



INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ IRANILDO DIAS DA SILVA

O PROBLEMA DAS TRÊS CASAS SOB UMA PERSPECTIVA MATEMÁTICA

CAMPINA GRANDE - PB

2024

JOSÉ IRANILDO DIAS DA SILVA

O PROBLEMA DAS TRÊS CASAS SOB UMA PERSPECTIVA MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. José Jorge Casimiro dos Santos

CAMPINA GRANDE - PB

2024

S586p Silva, José Iranildo Dias da

O problema das três casas sob uma perspectiva matemática / José Iranildo Dias da Silva. - Campina Grande, 2024. 31 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2024.

Orientador: Prof. Me. José Jorge Casimiro dos Santos.

1. Ensino de matemática - metodologias - Teorema da Curva de Jordan 2. Matemática - Problema das 3 utilidades 3. Geometria plana 4. Teoria dos grafos I. Santos, José Jorge Casimiro dos II. Título.

CDU 519.8



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE

JOSÉ IRANILDO DIAS DA SILVA

**O PROBLEMA DAS TRÊS CASAS SOB UMA PERSPECTIVA
MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso, aprovado como requisito parcial para a obtenção de graduação em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – Campus Campina Grande.

Habilitação: Licenciatura

Data da aprovação

30 / 09 / 2024.

BANCA EXAMINADORA:

Handwritten signature of Jose Jorge Casimiro dos Santos in blue ink, written over a horizontal line.

ORIENTADOR: Prof. Me. Jose Jorge Casimiro dos Santos

Handwritten signature of Orlando Batista de Almeida in blue ink, written over a horizontal line.

AVALIADOR: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida – IFPB

Handwritten signature of Felipe Barbosa Cavalcante in blue ink, written over a horizontal line.

AVALIADOR: Prof. Dr. Felipe Barbosa Cavalcante – IFPB

AGRADECIMENTOS

Este trabalho representa a concretização de uma etapa importante em minha vida acadêmica e não seria possível sem o apoio de pessoas que me acompanharam e incentivaram ao longo desta jornada.

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me sustentado e dado sabedoria. Sem ele, eu jamais conseguiria.

A toda a minha família, pelo suporte incondicional, pelo amor e paciência em todos os momentos. Vocês acreditaram no meu potencial e me deram a força necessária para continuar.

À minha namorada, Andrielly Mikássia de Mélo Araújo, sou grato pelo carinho, compreensão, incentivo e companheirismo. Você sempre me inspirou a nunca desistir dos meus sonhos e sempre me lembrou da importância de perseverar. Seu apoio foi crucial para que eu chegasse até aqui.

Aos meus amigos Ana Carla, Ariana Cândido, Bruna Feliciano, Joéliton Fablício, Nicole Feitosa e Ruan Lúcio que estiveram ao meu lado durante esta caminhada, oferecendo palavras de incentivo e momentos de descontração, que foram essenciais para manter o equilíbrio. A amizade de vocês foi fundamental em minha vida.

Agradeço também a todos os professores e servidores do Instituto Federal da Paraíba - IFPB campus Campina Grande, que ao longo dos anos me guiaram e compartilharam seus conhecimentos. Em especial, ao professor José Jorge Casimiro dos Santos, meu orientador, que me acompanhou de perto neste trabalho, suas orientações e críticas construtivas foram fundamentais para o desenvolvimento deste projeto. Agradeço pela paciência, confiança, dedicação e por sempre me desafiar a buscar mais.

Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro que contribuiu para a viabilização deste trabalho.

Por fim, agradeço, a todos que de certa forma, contribuíram para a realização deste trabalho. A cada um de vocês, o mais sincero “muito obrigado”.

*“Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo propósito
debaixo do céu”.*

Eclesiaste 3:1

RESUMO

O presente trabalho aborda o "Problema das Três Casas" como um enigma clássico que explora as limitações da geometria plana e as relações com a topologia e a teoria dos grafos. O objetivo deste trabalho é demonstrar a impossibilidade de resolver o problema no plano bidimensional, utilizando o Teorema da Curva de Jordan, e investigar a previsão de uma solução no espaço tridimensional. A motivação surgiu a partir de uma aula de Variáveis Complexas, onde foi proposto o desafio de conectar três casas a três utilidades sem cruzar as conexões. Após constatar a impossibilidade no plano, o estudo se aprofundou em teorias matemáticas para explicar essa restrição e explorar uma solução viável em \mathbb{R}^3 . O trabalho apresenta uma análise detalhada da tentativa de solução no plano, fundamentação teórica com o Teorema da Curva de Jordan, um estudo da origem do problema através da teoria dos grafos, e uma solução tridimensional. Esta pesquisa destaca como a matemática pode revelar a complexidade por trás de problemas aparentemente simples.

Palavras-chave: Matemática; Problema das Três Casas; Curva de Jordan; Teorema; Grafos.

ABSTRACT

This paper addresses the "Three House Problem" as a classic puzzle that explores the limitations of plane geometry and its relations with topology and graph theory. The goal of this paper is to demonstrate the impossibility of solving the problem in a two-dimensional plane, using the Jordan Curve Theorem, and to investigate the prediction of a solution in three-dimensional space. The motivation arose from a Complex Variables class, where the challenge of connecting three houses to three utilities without crossing the connections was proposed. After verifying the impossibility in the plane, the study delved into mathematical theories to explain this restriction and explore a feasible solution in \mathbb{R}^3 . The paper presents a detailed analysis of the attempted solution in the plane, theoretical foundation with Jordan's Theorem, a study of the origin of the problem through graph theory, and a three-dimensional solution. This research highlights how mathematics can reveal the complexity behind apparently simple problems.

Keywords: Mathematics. Three-House Problem. Jordan Curve.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação do Problema das Três Casas.....	10
Figura 2 – Ligação do serviço de gás (X).....	12
Figura 3 – Ligação dos serviços X e Y a todas as casas.	12
Figura 4 – Ligação de todos os serviços a todas as casas.	13
Figura 5 – Ligação dos serviços Y e Z a todas as casas.....	13
Figura 6 – Ligação de todos os serviços.....	14
Figura 7 – Reorganização das casas e dos serviços.	14
Figura 8.....	17
Figura 9.....	18
Figura 10 – Curva fechada simples	22
Figura 11 – Curva não simples.....	23
Figura 12 – O Problema das Três Casas dividido em três regiões.	23
Figura 13 – Toroide.....	27
Figura 14 – Toro visto como a superfície de uma xícara.	28
Figura 15 – Representação do problema no toro.	28

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	ABORDAGENS INTUITIVAS INICIAIS.....	12
3	O TEOREMA DA CURVA DE JORDAN.	16
3.1	DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA CURVA DE JORDAN.....	16
3.2	RELACIONANDO O TEOREMA DA CURVA DE JORDAN COM O PROBLEMA DAS TRÊS CASAS.....	22
4	A TEORIA DOS GRAFOS E O PROBLEMA DAS TRÊS CASAS NO PLANO (\mathbb{R}^2).....	25
5	ANALISANDO O PROBLEMA DAS TRÊS CASAS NO ESPAÇO (\mathbb{R}^3).	27
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	29
	REFERÊNCIAS.....	30
	APÊNDICE A – NOTAÇÃO	32

1 INTRODUÇÃO

O Problema das Três Casas é um enigma clássico que desafia a intuição e a percepção espacial. Podemos enunciá-lo da seguinte forma “Suponha que três casas precisem ser conectadas às companhias de água, gás e eletricidade, com uma linha separada de cada casa para cada companhia. Será que, existe uma maneira de fazer todas as nove conexões sem que nenhuma das linhas se cruze?”

Apesar de sua aparente simplicidade, o problema revela limitações fundamentais da geometria plana e está intimamente relacionado com a topologia e a teoria dos grafos.

Na *Figura 1* temos uma representação do Problema das Três Casas. É importante ressaltar que podemos rearranjar as casas e as empresas da forma que preferirmos, desde que permaneçam no plano.

Figura 1 – Representação do Problema das Três Casas.



Fonte: adaptado pelo autor a partir de (Martins, 2014).

A motivação para desenvolver este trabalho de TCC surgiu durante uma aula da disciplina de Variáveis Complexas, oferecida no curso de Licenciatura em Matemática do IFPB - Campina Grande. Na ocasião, fomos desafiados a resolver o conhecido Problema das Três Casas, acreditando inicialmente que uma solução intuitiva fosse possível. No entanto, ao aprofundarmos a investigação na geometria envolvida, ficou evidente que o problema era insolúvel no plano bidimensional. Essa percepção despertou um interesse maior pela fundamentação matemática dessa impossibilidade, e sob a orientação do professor, fomos incentivados a explorar teorias mais avançadas, como o Teorema da Curva de Jordan e os princípios da topologia. Essa jornada acadêmica de descoberta foi o ponto de partida para o

desenvolvimento deste trabalho, que busca entender e demonstrar matematicamente as limitações e soluções associadas ao problema.

Este problema está relacionado à teoria dos grafos, inicialmente desenvolvida por Leonhard Euler (1707-1783) em sua tentativa de resolver o famoso enigma das Pontes de Königsberg. No entanto, o foco deste trabalho não terá um aprofundamento na teoria dos grafos, mas sim a interpretação do Problema das Três Casas por meio dos grafos planares e o Teorema da Curva de Jordan. A questão central deste estudo é investigar o motivo da insolubilidade do problema no plano bidimensional fornecendo uma demonstração para explicar essa impossibilidade. Além disso, será explorada a possibilidade de resolver o problema no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 , buscando compreender as condições possíveis para chegar a uma solução nesse contexto.

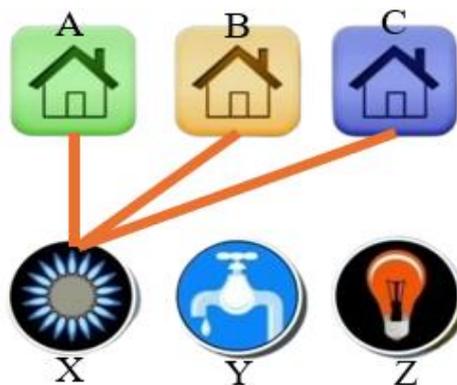
A fim de encontrar uma resposta para nossa pergunta, estudaremos alguns assuntos importantes ao longo do trabalho para chegarmos a uma conclusão a respeito do Problema das Três Casas. No capítulo 1 foram elaboradas algumas tentativas de resolver o problema seguindo as regras, onde deveríamos ligar os serviços as casas sem que haja cruzamento entre as tubulações. No capítulo 2 a fim de justificar matematicamente a impossibilidade do problema recorreremos ao Teorema da Curva de Jordan para fundamentar o resultado principal. No capítulo 3 exploramos um pouco da origem do nosso problema através da teoria dos grafos e a relação de Euler. No capítulo 4, em busca de uma solução, resolvemos mudar as regras do problema e transporta-lo para o espaço tridimensional, onde conseguimos encontrar uma resposta para nosso questionamento.

Este estudo não apenas ilustra a complexidade e a beleza do Problema das Três Casas, mas também mostra como a matemática, nos ajuda a interpretar e resolver problemas que, à primeira vista, parecem insolúveis.

2 ABORDAGENS INTUITIVAS INICIAIS.

O desafio do Problema das Três casas é conectar as três casas, as quais denotaremos aqui por casa A, casa B e casa C, aos três serviços, que denotaremos por X, Y e Z, sem que as conexões dos serviços prestados se cruzem. Intuitivamente parece ser fácil de resolver, então vejamos nossa primeira tentativa de resolver o problema.

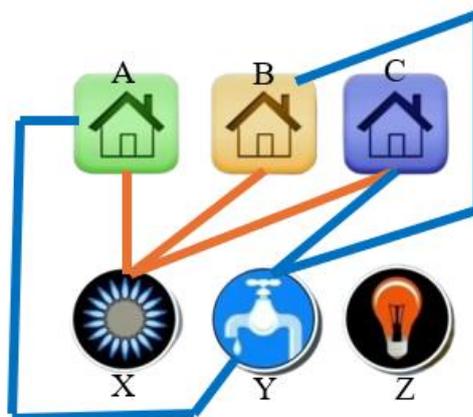
Figura 2 – Ligação do serviço de gás (X).



Fonte: elaboração do autor.

Na *Figura 2* fizemos a ligação do serviço de gás (X) a todas as casas (A, B e C).

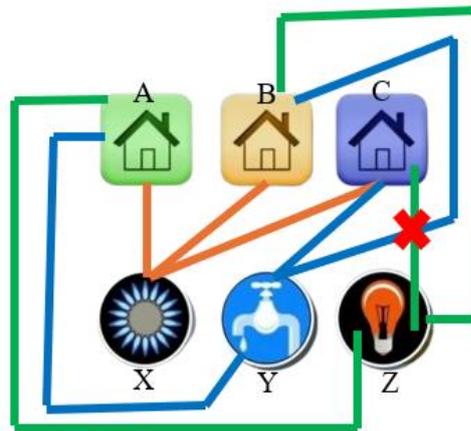
Figura 3 – Ligação dos serviços X e Y a todas as casas.



Fonte: elaboração do autor.

Na *Figura 3* fizemos as ligações dos serviços X e Y a todas as casas, faltando agora ligarmos apenas o serviço Z as casas A, B e C. Vejamos então o resultado na *Figura 4*.

Figura 4 – Ligação de todos os serviços a todas as casas.

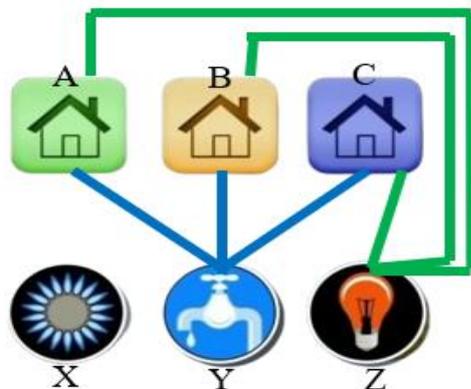


Fonte: elaboração do autor.

Observamos que ao ligarmos o último serviço (Z) a todas as casas ocorre o cruzamento entre os serviços Y e Z, o que impacta na não solução do Problema das Três casas, pois não deveria haver cruzamento entre os serviços.

A título de ilustração consideremos uma abordagem entre as ligações de forma diferente, trocando a ordem das conexões iniciais na tentativa de resolver o problema. Vejamos então a *Figura 5*.

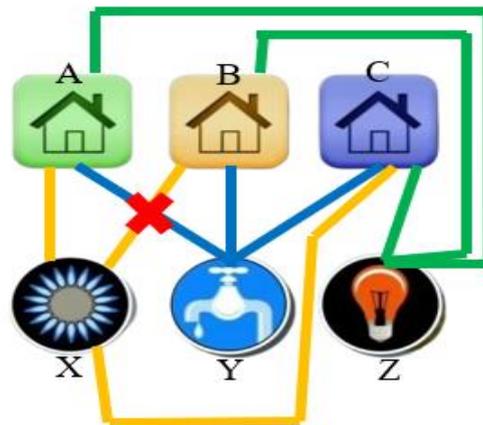
Figura 5 – Ligação dos serviços Y e Z a todas as casas.



Fonte: elaboração do autor.

Na *Figura 5* optamos por iniciar a ligação do serviço Y as casas e depois a ligação do serviço Z. vamos agora fazer a ligação do último serviço.

Figura 6 – Ligação de todos os serviços.

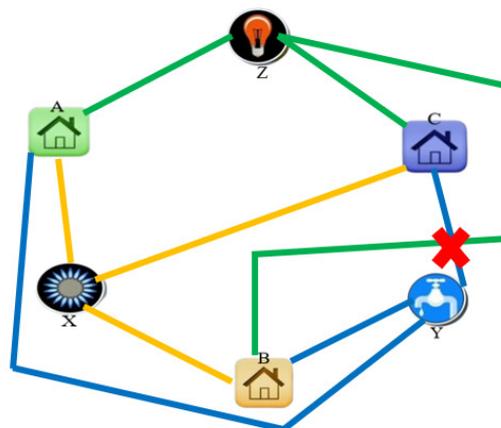


Fonte: elaboração do autor.

Observamos que ao tentar mudar a ordem de ligação dos serviços não mudou o nosso resultado, ainda assim continuamos com um cruzamento entre os serviços X e Y, o que não pode ocorrer.

Como última tentativa intuitiva, vamos reorganizar as casas e os serviços na tentativa de encontrar uma solução.

Figura 7 – Reorganização das casas e dos serviços.



Fonte: elaboração do autor.

Na *Figura 7* mesmo após a realocação das casas e dos serviços ficou constatado que ainda acontece cruzamento entre os serviços. Portanto a pergunta que fica é, será impossível encontrar uma solução para este problema?

A fim de responder esta pergunta iremos explorar a conexão do problema com o Teorema das Curvas de Jordan que será estudado no próximo capítulo com maiores detalhes.

3 O TEOREMA DA CURVA DE JORDAN.

O “Teorema das Curva de Jordan” recebe esse nome em homenagem ao matemático Camille Jordan (1838 - 1922), que, no final do século XIX, através dos seus estudos sobre análise complexa, obteve o seguinte resultado: Dada uma curva fechada e simples, é possível dividir o plano em duas regiões abertas, uma limitada e outra não, cuja fronteira comum entre elas é a curva dada. Apesar de parecer um teorema intuitivo, sua demonstração é um tanto quanto complexa. A “prova” dada por Jordan (o primeiro a publicar, em 1887) não era satisfatória, o mesmo admitia o teorema válido no caso das curvas serem poligonais; o primeiro resultado satisfatório da prova deste teorema foi dado pelo matemático Oswald Veblen¹ (1880 - 1960), em 1905.

3.1 DEMOSNTRAÇÃO DO TEOREMA DA CURVA DE JORDAN.

Com o intuito de entendermos melhor a relação que faremos entre o Teorema das Curvas de Jordan e O Problema das Três Casas, vamos inicialmente definir e demonstrar este belíssimo teorema. Neste capítulo iremos assumir que o leitor possui familiaridade com certos tópicos, além disso indicamos as referências (Castro et al.,1996), (Santos, 2010) e (Sobreira; Samuel, 2020) para uma leitura aprofundada.

Teorema 3.1.1 *Sejam $c : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan e $M \subset \mathbb{R}^2$ o seu traço. Então, $\mathbb{R}^2 - M$ tem exatamente duas componentes conexas G_0 e G_1 , onde uma delas é limitada, uma é ilimitada, e M é fronteira comum das duas.*

A demonstração desse resultado será dividida em três etapas, sendo que cada uma delas constitui uma afirmação para a qual apresentaremos uma demonstração.

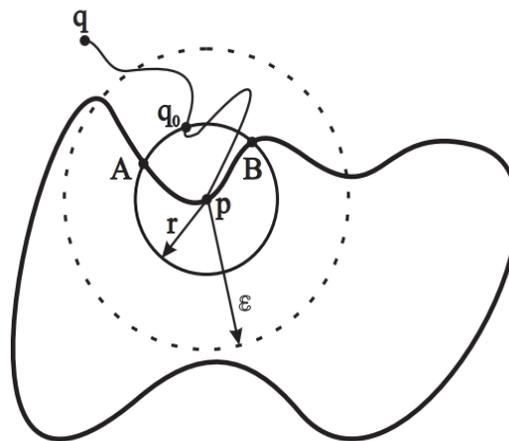
Afirmação 3.1.2. Para qualquer componente conexa G de $\mathbb{R}^2 \setminus M$, temos que $M = \partial G$.

Demonstração. Em primeiro lugar vamos verificar que G é aberto. Com efeito, sendo $\mathbb{R}^2 - M$ aberto e $G \subset \mathbb{R}^2 - M$, dado $a \in G$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 - M$. Mas $B(a, \varepsilon)$ é um conexo que contém a , logo $B(a, \varepsilon) \subset G$. Sendo assim, $\partial G = G \cap (\mathbb{R}^2 - G)$. Uma vez que $G \neq \mathbb{R}^2$, G não pode ser fechado (lembramos o leitor que os únicos abertos-fechados em \mathbb{R}^2 são o \emptyset e o próprio \mathbb{R}^2). Assim sendo $\partial G \neq \emptyset$. Logo, dado $p \in \partial G$ implica

¹ Oswald Veblen foi um matemático, geômetra e topólogo estadunidense. Em cujo trabalho se encontra aplicação à física atômica e à teoria da relatividade. Provou o teorema da curva de Jordan, em 1905.

$p \notin G$ implica $p \in M$. (claro, se p não pertence a nenhuma componente conexa de $\mathbb{R}^2 - M$, por definição $p \notin \mathbb{R}^2 - M$). Desta forma, a primeira parte dessa afirmação está demonstrada, ou seja $\partial G \subset M$. Seja agora $p \in M$. Vamos considerar a bola aberta de centro p e raio $\varepsilon > 0$ arbitrário e mostrar que $B(p, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$, ou seja $p \in \bar{G}$. Com esse resultado e de posse do fato de que $p \in \mathbb{R}^2 - G$, temos que $p \in \bar{G} \cap (\mathbb{R}^2 - G) = \partial G$, de onde segue que $M \subset \partial G$, estando então demonstrada a afirmação. Escolhemos $\varepsilon > 0$ de forma tal que $M \subset B(p, \varepsilon)$. Seja S uma circunferência de raio $r < \varepsilon$ e centro p . Sejam ainda A e B os primeiros pontos de intersecção de S com M quando se percorre M , a partir de p , nas duas direções possíveis.

Figura 8.



Fonte: retirado de (Castro et al.,1996)

Suponhamos, para melhor fixar as ideias, que $p = c(0, 1)$, $A = c(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ e $B = c(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$ com $0 < \theta_0 < \theta_1 < 2\pi$.

Consideremos $N = \{c(\cos \theta, \sin \theta); \theta_0 < \theta < \theta_1\}$, sendo evidentemente o traço de um arco de Jordan. Seja $q \in G$. Suponhamos que $q \notin B(p, \varepsilon)$, do contrário teríamos que $B(p, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$ e nada mais nos restaria a fazer.

Uma vez que N é o traço de um arco de Jordan, $\mathbb{R}^2 - N$ é convexo. Assim podemos achar uma curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - N$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Sejam $t_0 = \sup\{t \in [0, 1]; \gamma(t) \in S\}$ e $q_0 = \gamma(t_0)$. Observemos que:

- $t_0 \neq 1$ pois, se $t_0 = 1$, então $q_0 = \gamma(1) = q \notin S$, uma contradição;
- $q_0 \notin M$ pois, caso contrário, $q_0 \in (M \cap S) \subset N$, o que contraria o fato de que $q_0 \notin N$.

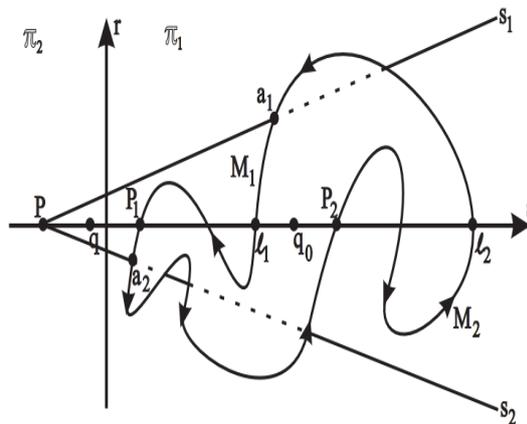
Façamos a restrição $\gamma|_{[t_0, 1]} : [t_0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - N$. Desta forma,

$\gamma([t_0, 1]) \subset \mathbb{R}^2 - M$, pois se $\gamma([t_0, 1]) \cap M \neq \emptyset$, existiria um $t_1 \in (t_0, 1)$ tal que $\gamma(t_1) \in M - N$ e $\gamma(t_1)$ pertenceria ao disco que tem S como fronteira. Consequentemente existiria um $t_2 > t_0$ tal que $\gamma(t_2) \in S$ o que se traduz em um absurdo em vista da definição de t_0 . Assim, $\gamma([t_0, 1])$ é um caminho todo contido em $\mathbb{R}^2 - M$, estando, portanto, contido em uma mesma componente conexa, ou seja G . Concluímos desta forma que $q_0 \in B(p, \varepsilon) \cap G$, ficando encerrada a demonstração.

Afirmção 3.1.3. Existe $q_0 \in \mathbb{R}^2 - M$ tal que $i(q_0, c) = \pm 1$.

Demonstração. Como M é um conjunto compacto, existe uma semi-reta $r \subset \mathbb{R}^2$ tal que M está contido em um dos dois semi-planos abertos determinados por r .

Figura 9.



Fonte: retirado de (Castro et al., 1996)

Denotemos por δ_1 e δ_2 tais semi-planos de forma que $M \subset \pi_1$. Sejam $P \in \pi_2$ e s_1 uma semi-reta de origem P que intercepta M .

Mostremos que $M \not\subset s_1$. De fato, suponhamos que M seja uma curva fechada toda contida em s_1 . Desta forma, M seria um segmento $I = [c(\cos \theta_0, \sin \theta_0), c(\cos \theta_1, \sin \theta_1)]$ com $0 < \theta_0 < \theta_1 < 2\pi$. Neste caso, S^1 ficaria dividido em dois arcos $\Gamma_1 = \{(c \cos \theta, c \sin \theta); \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1\}$ e $\Gamma_2 = \{(c \cos \theta, c \sin \theta); 0 \leq \theta < \theta_0 \text{ ou } \theta_1 < \theta \leq 2\pi\}$ com $c(\Gamma_1) = c(\Gamma_2) = I$, o que contradiz a injetividade de c .

Assim sendo existe uma outra semi-reta s_2 de origem P que encontra M . Uma vez que $s_1 \cap M \neq \emptyset$ e $s_2 \cap M \neq \emptyset$, consideremos $a_i \in M \cap s_i$ tais que a distância $d(P, a_i)$ seja mínima, ($i = 1, 2$). Desta forma, a_1 e a_2 são os primeiros pontos de intersecção, a contar de P , de s_1 e s_2 com M .

Sejam $\theta_1 < \theta_2$ tais que $c(\cos \theta_i, \sin \theta_i) = a_i, i = 1, 2$. Temos então que os pontos $(\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ dividem S_1 em dois arcos Γ_1 e Γ_2 . Sejam $M_i = c(\Gamma_i)$, onde cada M_i é o traço de um arco de Jordan γ_i . Consideremos os conjuntos

$$N_1 = M_1 \cup [a_2, P] \cup [P, a_1] \text{ e } N_2 = M_2 \cup [a_1, P] \cup [P, a_2],$$

que evidentemente são traços de duas curvas de Jordan c_1 e c_2 . Afirmamos agora que, dado $q \notin N_1 \cup N_2$, tem-se

$$(5.1) \quad i(q, c) = i(q, c_1) + i(q, c_2).$$

De fato, oriente N_1 de modo que a_2 preceda P e N_2 de modo que a_1 preceda P . Nesse caso, sendo φ_1 e φ_2 funções angulares para c_1 e c_2 com respeito a q e a uma semi-reta a de origem q , temos que os incrementos de φ_1 e φ_2 ao longo de $[a_2, P] \cup [P, a_1]$ e $[a_1, P] \cup [P, a_2]$ são opostos. Desta forma obtemos a igualdade em (5.1).

Escolhemos agora $q \in \delta_2$ no interior do triângulo a_1Pa_2 . Afirmamos que $i(q, c_i) = \pm 1, i = 1, 2$. Com efeito, dada a semi-reta s de origem q passando por P , esta intercepta c_i em P . Assim, de acordo com o método de determinação gráfica do índice de rotação de uma curva plana, segue que $i(q, c_i) = \pm 1$, dependendo da orientação escolhida.

A semi-reta oposta a s , denotada por s' intercepta N_i . Do contrário, se $s' \cap N_i = \emptyset$, existiria $a \in s'$ tal que $a \notin N_i$. Nesse caso, se $a \in s'$ e $s_1 \cap s_2 \cap s' = \emptyset$, então $a \notin [a_2, P] \cup [P, a_1]$. Como $N_i = M_i \cup [a_2, P] \cup [P, a_1]$, segue que $a \notin M_i$. Uma vez que $s_1 \cap M_i \neq \emptyset$ e M_i é o traço de um arco contínuo, segue que $s_2 \cap M = \emptyset$, pois s' está contida na região delimitada pelas retas s_1, s_2 e r , sem no entanto coincidir com nenhuma delas. Assim sendo, é impossível obtermos uma curva contínua ligando s_1 a s_2 sem interceptar s' . Chegamos então a um absurdo, pois já havíamos mostrado que $s_2 \cap M \neq \emptyset$. Assim $s' \cap N_i \neq \emptyset$ e $s' \cap M_i \neq \emptyset$.

Sejam P_i e $l_i, i = 1, 2$, os pontos da intersecção de s' com M_i , respectivamente o mais próximo e o mais distante de q . Admitamos ainda que P_1 seja o primeiro ponto em que s' encontra M (observe que apesar de P_1 ser o ponto da intersecção de s' com M_1 mais próxima de q , isto não significa que ele é o primeiro ponto em que s' encontra M). Tendo em vista que $s' \cap n_i \subset M_i$ (pois dado $a \in s'$ e $a \in N_i$, como $N_i = M_i \cup [a_2, P] \cup [P, a_1]$ segue que $a \in M_i$), podemos escolher $q_0 \in \delta_1 \cap s'$, com $q_0 \notin (N_1 \cup N_2)$ e tal que $l_1 \in [q_0, P_1]$, ou seja q_0 pode ser escolhido de forma a estar na reta s' à direita de l_1 . Além disso, q_0 pode ser escolhido de modo que $[l_1, q_0] \cap M_2 = \emptyset$, o que garante que q_0 está entre l_1 e P_2 , ou seja, o ponto mais distante de q na intersecção de s' com M_1 e o ponto mais próximo de q na intersecção com M_2 .

Desta forma, temos que $i(q_0, c_1) = 0$, pois a semi-reta de origem q_0 contida em s' não intercepta N_1 .

Mostremos que $i(q_0, c_2) = i(q, c_2) = \pm 1$. Para isso, consideremos o conjunto reunião do segmento $[q_0, l_1]$, do arco de M_1 entre l_1 e P_1 e do segmento $[P_1, q]$. Esse conjunto é o traço de uma curva $\omega: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\omega(0) = q_0$ e $\omega(1) = q$. Observemos que $\omega([0, 1]) \cap N_2 = \emptyset$, uma vez que

- $[q_0, l_1] \cap N_2 = \emptyset$, pois q_0 foi escolhido de forma que $[q_0, l_1] \cap M_2 = \emptyset$ e $[q_0, l_1] \subset s' \cap \pi$.

- $M_1 \cap N_2 = \{a_1, a_2\}$.

- $[P_1, q] \cap N_2 = \emptyset$, pois P_1 é o primeiro ponto onde a reta s' intercepta M e é o ponto mais próximo de q em relação a todos os outros pontos onde s' intercepta M_1 .

Visto que q e q_0 podem ser ligados por um caminho contido em $\mathbb{R}^2 - N_2$, segue que q e q_0 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^2 - N_2$, donde $i(q_0, c_2) = i(q, c_2) = \pm 1$.

Como $i(q_0, c) = i(q_0, c_1) + i(q_0, c_2)$ segue que $i(q_0, c) = \pm 1$. Portanto, existe um ponto $q_0 \in \mathbb{R}^2 - M$ tal que $i(q_0, c_2) = \pm 1$.

Afirmção 3.1.4. $\mathbb{R}^2 - M$ tem exatamente duas componentes conexas, uma ilimitada de índice zero e uma limitada de índice ± 1 .

Demonstração. Consideremos inicialmente o caso particular em que o traço M contém um segmento de reta que denotaremos por $[a, b]$. Já sabemos que $\mathbb{R}^2 - M$ tem pelo menos duas componentes conexas com fronteira comum M . Seja $p \in [a, b]$ tal que $p \neq a$ e $p \neq b$. Considere também o conjunto

$$A = \{\|p - x\|; x \in M - [a, b]\}$$

e seja $\varepsilon = \inf A$. Vamos mostrar que $\varepsilon \neq 0$. De fato, como ε é o $\inf A$, existe uma sequência $x_n \in M - [a, b]$ tal que $\|p - x_n\| \rightarrow \varepsilon$. Considere $t_1 \in S^1$ tal que $c(t_1) = p$ e suponhamos, por absurdo, que $\varepsilon = 0$. Desta forma, pela continuidade da função norma, deveríamos ter $x_n = c(t_n) \rightarrow p$, onde $t_n \notin (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e algum $\delta > 0$. Como S^1 é compacto, existe t_{n_j} tal que $t_{n_j} \rightarrow t_0 \notin (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$. Desta forma, teríamos que $t_{n_j} \rightarrow t_0$ implicando $c(t_{n_j}) \rightarrow c(t_0)$. Porém $c(t_{n_j}) = t_{n_j} \rightarrow p$, donde concluímos que $c(t_0) = p = c(t_1)$ o que fere a injetividade de c . O absurdo surgiu do fato de termos considerado $\varepsilon = 0$ e portanto, devemos ter $\varepsilon > 0$. Desta forma teremos

$$B(p, \varepsilon) \cap \{M - [a, b]\} = \emptyset,$$

Logo, $B(p, \varepsilon)$ tem exatamente duas componentes conexas, digamos U_1 e U_2 .

Neste ponto já podemos afirmar que $\mathbb{R}^2 - M$ tem pelo menos duas componentes conexas G_0 e G_1 tais que $U_0 \subset G_0$ e $U_1 \subset G_1$. Seja agora G uma outra componente conexa de $\mathbb{R}^2 - M$. Como $p \in \partial G$ devemos ter $B(p, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$. Portanto $G = G_0$ ou $G = G_1$. Desta forma, concluímos que $\mathbb{R}^2 - M$ tem exatamente duas componentes conexas.

Tratemos agora o caso geral. Seja G_1 uma componente limitada de índice ± 1 . Seja $p \in G_1$ e r uma reta passando por p . As duas semi-retas determinadas por p e r interceptam M pois, caso contrário, o índice seria nulo. Sejam a e b os primeiros pontos, ao longo das semi-retas, onde a reta intercepta M . Denotemos tais pontos por $a = c(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ e $b = c(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$ com $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 < 2\pi$.

Consideremos agora os dois arcos Γ_1 e Γ_2 de S^1 dados por

$$\Gamma_1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) ; \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1\}$$

e

$$\Gamma_2 = \{(\cos \theta, \sin \theta) ; 0 \leq \theta \leq \theta_0 \text{ ou } \theta_1 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Sejam $M_i = c(\Gamma_i)$ os traços de arcos de Jordan correspondentes. Consideremos também os conjuntos $N_1 = M_1 \cup [b, a]$ e $N_2 = M_2 \cup [a, b]$. Observemos que N_1 e N_2 são traços de curvas de Jordan $c_i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Cada N_i contém um segmento, logo $\mathbb{R}^2 - N_i$ tem exatamente duas componentes conexas, uma limitada L_i de índice ± 1 , e outra ilimitada I_i de índice 0. Lembremos agora que, para todo $q \neq N_1 \cup N_2$, tem-se $i(q, c) = i(q, c_1) + i(q, c_2)$.

Nossa intenção é mostrar que $I = \mathbb{R}^2 - (\overline{L_1} \cup \overline{L_2})$ e $L = L_1 \cup L_2 \cup (a, b)$ são as duas componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - M$. Notemos inicialmente que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \cap M = \emptyset$ e $B(p, \varepsilon)$ contém pontos de L_1 e L_2 e está contida em L . Temos também $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ pois, se existisse $q \in L_1 \cap L_2$ teríamos

$$i(q, c) = i(q, c_1) + i(q, c_2) = i(q_1, c_1) + i(q_2, c_2),$$

onde $q_i \in L_i$ são escolhidos de forma que $q_i \in B(p, \varepsilon)$. Como $i(q_i, c_i) = \pm 1$, concluiríamos que $i(q, c) \in \{-2, 0, 2\}$, o que é absurdo, visto que, como a bola é convexa, $i(q, c) = i(p, c) = \pm 1$. Portanto, podemos afirmar que $L_1 \subset I_2$ e $L_2 \subset I_1$.

Vamos agora provar que L é conexo. Como L_1, L_2 e (a, b) são conjuntos abertos, L é aberto e portanto, é suficiente mostrarmos que L é conexo por caminhos. Devemos mostrar que, dados $x, y \in L$ e quaisquer, existe sempre um caminho contido em L ligando x a y . Vamos supor $x \in L_1$ e $y \in L_2$, pois os outros casos são imediatos. Conforme visto anteriormente existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \cap M = \emptyset$ e $B(p, \varepsilon)$ contém pontos de L_1 e L_2 e está contida em L . Sejam $x_0 \in B(p, \varepsilon) \cap L_1$ e $y_0 \in B(p, \varepsilon) \cap L_2$. Como L_1 é conexo por caminhos existe um

caminho l_1 contido em $L_1 \subset L$ ligando x a x_0 . Analogamente, existe l_3 ligando y a y_0 . Como a bola é conexa por caminhos existe l_2 contido em $B(p, \varepsilon) \subset L$ ligando x_0 a y_0 . Portanto o caminho l que concatena l_1, l_2 e l_3 está contido em L e liga x a y . Claramente $L_1 \cup L_2 \cup (a, b) = L \subset \mathbb{R}^2 - M$.

Mostremos agora que $I = \mathbb{R}^2 - (L_1 \cup L_2)$ é conexo. Para tanto, observemos que $\mathbb{R}^2 - L_i$ é conexo porque L_i é compacto e conexo. Também $L_1 \cap L_2 = [a, b]$ é conexo. Essas observações nos permitem concluir que I é conexo. Temos então que $\mathbb{R}^2 - M = I \cup L$, com I e L conexos e $I \cap L = \emptyset$.

Assim, $\mathbb{R}^2 - M$ tem exatamente duas componentes conexas, uma ilimitada I de índice zero e outra limitada L de índice ± 1 . Em vista das três últimas afirmações, fica então demonstrado o Teorema de Jordan. ■

3.2 RELACIONANDO O TEOREMA DA CURVA DE JORDAN COM O PROBLEMA DAS TRÊS CASAS.

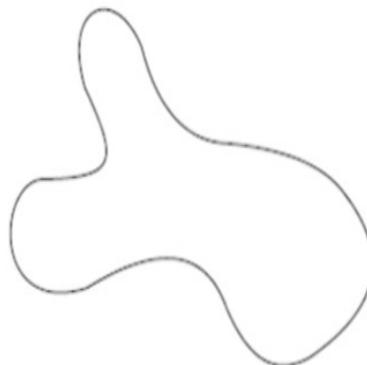
De acordo com as considerações anteriores, observamos os seguintes apontamentos:

Definição 1 Uma curva fechada c em um plano é definida simples se a curva não tiver auto intersecção, ou seja, não se cruzar entre si.

Definição 2 Uma curva fechada c em um plano é definida como não simples se a curva possuir auto intersecção.

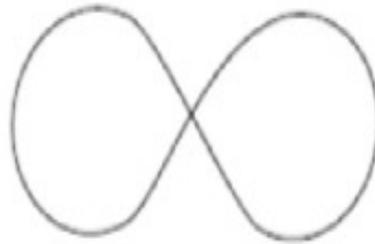
Exemplo 1 Na Figura 10 temos uma curva fechada simples, observe que a mesma não tem nenhuma intersecção, na Figura 11 temos uma curva não simples, pois intersecta a si mesma.

Figura 10 – Curva fechada simples



Fonte: adaptado pelo autor a partir de (Vasconcelos, 2013)

Figura 11 – Curva não simples.



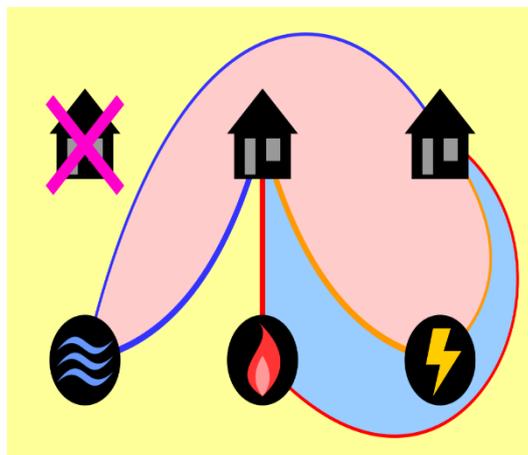
Fonte: adaptado pelo autor a partir de (Vasconcelos, 2013).

Uma característica importante das curvas fechadas e simples, se remete a uma propriedade encontrada no Teorema da Curva de Jordan (Carmo, pág. 474, 2008):

Teorema da Curva de Jordan: Seja $c: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, simples e fechada. $\mathbb{R}^2 - c([0,1])$ resulta em exatamente duas componentes conexas e $c([0,1])$ é a fronteira comum destas componentes.

Corolário 1 Se c é uma curva contínua simples e fechada no plano, então c divide o plano em duas regiões distintas tendo c como fronteira. Dados os pontos P e Q , em regiões distintas, se unirmos P e Q por uma curva contínua l no plano, então l intersecta c . Analisaremos então a figura através do Teorema de Jordan.

Figura 12 – O Problema das Três Casas dividido em três regiões.



Fonte: adaptado pelo autor a partir de (Cmglee, 2021).

Uma casa é temporariamente excluída. As linhas que conectam as casas restantes com os serviços públicos dividem o plano em três regiões. Qualquer que seja a região em que a casa excluída seja colocada, o serviço público com sombreamento semelhante está fora da região.

Pelo Teorema da Curva de Jordan , uma linha que as conecta deve interceptar uma das linhas existentes.

Concluimos então, pelo Teorema da Curva de Jordan, a impossibilidade de resolver o Problema das Três Casas em um plano bidimensional, uma vez que ao fazermos as ligações dos serviços as casas, ao final sobrar uma casa, que pelo que analisamos anteriormente, ela estará fora da fronteira já traçada pela ligação dos serviços as outras casas, logo tornando-se impossível fazer mais uma ligação sem o cruzamento pela fronteira, o que explica a impossibilidade de resolver o problema.

Será abordado no próximo capítulo um estudo simplificado sobre o problema tratado neste trabalho e a teoria dos grafos, a fim de fundamentar melhor este enigma matemático.

4 A TEORIA DOS GRAFOS E O PROBLEMA DAS TRÊS CASAS NO PLANO (\mathbb{R}^2).

Ressaltamos, que neste capítulo, não haverá grande aprofundamento matemático, uma vez que nosso objetivo será apenas interpretar o Problema das Três Casas através da teoria dos grafos. Sendo assim, os apontamentos estudados anteriormente estão baseados nas referências (Vasconcelos, 2013), (Costa, 2011) e (Sautoy, 2018).

A teoria dos grafos teve suas origens com o notável matemático Leonhard Euler (1707-1783), nascido em Basileia, no norte da Suíça. Segundo (Sautoy, 2018), desde cedo Euler demonstrou grande habilidade com números e cálculos, olhando-os com a mesma naturalidade com que respirava. Aos treze anos, ingressou na Universidade de Basileia, onde rapidamente se destacou e se tornou discípulo de “Jean Bernoulli²”.

O Problema das Três Casas pode ser representado por um grafo bipartido completo $K_{3,3}$, onde há dois conjuntos de vértices: um conjunto representando as três casas e outro representando as três utilidades (água, gás e eletricidade). O desafio consiste em conectar cada casa a todas as utilidades sem que as conexões se cruzem, usando apenas um plano bidimensional.

Matematicamente, o grafo $K_{3,3}$ é um exemplo clássico de um grafo não planar, o que significa que ele não pode ser desenhado no plano sem que as arestas se interceptem. Essa impossibilidade é formalizada pelo Teorema de Kuratowski³, que afirma que um grafo é não planar se ele contiver uma subdivisão de $K_{3,3}$ ou K_5 (o grafo completo com cinco vértices). No caso do Problema das Três Casas, $K_{3,3}$ é um subgrafo proibido para planitude.

Para melhor entender a limitação do problema em \mathbb{R}^2 , podemos utilizar o Teorema de Euler para grafos planares. Esse teorema estabelece que, para um grafo conexo planar com V vértices, A arestas e F faces, a seguinte relação é válida:

$$V - A + F = 2$$

No caso do grafo bipartido $K_{3,3}$, sabemos que $V = 6$ (três casas e três utilidades) e $A = 9$ (uma conexão de cada casa para cada utilidade). Ao aplicar a fórmula de Euler, vemos que não há como satisfazer a equação com $A = 9$, pois seriam necessárias cinco faces, $F = 5$, porém neste problema cada face é formada por 4 arestas, logo seria necessário um total de 10

² Jean Bernoulli, matemático e médico suíço, nascido em 1667, natural de Basileia, e falecido em 1748. O impacto dos resultados das suas investigações levou-o a ser conhecido como o "Arquimedes do seu tempo"

³ Kazimierz Kuratowski, foi um matemático polonês. Seu campo principal de pesquisas foi lógica, trabalhou na área de topologia e teoria de conjuntos. Ele é mais conhecido por seu teorema dando uma condição necessária e suficiente para que um grafo seja planar.

arestas para formar estas cinco faces, o que se torna impossível pois só temos 9 arestas disponíveis para fazer as ligações dos serviços com as casas, o que prova que o grafo não pode ser planar. Ou seja, não é possível desenhar $K_{3,3}$ no plano sem cruzar as arestas, o que matematicamente justifica a impossibilidade de resolver o problema das três casas no plano.

A relação entre o Problema das Três Casas e grafos planares reside no fato de que o grafo que representa o problema, $K_{3,3}$, não pode ser desenhado de maneira planar, evidenciando a impossibilidade de se resolver o problema no plano bidimensional. Essa conexão exemplifica de forma clara o conceito de grafos não planares e a importância de teoremas como o de Kuratowski e de Euler para o estudo da planitude em grafos.

No entanto, observando o mundo real este problema tem solução, pois os serviços de água, gás e eletricidade em momento algum se cruzam definitivamente, portanto veremos posteriormente, a análise deste problema no espaço tridimensional (\mathbb{R}^3), onde restrição de planitude não se aplica, permitindo que o problema seja resolvido em um espaço tridimensional, o que explora as particularidades topológicas entre diferentes dimensões.

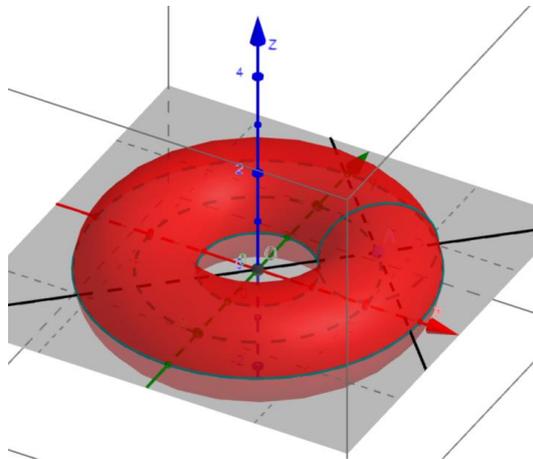
5 ANALISANDO O PROBLEMA DAS TRÊS CASAS NO ESPAÇO (\mathbb{R}^3).

Relatado nos capítulos anteriores, vimos que não tem solução para o Problema das Três Casas, tanto por meio dos Grafos Planares como pelas Curvas de Jordan no \mathbb{R}^2 .

Podemos ir além do \mathbb{R}^2 para encontrar uma possível solução para esse problema. Se começarmos a pensar no Problema das Três Casas sendo um problema analisado no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 .

A fim de exemplificar a resolução do problema no espaço (\mathbb{R}^3), usaremos o corpo geométrico toroide, Figura 13, mais conhecido como Toro, ele pode ser construído matematicamente como o produto de dois círculos, o que significa que cada ponto de um círculo é combinado com todos os pontos de outro círculo, criando uma superfície fechada e tridimensional. O toro é um exemplo de um objeto topológico.

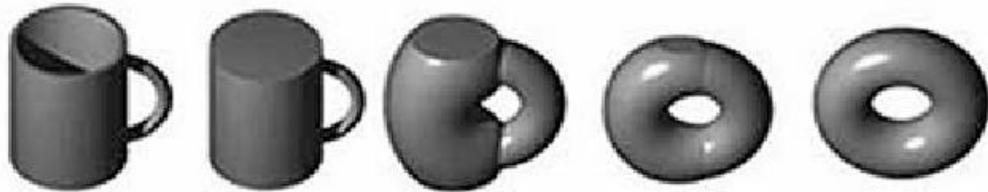
Figura 13 – Toroide.



Fonte: elaboração do autor.

Na topologia, um homeomorfismo, de maneira simplificada, seria preservar as propriedades topológicas dos espaços, ou seja, ele transforma um espaço no outro sem "rasgar" ou "colar" partes, apenas distorcendo ou esticando. Por exemplo, uma xícara de café com alça e um toro (rosquinha) são homeomorfos, porque é possível deformar uma xícara em um toro sem cortar ou colar. Veja a Figura 14.

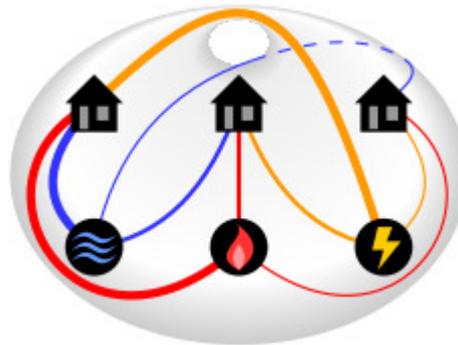
Figura 14 – Toro visto como a superfície de uma xícara.



Fonte: retirado de (Scient figure, 2015).

Ao representar o Problema das Três Casas no Toro ao invés de no plano bidimensional, vamos ter dois tipos da Curva de Jordan cujo complemento é conectado por arcos, sendo possível chegarmos a uma solução do problema em estudo, quando utilizamos uma figura geométrica contendo um orifício, como o Toro, permite representações de um grafo não planar. A partir do momento que temos uma dimensão a mais, este fato traz a possibilidade de solucionar o problema. Como mostrado na Figura 15, temos a possibilidade de ligar as casas com as utilidades através das “alças” que temos na nossa figura.

Figura 15 – Representação do problema no toro.



Fonte: retirado de (Wikipedia, 2024).

Portanto, evidenciamos que ao mudar as regras do problema e levá-lo ao espaço tridimensional (\mathbb{R}^3), conseguimos elaborar uma maneira criativa de chegar a uma solução.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho apresentamos uma solução para o enigma das Três Casas, para tal feito foi necessário o estudo e análise bibliográfico dos assuntos abordados, tentando formalizar de maneira mais clara possível o entendimento de tais conceitos apresentados.

Assim, como resultado, vemos que realmente não existe solução do problema no plano bidimensional, isto foi provado através do Teorema da Curva de Jordan e a Teoria dos Grafos. Entretanto, podemos ter uma solução quando trabalhamos com esse problema no espaço tridimensional, utilizamos como exemplo o corpo geométrico Toro, no mesmo podemos fazer as devidas ligações sem que haja quaisquer cruzamentos.

Consideramos que, com as conclusões que chegamos durante o trabalho o leitor possa seguir estudando outras aplicações desta temática, como por exemplo, de que forma este problema pode ser resolvido por meio da Fita de Möbius⁴ ou quais características seriam necessárias para tornar esse problema impossível no espaço tridimensional (\mathbb{R}^3).

⁴ Uma fita de Möbius ou faixa de Möbius é um espaço topológico obtido pela colagem das duas extremidades de uma fita, após efetuar meia volta em uma delas. Deve o seu nome a August Ferdinand Möbius, que a estudou em 1858

REFERÊNCIAS

BY CMGLEE - **Own work**, CC BY-SA 4.0,

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=100503887>. Acesso em: 26 set. 2024.

CASTRO, Carlos Renato de Melo; JÚNIOR, Claud Wagner G. D.; FERREIRA, Lucas Conque Seco; SASAKI, Luciano Cordeiro; FURTADO, Marcelo Fernandes Bianchini. **O Teorema de Jordan**;p. 47-52, 1996.

COSTA, Polyanna Possani da. **Teoria de Grafos e suas Aplicações**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado)- Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas (UNESP). Rio Claro-SP, 2011.

JURKIEWICZ, S. **Grafos uma introdução**. São Paulo: OBMEP, 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf>. Acesso em: 26 set. 2024.

MARTINS, R. **Isto é Matemática T07E03 O Problema das Três Casas**. 2014. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=dmsuPfpHvI&t=86si>. Acesso em: 26 set. 2018.

NETTO, Samuel Belo Sobreira. **Geometria diferencial das curvas planas**. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Curso de Matemática, Fortaleza-CE, 2020.

REDPILL: **A MATEMÁTICA DA GEOMETRIA TOROIDAL**. Disponível em:

<https://rredpill.blogspot.com/2016/05/a-matematica-da-geometria-toroidal.html?fbclid=IwY2xjawFhWiJleHRuA2FlbQIxMQABHX94zRAXYdv17xrd4p0n5QMK22bxxjDf4A0FmTZOYyLRcZL2zoWR-o7z_Q_aem_-plBMsAo-2frc7pwxmr_sQ>.

Acesso em: 26 set. 2024.

SANTOS. Laís Alegria dos. **O Teorema da Curva de Jordan**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura)- Universidade Federal de São Carlos Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia Departamento de Matemática (UFSCar), São Carlos-SP, 2010.

SAUTOY, M. du. **O enigma resolvido há 300 anos pelo matemático Leonard Euler e que hoje nos permite navegar na internet**. 2018. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-44157282i>. Acesso em: 25 set. 2024.

SCIENTIFIC Figure on ResearchGate. Available from. **Topologias e Tipologias Arquitetônicas**. https://www.researchgate.net/figure/Figura-3-Homeomorfismo-entre-uma-caneca-e-uma-rosquinha_fig3_306349651. 2015. Acesso em: 26 set. 2024.

VASCONCELOS, Luís Anselmo dos Santos. **Teorema de Euler para grafos planares.** Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado)- Universidade Federal de Sergipe (UFS). São Cristóvão - Sergipe, 2013.

WIKIPEDIA Contributors. **Three utilities problem.** Disponível em:
<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Three_utilities_problem&oldid=1221149117>.
Acesso em: 26 set. 2024.

APÊNDICE A – NOTAÇÃO

S^1 - Circunferência de centro na origem e raio unitário

∂G - Fronteira do conjunto G

\overline{G} - O fecho do conjunto G

\mathbb{R}^2 - Plano Cartesiano

\mathbb{R}^3 - Espaço Cartesiano

$\mathbb{R}^2 \setminus M$ - Diferença entre os conjuntos \mathbb{R}^2 e M

$[a, b]$ - Intervalo fechado de extremos a e b

$w([a, b])$ - Imagem da função w no intervalo $[a, b]$

$d(P, \vec{\tau} Q)$ - Distância entre os pontos P e Q

$\|P - Q\|$ - Norma de $P - Q$

$\inf A$ - ínfimo do conjunto A

$\sup A$ - Supremo do conjunto A

(x_n) - Sequência x_n

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
	Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
	R. Tranquílino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de trabalho de conclusão de curso versão final

Assunto:	Entrega de trabalho de conclusão de curso versão final
Assinado por:	Jose Iranildo
Tipo do Documento:	Dissertação
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- José Iranildo Dias da Silva, ALUNO (202021230011) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE, em 14/10/2024 09:41:01.

Este documento foi armazenado no SUAP em 14/10/2024. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1275971

Código de Autenticação: 167e04abae

