Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba

Campus Campina Grande

Curso Superior de Licenciatura em Matemática

Luis Vinicios Oliveira Fernandes

Equações Funcionais: Teoria, Aplicações e Estratégias para Problemas Matemáticos

Campina Grande - PB

2025

Luis Vinicios Oliveira Fernandes

Equações Funcionais: Teoria, Aplicações e Estratégias para Problemas Matemáticos

Trabalho de Conclusão de Curso submetida à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de graduado em Licenciatura em Matemática

Orientador: Prof. Me. Baldoino Sonildo da Nóbrega

Campina Grande - PB

2025

Catalogação na fonte:
Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

F363e Fernandes, Luis Vinicios Oliveira
Equações Funcionais: Teoria, Aplicações e Estratégias para Problemas Matemáticos / Luis Vinicios Oliveira Fernandes. - Campina Grande, 2025.
47f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de Licenciatura em Matemática.) - Instituto Federal da Paraíba, 2025.
Orientador: Prof. Me. Baldoino Sonildo da Nóbrega.

1. Matemática aplicada 2. Ensino de Matemática 3. Equação de Cauchy I.Nóbrega, Baldoino Sonildo da II. Título.

CDU 515.43

Luis Vinicios Oliveira Fernandes

Equações Funcionais: Teoria, Aplicações e Estratégias para Problemas Matemáticos

Trabalho de Conclusão de Curso submetida à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de graduado em Licenciatura em Matemática

Trabalho de conclusão de Curso. Campina Grande - PB, 14 de março de 2025:

Baldoino Sonildo da Nóbrega

Prof. Me. Baldoino Sonildo da Nóbrega
Orientador
IFPB

Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa
Examinador Interno
IFPB

Alex Pereira Bezerra

Prof. Me. Alex Pereira Bezerra
Examinador Externo
UFRPE

Campina Grande - PB
2025

Agradecimentos

Expresso minha mais profunda gratidão à minha mãe (Fabiana de Souza Oliveira) uma empregada doméstica, que mesmo sendo mãe solteira e não tendo acesso a educação me apoiou incondicionalmente. Agradeço a Maria Tereza de Souza, minha querida avó, obrigado por me proporcionar seus conselhos. Manifesto também meu reconhecimento aos mestres que me guiaram no percurso da docência, em especial ao professor que, com dedicação, orienta este trabalho e que foi anteriormente meu estimado docente de Cálculo.

Aos amigos e colegas de curso, registro meu sincero apreço pelo companheirismo ao longo dessa trajetória em especial a Pedro Igor Ribeiro de Araújo Pequeno e Ester Gomes de Figueirêdo.

Reconheço, ainda, a significativa contribuição do Instituto Federal da Paraíba (IFPB), que tem me proporcionado uma educação de excelência desde os anos do ensino médio.

Não posso deixar de falar os nomes daqueles que me mostraram o caminho do conhecimento, aqueles que me inspiraram Poliana Ribeiro dos Santos Bezerra, Baldoino Sonildo da Nóbrega, Edcarla Verissimo de Souza Costa, Cicero da Silva Pereira, Dwight Rodrigues Soares, Weidson do Amaral Luna, Wandenberg Bismarck Colaço Lima e o grande Fernando de Oliveira Gurjão, a todos dedico o meu apreço, obrigado por tudo, vocês mudaram a minha vida.

"O homem não é nada além daquilo que a educação faz dele.- Immanuel Kant

Resumo

As equações funcionais são relevantes em diversos campos da matemática com aplicações práticas em diferentes áreas. Essas equações permitem descrever e modelar fenômenos complexos do mundo real, desde o crescimento populacional até a propagação de doenças, o movimento de objetos físicos, o comportamento econômico entre outros. Elas ajudam a entender as relações entre as variáveis e a prever seu comportamento em diferentes situações. A resolução dessas equações estimula habilidades de pensamento lógico, criatividade e análise crítica, fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Devido a essa importância, o objetivo deste trabalho é explorar a teoria e as estratégias para resolver equações funcionais, incluindo as equações funcionais de Cauchy. Além disso, busca-se explorar aplicações em contextos matemáticos e interdisciplinares, destacando sua relevância em diferentes áreas do conhecimento. Inicialmente, realizamos uma revisão bibliográfica abrangente para entender os fundamentos teóricos das equações funcionais. Analisamos diferentes técnicas e estratégias utilizadas para resolver problemas que envolvem essas equações. Em seguida, avaliamos uma seleção de problemas, destacando a aplicação prática em diferentes contextos (juros compostos, desintegração radioativa, cálculo de área e problemas de matemática olímpica). Os resultados mostraram que as equações funcionais desempenham um papel importante para o ensino de matemática e através de sua aplicação adequada é possível simplificar a complexidade dos desafios, encontrando soluções eficientes.

Palavras-chave: Equações Funcionais; Problemas Matemáticos; Aplicações.

Abstract

Functional equations are relevant in various fields of mathematics, with practical applications in different areas. These equations allow us to describe and model complex real-world phenomena, from population growth to disease propagation, the movement of physical objects, economic behavior, and more. They help in understanding the relationships between variables and predicting their behavior in different situations. Solving these equations stimulates logical thinking, creativity, and critical analysis skills, which are fundamental for the development of mathematical reasoning. Due to this importance, the objective of this work is to explore the theory and strategies for solving functional equations, including Cauchy's functional equations. Additionally, we aim to explore applications in mathematical and interdisciplinary contexts, highlighting their relevance in different fields of knowledge. Initially, we conducted a comprehensive literature review to understand the theoretical foundations of functional equations. We analyzed different techniques and strategies used to solve problems involving these equations. Next, we evaluated a selection of problems, emphasizing practical applications in different contexts (compound interest, radioactive decay, area calculation, and mathematical olympiad problems). The results showed that functional equations play an important role in mathematics education, and through their proper application, it is possible to simplify the complexity of challenges and find efficient solutions.

Keywords: Functional Equations; Mathematical Problems; Applications.

Sumário

1 Introdução

A matemática é uma linguagem universal que permeia todos os campos do conhecimento e desempenha um papel central na compreensão do mundo que nos cerca. Ela oferece ferramentas essenciais para a compreensão de fenômenos reais, o que facilita a solução de problemas, a tomada de decisões e o progresso em diversas áreas.

A matemática não se limita apenas a cálculos e fórmulas; ela também estimula o desenvolvimento cognitivo, desafiando a mente a pensar de forma crítica, resolver problemas complexos e aplicar princípios lógicos a diversas situações. Essas habilidades são valiosas em todos os aspectos da vida. Uma das áreas mais intrigantes e poderosas da matemática é o estudo das equações funcionais, um ramo que se destaca por sua capacidade de modelar fenômenos complexos e descrever o comportamento de sistemas dinâmicos em uma ampla variedade de contextos.

Diferentemente das equações algébricas tradicionais, onde a incógnita é apenas um número ou uma variável, nas equações funcionais a incógnita é uma função. Essas equações se concentram na investigação de funções desconhecidas que satisfazem uma relação funcional. As equações funcionais desempenham um papel essencial na previsão de eventos, na otimização de processos e na resolução de problemas complexos que desafiam a imaginação humana. Desde o estudo do crescimento populacional até a análise do comportamento econômico, passando pela modelagem de fenômenos físicos complexos, essas equações são uma ferramenta indispensável para cientistas, engenheiros e pesquisadores de todas as áreas (BEZERRA, 2014).

Além das aplicações no mundo real, as equações funcionais é um conceito relevante na resolução de problemas de matemática olímpica. As principais olímpiadas de Matemática tais como OBM (Olimpíada Brasileira de matemática) e IMO (Olimpíada Internacional de Matemática) quase sempre abordam questões que exigem o entendimento desse tema. Portanto, no âmbito do ensino de matemática, essas equações são importantes, pois fomentam o desenvolvimento do pensamento lógico e promovem a capacidade de resolver problemas. À medida que os educadores integram problemas que envolvem equações funcionais, eles têm a capacidade de estimular a criatividade dos alunos além de trabalhar com abstrações que ajudam a desenvolver a capacidade de pensar de forma abstrata e aplicar essas habilidades a diferentes contextos. Isso pode tornar o ensino de matemática mais envolvente e significativo para os estudantes.

Diante disso, o objetivo desse trabalho é explorar a teoria e as estratégias para resolver equações funcionais, incluindo as equações funcionais de Cauchy. Além disso, busca-se explorar aplicações em contextos matemáticos e interdisciplinares, destacando sua relevância em diferentes áreas do conhecimento. Para resolver problemas envolvendo equações funcionais existem uma variedade de teorias e métodos. Uma das técnicas é o Método das Substituições que consiste em encontrar substituições apropriadas para transformar a equação funcional em um modo mais fácil de resolver. Além deste, a resolução pode ser obtida por transformadas, métodos numéricos e métodos de iteração. Neste trabalho apresentaremos apenas conceitos e aplicações da equação funcional de Cauchy, problemas de matemática olímpica e problemas de processos seletivos que exigem técnicas simples de resolução por equações funcionais.

1.1 Objetivo Geral

Explorar a teoria e as estratégias para resolver equações funcionais, incluindo as equações funcionais de Cauchy. Além disso, busca-se explorar aplicações em contextos matemáticos e interdisciplinares, destacando sua relevância em diferentes áreas do conhecimento.

2 Referencial Teórico

2.1 Equações Funcionais

2.1.1 Histórico das equações funcionais

A história das equações funcionais é marcada por uma série de matemáticos que deixaram suas contribuições ao longo dos séculos. Entre eles estão: Leonhard Euler, que estudou as equações funcionais lineares; Joseph Fourier, que trabalhou com séries de Fourier e equações diferenciais; Augustin Louis Cauchy, que estudou as equações funcionais de Cauchy; e Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, que trabalhou com equações funcionais em sua teoria dos números. Além dos autores mencionados anteriormente, outros nomes importantes incluem: Évariste Galois, que trabalhou com equações funcionais em sua teoria de grupos; Georg Cantor, que estudou as propriedades das funções contínuas e descontínuas; e Stefan Banach, que desenvolveu a teoria das equações funcionais lineares e introduziu o conceito de espaço de Banach (BOYER, 2012; BEZERRA, 2014).

Os conceitos sobre equações funcionais foram estudados bem antes de sua formalização. Exemplos iniciais dessas equações podem ser encontrados no trabalho do matemático Nicole Oresme do século XIV (BEZERRA, 2014). Ele forneceu uma definição indireta de funções lineares por meio de uma equação funcional e também explorou as relações geométricas entre variáveis. A formalização e o desenvolvimento teórico das equações funcionais tiveram início com Augustin Louis Cauchy, cujo trabalho influenciou significativamente o campo. Sua famosa Equação Funcional de Cauchy desafiou matemáticos a investigar as funções, revelando-se um marco importante na história das equações funcionais.

2.1.2 Conceitos Fundamentais

2.1.3 Definições e propriedades básicas.

2.1.3.1 Função, Equação e Equação Funcional

Definição de Função: Sejam A e B conjuntos. Uma função $f\colon A \to B$ é uma correspondência que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$. Escrevemos essa correspondência como $y = f(x)$.

Definição de Equação: Uma equação é uma sentença matemática aberta, ou seja, sentença matemática que possui ao menos uma incógnita, e que estabelece uma igualdade entre duas expressões matemáticas.

Equações Funcionais

Definição 1.1. Uma equação é dita funcional se as suas variáveis são dadas por funções. É uma equação da forma

$$F(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) = 0. \tag{2.1}$$

Apesar de não ser apresentada como tal, existem alguns exemplos de equações funcionais que são familiares para a grande maioria dos alunos que já estudaram funções. Como é o exemplos da definição de paridade de funções.

Exemplo 1.1. Uma função f é dita par quando satisfaz a seguinte equação funcional:

$$f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in D_f.$$

Isso é um exemplo de equação funcional.

2.1.3.2 Injetividade e Sobrejetividade

Definição 1.2. Uma função $f : X \to Y$ é dita injetiva se $f(x) = f(y)$ implica em $x = y$ para todo $x, y \in X$.

Exemplo 1.2. Toda função f afim, ou seja, toda função definida por $f(x) = ax + b$ com $a, b \in X \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma função injetiva. Isso acontece pois, dado $x, y \in X$, temos que $ax + b = ay + b$, consequentemente $x = y$.

Definição 1.3. Uma função $f : X \to Y$ é dita sobrejetiva quando o conjunto imagem de f é igual à Y. Em outras palavras, para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 1.6. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é sobrejetiva, pois, para qualquer $y \in \mathbb{R}$ basta tomar $x = y^{\frac{1}{3}}$ que teremos que

$$f(x) = f(y^{\frac{1}{3}}) = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3 = y.$$

2.1.3.3 Paridade e Periodicidade

Os conceitos a seguir costumam aparecer de maneira corriqueira nos problemas de equações funcionais, seja como funções que resolvem o problema, seja como substituições a se fazerem. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que:

- f é uma função **par** se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in A$.
- f é uma função **ímpar** se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in A$.

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{2n}$ (com $n \in \mathbb{N}$) é uma função par, e a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{2n+1}$ (com $n \in \mathbb{N}$) é uma função ímpar. (Entendem agora o porquê dos nomes "função par" e "função ímpar"?)

Dizemos também que uma função $f : A \to B$ é **periódica** se existir $p \neq 0$ tal que, para todo $x \in A$, temos $f(x) = f(x + p)$. Se p for o menor valor positivo que satisfaz a igualdade acima, então p é chamado de **período fundamental** da função.

2.1.4 Equações Funcionais de Cauchy

Equação Aditiva de Cauchy

(BEZERRA, 2014) Uma equação funcional da forma

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1.1}$$

é chamada **Equação Aditiva de Cauchy** (SAHOO, 2011).

Uma função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é **aditiva** se satisfaz a Equação Funcional Aditiva de Cauchy, isto é,

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y), \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.4 Uma função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita racionalmente homogênea se

$$\phi(rx) = r\phi(x), \tag{1.2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $r \in \mathbb{Q}$.

Proposição 1.1 Se $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação aditiva de Cauchy, então ϕ é racionalmente homogênea. Além disso, existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $\phi(r) = cr$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Prova: Seja $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma solução da equação (1.1). Fazendo $x = y = 0$ em (1.1), temos:

$$\phi(0) = \phi(0) + \phi(0) \implies \phi(0) = 0.$$

Substituindo $y = -x$ em (1.1) e usando o resultado acima, obtemos que ϕ é uma função ímpar:

$$\phi(-x) = -\phi(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Até agora, mostramos que ϕ se anula na origem e é ímpar. Para provar que ϕ é racionalmente homogênea, seja $x \in \mathbb{R}$. Então:

$$\phi(2x) = \phi(x + x) = \phi(x) + \phi(x) = 2\phi(x).$$

Analogamente:

$$\phi(3x) = \phi(2x + x) = \phi(2x) + \phi(x) = 2\phi(x) + \phi(x) = 3\phi(x).$$

Por indução, para todo inteiro positivo n, temos:

$$\phi(nx) = n\phi(x).$$

Base da indução ($n = 2$): Verdadeira por definição.
Hipótese de indução: Suponha válido para $n = k$, isto é:

$$\phi(kx) = k\phi(x).$$

Passo indutivo ($n = k + 1$):

$$\phi((k + 1)x) = \phi(kx + x) = \phi(kx) + \phi(x)$$

Pela hipótese de indução:

$$k\phi(x) + \phi(x) = (k + 1)\phi(x).$$

Para inteiros negativos, seja $n = -m$ (com $m > 0$). Usando a propriedade de função ímpar:

$$\phi(nx) = \phi(-mx) = -\phi(mx) = -m\phi(x) = n\phi(x).$$

Portanto, concluímos que:

$$\phi(nx) = n\phi(x), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e } x \in \mathbb{R}.$$

Extensão para números racionais:

Seja r um número racional arbitrário, tal que:

$$r = \frac{k}{l}, \quad \text{onde } k \in \mathbb{Z} \text{ e } l \in \mathbb{N}^*.$$

Note que $kx = l(rx)$. Usando o resultado anterior ($\phi(nx) = n\phi(x)$):

$$k\phi(x) = \phi(kx) = \phi(l(rx)) = l\phi(rx),$$

o que implica:

$$\phi(rx) = \frac{k}{l}\phi(x) = r\phi(x).$$

Portanto, ϕ é racionalmente homogênea. Definindo $c = \phi(1)$ e substituindo $x = 1$:

$$\phi(r) = cr, \quad \text{para todo } r \in \mathbb{Q}.$$

Teorema 1.1 (Cauchy) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função aditiva. Se ϕ é contínua, então ϕ é linear, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\phi(x) = cx, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja ϕ uma solução contínua de (1.1). Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe uma sequência $\{r_n\}$ em $\mathbb{Q}$ com $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Pela Proposição 1.1:

$$\phi(r_n) = cr_n, \quad \text{onde } c = \phi(1).$$

Pela continuidade de ϕ:

$$\phi(x) = \phi\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} \phi(r_n) = \lim_{n\to\infty} cr_n = cx.$$

Proposição 1.2 Se ϕ é solução de (1.1) e contínua em um ponto, então é contínua em todos os pontos.

Prova. Suponhamos que $\phi \in \mathbb{R}$ seja contínua em t, para algum $t \in \mathbb{R}$. Mostraremos que $\phi \in \mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}$. Para isto, seja $x \in \mathbb{R}$ qualquer, então,

$$\lim_{h\to 0} \phi(x+h) = \lim_{h\to 0} \phi(t+h+x-t) = \lim_{h\to 0} \phi(t+h) + \phi(x-t),$$

Como $\phi \in \mathbb{R}$ é contínua em t, $\lim_{h\to 0} \phi(t+h) = \phi(t)$. Logo,

$$\lim_{h\to 0} \phi(x+h) = \phi(t) + \phi(x-t) = \phi(x).$$

Isso prova que $\phi \in \mathbb{R}$ é contínua em $x \in \mathbb{R}$.

Equação Exponencial de Cauchy

(BEZERRA, 2014) A equação funcional exponencial de Cauchy é

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Teorema 1.2 A solução geral da equação exponencial de Cauchy tem a seguinte forma

$$\phi(x) = e^{A(x)},$$

onde $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva, ou $\phi(x) = 0$.

Prova. Note que $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ é uma solução de (1.6). Afirmamos que $\phi(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Suponha que não. Então, existe y_0 tal que $\phi(y_0) = 0$. De (1.6), temos

$$\phi(y) = \phi((y-y_0)+y_0) = \phi(y-y_0)\cdot\phi(y_0) = 0,$$

o que é uma contradição.

Tome $x = \frac{t}{2}$ em (1.6), temos que

$$\phi(t) = \phi\left(\frac{t}{2}\right)^2,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, $\phi(x)$ é estritamente positiva. Agora, tomando logaritmo natural em ambos os membros de (1.6), obtemos

$$\ln \phi(x+y) = \ln \phi(x) + \ln \phi(y).$$

Definindo $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $A(x) = \ln \phi(x)$, temos

$$A(x+y) = A(x) + A(y).$$

Assim, temos a solução $\phi(x) = e^{A(x)}$.

Definição 1.2 Uma função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma **função exponencial** real se satisfaz $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Seja n um inteiro positivo. Suponhamos que a equação funcional

$$f(x+y+nxy) = f(x) \cdot f(y), \tag{1.9}$$

vale para todos os reais $x > -\frac{1}{n}$ e $y > -\frac{1}{n}$. Quando $n \longrightarrow 0$, a equação funcional (1.9) se reduz a equação exponencial de Cauchy. Esta equação foi estudada por Thielman (1949).

Teorema 1.3 Toda solução ϕ da equação funcional (1.9) é da forma

$$\phi(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \phi(x) = e^{A(\ln(1+nx))},$$

onde $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva.

Prova. Vamos escrever a equação funcional (1.9) na seguinte forma

$$\phi\left(\frac{(1+nx)\cdot(1+ny)-1}{n}\right) = \phi(x) \cdot \phi(y). \tag{1.10}$$

Defina $1 + nx = e^u$ e $1 + ny = e^v$ tal que $u = \ln(1+nx)$ e $v = \ln(1+ny)$. Agora, reescrevendo (1.10), obtemos

$$\phi\left(\frac{e^{u+v}-1}{n}\right) = \phi\left(\frac{e^u-1}{n}\right) \cdot \phi\left(\frac{e^v-1}{n}\right), \quad \text{para todo } u, v \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Definindo

$$\psi(u) = \phi\left(\frac{e^u-1}{n}\right) \tag{1.12}$$

em (1.11), temos

$$\psi(u+v) = \psi(u) \cdot \psi(v), \tag{1.13}$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}$. Assim, pelo teorema (1.2), temos

$$\psi(x) = e^{A(x)} \quad \text{ou} \quad \psi(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.14}$$

Portanto, de (1.12) e (1.14), obtemos

$$\phi(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \phi(x) = e^{A(\ln(1+nx))},$$

onde $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva.

Equação Logarítmica de Cauchy

(BEZERRA, 2014) A equação

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{$\odot$}$$

é chamada de Equação Funcional Logarítmica de Cauchy.

Teorema 1.4 Se a equação funcional logarítmica de Cauchy vale para todo $x, y \in \mathbb{R}^*$, então a solução geral é dada por

$$\phi(x) = A(\ln|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \tag{1.15}$$

onde A é uma função adititiva.

Prova. Substituindo $x = y = t$ em $\odot$, temos

$$\phi\left(t^2\right) = 2\phi(t)$$

Do mesmo modo, fazendo $x = -t$ e $y = -t$ em $\odot$, temos

$$\phi\left(t^2\right) = 2\phi(-t)$$

Assim, vemos que

$$\phi(t) = \phi(-t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^*. \tag{1.16}$$

Agora, suponhamos que a equação funcional $\odot$ vale para todo $x > 0$ e $y > 0$. Seja,

$$x = e^s \quad \text{e} \quad y = e^t \tag{1.17}$$

de modo que

$$s = \ln x \quad \text{e} \quad t = \ln y \tag{1.18}$$

Note que $s, t \in \mathbb{R}$ visto que $x, y \in \mathbb{R}^*$ onde $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$. Substituindo (1.18) em $\odot$, temos

$$\phi\left(e^{s+t}\right) = \phi\left(e^{s}\right) + \phi\left(e^{t}\right)$$

Definindo

$$A(s) = \phi\left(e^{s}\right) \tag{1.19}$$

e usando a última equação, temos

$$A(s+t) = A(s) + A(t)$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$. Por isso, a partir de $\odot$, temos

$$\phi(x) = A(\ln x) \tag{1.20}$$

para todo x real positivo.

Como $\phi(t) = \phi(-t)$, temos que a solução geral de (1.7) é

$$\phi(x) = A(\ln|x|), \tag{1.21}$$

para todo x real não-nulo.

Equação Funcional Multiplicativa

(BEZERRA, 2014) A equação funcional multiplicativa é dada por:

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y). \tag{*}$$

Esta é a mais complexa das equações de Cauchy. Para o próximo teorema, utilizamos a função sinal, definida como:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Teorema 1.5 (Solução Geral) As soluções da equação funcional multiplicativa são:

$$\phi(x) = 0, \tag{1.24}$$

$$\phi(x) = 1, \tag{1.25}$$

$$\phi(x) = e^{A(\ln|x|)} \cdot |\operatorname{sgn}(x)|, \tag{1.26}$$

$$\phi(x) = e^{A(\ln|x|)} \cdot \operatorname{sgn}(x), \tag{1.27}$$

onde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função aditiva.

Prova:

- Substituindo $x = y = 0$ na equação funcional:

$$\phi(0 \cdot 0) = \phi(0) \cdot \phi(0) \implies \phi(0) = \phi(0)^2.$$

Portanto:

$$\phi(0) \cdot [1 - \phi(0)] = 0 \implies \boxed{\phi(0) = 0 \text{ ou } \phi(0) = 1}. \tag{1.28}$$

- Substituindo $x = y = 1$:

$$\phi(1 \cdot 1) = \phi(1) \cdot \phi(1) \implies \phi(1) = \phi(1)^2.$$

Logo:

$$\boxed{\phi(1) = 0 \text{ ou } \phi(1) = 1}. \tag{1.29}$$

- Para $x > 0$, temos:

$$\phi(x) = \phi\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}\right) = \phi\left(\sqrt{x}\right)^2 \implies \boxed{\phi(x) \geq 0}. \tag{1.30}$$

- Suponha que exista $x_0 \neq 0$ tal que $\phi(x_0) = 0$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi(x) = \phi\left(x_0 \cdot \frac{x}{x_0}\right) = \phi(x_0) \cdot \phi\left(\frac{x}{x_0}\right) = 0.$$

Portanto, se $\phi(x_0) = 0$ para algum $x_0 \neq 0$, então $\phi(x) = 0$ para todo x.

para todo $x \in \mathbb{R}$, e assim, obtemos a solução de (1.24).

Suponhamos que $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Se $\phi(0) = 1$, então, fazendo $y = 0$ em (*), temos

$$\phi(0) = \phi(x) \cdot \phi(0)$$

Assim,

$$\phi(x) = 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, temos a solução (1.25).

Consideremos o caso $\phi(0) = 0$. Neste caso podemos afirmar que ϕ é não nula em $\mathbb{R}^*$. Suponha que não. Então, existe y_0 em $\mathbb{R}^*$ tal que $\phi\left(y_0\right) = 0$. Fazendo $y = y_0$ em (*), temos

$$\phi\left(xy_0\right) = \phi(x) \cdot \phi\left(y_0\right) = 0$$

Logo, $\phi(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$, que é uma contradição.

Usando o fato que ϕ é não nula em $\mathbb{R}^*$ e (1.30), temos

$$\phi(x) > 0, \quad \text{para } x > 0 \tag{1.31}$$

Sejam

$$x = e^s \quad \text{e} \quad y = e^t \tag{1.32}$$

temos que

$$s = lnx \quad \text{e} \quad t = lny \tag{1.33}$$

Note que $s, t \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}_+$. Substituindo (1.33) em (*), temos

$$\phi\left(e^{s+t}\right) = \phi\left(e^s\right) \cdot \phi\left(e^t\right)$$

Como $\phi(t) > 0$, para todo $t > 0$, tomando o logarítmo natural em ambos os membros da última equação, temos que

$$A(s+t) = A(s) + A(t)$$

onde,

$$A(s) = \ln \phi\left(e^s\right), \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{1.34}$$

Então, A é uma função aditiva. De (1.33) e (1.34), temos

$$\phi(x) = e^{A(ln|x|)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \tag{1.35}$$

De (1.28), temos que $\phi(1) = 0$ ou $\phi(1) = 1$. Se $\phi(1) = 0$, fazendo $y = 1$ em (*) , temos

$$\phi(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_*$$

Contradizendo à hipótese que ϕ não é identicamente nula em $x \in \mathbb{R}_*$. Assim, $\phi(1) = 1$. Agora, fazendo $x = y = -1$ em (1.8), temos $\phi(1) = [\phi](-1)^2$ e assim,

$$\phi(-1) = 1 \quad \text{ou} \quad \phi(-1) = -1 \tag{1.36}$$

Se $\phi(-1) = 1$, então, fazendo $y = -1$ em (*) , temos

$$\phi(-x) = \phi(x) \cdot \phi(-1) = \phi(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}_*$. Então, de (1.33) segue que

$$\phi(x) = e^{A(Lnx|)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}_*$. Assim, $\phi(0) = 0$, temos

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{A(ln|x|)}, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Se $\phi(-1) = -1$, fazendo $y = -1$ em (*) ,

$$\phi(-x) = \phi(x) \cdot \phi(-1) = -\phi(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}_*$. Assim, de (1.34), obtemos

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{A(ln|x|)}, & \text{se} \quad x > 0 \\ -e^{A(ln|x|)}, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Juntamente com o fato que $\phi(0) = 0$, temos

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{A(ln|x|)}, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \\ -e^{A(ln|x|)}, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

que é a solução (1.27).

2.1.5 Equações Funcionais na resolução de problemas

Equações funcionais exigem a determinação de uma função desconhecida que satisfaça relações algébricas específicas. Em olimpíadas, combinam criatividade, substituições estratégicas e análise de propriedades da função (como injetividade ou sobrejetividade), o grande problema das equações funcionais para resolve-las não existe um método pronto, o que faz a criatividade se aguçar, além que precisamos muitas vezes nesses problemas explorar substituições convenientes. Abaixo, caminhos essenciais com alguns exemplos:

1. Substituição de Variáveis por Constantes

Objetivo: Simplificar a equação atribuindo valores específicos.
Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{I}$$

.

- Substitua $x = 0$, em I:

$$f(0 + y) = f(0) + f(y) \implies f(y) = f(0) + f(y) \implies \boxed{f(0) = 0}. \tag{II}$$

- Substitua $y = -x$, em I:

$$f(x - x) = f(x) + f(-x) \implies f(0) = f(x) + f(-x) \tag{III}$$

De um II e III, basta substituir $f(0) = 0$ e isolar $f(-x)$ em II, logo:

$$f(-x) = -f(x).$$

Aqui descobrimos que a função é impar

2. Redução de variáveis

Objetivo: Expressar múltiplas variáveis em termos de uma.
Exemplo: Resolva

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y) \tag{i}$$

.

Faça $x=y=0$ em (i):

$$2f(0)=4f(0) \implies f(0)=0. \tag{ii}$$

Faça $y=x$ em (i):

$$f(2x)+f(0)=4f(x) \tag{iii}$$

De (ii) sabemos que $f(0)=0$, substituindo em (iii)

$$\boxed{f(2x)=4f(x)}.$$

O que proporciona informações sobre a função.

3. Exploração da Sobrejetividade ou Injetividade

Objetivo: Usar propriedades para gerar novas equações.

Exemplo: Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é injetora dado

$$f(x+f(y))=f(x)+y \tag{§}$$

encontre $f(0)$.

Tome $y=0$ e depois use que a função (§) é injetora sabemos $f(x)=f(y)$ implica em $x=y$, logo em (§):

$$f(x+f(0))=f(x)$$

$$x+f(0)=x$$

ou seja

$$\boxed{f(0)=0}.$$

4. Funções auxiliares e troca de variáveis

Objetivo: Explorar padrões via substituições.
(CHAVES, 2023) Expressar variáveis dadas em função de novas variáveis, por exemplo se é dado $f(f(f(x)+y))$, podemos trocar $f(f(x)+y)$ por z para simplificar a expressão de modo que a nova expressão seja $f(z)$. Trocar variáveis existentes por novas, também é comum, por exemplo $x-y=u$ ou $x+y=v$.

Dica: Sempre confira se a função satisfaz a equação original.

3 Materiais e Métodos

Para realizar esta pesquisa, empregamos uma metodologia de caráter exploratório, na qual foi conduzido uma revisão bibliográfica que teve como ponto inicial o acesso a materiais didáticos. Foram consultados livros, dissertações, teses e ampliado as buscas nos ambientes do Google Academic, Sciello e Portal da Capes.

Inicialmente buscamos compreender os principais fundamentos das equações funcionais de Cauchy, destacando exemplos e aplicações. Exploramos a utilidade dessas equações para mostrar algumas demonstrações das fórmulas de juro composto, do cálculo da área do retângulo e da desintegração radioativa. Foram também selecionados problemas olímpicos e questões de processos seletivos para mostrar a utilidade das técnicas de substituição nas equações funcionais.

4 Aplicações

As equações funcionais têm grande importância teórica e prática, aparecendo frequentemente em contextos acadêmicos, científicos e competições matemáticas. Neste capítulo, apresentamos algumas aplicações práticas dessas equações, demonstrando como elas podem ser utilizadas para resolver problemas clássicos em áreas como lógica, finanças, física e competições matemáticas.

A seguir, são discutidos exemplos detalhados que ilustram como as equações funcionais podem ser aplicadas para resolver problemas específicos, além de apresentar técnicas essenciais para sua resolução eficiente.

4.1 Aplicações envolvendo equações funcionais de Cauchy

4.1.1 Aplicação 01: Área de um retângulo

(BEZERRA, 2014) A Equação Funcional de Cauchy (Aditiva), é da seguinte forma:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

sabemos que a solução abaixo satisfaz a equação:

$$f(x) = cx \tag{1.5}$$

com c uma constante qualquer, $c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

Considere um retângulo cujo comprimento da base é a e o comprimento da altura é b.

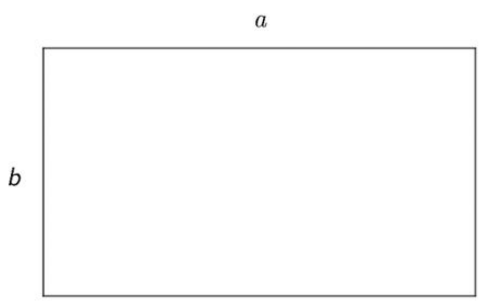

Figura 1.1

É evidente que a área de um retângulo dependerá da altura e da base. Assim, a área A , do retângulo é uma função de a e b, isto é,

$$A = f(a, b) \tag{1.6}$$

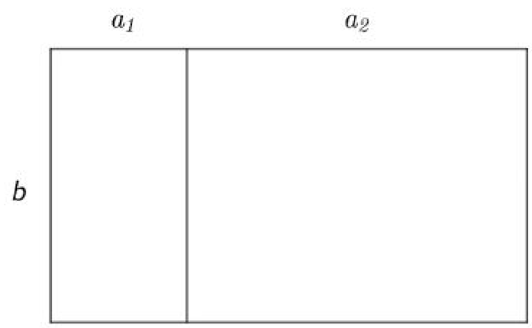

Figura 1.2

Dividindo o retângulo em dois retângulos menores, por um segmento paralelo à altura, de modo que $a = a_1 + a_2, \text{com}\, a_1, a_2 \in\ ]0, +\infty]$ (1.7).

Note que a e b são números positivos e diferentes de zero, logo, $f(a,b) \geq 0$.

Os retângulos possuem altura b, o de base a_1 tem área igual a A_1, já o retângulo de base a_2 tem área igual a A_2, sabemos que $A_1 + A_2 = A(1.8)$.

É fácil notar que, $A_1 = f\,(a_1, b)$ e $A_2 = f\,(a_2, b)$, logo por (1.6) e (1.8):

$$f(a,b) = f\,(a_1, b) + f\,(a_2, b)\,\text{com}\, a_1, a_2 \text{ e } b \in [0, +\infty[\tag{1.9}$$

Note que b é uma constante. Por (1.7) e (1.9),

$$f\,(a_1 + a_2, b) = f\,(a_1, b) + f\,(a_2, b) \tag{1.10}$$

Por construção, considerando a figura 1.1 , podemos dividir o retângulo por um segmento paralelo a base, onde obteremos:

$$f\,(a, b_1 + b_2) = f\,(a, b_1) + f\,(a, b_2) \tag{1.11}$$

com b_1 e $b_2 \in]\,0, +\infty[$.

Utilizando a solução da Equação Funcional Aditiva de Cauchy (1.5) em (1.10), teremos:

$$f(a,b) = ka \tag{1.12}$$

onde k é uma constante que depende de b e $k \geq 0$, assim

$$f(a,b) = k(b) \cdot a \tag{1.13}$$

usando (1.13) em (1.11)

$$k\,(b_1 + b_2)\,a = k\,(b_1)\,a + k\,(b_2)\,a$$

ou seja,

$$k\,(b_1 + b_2) = k\,(b_1) + k\,(b_2) \tag{1.14}$$

aplicando novamente o resultado (1.5) em (1.14)

$$k(b) = \beta \cdot b \tag{1.15}$$

Com β uma constante arbitrária, por (1.13) e (1.15) concluímos que:

$$f(a, b) = \beta \cdot b \cdot a$$

Como $f(a, b) \geq 0$ esse fato força β ser uma constante positiva

4.1.2 Aplicação 02: Cálculo de juros compostos

(BEZERRA, 2014) Os juros compostos satisfazem as seguintes equações:

$$f(x + y, t) = f(x, t) + f(y, t), \quad \forall\, x, y, t \in \mathbb{R}_+ \tag{2.0}$$

$$f(x, t + s) = f(f(x, t), s), \quad \forall\, x, t, s \in \mathbb{R}_+ \tag{2.1}$$

Na equação (2.0), x e y representam capitais aplicados no mesmo instante t, indicando que não há diferença em dividir o capital para uma mesma duração de tempo. Na equação (2.1), t e s são períodos temporais, onde $t + s$ corresponde ao tempo total e s é um incremento temporal. Isso implica que o valor futuro após $t + s$ é equivalente ao valor futuro após s períodos aplicado ao montante acumulado em t períodos.

Assumindo continuidade em (2.0) e usando o Teorema 1.1, obtemos:

$$f(x, t) = c(t) \cdot x \tag{2.2}$$

Substituindo (2.2) em (2.1):

$$c(t + s) \cdot x = c(t) \cdot c(s) \cdot x$$

Simplificando:

$$c(t + s) = c(t) \cdot c(s)$$

Esta é a Equação Funcional de Cauchy (Exponencial), cuja solução é:

$$c(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Definindo $\lambda = \ln(1+r)$, temos:

$$c(t) = \left(e^{\ln(1+r)}\right)^t = (1+r)^t \tag{2.3}$$

Substituindo (2.3) em (2.2), obtemos a fórmula dos juros compostos:

$$f(x,t) = x(1+r)^t, \quad \text{com } r \geq 0.$$

4.1.3 Aplicação 03: Desintegração radioativa.

(BEZERRA, 2014) Considerando m_0 a massa inicial de um elemento radioativo e m_t a massa presente no corpo ao decorrer do tempo t . Veremos que $f(t)$ será a relação entre a massa da substância presente no tempo com a massa inicial, de forma que:

$$m(t) = m_0 f(t) \tag{3.0}$$

A quantidade do elemento radioativo no momento $t+h$ poderá ser dito de duas maneiras distintas:

$$m(t+h) = \ m_0 f(t+h) \tag{3.1}$$

$$m(t+h) = \ m_0 f(t) f(h) \tag{3.2}$$

Como a desintegração depende exclusivamente do intervalo de tempo transcorrido, temos:

Ao aumentarmos a unidade de tempo para $t+h$, a quantidade de substância vai corresponder a:

$$m(t+h) = \ m_0 f(t+h), \ t,h \in \mathbb{R}_+. \tag{3.3}$$

Logo, o fenômeno ocorrerá da seguinte forma:

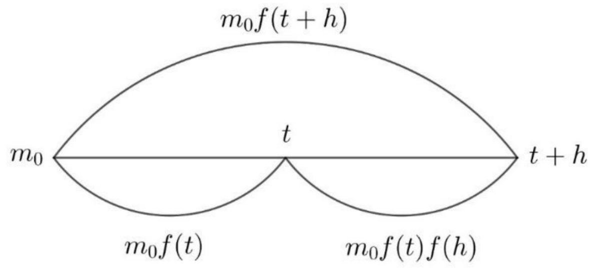

Figura 1.3

Sendo assim,

$$m_0f(t+h) = m_0f(t)f(h), \; t,h \in \mathbb{R}_+. \tag{3.4}$$

Portanto, a função f vai ser dita como contínua, ou seja, como a solução da equação funcional exponencial de Cauchy:

$$f(x) = e^{\alpha x}, \tag{3.5}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Portanto, a função f vai ser dita como contínua, ou seja, como a solução da equação funcional exponencial de Cauchy e expressa por (3.5). Substituindo x por t

$$f(t) = e^{\alpha t}, \; \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Desse modo:

$$m(t) = m_0f(t) = m_0e^{\alpha t} \tag{3.7}$$

Como a massa $m(t)$ ira decrescer ao decorrer do tempo, a constante α deverá ser negativa, assim;

$$\alpha = -\gamma, \qquad \gamma > 0. \tag{3.8}$$

Constatamos que:

$$m(t) = m_0e^{-\gamma t}, \tag{3.9}$$

onde a constante γ é denominada constante de decaimento.

Esse resultado é a forma geral da Lei de Decaimento Radioativo.

4.2 Uma aplicação usando Estratégias básicas

4.2.1 Aplicação 04: Torre de Hanói

Considere a relação de recorrência para o número mínimo de movimentos na Torre de Hanói, com t(n) uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$:

$$t(n) = 2t(n-1) + 1, \quad \text{com} \quad t(1) = 1.$$

Nosso objetivo é resolver essa recorrência e mostrar que $t(n) = 2^n - 1$. Perceba que

$$\begin{gathered} t(n-1) = 2t(n-2) + 1 \\ t(n-2) = 2t(n-3) + 1 \\ \vdots \\ t(n-k) = 2t(n-(k+1)) + 1 \end{gathered}$$

Expandimos a recorrência repetidamente para identificar um padrão:

$$\begin{gathered} \text{t(n) = 2t(n-1) + 1} \\ = 2[2t(n-2)+1]+1 = 2^2t(n-2)+2+1 \quad (\text{Substituindo } t(n-1)) \\ = 2^2\,[2t(n-3)+1]+2+1 = 2^3t(n-3)+2^2+2+1 \quad (\text{Substituindo } t(n-2)) \\ \vdots \\ = 2^k t(n-k) + \underbrace{(2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+2+1)}_{\text{Soma de uma PG}}. \end{gathered}$$

Determinação do Termo Geral Quando (que no caso da torre de Hanói sempre acontece) $n - k = 1$ (ou $k = n - 1$), a recorrência se reduz a:

$$t(n) = 2^{n-1}t(1) + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i.$$

Como $t(1) = 1$, temos:

$$t(n) = 2^{n-1} \cdot 1 + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i.$$

Cálculo da Soma da PG
A soma $\sum_{i=0}^{n-2} 2^i$ é uma progressão geométrica (PG) com:

- Primeiro termo (a_1): $2^0 = 1$,
- Razão (q): 2,
- Número de termos (m): $n - 1$.

A fórmula da soma de uma PG finita é:

$$S = a_1 \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1}.$$

Substituindo os valores:

$$\sum_{i=0}^{n-2} 2^i = 1 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1.$$

Voltando à expressão de $t(n)$:

$$t(n) = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1.$$

4.3 Problemas de olimpíadas de Matemática

4.3.1 Aplicação 05: (OBM/2001-2ª Fase)

Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = f(-x)$ e $f(x + y) = f(x) + f(y) + 8xy + 115$, para todos os reais x e y.

Resolução:

Fazendo $x = y = 0$ na equação dada, temos:

$$f(0) = f(0) + f(0) + 8 \cdot 0 \cdot 0 + 115$$

Somando ($-f(0)$) em ambos os membros, concluímos que:

$$f(0) = -115 \qquad \text{(i)}$$

Sabemos que o fato da função ser par conseguimos substituir e ser vantajoso para resolver o problema, já que:

$$f(x) = f(-x),$$

Fazendo $y = -x$ na equação do enunciado dada:

$$f(x - x) = f(x) + f(-x) + 8x(-x) + 115$$

Desenvolvendo:

$$f(0) = 2f(x) - 8x^2 + 115 \qquad \text{(ii)}$$

Substituindo (i) em (ii), obtemos:

$$-115 = 2f(x) - 8x^2 + 115$$

Organizando

$$2f(x) = 8x^2 - 115 - 115$$

Sendo assim, concluímos que:

$$\boxed{f(x) = 4x^2 - 115}$$

4.3.2 Aplicação 06: (OBM/1998-2ª Fase)

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(1) = 999$ e $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$ para todo n inteiro positivo. Determine o valor de $f(1998)$.

Resolução:

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função que $f(1) = 999$ e

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 \cdot f(n), \forall n \in \mathbb{N} \tag{i}$$

para não ocorrer ambiguidade fazemos $n = z$ em (i)

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(z) = z^2 \cdot f(z) \tag{ii}$$

por recorrência fazendo $n = z + 1$ em (i) note que:

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(z) + f(z+1) = (z+1)^2 \cdot f(z+1) \tag{iii}$$

Subtraindo (ii) de (iii) veja:

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \cdots + f(z) + f(z+1) - (f(1) + f(2) + \cdots + f(z)) \\ = (z+1)^2 \cdot f(z+1) - \left(z^2 f(z)\right) \end{aligned}$$

Realizando as devidas relações de sinais,

$$\begin{aligned} & f(1) + f(2) + \cdots + f(z) + f(z+1) - f(1) - f(2) - \cdots - f(z) \\ & = (z+1)^2 \cdot f(z+1) - z^2 f(z) \end{aligned}$$

reorganizando a equação,

$$f(1) - f(1) + f(2) - f(2) + \cdots + f(z) - f(z) + f(z+1) = (z+1)^2 f(z+1) - z^2 f(z)$$

logo,

$$f(z+1) = (z+1)^2 f(z+1) - z^2 f(z)$$
$$f(z+1) = \left(z^2 + 2z + 1\right) f(z+1) - z^2 f(z)$$

usando a propriedade distributiva da multiplicação,

$$f(z+1) = z^2 f(z+1) + 2z f(z+1) + 1 f(z+1) - z^2 f(z)$$

pela lei do cancelamento, e somando $z^2 f(z)$ em ambos os membros,

$$z^2 \cdot f(z) = z^2 \cdot f(z+1) + 2 \cdot z \cdot f(z+1)$$

colocando $f(z+1)$ em evidência, temos:

$$z^2 \cdot f(z) = f(z+1) \cdot \Big(z^2 + 2z\Big)$$

Dividindo ambos os membros $(z^2 + 2z)$ temos, como $z \neq 0$:

$$\frac{z^2 \cdot f(z)}{z^2 + 2z} = f(z+1)$$

Segue que,

$$\frac{z^2 \cdot f(z)}{z(z+2)} = f(z+1)$$

onde obtemos,

$$\frac{z \cdot f(z)}{(z+2)} = f(z+1)$$

Multiplicando ambos os membros por $(z+2)$,

$$z \cdot f(z) = f(z+1) \cdot (z+2)$$

Perceba que no primeiro membro o argumento de f multiplica a própria f, porém, não ocorre no segundo membro da igualdade, se multiplicarmos ambos os membros por $(z+1)$ (argumento de f no segundo membro) note que:

$$f(z) \cdot z \cdot (z+1) = f(z+1) \cdot (z+1) \cdot (z+2) \tag{iv}$$

Perceba que chamando $g(x) = f(x) \cdot x \cdot (x+1)(v)\,\text{com}\, x \in$ fazendo $x = z$ e depois $x = z + 1$

$$g(z) = f(z) \cdot z \cdot (z+1) \tag{v}$$

e

$$g(z+1) = f(z+1) \cdot (z+1) \cdot (z+2) \tag{vi}$$

pela equação (iv), (v) e (vi):

$$g(z) = g(z+1)$$

Por indução, $g(1) = g(2), g(2) = g(3) = \cdots = g(z) = g(z+1) = g(1)$(viii), ou seja, g é constante para z natural.

Fazendo $x = 1$ em (v).

$$g(1) = f(1) \cdot 1 \cdot 2$$

por hipótese $f(1)$ é igual a 999, logo,

$$g(1) = 1998$$

por (viii) $g(z) = 1998$, isolando $f(z)$ em (v) e substituindo $g(z) = 1998$, temos que:

$$f(z) = \frac{1998}{z(z+1)}.$$

Onde encontramos a solução fazendo $z = 1998$, ou seja, queremos saber $f(1998)$

$$\boxed{f(1998) = \frac{1}{1999}}.$$

4.3.3 Aplicação 07: Olimpíada de Matemática IFCE 2022 (Nível 2 Ensino Médio)

Seja $f(x)$ uma função definida para valores inteiros positivos tal que $f(1) = 1$ e

$$f(x) = f(x-1) + 2x$$

para todo $x \geq 2$. Qual o valor de $f(50)$?

a) 2022

b) 2235

c) 2332

d) 2468

e) 2549

Resolução:

Para resolver vamos verificar se existe algum padrão, sabemos que $f(1) = 1$, em busca de $f(2) = f(2-1) + 2 \cdot 2 = f(1) + 4 = 5$, perceba que é sempre o termo anterior com acréscimo de 2 vezes o x. logo segue:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 1 + 4 = 5 \\ f(3) &= 5 + 6 = 11 \\ f(4) &= 11 + 8 = 19 \end{aligned}$$

vamos verificar se existe algum padrão

$$f(2) - f(1) = 4$$

$$f(3) - f(2) = 6$$

$$f(4) - f(3) = 8,$$

ou seja, estamos diante de uma P.A. de segunda ordem, pois é uma sequência numérica em que a sequência de diferenças entre os termos é uma progressão aritmética.

Fica evidente que $f(50) = a_{50}$ logo usaremos a fórmula para calcular os temos de uma P.A. de segunda ordem $a_n = a_1 + S_{n-1}$ logo $a_{50} = a_1 + S_{49}$ $(*)$, tomando

$$b_1 = 4$$

$$b_2 = 6$$

$$b_3 = 8$$

que é a sequência da diferença dos termos:

$$S_{49} = \frac{(b_1 + b_{49}) \cdot 49}{2},$$

logo, precisamos calcular b_{49}:

$$b_{49} = b_1 + (n-1)r = 4 + 48 \cdot 2 = 100$$

em busca S_{49}:

$$S_{49} = \frac{(4 + 100) \cdot 49}{2} = 2548,$$

voltando em $(*)$:

$$\boxed{a_{50} = a_1 + S_{49} = 1 + 2548 = 2549}$$

4.4 Problemas de Processos Seletivos

4.4.1 Aplicação 08: ITA 1997

Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que: $g(x) = 1 - x$ e $f(x) + 2f(2-x) = (x-1)^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entao $f[g(x)]$ é igual a:

a) $(x-1)^3$

b) $(1-x)^3$

c) x^3

d) x

e) $2 - x$

Resolução:

Fazendo $(f \circ g)(x)$:

$$f[g(x)] + 2 \cdot f[2 - g(x)] = (g(x) - 1)^3$$

Substituindo $g(x) = 1 - x$ na equação anterior, porém, por questão de conveniência, no termo da expressão $f[g(x)]$ não iremos substituir $x - 1$, segue que:

$$f[g(x)] + 2 \cdot f(1 + x) = (-x)^3 \tag{1}$$

$$Obs. : f[g(x)] = f(1 - x) \tag{2}$$

Seja $h(x) = 1 + x$, fazendo $f \circ h$:

$$f[h(x)] + 2 \cdot f[2 - h(x)] = (h(x) - 1)^3$$

$$f(1 + x) + 2 \cdot f(1 - x) = (x)^3$$

de (2):

$$f(1 + x) + 2 \cdot f[g(x)] = (x)^3 \tag{3}$$

Montando o sistema composto por (1) e (3) :

$$\begin{cases} f[g(x)] + 2 \cdot f(1 + x) = (-x)^3 \\ f(1 + x) + 2 \cdot f[g(x)] = (x)^3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema composto por (1) e (3), chegamos:

$$\boxed{f[g(x)] = x^3}$$

$$Letra\,(C)$$

4.4.2 Aplicação 09: ITA 2003

Considere uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-constante e tal que $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Das afirmações:

I. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

II. $f(nx) = [f(x)]^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^{\star}$.

III. f, é par.

é (são) verdadeira(s):

a) apenas I e II.
b) apenas II e III.
c) apenas I e III.
d) todas
e) nenhuma.

Resolução:

Vemos que essa equação é a Equação Exponencial de Cauchy. Para verificar a primeira alternativa, basta observar que

$$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2})$$

Aplicando a $f(x+y) = f(x)f(y)$ acima temos que:

$$f(x) = f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2$$

como

$$f(\frac{x}{2})^2 \geq 0$$

então,

$$\boxed{f(x) \geq 0}$$

então basta provar que $f(x) \neq 0$, para isso, vamos supor que exista um $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = 0$.

Suponha $y \in \mathbb{R}$ tomando

$$f(y) = f(y - x_1 + x_1)$$

utilizando a definição da função dada no enunciado, temos que:

$$f((y - x_1) + x_1) = f((y - x_1)f(x_1)$$

como $f(x_1) = 0$ então $f(y) = 0$, o que contradiz o enunciado que fala que f é uma função não constante logo a I é verdadeira.

Para provar a segunda alternativa basta usar indução finita perceba:

para $n = 1$

$$f(x) = f(1x) = [f(x)]^1$$

para $n = 2$

$$f(2x) = f(x + x) = f(x)f(x) = f(x)^2$$

suponha que $f(nx) = [f(x)]^n$, seja verdadeira então agora fazendo para $n+1$ perceba $f((n+1)x)$ usando a definição é:

$$f(nx + x) = f(nx) + f(x)$$

utilizando o passo anterior

$$f(nx+x) = f(nx)f(x) = [f(x)]^n f(x)^1 = \boxed{[f(x)]^{n+1}}.$$

O que confirma a veracidade da Alternativa II.

Para verificar a III sabemos que uma função par é da forma

$$f(x) = f(-x)$$

vamos utilizar a seguinte ideia

$$f(0) = f(-x+x) = f(-x) \cdot f(x)$$

que leva em

$$f(-x) = \frac{f(0)}{f(x)}$$

para verificarmos de fato que f não é par precisaríamos saber quem é $f(0)$ para isso basta:

De $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para $x = 0$ e $y = 0$

$\Rightarrow f(0+0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = [f(0)]^2$.

O que recai numa equação do segundo grau $[f(0)]^2 - f(0) = 0$ onde as soluções são $f(0) = 0$ (não serve na I da questão foi verificado $f(x) > 0$) ou $f(0) = 1$.

Como f(0)=1, logo:

$$\boxed{f(-x) = \frac{1}{f(x)}},$$

o que mostra que f não é par.

As alternativas I e II são verdadeiras e a III é falsa, logo letra a) é a alternativa correta.

4.4.3 Aplicação 10: ITA 2003

Mostre que toda função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f(\mathrm{xy}) = f(\mathrm{x}) + f(\mathrm{y})$ em todo seu domínio, é par.

Resolução:

$\forall z \in \mathbb{R}\backslash(0)$:

1) Fazendo $x = z$ e $y = z$ na equação dada no enunciado

$$f\left(z^2\right) = f(z) + f(z) \Rightarrow f\left(z^2\right) = 2f(z)$$

2) Fazendo $x = y = -z$, na equação do enunciado

$$f\left(z^2\right) = f(-z) + f(-z) \Rightarrow f\left(z^2\right) = 2f(-z)$$

Logo de 1) e 2),

$$f\left(z^2\right) = 2f(z) = 2f(-z), \Rightarrow \boxed{f(-z) = f(z)},$$

chegamos na definição de função par.

4.4.4 Aplicação 11: IME 2021

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função onde $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \ e \ x \neq 1\}$ e que satisfaz a equação $f(\frac{x-1}{x}) + f(x) - x = 2$. O valor de $f(2)$ é:

a) 5/4

b) 1/4

c) 1/2

d) 1

e) 7/2

Resolução:

Fazendo $x = 2$ temos:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) - 2 = 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = 4 \tag{I}$$

Fazendo $x = \frac{1}{2}$:

$$f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 2,$$

ou seja,

$$f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \tag{II}$$

Fazendo $x = -1$ temos:

$$f(2) + f(-1) + 1 = 2$$

logo

$$f(2) + f(-1) = 1 \tag{III}$$

De I, II e III, temos:

$$\boxed{f(2) = \frac{5}{14}}$$

4.4.5 Aplicação 12: IFES 2021

Para todos os inteiros x, a função f satisfaz $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Se $f(1) = 4$, então o valor de $f(2022)$ é:

A) 4

B) -$\frac{5}{3}$

C) -$\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{5}$

E) -$\frac{2023}{2021}$

Resolução:

Como:

$x = 1$, obtemos:

$$f(2) = \frac{1+4}{1-4} = -\frac{5}{3}$$

$x = 2$, obtemos:

$$f(3) = \frac{1+(-\frac{5}{3})}{1-(-\frac{5}{3})} = -\frac{1}{4}$$

$x = 3$, obtemos:

$$f(4) = \frac{1+(-\frac{1}{4})}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{3}{5}$$

$x = 4$, obtemos:

$$f(5) = \frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = 4$$

Como o valor 4 apareceu novamente e a regra que calcula cada novo valor é sempre a mesma, os valores vão sempre se repetir de 4 em 4 na sequência $4, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{5}$.

Quando dividimos 2022 por 4 deixa resto 2, logo segue que

$$\boxed{f(2022) = f(2) = -\frac{5}{3}.}$$

4.4.6 Aplicação 13: IDECAN 2019 - Seleção para Professor de Matemática IFBA

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada por $f(a+b) = f(a) + f(b) + 2ab$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f(2) = 4$, calcule $E = f(5) + f(3) + f(2)$.

A) $E = 32$

B) $E = 34$

C) $E = 36$

D) $E = 38$

E) $E = 40$

Resolução:

Para obtermos f(5), tomemos $a = 2$ e $b = 3$, logo:

$$f(2+3) = f(5) = f(2) + f(3) + 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Perceba:

$$f(5) = 4 + f(3) + 12 = f(3) + 16 \tag{I}$$

Em busca de $f(3)$, tomemos $a = 1$ e $b = 2$:

$$f(1+2) = f(1) + f(2) + 2 \cdot 1 \cdot 2,$$

logo, como $f(2) = 4$:

$$f(3) = f(1) + 8 \tag{II}$$

Para solucionarmos o problema faremos $f(2)$, tomando $a = 1$ e $b = 1$, logo

$$f(1+1) = f(1) + f(1) + 2 \cdot 1 \cdot 1,$$

ou seja ,

$$f(2) = 2f(1) + 2$$

como pelo enunciado $f(2) = 4$, veja:

$$4 = 2f(1) + 2,$$

logo isolando $f(1)$;

$$f(1) = 1 \tag{III}$$

vamos em busca $f(3)$ usando II e III obtemos:

$$f(3) = 9$$

Substituindo o resultado anterior em I, obtemos

$$f(5) = 9 + 16 = 25$$

Como sabemos que é $f(5)$, $f(3)$ e $f(2)$ basta substituir na expressão E:

$$E = f(5) + f(3) + f(2)$$

$$E = 25 + 9 + 4$$

$$\boxed{E = 38}$$

letra D.

4.4.7 Aplicação 14: IDECAN 2021 - Seleção para Professor de Matemática prefeitura municipal de Campina Grande

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(1) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y + 2) = f(x).f(y) - f(y) - x + 3$, então, $f(x)$ está expressa na alternativa

A) $x - 1$.

B) $x + 1$.

C) $x + 2$.

D) $x + 3$.

Resolução:

Na igualdade $f(x + y + 2) = f(x).f(y) - f(y) - x + 3$, podemos tomar y $= -2$.

Assim, teríamos

$$f(x) = f(x).f(-2) - f(-2) - x + 3 \tag{I}$$

Em busca de $f(1)$ de forma conveniente tome $x = 1$ e $y = -2$

$$f(1 + (-2) + 2) = f(1) \cdot f(-2) - f(-2) - 1 + 3$$

logo

$$f(1) = f(1) \cdot f(-2) - f(-2) + 2$$

Sabendo $f(1) = 0$ logo:

$$0 = 0 \cdot f(-2) - f(-2) + 2$$
$$f(-2) = 2$$

A partir desse resultado achamos nossa função quando calculamos $y = -2$, veja:

$$f(x) = f(x) \cdot f(-2) - f(-2) - x + 3$$

como $f(-2) = 2$, logo

$$f(x) = 2f(x) - 2 - x + 3$$

isolando $f(x)$

$$\boxed{f(x) = x - 1},$$

Letra a.

4.4.8 Aplicação 15: FUVEST-SP, 1993

(FUVEST - SP, 1993) - Uma função satisfaz a condição $f(x+1) = f(x) + f(1)$, para qualquer valor real da variável x. Sabendo que $f(2) = 1$, podemos concluir que $f(5)$ é igual a:

a) 1/2

b) 1

c) 5/2

d) 5

e) 10

Resolução:

Passo 1: Inicialmente, utilizamos a equação funcional para encontrar relações entre valores específicos da função:

Tomando $x = 1$, temos:

$$f(2) = f(1) + f(1) = 2f(1).$$

Como o enunciado forneceu $f(2) = 1$, então:

$$2f(1) = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(1) = \frac{1}{2}.$$

Assim, encontramos:

$$f(1) = \frac{1}{2}.$$

Agora, com o valor de $f(1)$ conhecido, podemos calcular facilmente $f(5)$:

$$f(3) = f(2) + f(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$f(4) = f(3) + f(1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$

$$f(5) = f(4) + f(1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Assim, encontramos que:

$$\boxed{f(5) = \frac{5}{2}.}$$

Resposta correta: Alternativa **(c)** $\frac{5}{2}$.

5 Considerações Finais

O objetivo foi explorar a teoria e as estratégias para resolver equações funcionais, incluindo as equações funcionais de Cauchy. Além disso, buscou-se explorar aplicações em contextos matemáticos e interdisciplinares, destacando sua relevância em diferentes áreas do conhecimento. Observamos que é possível chegar a equações matemáticas, como a área do retângulo, juros compostos, desintegração radioativa através das equações funcionais, todas essas aplicações com base nas equações de Cauchy. Verificou-se que com técnicas simples, também pode-se obter uma aplicação como foi o caso da aplicação sobre a torre de Hánoi.

Vimos que a partir dos métodos simples de substituições aplicados com as equações funcionais, podemos resolver problemas olímpicos inicialmente considerados complexos se tornam fáceis e com soluções acessíveis. Isso demonstra a importância dos fundamentos das equações funcionais tanto para o ensino de matemática como também para o desenvolvimento dos alunos. É possível inferir que a incorporação dos conceitos de equações funcionais no ensino de matemática proporciona o acesso a um nível mais elevado dessa teoria, promovendo habilidades e desafios para os alunos em sala de aula.

Equações funcionais são ferramentas poderosas para o ensino e a pesquisa em matemática. Sua aplicação transcende problemas teóricos, auxiliando na interpretação de sistemas reais e no desenvolvimento de habilidades analíticas. Este trabalho reforça a importância de integrar tópicos de equações funcionais em currículos educacionais, preparando estudantes para desafios interdisciplinares.

Para estudos futuros, outras equações funcionais e métodos de resolução podem ser investigados, como as equações de D'Almenbert, Jensen, Pexider.

6 Referências

BOYER, Carl B. História da matemática. Editora Blucher, São Paulo, 2012.

BEZERRA, A. Uma introdução às equações funcionais. Dissertação (mestrado em Matemática), Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa. 2014.

GOMES, C. S. G., Revista Eureka-Equações Funcionais para os mais Jovens, nº 37.

SAHOO, Prasanna K.; KANNAPPAN, Palaniappan. Introduction to functional equations. CRC press, 2011.

SMALL, C. G., Functional Equations and How to Solve Them. Problems Books in Mathematics, 2007.

FUVEST, 1993. AIO. Disponível em: https://www.aio.com.br/questions/content/uma-funcao-de-variavel-real-satisfaz-a-condicao-1-1. Acesso em: 15 out. 2023.

IDECAN. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano (IFBA): Concurso Público para Professor de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico - Área: Matemática. 2019. Prova aplicada em 2019.

IDECAN. Prefeitura Municipal de Campina Grande: Concurso Público para Professor de Educação Básica 3 - Área: Matemática. 2021. Prova aplicada em 2021

COSSENO. Banco de questões online. Disponível em: https://cosseno.com/r/1zfdg037. Acesso em: 10 mar. 2025.

ESTRATÉGIA VESTIBULARES. Questão OBM 1998 F2 N3. Disponível em: https://vestibulares.estrategia.com/public/questoes/OBM-1998-F2-N3-Seja-f321567f591/. Acesso em: 10 mar. 2025.

ESTRATÉGIA CONCURSOS. Questão para todos inteiros. Disponível em: https://concursos.estrategia.com/public/questoes/Para-todos-inteiros21109dd7da/. Acesso em: 10 mar. 2025.

EFTHIMIOU, Costas. Introduction to functional equations. Version 2.00. Orlando, FL: University of Central Florida, 2010. 341 p. Disponível em: https://www.imath.kiev.ua/ boyko/MAN-2019-2020/Literatura/Efthimiou

ASSIAS, John Michael; THANDAPANI, E.; RAVI, K.; SENTHIL KUMAR, B. V. Functional Equations and Inequalities: Solutions and Stability Results. Series on Concrete and Applicable Mathematics. Vol. 21. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2017.

CHAVES, Ana Paula. Equações Funcionais: Uma primeira abordagem. 26ª Semana Olímpica, Nível 2, 2023. Disponível em: <https://sites.google.com/ufg.br/apchaves>.

Acesso em: 12 de março de 2025.

GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. 2. ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994. ISBN 0-201-55802-5.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

TCC

Assunto:	TCC
Assinado por:	Luis Fernandes
Tipo do Documento:	Tese
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Luis Vinicios Oliveira Fernandes**, **DISCENTE (202111230022) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 23/03/2025 23:59:49.

Este documento foi armazenado no SUAP em 23/03/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1430890
Código de Autenticação: 8929802735