apenas em um sentido, sendo do registro numérico fracionário ao decimal.

O segundo trabalho analisado foi o artigo intitulado, *Abordagem do Conceito de Fração: uma Análise de Livros Didáticos*, da autora Souza (2013), selecionado no XI ENEM, que teve como objetivo analisar as abordagens metodológicas sobre os conceitos e significados de fração nos livros didáticos adotados nas escolas da Rede Municipal de Ensino do Município de Itapororoca/PB, com o intuito de identificar as contribuições e implicações desse recurso metodológico acerca deste conteúdo para a prática do professor. Essa pesquisa teve como aporte teórico para os números racionais e seus significados os estudos Van de Walle (2009), Toledo e Toledo

(1997)<sup>13</sup>, e nos materiais didáticos do PNL D (2010) e PCN de Matemática (BRASIL, 1998).

A análise foi realizada em três livros do 6º ano do ensino fundamental adotados na rede municipal de Itapororoca/PB. No livro analisado "Tudo é Matemática" a primeira ideia de fração trabalhada é a relação parte-todo, com grandezas contínuas. O livro "Matemática" apresenta figuras particionadas em partes iguais para trabalhar a relação parte-todo e problemas contextualizados. E finalmente, o livro "Matemática e realidade" aborda a ideia inicial das partes fracionárias por meio do tangram, envolvendo composição e decomposição de figuras. Os autores concluem afirmando que os livros analisados trabalharam a relação parte-todo, mas apenas um destaca os demais significados de números racionais.

O terceiro trabalho analisado foi o artigo intitulado *A Equivalência, o Livro Didático e os Três Mundos da Matemática*, dos autores Santos e Lima (2016), selecionado no XII ENEM, que teve como objetivo analisar a abordagem dada ao conceito equivalência entre números fracionários em livros didáticos do 6º ano do ensino fundamental recomendados no PNL D de 2014, à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática. Nesta pesquisa, 10 livros do 6º ano do ensino fundamental foram analisados, buscando averiguar como o conteúdo de equivalência está sendo trabalhado, contudo, apenas 1 livro, dos dez, foi discutido no artigo.

A relação parte-todo está presente no livro, auxiliando o conceito de equivalência, em que este abre o conceito expondo uma sequência de 5 retângulos dispostos um abaixo do outro que vão sendo repartidos em partes iguais de forma que se tenha o conjunto 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$  e  $\frac{1}{16}$ , respectivamente representando a unidade, metades, quartos, oitavos e dezesseis avos. Nesse exemplo, é pintada a metade de um retângulo que representa dois quartos de outro. Esses dois quartos representam quatro oitavos do outro retângulo, que representam oito dezesseis avos de outro.

Dessa forma, a equivalência de frações é trabalhada por meio da relação parte-todo com quantidades contínuas e envolvendo quantidades discretas. O artigo traz na sua fundamentação teórica que a relação parte-todo, quando representada por uma figura particionada em partes iguais com algumas dessas partes pintadas está associada ao Mundo Conceitual Corporificado que faz parte da teoria dos três mundos da matemática, foco deste trabalho.

---

<sup>13</sup> A obra do autor Toledo e Toledo (1997), assim como as versões anteriores PNL D (2010) e PCN de Matemática (BRASIL, 1998), não foram lidas pelo autor dessa pesquisa.

O quarto trabalho analisado foi o artigo intitulado, *Um Estudo das Frações Presentes em Livros Didáticos na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*, dos autores Silva et al. (2016), selecionado no XII ENEM, que teve como objetivo analisar livros didáticos de matemática dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental aprovados pelo PNLD 2014 acerca dos significados de fração, relacionando-os com suas representações e invariantes. Foram analisados 4 livros didáticos de duas coleções: “Matemática Imenes e Lellis” (6º e 7º ano) e “Vontade de saber Matemática” (6º e 7º ano).

Diante disso, os autores fizeram o levantamento das questões que envolviam os significados: parte-todo, quociente, razão e operador. O total de questões envolvendo o significado parte-todo nas duas coleções foi o maior em comparação aos demais significados, com 40,4% na coleção “Matemática Imenes e Lellis” e 48,7% na coleção “Vontade de saber Matemática”. Além disso, nos livros do 6º ano há uma quantidade considerável de questões envolvendo o significado parte-todo com quantidades contínuas que, por outro lado, podem ser resolvidas pelo invariante da dupla contagem.

Além deste levantamento, foram analisadas 11 questões dos livros didáticos, envolvendo diferentes graus de dificuldades, sendo que 4 delas abordam a relação parte-todo com quantidades contínuas. E duas das quatro questões trabalham, por meio da representação figural geométrica, a representação fracionária decimal, numérica decimal e língua materna, e as duas restantes, a ordem de frações. Nas conclusões, os autores identificaram que grande parte das atividades dos livros didáticos analisados trabalhou o significado parte-todo, mas os outros significados também foram trabalhados.

Além disso, observaram que as representações mais utilizadas foram as numéricas (fracionária, decimal e porcentagem) e, em menor quantidade, a representação pictórica, que foi trabalhada com o significado parte-todo, sendo a representação em linguagem natural a menos utilizada.

O quinto trabalho analisado foi o artigo intitulado *Descortinando Aspectos de Fração Presentes na Prova do Sistema de Avaliação do 5º ano do Estado do Tocantins*, dos autores Lima et al. (2019), selecionado no XIII ENEM, que teve como objetivo analisar aspectos que se fazem presentes em questões que envolvem fração nas provas do 5º ano do Ensino Fundamental do Sistema de Avaliação do Estado do

Tocantins (SAETO). Nessa análise documental, foram discutidas 4 questões, retiradas da prova de matemática do SAETO, nas quais a relação parte-todo está presente.

Os autores chamam a atenção para as possíveis interpretações dos significados dos números racionais que um mesmo problema possui. Na primeira questão analisada, tem-se uma loja vendendo um aparelho tecnológico que custa 600 reais, no qual é ofertado um desconto de 25%, e que se deve informar o valor do desconto em reais. O significado envolvido inicialmente é porcentagem, mas, avaliando de outra perspectiva, pode ser percebido o significado operador e por último o significado parte-todo como porcentagem.

Na segunda questão analisada, tem-se a fração  $\frac{3}{10}$  que representa as partes tomadas de uma barra de chocolate, em que se pede a representação numérica decimal da fração  $\frac{3}{10}$ , envolvendo o significado parte-todo. Já na terceira questão, tem-se que uma pessoa compra um 1 metro de fita e gasta 0,8 do todo, sendo solicitada a representação fracionária do que foi gasto, envolvendo o significado parte-todo como medida. E a última questão apresenta um enunciado envolvendo uma pesquisa feita com 1000 (mil) participantes, em que 200 deles não criam animais. Em seguida, solicita-se a quantidade de participantes que representa 50% dos que criam animais (400). A questão envolve o significado parte-todo com quantidades discretas.

Na conclusão, os autores afirmam que nem todas as questões referem, exclusivamente, à ideia de fração, contudo, a mobilização dos significados dos números racionais é necessária para as resoluções. Além dos significados, também há o emprego dos diversos registros de representações dos números racionais: percentual, fracionário e decimal, sendo necessária a realização de conversões entre esses registros durante a resolução das questões.

O sexto trabalho analisado foi o artigo intitulado, *Introduzindo Frações no Ensino Primário: Um Estudo de Planos de Aula da Década de 1940 em Santa Catarina*, da autora Zuin (2019), selecionado no XIII ENEM, que teve como objetivo verificar se os princípios do ensino intuitivo e do escolanovismo se fizeram presentes nas propostas de condução das aulas e se os planejamentos dos docentes atendiam às normativas da legislação escolar. Foram analisados três planos de aula sobre o ensino de frações, elaborados por três professores de escolas distintas de Santa Catarina.

De acordo com a análise da autora já mencionada, os planos de aulas da professora Haidê Mambrini, propõem iniciar o ensino de frações desenhando uma

maçã que será particionada em duas partes, depois em três partes, em quatro partes, e assim por diante, sempre colocando a fração que representa uma parte do todo,  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ... etc. e trabalhando a nomenclatura da fração com os alunos oralmente “ um meio, um terço, um quarto ... etc. justificando que o número acima da barra horizontal se chama numerador e aquele abaixo dela, denominador e que o denominador quando ultrapassa dez unidades recebe o acréscimo de avos.

Diante da situação relatada, após nomear o numerador e o denominador, ou seja, um onze avos, um doze avos ... etc., é percebido, pela exposição do plano, a presença da relação parte-todo na representação de figura contínua, representação numérica e representação na língua natural. Contudo, a autora observa que a definição de número racional não é apresentada formalmente, além do fato de ser pouco enfatizado que a maçã está sendo dividida em partes iguais.

Enquanto o professor Antônio Matarazzo propõe em seu plano de aula introduzir o conteúdo de fração inicialmente por meio de perguntas que façam os alunos perceberem a necessidade dos números fracionários, e assim, apresentar as diferenciações entre o conjunto dos naturais e fracionários. Como também ensinar as representações numéricas da fração, assim como nomeá-las, propondo trabalhar com a divisão de giz e folhas de papel. Foi verificado que o professor sugere divisão de giz e folhas de papel, mas não deixa claro que serão particionadas em partes iguais.

O último plano analisado é o da professora Liberatina Puecini, que inicia com a noção de um inteiro por meio de objetos e depois realiza o particionamento destes objetos e vai dialogando sobre os números racionais por meio dos procedimentos de particionamento, identificando o que é um inteiro e um número fracionário. Mais uma vez, a relação parte-todo está presente nos particionamentos dos objetos, nos quais são especificados que as partes são iguais. Assim trabalhada a representação em língua natural, representação figural e representação numérica envolvendo quantidades contínuas.

A autora, em sua análise dos planos de aula, evidencia a presença da relação parte-todo em sua representação da figura geométrica, representação numérica e representação na língua natural. Além disso, não houve indícios da definição formal dos números racionais e, apesar de ter sido trabalhada a relação parte-todo na representação geométrica bidimensional, a ideia de que as partes do todo são congruentes é pouco enfatizada. Como também, não houve menções da relação

parte-todo sendo trabalhada com quantidades discretas, pois os objetos citados podiam ser particionados, dando a ideia de quantidade contínua.

O Quadro 7 apresenta uma síntese dos artigos discutidos neste tópico. Constatamos que os artigos classificados nesta categoria apresentam uma singularidade quanto às edições do ENEM, sendo publicados dois a dois a cada três edições consecutivas do evento, 2013, 2016 e 2019.

Quadro 7. Pesquisas diagnósticas.

<b>Autores</b>	<b>Títulos</b>	<b>Objetivos das pesquisas</b>	<b>Principais resultados envolvendo a relação parte todo</b>
Silva, Lins (2013)	<i>Significados e Representações dos Números Racionais Abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – Enem 2011.</i>	Analisar os itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 que envolvem os números racionais nas suas diferentes representações e significados.	O item que envolveu a relação parte-todo, tinha em sua estrutura o registro numérico fracionário, podendo ser mobilizados o registro numérico fracionário e o decimal. As conversões que poderiam ser realizadas no item, tendo como registro de partida a língua materna, tinham como registro de chegada o numérico fracionário e o decimal. As conversões entre registros dos números racionais ocorreram apenas em um sentido, sendo do registro numérico fracionário do decimal.
Souza (2013)	<i>Abordagem do Conceito de Fração: uma Análise de Livros Didáticos.</i>	Analisar as abordagens metodológicas sobre os conceitos e significados de fração nos livros didáticos adotados nas escolas da Rede Municipal de Ensino do Município de Itapororoca/PB, com o intuito de identificar quais são as contribuições e implicações desse recurso metodológico acerca deste conteúdo para a prática do professor.	Os autores concluem afirmando que os três livros analisados trabalharam a relação parte-todo, mas apenas um destaca os demais significados de números racionais.
Santos, Lima (2016)	<i>A Equivalência, o Livro Didático e os Três Mundos da Matemática.</i>	Analisar a abordagem dada ao conceito de equivalência entre números fracionários em livros didáticos do 6º ano do ensino fundamental recomendados no PNLD de 2014, à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática.	A equivalência de frações é trabalhada por meio da relação parte-todo com quantidades contínuas e também envolvendo quantidades discretas. O artigo traz na sua fundamentação teórica que a relação parte-todo, quando representada por uma figura particionada em partes iguais com algumas dessas partes pintadas

			está associada ao Mundo Conceitual Corporificado que faz parte da teoria dos três mundos da matemática, foco deste trabalho.
Silva et al. (2016)	<i>Um Estudo das Frações Presentes em Livros Didáticos na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.</i>	Analisar livros destinados ao 6º e 7º anos do Ensino Fundamental de duas coleções aprovadas pelo PNLD 2014 acerca dos significados de fração e procuramos relacioná-los com suas representações e invariantes.	Uma quantidade relevante de questões dos livros didáticos analisados trabalha a relação parte-todo com quantidades contínuas que podem ser resolvidas como o uso da dupla contagem. Outros significados de números racionais também foram trabalhados. Quanto as representações, as mais utilizadas são as numéricas (fracionária, decimal e porcentagem) e, em menor quantidade, a representação pictórica. Enquanto a representação em língua materna foi a menos utilizada.
Lima et al (2019)	<i>Descortinando Aspectos de Fração Presentes na Prova do Sistema de Avaliação do 5º ano do Estado do Tocantins.</i>	Analisar aspectos que se fazem presentes em questões que envolvem fração nas provas do 5º ano do Ensino Fundamental do Sistema de Avaliação do Estado do Tocantins (SAETO).	Das questões analisadas, nem todas remetem, exclusivamente, a ideia de fração, contudo a mobilização dos significados dos números racionais é necessária para as suas resoluções. Além dos significados, também há o emprego dos diversos registros de representações dos números racionais: percentual, fracionário e decimal, sendo necessária a realização de conversões entre esses registros durante a resolução das questões. O significado mais mobilizado nas questões foi a relação parte-todo. Uma vez que na questão 1,2,3 e 4 tem-se a relação parte-todo com quantidade contínua e discreta e nas questões 1 e 3, a relação parte-todo atrelada a outro significado, porcentagem e medida.
Zuin (2019)	<i>Introduzindo Frações no Ensino Primário: Um Estudo de Planos de Aula da Década de 1940 em Santa Catarina.</i>	Verificar se os princípios do ensino intuitivo e do escolanovismo se fizeram presentes nas propostas de condução das aulas e se os planejamentos dos docentes atendiam às normativas da legislação escolar. Foram analisados três planos de aula sobre o ensino de frações, elaborados por três professores de escolas distintas de Santa Catarina.	A análise dos planos de aula evidencia a presença da relação parte-todo em sua representação geométrica bidimensional, representação numérica e representação na língua natural. Além disso, não houve indícios da definição formal dos números racionais e, apesar do trabalho com figuras geométricas, a atenção para que as partes sejam, necessariamente, congruentes é pouco enfatizada.

Fonte: autoria própria, 2024.

No Quadro 7 podemos perceber pelas pesquisas de Souza (2013) e Silva et al. (2016) que os livros didáticos têm uma tendência em trabalhar a relação parte-todo dos números racionais, contudo há também a presença dos outros significados. Inferimos, também, que com relação às representações dos números racionais, envolvendo a relação parte-todo, a numérica é predominante em todas as pesquisas. E assim, como em outros trabalhos analisados nas categorias anteriores, a relação parte-todo foi mais trabalhada com quantidades contínuas.

#### **5.4 Outras categorias: pesquisa bibliográfica e teórica.**

O primeiro trabalho analisado nesta categoria foi o artigo intitulado *A Fração Representada como Medida de Comprimento de Reta*, do autor Araújo (2016), selecionado no XII ENEM, classificado como Pesquisa bibliográfica, que teve como objetivo analisar a representação do número fracionário, por meio de uma revisão de literatura, com a finalidade de propor um referencial teórico analítico para o ensino de fração como medida de comprimento de reta. A revisão bibliográfica teve como base os trabalhos de Hung-Hsi Wu (2009 e 2012, apud REVISTA CÁLCULO, 2012, p. 13-15) e de Sant'anna (2008)<sup>14</sup>.

Nesse contexto, a relação parte-todo está presente neste artigo XII quando o autor busca argumentar o porquê de iniciar o ensino de fração pelo significado de medida de comprimento de reta, que se mostra mais adequado do que por meio da relação parte-todo. E questiona como seria interpretada a relação parte-todo ao dividir um penil. O particionamento congruente consideraria a área ou o peso? Deixando claro que as ideias de relação parte-todo, em algumas situações, demonstram ser mais complexas para os alunos.

Além disso, visualizamos os conceitos da relação parte-todo na discussão do texto ao se referir às divisões congruentes realizadas na reta numérica. Por sua vez, compreendemos que a relação parte-todo está sendo necessária para a compreensão do significado medida na reta numérica.

O segundo trabalho analisado foi o artigo intitulado, *O Estudo das Adições de Frações com Denominadores Diferentes Através das Representações Gráficas*, dos

---

<sup>14</sup> As obras dos autores Hung-Hsi Wu (2009 e 2012, apud REVISTA CÁLCULO, 2012, p. 13-15) e de Sant'anna (2008) não foram lidas pelo autor dessa pesquisa.

autores Brandão e Ribeiro (2016), selecionado no XII ENEM, classificado como Pesquisa teórica. E teve como objetivo discutir a soma de frações heterogêneas no campo da percepção e da docência, utilizando para isso um viés filosófico com base na fenomenologia Husserliana. A relação parte-todo está fortemente atrelada à soma de frações heterogêneas neste trabalho, pois ao se somar duas frações distintas é necessário encontrar frações equivalentes.

O processo para soma de frações heterogêneas ser trabalhado no texto utiliza a representação geométrica bidimensional. É necessário, para somar duas frações distintas, que as figuras geométricas sejam redivididas em partes congruentes, de forma que mantenham o mesmo número de partes, de modo que as redivisões não alterem a fração. Assim, é concluído no texto que o método trabalhado para somar frações heterogêneas potencializa a aprendizagem, sem a necessidade de ‘decorar’ regras e procedimentos.

Para concluir este tópico, o Quadro 8 apresenta uma síntese dos artigos discutidos nele, vejamos a seguir.

Quadro 8. Outras categorias: Pesquisa Bibliográfica e Teórica.

<b>Autores</b>	<b>Títulos</b>	<b>Objetivos das pesquisas</b>	<b>Principais resultados envolvendo a relação parte todo</b>
Araújo (2016)	<i>A Fração Representada como Medida de Comprimento de Reta.</i>	Analisar a representação do número fracionário, por meio de uma revisão de literatura, com a finalidade de propor um referencial teórico analítico para o ensino de fração como medida de comprimento de reta.	A relação parte-todo em algumas situações cotidianas pode demonstrar ser mais complexa para os alunos. Além disso, a relação parte-todo se mostra necessária para a compreensão de outros significados.
Brandão e Ribeiro (2016)	<i>O Estudo das Adições de Frações com Denominadores Diferentes Através das Representações Gráficas.</i>	Discutir a soma de frações heterogêneas no campo da percepção e da docência, utilizando para isso um viés filosófico com base na fenomenologia Husserliana.	O método trabalhado para somar frações heterogêneas, usando representações geométricas bidimensionais, remete à relação parte-todo e potencializa a aprendizagem, sem a necessidade de ‘decorar’ regras e procedimentos.

Fonte: autoria própria, 2024.

No Quadro 8, verificamos que a pesquisa de Araújo (2016) se relaciona com a de Lima et al. (2019), discutida no Tópico 4.2.1, ao trazer a relação parte-todo sendo trabalhada, auxiliando os outros significados de números racionais. Percebemos, também, que ao se trabalhar operações com números racionais, a relação parte-todo se faz necessária, pois além de beneficiar a compreensão das operações, também dá sentido aos procedimentos que ocorrem por trás dos cálculos, como podemos perceber nas pesquisas de Brandão e Ribeiro (2016) e Pereira; Mendonça (2013), presentes no Tópico 4.2.2.

## **6 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Esta pesquisa buscou analisar as tendências e abordagens da relação parte-todo dos números racionais, a partir da análise das pesquisas publicadas nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) no período de 2010 a 2022 (edição mais atualizada do ENEM). Para isso, levantamos as produções que tratam do tema de números racionais na relação parte-todo na X, XI, XII, XIII e XIV edições do ENEM, como também estabelecemos uma classificação para as pesquisas selecionadas e investigamos estas quanto ao objetivo, fundamentação teórica, metodologia e análise dos resultados que envolvem a relação parte-todo dos racionais.

O critério de escolha dos artigos envolveu 6 palavras-chaves: número racional, racional, racionais, fração, frações e fracionário. Assim, foram encontrados 67 trabalhos na primeira etapa do levantamento, contidos em todas as edições analisadas, sendo a XII, seguida da XI e XIII edições, as que contemplaram maior número de trabalhos, respectivamente (21 pesquisas na XII e 14, nas XI e XIII, cada uma).

Dessa maneira, logo após as pesquisas, foi realizada a leitura completa dos artigos para identificarmos aqueles que trabalhavam a relação parte-todo dos números racionais, reduzindo este quantitativo para 27 pesquisas. Tendo em vista que, destes 7 trabalhos tiveram como objetivo discutir a relação parte-todo, enquanto os 20 restantes trabalharam esta relação, mas não como foco do estudo.

Na categoria em que a relação parte-todo faz parte do objetivo da pesquisa, foram classificados 3 trabalhos como pesquisa diagnóstica, 3 intervenções didáticas

e 1 análise de livro didático, o que demonstra uma tendência em pesquisas que possuem uma relação direta com o ensino e a aprendizagem desta relação. Nas pesquisas diagnósticas, houve um predomínio na avaliação da compreensão da relação parte-todo dos números racionais, sendo os sujeitos de pesquisa, alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, professores pedagogos ou licenciados em matemática.

Portanto, verificamos que foram identificados erros comuns entre estes sujeitos de pesquisa, apesar dos distintos níveis e formações, como o uso do procedimento da dupla contagem e a não compreensão de que as partes (na relação parte-todo) devem, necessariamente, ser congruentes. Além disso, os sujeitos de pesquisa apresentaram dificuldades em relacionar as figuras com suas representações numéricas. Outro ponto importante foi o predomínio de exercícios que trabalham com a relação parte-todo usando quantidades contínuas, totalmente particionadas.

As pesquisas, que envolveram intervenção didática, trabalharam com a relação parte-todo abrangendo quantidades contínuas e apenas duas delas abordaram quantidades discretas em uma quantidade menor de atividades que aquelas destinadas às grandezas contínuas. Entretanto, quando se trabalha quase que exclusivamente com grandezas que envolvem quantidades contínuas, as ideias que perpassam as quantidades discretas não são contempladas, podendo gerar dificuldades de compreensão com esta grandeza.

Por fim, a pesquisa que envolveu análise do livro didático apresentou situações problemas observados em livros didáticos que trabalham, especificamente, com quantidades contínuas, em detrimento das quantidades discretas, sendo um ponto comum em todas as pesquisas, além da prevalência do emprego do procedimento da dupla contagem.

Na categoria das pesquisas em que a relação parte-todo não faz parte do foco do estudo, dos 20 trabalhos selecionados, 6 foram pesquisas diagnósticas, 6 intervenções didáticas, 6 análises documentais, 1 pesquisa teórica e 1 pesquisa bibliográfica. As pesquisas diagnósticas apresentaram os erros comuns cometidos pelos sujeitos de pesquisa envolvendo a relação parte-todo, como a dupla contagem, a relação parte-parte, a compreensão de fração como dois números sobrepostos, a dificuldade em passar de uma representação de números racionais para outra. Além disso, na maioria das pesquisas a relação parte-todo é trabalhada predominantemente com quantidades contínuas.

Enquanto as pesquisas de intervenção didática trabalharam com recursos manipuláveis e envolveram a relação parte-todo com quantidades contínuas, evidenciando que estes recursos favoreceram a compreensão dos conteúdos trabalhados. Percebemos que a relação parte-todo foi trabalhada mesmo quando os conteúdos abordados envolveram outros significados dos números racionais e até mesmo as operações aritméticas desse campo numérico.

Nas pesquisas que envolveram análise de livro, nesta categoria, foi verificado que estes têm uma tendência em trabalhar a relação parte-todo dos números racionais (com quantidades contínuas), mas há a presença dos outros significados. E finalmente, nas pesquisas classificadas como outras categorias, podemos constatar que trabalhar as operações com números racionais com o auxílio da relação parte-todo pode beneficiar a compreensão destas operações, dando sentido aos procedimentos desenvolvidos por meio dos cálculos.

Dessa forma, esperamos contribuir com futuras pesquisas na área da Educação Matemática que envolve os números racionais, tendo a convicção de que este estudo teve as suas limitações, mas que pode apontar para áreas que ainda precisam ser investigadas com relação ao ensino e aprendizagem deste campo numérico.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anais do IV Encontro Nacional de Educação Matemática (1995). Sociedade brasileira de educação matemática 2024. Disponível em:  
<https://www.sbembrasil.org.br/files/enemIV.pdf> . acessado em: 24, set 2024

ARAUJO, L. S. A fração representada como medida de comprimento de reta. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo – SP. **Anais [...]** São Paulo - SP: Campus Anália Franco da Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. Disponível em:  
[https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6526\\_4305\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6526_4305_ID.pdf). Acesso em: 21 dez. 2023.

BEHR, M. J. et al. Rational Number Concepts. *In*: LESH, Richard; LANDAU, Marsha (eds). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York: Academic Press, 1983.

BORDIN, L.; LIRA, L. R.; MENONCINI, L. A presença das etapas de identificação, fissuração e superação de obstáculos de aprendizagem no ensino de frações no livro didático. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo – SP. **Anais [...]** São Paulo - SP: Campus Anália Franco da Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. Disponível em:  
[https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5969\\_2461\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5969_2461_ID.pdf). Acesso em: 21 dez. 2023.

BRANDÃO, C. L. F.; RIBEIRO, M. M. C. L. O estudo das adições de frações com denominadores diferentes através das representações gráficas. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo – SP. **Anais [...]** São Paulo - SP: Campus Anália Franco da Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. Disponível em:  
[https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5617\\_4286\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5617_4286_ID.pdf). Acesso em: 21 dez. 2023.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2017.

CAMPOS, T. M. M. et al. Sobre a pesquisa e o ensino de números racionais na sua representação fracionária. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador – BA. **Anais [...]**. Bahia: Sociedade Brasileira de educação matemática (SBEM), 2010. Disponível em:  
[https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T17\\_CC1855.pdf](https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T17_CC1855.pdf). Acesso em: 08 dez. 2023.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 6ª. ed. Lisbo: Gradiva, 1975. 308 p.

GAMA, P.F.; LIMA, L. A. M. Números racionais: uma abordagem com enfoque na análise dos erros. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo – SP. **Anais [...]** São Paulo - SP: Campus Anália Franco da

Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. Disponível em:  
[https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6880\\_4284\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6880_4284_ID.pdf). Acesso em:  
21 dez. 2023

GAVIRAGHI, A.; BATTISTI, I. K. Número racional na representação fracionária ideia parte-todo: entendimentos produzidos por alunos. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba-PR. **Anais [...]**. Regional Paraná – Guarapuava: Sociedade Brasileira de educação matemática (SBEM), 2013. Disponível em: [https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/855\\_161\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/855_161_ID.pdf). Acesso em: 15 dez. 2023.

JAMA-ANTÔNIO, A. M. et al. Conhecimento especializado do professor no âmbito das frações: um foco nos sentidos e nas representações. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá/MT. **Anais [...]** Barra do Bugres-MT: Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNEMAT. 2019 Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem>. Acesso em: 04 jan. 2024.

LIMA, J.M. de F. Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade. *In*: Nunes, T. (org.). **Aprender pensado – contribuições da psicologia cognitiva para a educação**. 20. ed. Petrópolis – RJ: Vozes. 2012. cap. 7, p. 104-156.

LIMA, S. R. et al. Descortinando aspectos de fração presentes na prova do sistema de avaliação do 5º ano do estado do Tocantins. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá/MT. **Anais [...]** Barra do Bugres-MT: Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNEMAT. 2019 Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem>. Acesso em: 04 jan. 2024.

LOPES, A. T.; PATRICIO, R. S. O uso de jogos no ensino de fração. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba-PR. **Anais [...]**. Regional Paraná - Guarapuava: Sociedade Brasileira de educação matemática (SBEM), 2013. Disponível em: [https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/126\\_1521\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/126_1521_ID.pdf). Acesso em: 15 dez. 2023.

MANDARINO, S. P. F. et al. Números racionais nos anos iniciais – despertando para uma nova ideia de números. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2022, even3publicacoes. **Anais [...]** Brasília (DF) On-line, 2022. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/xivenem2022/478257-numeros-racionais-nos-anos-iniciais--despertando-para-uma-nova-ideia-de-numeros/>. Acesso em: 04 jan. 2024.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Orientadora: Sandra Maria Pinto Magina. 2005. 238 p. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11111>. Acesso em: 23 mar. 2023.

MOUTINHO, L. **Fração e seus diferentes significados**: um estudo junto a alunos de 4<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> séries do Ensino Fundamental. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/SP, 2005.

OLIVEIRA, J. N. Dificuldades na aprendizagem dos números racionais: confrontando dois níveis de escolaridade. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo – SP. **Anais [...]** São Paulo - SP: Campus Anália Franco da Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. Disponível em: [https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5901\\_2523\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5901_2523_ID.pdf). Acesso em: 21 dez. 2023.

PEREIRA, R. V.; MENDONÇA, A.C. P.T. O problema da medida: construindo o significado dos números racionais com o auxílio do frac- soma 235. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba-PR. **Anais [...]**. Regional Paraná - Guarapuava: Sociedade Brasileira de educação matemática (SBEM), 2013. Disponível em: [https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/502\\_296\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/502_296_ID.pdf). Acesso em: 15 dez. 2023.

SANTANA, L, E. L. et al. Fração e seus diferentes registros de representação semiótica: uma análise da percepção de futuros pedagogos. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba-PR. **Anais [...]**. Regional Paraná - Guarapuava: Sociedade Brasileira de educação matemática (SBEM), 2013. Disponível em: [https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/144\\_1180\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/144_1180_ID.pdf). Acesso em: 15 dez. 2023.

SANTOS, D. B. et al. Uma abordagem exploratória para frações: os processos de reflexão e ação na prática docente. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2022, even3publicacoes. **Anais [...]** Brasília (DF) On-line, 2022. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/xivenem2022/484253-uma-abordagem-exploratoria-para-fracoes--os-processos-de-reflexao-e-acao-na-pratica-docente/>. Acesso em: 04 jan. 2024.

SANTOS, J. G. C. et al. Uma experiência com adição de frações no contexto remoto através da resolução de problemas. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2022, even3publicacoes. **Anais [...]** Brasília (DF) On-line, 2022. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/xivenem2022/479943-uma-experiencia-com-adicao-de-fracoes-no-contexto-remoto-atraves-da-resolucao-de-problemas/>. Acesso em: 04 jan. 2024.

SANTOS FILHO, J.; CÂMARA DOS SANTOS, M. O ensino de frações como partes iguais de um todo e as quantidades contínuas e discretas. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá/MT. **Anais [...]** Barra do Bugres-MT: Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNEMAT. 2019. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem>. Acesso em: 04 jan. 2024.

SANTOS, L. S.; SANTOS, M. C. Análise dos Efeitos Didáticos Emergentes de uma Sequência de Atividades na Aprendizagem do Significado Parte/Todo do Número Racional. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 10., 2010, Salvador – BA. **Anais [...]**. Bahia: Sociedade Brasileira de educação matemática (SBEM), 2010. Disponível em: [https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T19\\_CC2167.pdf](https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T19_CC2167.pdf). Acesso em: 08 dez. 2023

SANTOS, R. S dos.; SANTOS, M. C dos.; CAMPOS, T. M. M. Estratégias utilizadas pelos alunos da educação básica na resolução de questões sobre números racionais na prova do SAEPE/sistema de avaliação educacional de Pernambuco. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 11., 2013, Curitiba-PR. **Anais [...]**. Regional Paraná - Guarapuava: Sociedade Brasileira de educação matemática (SBEM), 2013. Disponível em: [https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/1500\\_1265\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/1500_1265_ID.pdf). Acesso em: 15 dez. 2023.

SANTOS, S. S.; LIMA, R. N. A equivalência, o livro didático e os três mundos da matemática. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., 2016, São Paulo – SP. **Anais [...]** São Paulo - SP: Campus Anália Franco da Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. Disponível em: [https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7753\\_3831\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7753_3831_ID.pdf). Acesso em: 21 dez. 2023.

SILVA, A. F. G.; FREIRE, J. C. O.; CANOVA, R. F. Um estudo das frações presentes em livros didáticos nas perspectivas da teoria dos campos conceituais. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., 2016, São Paulo – SP. **Anais [...]** São Paulo - SP: Campus Anália Franco da Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. Disponível em: [https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7211\\_3489\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7211_3489_ID.pdf). Acesso em: 21 dez. 2023.

SILVA, E. L.; ASSIS, C. O que falta no ensino de números racionais para os alunos surdos?. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 11., 2013, Curitiba-PR. **Anais [...]**. Regional Paraná - Guarapuava: Sociedade Brasileira de educação matemática (SBEM), 2013. Disponível em: [https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/2206\\_612\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/2206_612_ID.pdf). Acesso em: 15 dez. 2023.

SILVA, F. A. F. **Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométricos bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais**. Orientador: Marcelo Câmara do Santos. 2018. 258 p. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2018. Disponível em: <http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/8349>. Acesso em: 15 ago. 2023.

SILVA, F. A. F. SANTIAGO, M. L. SANTOS, M. C. Análise de itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM que envolvem o conceito de números racionais à luz dos seus significados e representações. **Revemat revista eletrônica de educação matemática**, v. 8, ed. Especial (dez.), p. 190-208, 2013. Disponível

em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8nespp190/26041>. Acesso em: 12 set. 2023.

SILVA, F. A. F.; VIDAL, F. A.; CARVALHO FILHO, E. A. Análise da compreensão de professores de Matemática sobre as características visuais de figuras geométricas para o estabelecimento da relação parte-todo dos números racionais. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, v. 13, n. 2, p. 1-16, 30 ago. 2023.

SILVA, F. A. F. CÂMARA DOS SANTOS, M. Proposição de graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e o simbólico fracionário dos números racionais. **Revista Intermaths**, v. 1, n. 1, p. 174-196, 2020. Disponível em: [Vista do Proposição de graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e o simbólico fracionário dos números racionais \(uesb.br\)](#). Acesso em: 5 ago. 2024.

SILVA, F. A. F. **Significados e representações dos números racionais abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. 2013**. Orientadora: Mônica Lins. Coorientador: Marcelo Câmara do Santos. 2013. 154. Dissertação (Programa de Pós- Graduação em Ensino das ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013. Disponível em: <http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/5466>. Acesso em: 28 ago. 2023.

SILVA, F. A. F.; LINS, M. Significados e representações dos números racionais abordados no exame nacional do ensino médio – Enem 2011. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 11., 2013, Curitiba-PR. **Anais [...]**. Regional Paraná - Guarapuava: Sociedade Brasileira de educação matemática (SBEM), 2013. Disponível em: [https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/3438\\_1996\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/3438_1996_ID.pdf). Acesso em: 15 dez. 2023.

SILVA, N. S. M.; Pires, E. C. P. S.; Sá, P. F. O ensino de frações segundo a opinião docente. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 10., 2010, Salvador – BA. **Anais [...]**. Bahia: Sociedade Brasileira de educação matemática (SBEM), 2010. Disponível em: [https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T17\\_CC1945.pdf](https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T17_CC1945.pdf). Acesso em: 08 dez. 2023.

SILVA, R. P.; FERNANDES, M. B. S. Sala de aula invertida na educação matemática: uma proposta para o ensino de frações. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 14., 2022, even3publicacoes. **Anais [...]** Brasília (DF) On-line, 2022. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/xivenem2022/483553-sala-de-aula-invertida-na-educacao-matematica--uma-proposta-para-o-ensino-de-fracoes/>. Acesso em: 04 jan. 2024.

SOUZA, Â. T. S. Abordagem do conceito de fração: uma análise de livros didáticos. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 11., 2013, Curitiba-PR. **Anais [...]**. Regional Paraná - Guarapuava: Sociedade Brasileira de educação matemática (SBEM), 2013. Disponível em:

[https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/1065\\_1835\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/1065_1835_ID.pdf). Acesso em: 15 dez. 2023.

UTIMURA, G. Z.; CURI, E. Algumas revelações de alunos e professoras do 4º. ano do ensino fundamental sobre o significado parte-todo dos números racionais. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo – SP. **Anais [...]** São Paulo - SP: Campus Anália Franco da Universidade Cruzeiro do Sul, 2016. Disponível em: [https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5020\\_3039\\_ID.pdf](https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5020_3039_ID.pdf). Acesso em: 21 dez. 2023.

ZUIN, E. S. L. Introduzindo frações no ensino primário: um estudo de planos de aula da década de 1940 em Santa Catarina. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá/MT. **Anais [...]** Barra do Bugres-MT: Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNEMAT. 2019 Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem>. Acesso em: 04 jan. 2024.

**ANEXO:TEXTOS QUE FORAM CITADOS NAS OBRAS ANALISADAS, MAS QUE NÃO FORAM LIDOS.**

ABRAHÃO, A. M. C. **Frações e Decimais**: compreender para ensinar números racionais. PEM- Perspectivas da Educação Matemática, v.9, n. 21, p.680-701, 2016.

ASTOLFI, J.P. Los obstáculos para el aprendizaje de conceptos en ciencias: la forma de franquearlos didácticamente. In. PALACIOS, C., ANSOLEAGA, D. & AJOS, A (Org). Diez años de investigación innovación enseñanza de las ciencias. Madrid, CIDE. 1993. p.289 306.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

BEZERRA, F.; MAGINAS, S.; SPINILLO, A. How promote children understanding of fractions? An exploratory study, *PME*, v. 2, p. 89-96, 2002

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, Guy. Recherches em didactique des mathématiques Paris : La pensée sauvage, 1986. (Tradução Livre).

CAMPOS, T. et al. Uma análise da construção do conceito de fração: relatório de pesquisa. São Paulo: Pontifica Universidade Católica de São Paulo (Não publicado).1995.

CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; NUNES, T. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. São Paulo, v. 8, n. 1, p. 12, 2006.

CANOVA. R. F. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental com relação à fração**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2006.

CARRILLO, J. et al. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, p. 1-18, 2018.

CHARALAMBOUS, C. Y.; PITTA-PANTAZI, D. Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, n. 64, 293-316, 2007.

D'AMBRÓSIO, U. O Programa Etnomatemática e a Crise da Civilização. *Hipátia*, v. 4, n. 1, p. 16-25, 2019.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de Matemática para o ensino de números racionais no Ensino Fundamental**. Tese de doutorado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2007.

ELLIOT, J. Lesson studies. Disponível em:

<http://www.unicamp.br/unicamp/noticias/2012/05/16/john-elliott-aborda-aspectosrelativos%C3%A0-lesson-studies>. Acesso em: 15 jan. 2015.

KIEREN, T.E. Five faces of mathematical knowledge building. Edmonton: Department of Secondary Education, University of Alberta, 1981.

KIEREN. Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (eds.). Number concepts and operations in the middle grades. Reston (Va): NCTM-Lawrence Erlbaum Ass, 1988. p. 162–181

LIMA, J. M de F. Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade. In: CARRAHER, Terezinha Nunes (org). Aprender Pensando: Contribuições da Psicologia Cognitiva para a Educação. 15<sup>a</sup>. ed. Petrópolis: Ed. Vozes, 2001.

LOPES, A.J. O que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando tentamos Ihes Ensinar Frações. *Bolema*, Rio Claro, v. 21, n. 31, p.1-22, 2008.

MONTEIRO, A.B; GROENEALD, C.L. Dificuldades na Aprendizagem de Frações: Reflexões a partir de uma Experiência Utilizando Testes Adaptativos. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, Florianópolis/SC, v.7, n.2, p.103-135, nov. 2014.

NOVAES, B. W. D.; VENITES, Fernanda. O tema Frações na Revista de Ensino (1951 A 1963) e seus entrelaçamentos com o presente. XII Seminário Temático Saberes Elementares Matemáticos do Ensino Primário (1890 - 1970): o que dizem as revistas pedagógicas? (1890 – 1970), 2015. Escola de Educação e Humanidades, PUC/PR, Curitiba: PR. Disponível em: Acesso em 01 fev 2016.

NUNES, T.; BRYANT, P. Crianças fazendo matemática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997

OLIVEIRA, A. T. de C. C. **Saberes e práticas de formadores de professores que vão ensinar matemática nos anos iniciais**. 2007. 227 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação, Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

PINTO, Hélia; RIBEIRO, Carlos Miguel. Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos - o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas*, v. 3, n. 1, p. 85–105, 2013.

PONTE, J. P. Os estudos de aula como processo colaborativo e reflexivo de desenvolvimento profissional. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/275410215\\_Os\\_estudos\\_de\\_aula\\_como\\_processo\\_colaborativo\\_e\\_reflexivo\\_de\\_desenvolvimento\\_profissional](https://www.researchgate.net/publication/275410215_Os_estudos_de_aula_como_processo_colaborativo_e_reflexivo_de_desenvolvimento_profissional). Acesso em: 27 nov. 2015

PONTE, J.P. et al. Aprendizagens profissionais dos professores de Matemática através dos estudos de aula. *Pesquisas em Formação de Professores na Educação Matemática*, 5, p. 7-24, 2012.

SÁ, F. B. **Aprendizagem de frações no ensino fundamental**. 2011. 99 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31633/000784031.pdf>. Acesso em: 01 fev. 2016.

SANT'ANNA, N. F. P. **Práticas pedagógicas para o ensino de frações objetivando a introdução à Álgebra**. 2008. Tese de Doutorado em Educação – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC/RJ, Brasil.  
SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. *Bolema*. Rio Claro: nº 14, p. 66-91, 2000.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. Didática de Matemática: Como dois e dois. A comunicação da Matemática – São Paulo: FTD, 1997.  
VAN DE WALLE, John A. Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicações em sala de aula. Tradução Paulo H. Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WU, H. What's sophisticated about elementary mathematics? *American Educator*, Vol. 33, Número 3, p. 4–14. 2009. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/~wu/wu2009.pdf>. Acesso em 11 de mar. 2015.