INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARIA BEATRIZ DE AZEVEDO SILVA

O NÚMERO IRRACIONAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA: NUM VAZIO DE SIGNIFICADO UM "MONSTRO" FOI CRIADO

CAMPINA GRANDE - PB

2025

MARIA BEATRIZ DE AZEVEDO SILVA

O NÚMERO IRRACIONAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA: NUM VAZIO DE SIGNIFICADO UM "MONSTRO" FOI CRIADO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Felipe Barbosa Cavalcante

Coorientador(a): Prof. Dr. Luis Havelange Soares

Catalogação na fonte:
Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

S586n Silva, Maria Beatriz de Azevedo
O número irracional na educação básica: num vazio de significado um "monstro" foi criado / Maria Beatriz de Azevedo Silva. - Campina Grande, 2025.
65 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de Licenciatura em Matemática.) - Instituto Federal da Paraíba, 2025.
Orientador: Prof. Dr. Felipe Barbosa Cavalcante.
Coorientador: Prof. Dr. Luis Havelange Soares.

1. Ensino de Matemática 2. Matemática - números irracionais 3. Formação docente - educação básica 4. Formação de professor - matemática I. Cavalcante, Felipe Barbosa II. Soares, Luís Havelange III. Título.

CDU 51:37

O NÚMERO IRRACIONAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA: NUM VAZIO DE SIGNIFICADO UM "MONSTRO" FOI CRIADO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB),como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Felipe Barbosa Cavalcante

Aprovado em: 14 / 03 / 2025

BANCA EXAMINADORA

Felipe Barbosa Cavalcante

Prof. Dr. Felipe Barbosa Cavalcante - IFPB.
(Orientador)

Prof. Dr. Luis Havelange Soares - IFPB.
(Coorientador)

Orlando Batista de Almeida

Prof. Me. Orlando Batista de Almeida - IFPB.
(Membro da Banca)

Prof. Me. Helder Gustavo Pequeno dos Reis - IFPB.
(Membro da Banca)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por estar sempre ao meu lado, iluminando meus passos e concedendo-me sabedoria e coragem para enfrentar cada desafio dessa longa jornada. Sou imensamente grata por Sua presença constante, que me guiou e fortaleceu em todos os momentos, permitindo-me superar obstáculos e crescer.

Aos meus pais, Jucimary Samara e José Araújo, por sempre estarem presentes, acreditando no meu futuro, me incentivando com palavras de carinho e transmitindo valores que levarei comigo por toda a vida. À minha irmã, Bianca Araújo, pelo carinho e suporte em todos os momentos dessa caminhada.

À minha segunda família, Madrinha Joselma, Priscila Castro, Jucicleia Castro, Vitória Castro, Ozziney Castro e Esther Castro, muito obrigada por serem meu verdadeiro significado de família e amor. Agradeço profundamente por todo o incentivo, carinho e apoio que me deram ao longo dessa jornada. Cada um de vocês foi fundamental para minha conquista, e sou eternamente grata por me acolherem com tanto afeto e por estarem sempre ao meu lado.

À minha avó, Clotildes Calixto, que, mesmo enfrentando a doença, nunca mediu esforços para demonstrar o quanto se orgulhava de mim. Sua força e palavras de encorajamento sempre me mostraram o quanto eu era amada e valorizada.

Um agradecimento especial à minha tia, Inácia Araújo, por sempre me incentivar a seguir em frente e por me acolher com tanto carinho em sua casa, proporcionando apoio e motivação em todos os momentos dessa jornada.

Ao meu namorado, Ewerton Nascimento, que, mesmo chegando nos momentos finais da minha graduação, tornou-se meu maior incentivador nessa jornada. Agradeço por sempre acreditar no meu potencial, por sua paciência, amor, carinho e companheirismo incondicional. Sou grata por estar ao meu lado, apoiando-me em cada passo e acreditando em mim quando eu mais precisei.

Agradeço ao Instituto Federal da Paraíba, campus Campina Grande, pelo apoio e pelas oportunidades oferecidas ao longo da minha formação. Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática do campus Campina Grande, por todos os conhecimentos transmitidos, em especial aos meus orientadores, Felipe Barbosa e Luís Havelange, por toda dedicação e atenção.

A CAPES, por meio de programas como PIBID e PRP, que fortalece a formação de professores e a educação, incentivando a reflexão crítica e o aprimoramento das práticas pedagógicas.

Aos amigos que ganhei durante esta caminhada, Adalberto Vieira, Érika Soares, Carlos Daniel, Carlos Uilito, Gleysom Moizinho, Israel Ribeiro, muito obrigada por compartilharem momentos tão importantes na minha vida acadêmica e pessoal. Cada um de vocês foi fundamental para tornar tudo isso mais leve e especial, e sou imensamente grata por todo o carinho, apoio e amizade que me proporcionaram.

A Gleysom Moizinho, expresso minha profunda gratidão por toda a parceria, dedicação e colaboração na construção desta pesquisa. Seu apoio foi essencial em cada etapa do processo, contribuindo significativamente para o desenvolvimento deste trabalho.

Às minhas queridas amigas e amigos Iasmim Anahí, Elizandra Borges, Maria Laura, Vitória Inácia, Thainary Laleska, Girlene Santos, Ozziney Castro e Samuel Severino, meu mais sincero agradecimento. Cada um de vocês fez a diferença nessa caminhada, com gestos de apoio, amizade e alegria que iluminaram os momentos difíceis e tornaram os bons ainda mais especiais. Obrigada por acreditarem em mim, por me inspirarem e por fazerem parte dessa história tão importante na minha vida.

Por fim, minha gratidão se estende a todos que fizeram parte dessa jornada. Mas de modo especial, agradeço de coração a Ana Letícia e Evelly Dâmaris, que foram meu porto seguro ao longo desse caminho. Sem vocês, eu não teria chegado até aqui. Obrigada por estarem ao meu lado, por cada palavra de apoio, por cada riso compartilhado e por contribuírem tanto para o meu crescimento, não apenas como profissional, mas também como pessoa. Vocês têm um lugar eterno no meu coração.

“No tempo certo, eu, o Senhor, farei isso acontecer.” Isaías 60:22

RESUMO

O ensino de números irracionais na educação básica enfrenta desafios significativos, muitas vezes, limitando-se a abordagens formais e mecânicas, as quais dificultam a construção de significados para os alunos. O presente trabalho teve como objetivo investigar essas dificuldades e propor estratégias para tornar o ensino dos números irracionais mais acessível e significativo. Através de um aporte teórico-metodológico baseado na perspectiva da contextualização nas aulas de matemática, a pergunta diretriz da pesquisa indagou se é possível desenvolver um processo de ensino de números irracionais, na educação básica, que ultrapasse o vazio de significação que tem marcado o estudo desse tema? Para responder à questão, se fez uma reflexão sobre temas relevantes nesse contexto, através de referenciais teóricos, explorando obras de educadores como Broetto & Santos-Wagner (2017), Roque (2012) e dentre outros, os quais exploram conceitos fundamentais sobre os números irracionais e propõem estratégias pedagógicas que favoreçam a compreensão dos mesmos. A abordagem do objeto de estudo se deu por meio do enfoque qualitativo, através de investigações bibliográficas e documentais, visando oferecer alternativas para o ensino desse conteúdo. Os resultados obtidos a partir do projeto, mostraram uma experiência riquíssima, evidenciando que a contextualização histórica, o uso de múltiplas representações e a problematização em sala de aula podem, de fato, contribuir para uma compreensão mais profunda do tema. A conclusão oferece além de alternativas para o ensino dos números irracionais na educação básica, um reforço a importância da pesquisa na formação docente, contribuindo assim para reflexões sobre práticas pedagógicas e incentivo ao desenvolvimento de sequências didáticas para o ensino de matemática.

Palavras-chave: Matemática; Educação básica; Números irracionais; Estratégias pedagógicas; Sequência Didática.

ABSTRACT

The teaching of irrational numbers in basic education faces significant challenges, often being limited to formal and mechanical approaches, which hinder students' construction of meaning. This study aimed to investigate these difficulties and propose strategies to make the teaching of irrational numbers more accessible and meaningful. Through a theoretical-methodological approach based on the perspective of contextualization in mathematics classes, the guiding question of the research inquired whether it is possible to develop a teaching process for irrational numbers in basic education that goes beyond the lack of meaning that has characterized the study of this topic. To answer this question, a reflection was made on relevant themes in this context through theoretical references, exploring works by educators such as Broetto & Santos-Wagner (2017), Roque (2012), among others, who examine fundamental concepts about irrational numbers and propose pedagogical strategies that facilitate their understanding. The study adopted a qualitative approach through bibliographic and documentary investigations, aiming to offer alternatives for teaching this content. The results obtained from the project revealed a highly enriching experience, highlighting that historical contextualization, the use of multiple representations, and problematization in the classroom can indeed contribute to a deeper understanding of the topic. The conclusion provides not only alternatives for teaching irrational numbers in basic education but also reinforces the importance of research in teacher training, thus contributing to reflections on pedagogical practices and encouraging the development of didactic sequences for mathematics teaching.

Keywords: Mathematics; Basic Education; Irrational Numbers; Pedagogical Strategies; Didactic Sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Nuvem de Palavras 16
Figura 2: Representação da Ampliação da Reta Numérica 21
Figura 3: Quadrado Unitário 22
Figura 4: Disposição dos Irracionais na Reta 23
Figura 5: Esquema da Transposição Didática 34
Figura 6: Representação do Processo Envolvido em uma Sequência Didática 36
Figura 7: Representação Gráfica dos Conjuntos Numéricos 37
Figura 8: Números Irracionais no 1º ano do Ensino Médio 39
Figura 9: Habilidades a Serem Desenvolvidas no 9º ano 40
Figura 10: Habilidades a Serem Desenvolvidas no 7º ano 40
Figura 11: Habilidades nos PCN's 41
Figura 12: Recorte da Aula 02 no 8º ano 42
Figura 13: Passo a Passo Apresentado no Plano de Aula 42
Figura 14: Recorte da Aula 01 no 1º ano 44
Figura 15: Ilustração do Passo a Passo 53
Figura 16: Ilustração do Passo a Passo 55
Figura 17: Demonstração da Irracionalidade da $\sqrt{2}$ 60
Figura 18: Triângulo ABC de lado hipotenusa $\sqrt{2}$ 61
Figura 19: Triângulo ADC de hipotenusa $\sqrt{3}$ 61
Figura 20: Repetição do Procedimento até a 17 62

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Tratamento da Comensurabilidade 20
Quadro 2: Aproximação da Raiz Quadrada de Dois 21
Quadro 3: Círculo Hermenêutico 25
Quadro 4: Análise de Pesquisas sobre os Números Irracionais 29

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IFPB	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
TIC's	Tecnologias de Informação e Comunicação
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
PIBID	Programa Institucional de Bolsa e Iniciação à Docência
PRP	Programa de Residência Pedagógica

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 12

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 15

2.1. NÚMERO IRRACIONAL: QUE MONSTRO É ESSE? 17

2.2. AS PESQUISAS SOBRE O ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA 28

2.3. POSSIBILIDADES DE ESNINO: O DESMANCHE DE UM "MONSTRO" PELA CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADOS 33

2.3.1. A PESQUISA COMO PONTE ENTRE CURIOSIDADE E DESCOBERTA 34

2.3.2. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA COMO FERRAMENTA DE CONSTRUÇÃO DO SABER 35

2.3.3 ANÁLISE DA(S) SEQUÊNCIA(S) DIDÁTICA(S) 37

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS 45

4. REFERÊNCIAS 48

APÊNDICE A – (SEQUÊNCIA DIDÁTICA 8º ANO) 51

APÊNDICE B – (POSSIBILIDADES DE ENSINO 8º ANO) 52

APÊNDICE C – (SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1º ANO) 52

APÊNDICE D – (POSSIBILIDADES DE ENSINO 1º ANO) 59

1. INTRODUÇÃO

Apesar de todos os avanços nas estratégias e ferramentas pedagógicas, as quais ofertam diversas possibilidades de inovação em sala de aula, historicamente, ensinar matemática tem sido um desafio constante. Conforme apontam Lemos e Lévy (2010), admitir esse progresso não significa ignorar os obstáculos que persistem no ensino da disciplina. Além das dificuldades conceituais intrínsecas, há um fator preocupante no modo como a Matemática é apresentada desde os primeiros contatos: uma abordagem que, com alarmante frequência, *monstrifica* a Matemática, a transformando em um objeto que causa medo e frustração. Segundo Boaler (2019), o reflexo desse problema pode ser observado não apenas nos baixos índices de sucesso entre os estudantes, como também na verdadeira aversão que muitos adultos carregam ao longo da vida, oriunda de experiências escolares desmotivadoras.

Essa realidade contrasta com o potencial da Matemática de despertar curiosidade e interesse. Contudo, uma vez que sua abordagem no contexto escolar é determinada por diretrizes curriculares rígidas e por vezes desconectadas da realidade do aluno, a maneira como os conteúdos são abordados tende a ser um reflexo dessa estrutura. Se, por um lado, a dissecação formal do conteúdo pode reduzir a Matemática a um conjunto de símbolos, equações e operações abstratas distantes da realidade, uma abordagem contextualizada e mais flexível, sem deixar de lado o rigor necessário, oferece a oportunidade dos estudantes se apropriarem do conhecimento de forma significativa e vinculada à realidade, independentemente de suas dificuldades individuais na manipulação formal dos símbolos e argumentos lógicos inerentes à Matemática.

Essa discrepância na forma de pensar e ensinar a Matemática também pode ser observada na formação de professores. Enquanto uma abordagem, enviesada por Pais (2013), sustenta a necessidade de priorizar a formalização, a objetividade, a generalidade e a abstração, outra perspectiva, seguindo a ótica de D'Ambrósio (2012), consiste em enxergar a disciplina como uma estratégia humana, desenvolvida historicamente para interagir, interpretar e explicar o mundo real e perceptível bem como o mundo abstrato.

Nesse sentido, durante as práticas de estágio supervisionado como disciplina obrigatória no curso de formação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, campus Campina Grande (IFPB), por meio das dificuldades apresentadas pelos estudantes na compreensão do conceito de números irracionais, exemplificando o afirmado por Broetto e Santos-Wagner (2019), foi possível experienciar diretamente como a abordagem usual desse

tema, a qual combina abstração rigorosa e a ausência de conexão com a realidade, resulta em uma lacuna de compreensão, significado e relevância deste tópico.

Diante desse cenário, na posição de futura professora, faz-se necessário adotar práticas educativas que estabeleçam pontes entre o conhecimento matemático e os desafios do processo de ensino-aprendizagem, permitindo identificar equívocos recorrentes cometidos por alunos e professores, e desenvolver alternativas para superá-los por meio de uma abordagem conectada ao cotidiano e às experiências concretas dos estudantes.

Esta pesquisa parte do pressuposto de que há na educação básica, um ensino dos números irracionais, carente de significado para os alunos, resultando em uma compreensão fragmentada e mecanizada, não se limitando apenas a sua definição, mas se manifestando na incapacidade de estabelecer conexões entre esses números e o seu papel no desenvolvimento do pensamento matemático. E se tratando dos professores, surgem as lacunas nas práticas pedagógicas, muitas vezes limitadas a abordagens numéricas e procedimentais presentes nos livros didáticos, o que acarreta uma visão superficial da relevância desses números no contexto matemático. Esse distanciamento entre o ensino e a construção de significados pode comprometer a aprendizagem, tornando os números irracionais, vazios em sua compreensão conceitual.

Dados estes pressupostos, configura-se o seguinte problema de pesquisa: é possível desenvolver um processo de ensino de números irracionais, na educação básica, que ultrapasse o vazio de significação que tem marcado o estudo desse tema? A priori, pode-se dizer que sim, visto que:

> A docência é um processo construído ao longo de uma trajetória de vida pessoal e profissional, e os frutos desse processo repercutem na constituição própria de cada sujeito, na sua forma de ser e estar no mundo e na profissão. A formação deve, portanto, dar sentido aos caminhos traçados pelo professor na sua trajetória de vida[...] vivenciada no exercício da docência (D'ÁVILA, VEIGA et. al., 2012, p. 86).

Nesse sentido, em todo processo de construção do conhecimento existe a necessidade de uma escolha quanto ao tratamento a ser dado à matéria, levando em consideração não apenas os aspectos conceituais, como também as questões didático pedagógicas, a realidade institucional e as trajetórias individuais de professores e alunos. Dessa forma, nota-se a relevância da indagação anterior, visto que na prática docente além dos conhecimentos específicos da área de formação, também são necessários os conhecimentos didático-

pedagógicos para que seja feita a devida *transposição didática*[1] tornando o processo de ensino-aprendizagem mais significativo e acessível.

Visando responder à questão central desta pesquisa, este projeto foi elaborado na forma de um estudo teórico-bibliográfico, baseado em análise documental, cujo propósito é discutir e elaborar uma sequência didática para aplicação em turmas do 8º ano do e do 1º ano do ensino médio, fundamentado em uma abordagem qualitativa objetivando investigar possibilidades didático-metodológicas para o ensino, mais significativo, dos números irracionais na educação básica. Entre os aspectos específicos desse objetivo, destacam-se:

1. Explorar conceitos fundamentais sobre os números irracionais;
2. Propor estratégias pedagógicas para facilitar a compreensão do assunto por parte dos alunos;
3. Avaliar a aplicabilidade da proposta na sala de aula em turmas de 8º e 1º ano do ensino médio.

Para atingir tais objetivos, optou-se por um tratamento no qual a formalização necessária, foi reduzida ao mínimo sem ferir o rigor matemático. Em cada etapa no dos assuntos a serem explorados, procurou-se chegar aos conceitos fundamentais através de exemplos, tornando as definições as mais naturais possíveis, apresentando vínculos com outras áreas e ciências. No que diz respeito a teoria aplicada, seguindo a mesma linha optou-se por não atribuir doses muito grandes de formalização, seguindo sempre que possível, a resolução de exercícios e explorações práticas que devem ser consideradas parte integrante do(a) texto/discussão.

Destacamos que o desenvolvimento da sequência didática não revela a solução para o melhor ensino dos números irracionais na educação básica e seu tratamento, e sim um caminho e/ou possibilidade de investigação através de uma reflexão crítica permeada em uma abordagem diretiva, compreendendo aspectos gerais, conceitos fundamentais e as relações estabelecidas entre essas vertentes.

De maneira geral, os números irracionais fortificam-se em práticas de descrição, como balística, estatística e dentre outros campos da modelagem, sendo considerada, a posteriori, sua aproximação, em virtude da tentativa de facilitar cálculos numéricos e suas operações. Nesse sentido, o uso prático, real e significativo do número irracional, dar-se-á não pela vivência do mesmo no cotidiano, mas pela ideia do que este número representa, da orientação e/ou referência que apresenta em um determinado contexto. Confrontar estas questões, foi o caminho

[1] Transposição Didática é o processo de adaptação e transformação de conhecimentos científicos ou culturais em conteúdos acessíveis e significativos para o ensino. Esse conceito será melhor explorado na seção 2.3.

escolhido desta pesquisa, resgatando a noção de que a arte de resolver problemas em matemática é mediar a gestão dos erros de partida e dos erros de chegada.

Isto posto, a seguinte pesquisa fora dividida em quatro capítulos, sendo o primeiro deles a introdução, contendo em seu escopo a justificativa, questão diretriz e objetivos gerais e específicos. No segundo capítulo, referente a fundamentação teórica, fora abordada em três tópicos: a discussão histórica e conceitual dos números irracionais como impacto na percepção dos alunos sobre os limites do conhecimento matemático; a investigação das práticas que tem sido feitas/estudadas no que se refere ao ensino da irracionalidade na educação básica; as possibilidades de investigações em sala de aula através da elaboração de uma sequência didática de ensino sobre os números irracionais. No terceiro capítulo serão acrescentadas as considerações finais a respeito da pesquisa, possibilidades e investimentos futuros. Referente ao quarto capítulo serão apresentadas as referências utilizadas ao longo da pesquisa, bem como os apêndices que a complementam.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Atualmente a velocidade com que recebemos informações, por vezes favorece uma cultura de efemeridade do conhecimento, impactando inevitavelmente o que compreendemos como real ou racional. Dessa forma, um questionamento dessa natureza torna-se fundamental para a construção do conhecimento pautada no pensamento crítico.

Nesse sentido, no universo da Matemática que perpassa pela padronização, beira a exatidão e move-se entre ideias, teoremas e simbolismos, encontra-se um conceito matemático que, por muito tempo, desestabilizou ideias intuitivas no que diz respeito ao desenvolvimento desta ciência, desafiando noções já existentes sobre o uso dos números como forma de medir grandezas: Os números irracionais.

Estes números, que a princípio causaram estranheza, por não possuírem representações exatas na forma de frações, marcaram diversos momentos importantes na história da Matemática, dando origem a famosa crise da matemática, com os pitagóricos e seus estudos atrelados a algo concreto, como “medir a diagonal de um quadrado de lado unitário” (ROQUE, 2012), ou ainda, por exemplo, a formalização da noção de incompletude dos racionais[2], o que

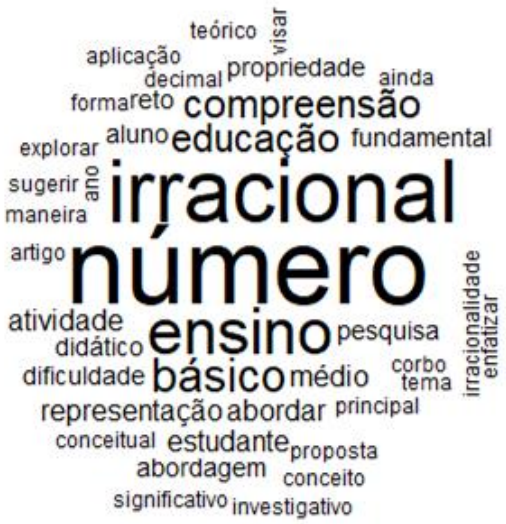
[2] Refere-se ao fato de que, apenas os números racionais não são suficientes para representar todos os pontos da reta real. Isso significa que existem "lacunas" na linha dos números racionais, o que leva à necessidade de um conjunto maior, os números reais, que inclui tanto os racionais quanto os irracionais, preenchendo essas lacunas. Para maiores detalhes, recomenda-se a obra “Análise Real: Funções de uma variável” ou ainda “Curso de Análise”, ambas de Elon Lages Lima

permitiu a construção algébrica e topológica dos números reais[3], desenvolvidas ao longo da história, por meio dos estudos de Richard Dedekind [4] e Georg Cantor [5].

Contudo, o rigor matemático e abstração excessiva, atreladas a esses métodos, repercutiu na forma como esse conteúdo costuma ser abordado na educação básica, o qual conforme aponta Broetto e Santos-Wagner (2017), é marcado por uma ausência de significação e desconexão com a realidade. Todavia, permitir a continuidade dessa postura continuará por promover dificuldades e insuficiências em seu ensino e, por isso, o autor provoca um tratamento que vá além da relação dicotômica presente na sala de aula, relação que permite uma circularidade entre irracional e real, através de exemplos superficiais já incluindo números irracionais nos estudos, sem atribuir a devida importância aos mesmos, como origem, possibilidades, consequências, dentre outros aspectos.

Na figura a seguir, destaca-se em uma pesquisa rápida através de artigos presentes na bibliografia deste trabalho, as principais palavras que tecem uma nuvem de preocupações e apontamentos sobre a temática:

Figura 1: Nuvem de Palavras



Fonte: Iramuteq (2025).

Assim, ao longo do desenvolvimento deste estudo, buscamos nos manter longe dos clichês espalhados em larga escala, tal como a definição de número irracional caracterizado em

[3] Por serem necessários muitos pré-requisitos algébricos e topológicos para tamanha discussão, não entraremos em detalhes sobre o assunto, mas indicamos como leitura o livro "A construção dos números", de Jamil Ferreira, para um leitor com maior interesse sobre o tópico.

[4] A construção dos números reais por meio dos Cortes de Dedekind, presentes em "A construção dos números", de Jamil Ferreira.

[5] A construção dos números reais por Georg Cantor baseia-se em classes de equivalência se sequências e pode ser encontrado na obra "Um curso de álgebra", de Abramo Hefez.

termos do que ele não é: “Não é uma fração de inteiros, não é uma decimal finita, não é uma decimal infinita periódica e não é um número racional” (BROETTO, SANTOS-WAGNER, apud LIMA, et al., 2021, p. 376), urge investigar o caráter histórico do conceito da irracionalidade, com destaque para a importância de métodos de ensino eficazes.

Respeitando a relação entre a historicidade e o conteúdo a ser ensinado, é dever do professor caminhar por uma compreensão da prática para ressignificar a teoria, um viés que unifica a relação teoria-prática (didática) no campo do ensino-aprendizagem, viés presente nas obras de Ubiratan D’Ambrósio (2012) ou, dentre outras, em D’Ávilla, Veiga (et. al., 2012), ampliando a interpretação das subjetividades dos professores e, fazendo da aula, um espaço pedagógico em que alunos e professores constroem conhecimentos.

Tamanha construção baseada no currículo escolar (Nobre, 2024), visa contribuir para uma compreensão fundamental (e necessária) que possa ser desenvolvida do fundamental ao médio, alinhando-se às diretrizes educacionais nacionais, aumentando o engajamento dos alunos.

Ademais, entre nomes e títulos que muito tem a contribuir no processo de investigação da irracionalidade, a pesquisa busca investigar e/ou contribuir com propostas semelhante às apresentadas em dissertações como as de Vasconcelos (2016) e Nobre (2017 - 2024).

2.1. NÚMERO IRRACIONAL: QUE MONSTRO É ESSE?

No início da escolarização, o trabalho com a manipulação, a visualização e o lúdico, acaba por construir uma certa identidade ao ensino de matemática como um constructo prático repleto de aplicabilidades, a qual, posteriormente, envereda por discussões entre o concreto e o abstrato, jamais (ou ao menos espera-se) por uma única vertente destas. Segundo Jesus e Oliveira (2018, p. 332),

> A Matemática desenvolvida pelos egípcios e babilônicos se caracterizava por sua aplicabilidade prática, isto é, vinculava-se às suas necessidades práticas do dia a dia e não à organização estrutural de uma ciência [...].
> Já na Antiguidade, os gregos encaravam a Matemática como uma ciência propriamente dita, sem se preocupar com suas aplicações, levando em conta problemas relacionados com processos infinitos, movimento e continuidade [...].

Nesse sentido, é comum para os alunos da educação básica, depararem-se com os diferentes significados para com o tratamento da Matemática, entre aplicabilidades práticas, visíveis e imediatas, e conceitos e conhecimentos teórico-abstratos, presentes no que Platão

denominava mundo das ideias. Ao tratamento, em especial, destes últimos casos, gera-se o que Bicudo e Borba (2012, p. 93-95), retratam como sendo *monstros na matemática*.

> [...] há um considerável estranhamento entre a Matemática acadêmica (oficial, da escola, formal, do matemático) e a Matemática da rua, e o problema não é apenas que a academia ignore ou desautorize a rua, mas também que a rua ignore e desautoriza a Matemática acadêmica, fato que é, na maior parte dos casos, mal compreendido e não considerado seriamente na Educação Matemática, embora seja um fato de grande alcance [...], vou argumentar que aquele estranhamento, entre a Matemática da rua e a Matemática do matemático, é construído por processos de produção de significado, e farei isso a partir da idéia de que na Matemática do matemático há *seres* que ao mesmo tempo em que mantêm a maioria das pessoas fora do Jardim do Matemático, por serem para elas *monstros monstruosos*, são, para o matemático (entendido como aquele que circula pelo Jardim) *monstros de estimação* que, ao invés de assustarem, são fonte de deleite.

Como alimentação a essa ideia de monstruosidade, Pereira (2012) ressalta que a matemática "ainda é uma das disciplinas mais rejeitadas e menos aprendidas, pois é ensinada de forma inadequada nas nossas escolas" (PEREIRA, 2012, p. 9). Logo, vê-se que a necessidade de explorar uma matemática que possa levar em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, suas vivências, reflexões e os objetivos expressos pelo currículo escolar, não é uma opção a ser descartada. Pelo contrário, necessita de ser valorizada e colocada em prática atualmente.

Contudo, "na sociedade contemporânea não basta adquirir novos conhecimentos de maneira significativa, é preciso adquiri-los criticamente" (MOREIRA, apud PEREIRA, 2012, p. 22). Tratando-se do ensino-aprendizagem de Matemática, deve-se levar em consideração que muito do que é (ou deveria ser) trabalhado em sala de aula, fora resultado de uma enormidade de pesquisas, investigações, explorações, criações e descobertas, não de maneira linear como sugere os capítulos dos livros didáticos, mas visando uma construção de sentidos e significados condizentes não apenas com a realidade prática e imediata.

Nesse sentido, no que se refere ao estudo dos conjuntos numéricos, sua motivação e representação, tem-se que, para cada conjunto, houve um sentido e direcionamento para seu surgimento e utilização: o número natural, nasce do desejo de contar e/ou representar resultados de contagens através de uma quantidade simbólica; o número inteiro, perpassa a contagem, mas se dá em um contexto de comparação e/ou relativização; o número racional, é uma entidade que adjetiva o medir que pode ser encaminhado a partir da contagem; quando essas medidas não podem ser feitas por meio da contagem, surge o número irracional, um conceito numérico que vive na fronteira entre o contar e o medir; a união dos irracionais com os racionais, gera o conjunto dos números reais.

Os números irracionais são frequentes em livros didáticos, documentos oficiais, matrizes de referência, como Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), provas e exames, como Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e dentre outras instâncias (BROETTO, SANTOS-WAGNER 2017), contudo, trata-se de um conteúdo matemático difícil de ser abordado e compreendido, cristalizado pelo tempo, mas que permanece a influenciar a monstruosidade da matemática. Segundo Morales e Nóbriga (2016, p. 2), "apesar de ser um conceito complexo, encontram-se várias aplicações como por exemplos: padrão de crescimento de plantas, geometria fractal, espiral logarítmica, taxas de crescimento exponencial, entre outros".

Mas se existe determinadas aplicabilidades, faz-se presente em diferentes etapas e níveis de avaliação, e mostram-se contribuintes para a criação do conjunto dos números reais, essencial para uma enormidade de direcionamentos e constructos matemáticos, o que torna o número irracional um objeto difícil de ser discutido?

Com base em Machado (1998, p. 80)

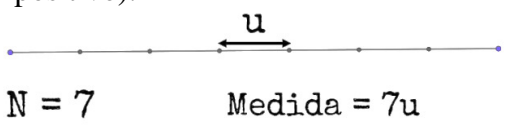
> Naturalmente, em termos de ensino, é desejável que os conteúdos de que tratam os programas escolares sejam apresentados aos alunos de modo a evidenciar seus vínculos com a realidade concreta, historicamente situada. Este recurso à História – não à história de povos, épocas ou personagens eventualmente interessantes, mas à história do desenvolvimento das ideias, dos conceitos, do modo como o conhecimento foi produzido – é quase sempre suficiente para revelar uma continuidade essencial com relação ao significado dos temas tratados. E insistimos no fato de que tal continuidade não significa apenas uma subordinação da Matemática escolar às exigências do dia a dia.

Para que a ruptura com a prática imediata desses sentidos descritos em Machado seja posta em prática, é necessário em meio as atribuições do professor, "saber lidar com estes dois momentos de produção do conhecimento, explorando a continuidade de como a deflagradora natural do processo de ensino, onde a ruptura surge como uma possibilidade também é natural, em decorrência da formação de uma consciência crítica" (MACHADO, 1998, p. 81).

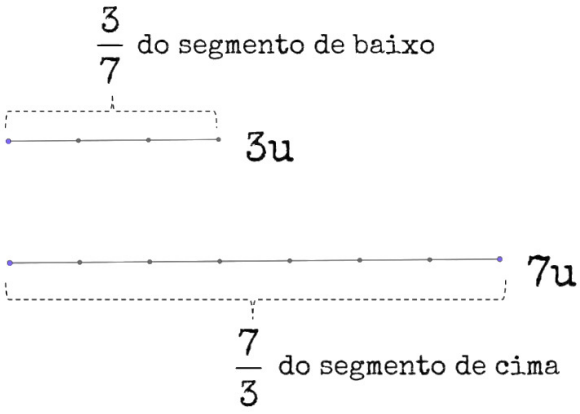
Esse tipo de atitude não é fácil. E para que a questão da dificuldade de se ensinar sobre este conjunto numérico seja discutida, cabe a análise do contexto histórico dos Números Irracionais, ser ou não um ente *comensurável*. Para uma melhor compreensão do tratamento da comensurabilidade, analise o exemplo a seguir:

Quadro 1: Tratamento da Comensurabilidade

Dado um segmento qualquer e um número inteiro positivo N, sempre há uma unidade de medida para a qual aquele segmento mede N unidades. Observe (valores escolhidos arbitrariamente a caráter expositivo):



E se fossem dados dois segmentos? Será que haveria alguma unidade para a qual a medida de ambos seria dada por números inteiros positivos, ao mesmo tempo? Ou seja, *é sempre possível subdividir um dos segmentos em um número finito de partes, de modo que uma destas partes caiba um número inteiro de vezes na outra?*

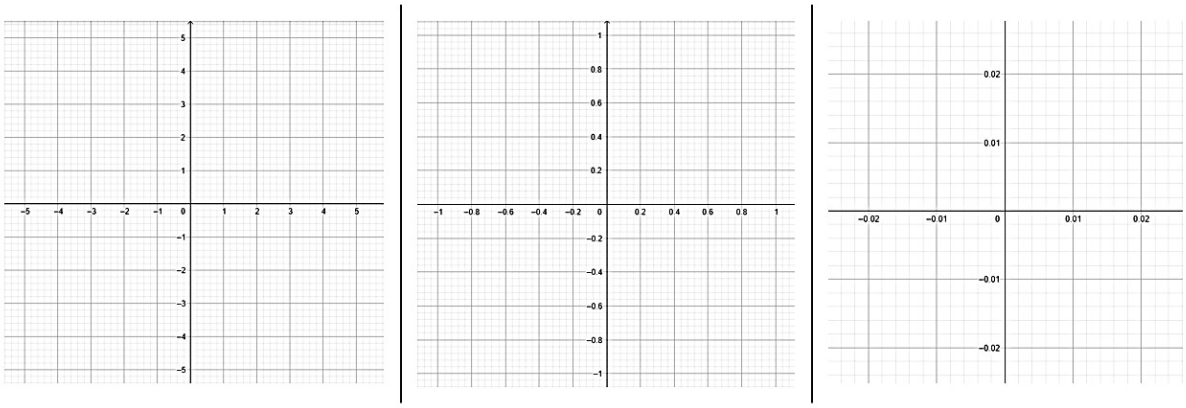


No exemplo acima, o segmento menor corresponde a $\frac{3}{7}$ do segmento maior (de baixo), enquanto o segmento maior corresponde a $\frac{7}{3}$ do segmento menor (de cima). Nesse sentido, essas frações surgem para representar medidas simultâneas feitas por contagem através de um ato de comparação. Logo, são medidas comensuráveis, uma vez que podem ser usadas para medir exatamente ambas, sem deixar resto.

Fonte: Reprodução do trecho do vídeo do Youtube" (Matemática Humanista, 2019).

Ao questionamento feito no exemplo apresentado, sobre ser sempre possível subdividir um dos segmentos em um número finito de partes inteiras, a resposta (hoje, fácil de ser dita) é não! A reta numérica é frequentemente apresentada como um modelo contínuo que representa todos os números reais, iniciando com os números naturais, seguido dos inteiros e posteriormente os racionais. É neste último que os alunos percebem ser possível subdividir um intervalo da reta em frações cada vez menores (exemplo da comensurabilidade apresentado anteriormente), o que leva a crença de que toda a reta é preenchida pelos números racionais. No entanto, se ampliarmos indefinidamente a escala da reta numérica, encontraremos apenas números racionais?

Figura 2: Representação da Ampliação da Reta Numérica



Fonte: GeoGebra (2025).

Na investigação desta situação, a raiz quadrada de 2, por exemplo, acaba sendo um dos números que desafia a noção de que toda medida pode ser expressa como a razão entre inteiros, uma vez que ao tentar aproximar seu resultado por meio de frações cada vez mais precisas, ou ainda, casas decimais mais precisas, não serão encontrados valores exatos que a representem. Observe:

Quadro 2: Aproximação da Raiz Quadrada de Dois

Para determinar o valor de $\sqrt{2}$, deve-se encontrar um número que elevado ao quadrado, dê como resultado 2. Inicialmente, verifica-se que $\sqrt{2}$ é um número decimal situado entre 1 e 2.

$$\underset{1^2 = 1}{1} < \underset{(\sqrt{2})^2 = 2}{\sqrt{2}} < \underset{2^2 = 4}{2}$$

A seguir, verifica-se que $\sqrt{2}$ é um número decimal situado entre 1,4 e 1,5.

$$\underset{(1{,}4)^2 = 1{,}96}{1{,}4} < \sqrt{2} < \underset{(1{,}5)^2 = 2{,}25}{1{,}5}$$

Continuando essa investigação, verificam-se outras possibilidades:

$$\underset{(1{,}41)^2 = 1{,}9881}{1{,}41} < \sqrt{2} < \underset{(1{,}42)^2 = 2{,}0164}{1{,}42} \qquad \underset{(1{,}414)^2 = 1{,}999396}{1{,}414} < \sqrt{2} < \underset{(1{,}415)^2 = 2{,}002225}{1{,}415}$$

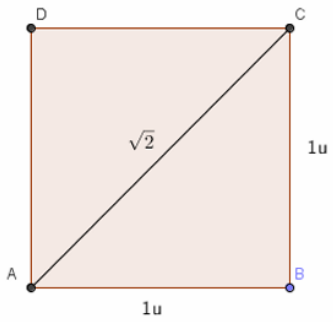
Para além destas (que continuam), questionar-se se há um número que elevado ao quadrado resulte exatamente em 2, abre caminho para a entrada dos números irracionais na história da matemática, números essenciais na revelação de que existe uma abundância de pontos que não pertencem ao conjunto dos números racionais.

Fonte: Autoria própria (2025).

É no encaminhamento explorativo tal qual apresentado no quadro anterior que se encontra a chegada dos Números Irracionais. “A ideia de irracionalidade dos números irracionais nos remete aos Pitagóricos, durante o Período Helenístico (146 a.C. – 323 a.C.)” (JESUS; OLIVEIRA, 2018, p. 332), mas vale ressaltar que, de maneira geral, não é possível admitir uma única explicação para com a origem da irracionalidade, costuma-se atribuir o surgimento dos números irracionais à Grécia Antiga.

Na história da primeira *crise da matemática*, assim intitulada (ROQUE, 2012), conta-se que possuidores do Teorema de Pitágoras, utilizando-se da ideia de que a cada segmento de reta estaria associado um número natural ou uma razão entre dois destes números, tiveram uma surpresa desagradável ao aplicar essas informações ao triângulo retângulo, formado pelos lados e a diagonal de um quadrado, de lado igual a 1 (um). Conforme figura a seguir:

Figura 3: Quadrado Unitário



Fonte: Moralis & Nóbriga – Geogebra (2016).

Chegaram à conclusão de que a medida da diagonal que, segundo sua concepção, deveria ser um número racional, era uma “quantidade” que elevada ao quadrado valia 2 (dois). Mas eles sabiam perfeitamente, através de sua aritmética, que isso não era possível na esfera dos números racionais. Essa aparente contradição gerou a primeira crise na matemática e, através dessa situação, os Pitagóricos haviam batido à porta do conjunto dos números irracionais, um novo tipo de número.

Nos dias atuais, costuma-se anunciar esse fato em forma de teorema[6]: "*Não existe nenhum número racional cujo quadrado seja igual a 2*". Para verificar tal propriedade basta supor, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Então, existem números inteiros p e $q \in Z$, com $q \neq 0$, e $mdc(p,q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Assim, elevando ambos os membros ao quadrado, tem-se que:

$$(\frac{p}{q})^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad \text{(I)}$$

Como p^2 é par[7], então p também é par, e consequentemente pode ser escrito na forma $p = 2k, k \in Z$. Portanto, substituindo os dados em (I), obtemos:

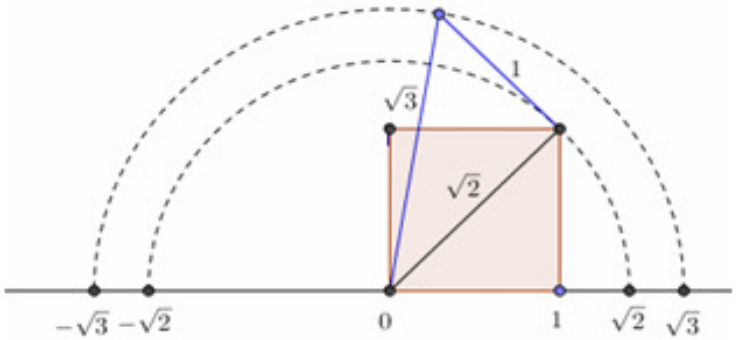
$$(2k)^2 = 2q^2 \Longrightarrow 2k^2 = q^2 \text{ (II)}$$

Contudo, q^2 é par e, de forma semelhante ao feito para o número p, concluímos que $q = 2k, k \in Z$. Mas isso é um absurdo, visto que se p, q são par, o $mdc(p,q) \neq 1$, o que contradiz a hipótese inicial. Logo, $\sqrt{2}$ é um número irracional. Sendo assim,

> A existência de segmentos incomensuráveis aponta para a insuficiência dos números naturais e das frações para medir qualquer segmento de reta. Como definir, então, o comprimento da diagonal do quadrado de lado 1? A solução encontrada pelos matemáticos foi ampliar o conceito de número e introduzir os chamados números irracionais (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017, p. 20).

Ampliando o tratamento da diagonal do quadrado e dispondo suas medidas na reta real, tem-se a aparição de outros números irracionais e, por consequência, a ampliação para um novo conjunto numérico, esta que não aconteceu de maneira tão natural:

Figura 4: Disposição dos Irracionais na Reta



Fonte: Moralis & Nóbriga – Geogebra (2016).

[6] Um teorema é uma proposição matemática que pode ser demonstrada como verdadeira a partir de axiomas e definições, utilizando um raciocínio lógico formal, isto é, uma demonstração.
[7] Fica a cargo do leitor a verificação desta afirmação "*Se o quadrado de um número é par, então este número também é par*", presente em obras como "Um convite à matemática", de Daniel Cordeiro.

Segundo Roque (2012, p. 94),

> A afirmação de que a descoberta da incomensurabilidade produziu uma crise nos fundamentos da matemática grega foi consolidada por trabalhos de historiadores da primeira metade do século XX. P. Tannery já havia afirmado que tal descoberta significou um escândalo lógico na escola pitagórica do século V a.E.C., sendo mantida em segredo inicialmente, até que, ao se tornar conhecida, teve como efeito desacreditar o uso das proporções na geometria.

O termo incomensurabilidade tem origem na palavra latina *Incommensurabilis*, que significa *não mensurável por uma unidade comum*. Na Matemática, a incomensurabilidade presente nos números irracionais, refere-se ao fato de que eles não podem ser expressos como a razão de dois números inteiros, tal como são representados os números racionais (comensuráveis).

> Na matemática atual o conceito de comensurabilidade é correspondente ao de número racional e o conceito de incomensurabilidade é correspondente ao de número irracional. Veja: se a razão entre os comprimentos de dois segmentos é um número racional então estes são comensuráveis. Por outro lado, se a razão entre os comprimentos de dois segmentos é um número irracional então estes são incomensuráveis (VASCONCELOS, 2016, p. 7).

Isto acontece pela impossibilidade de ser determinado um múltiplo comum que permita comparar, de forma exata, a razão entre duas *magnitudes*[8]. Contudo, como visto anteriormente, essa comparação não foi possível de ser feita levando em conta a relação entre o lado e a diagonal do quadrado, obtendo $\sqrt{2}$ como unidade de medida. Logo, nem sempre é possível ser feita essa comparação e, portanto, existem grandezas que não podem vir a ser medidas e/ou comparadas por uma unidade comum de forma exata.

Note que a representação decimal de $\sqrt{2}$ possui infinitas casas decimais não periódicas e, portanto, não é um número decimal exato ou ainda, uma dízima periódica, tal como os números racionais sugerem: $\sqrt{2} = 1{,}414213562373095048801688724 20$ .... "Números com essas características formam o conjunto dos números irracionais [...]. A raiz quadrada de um número natural não quadrado perfeito é irracional [...]" (VASCONCELOS, 2016, p. 9).

A partir de sua origem, implicação e tratamento, houve (e ainda há) numerosas formas de referir-se aos números irracionais. No entanto, algumas destas formas geram uma certa circularidade em que, para alguns filósofos, denomina-se *Círculo Hermenêutico*: para compreender o todo de um texto, é preciso entender suas partes, e para entender as partes, é

[8] O termo magnitude refere-se a uma grandeza, quantidade ou medida contínua, que pode ser interpretada como comprimento, área, volume, ou outra dimensão mensurável. No caso da incomensurabilidade, essa magnitude não pode ser comparada de maneira exata, precisa.

necessário compreender o todo, deparando-se com um processo contínuo e recursivo para o entendimento de cada interação. Observe o exemplo:

Quadro 3: Círculo Hermenêutico

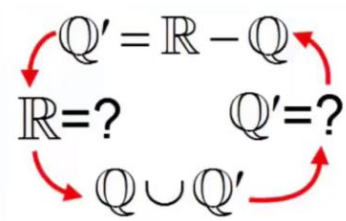
Na busca do que vem a ser um Número Real, depara-se com a união de outros dois conjuntos numéricos, os Racionais e os Irracionais.

$$R = Q \cup Q'$$

Para tanto, há de se perguntar o que vem a ser um Número Irracional, visto que este compõe a definição de Número Real. Logo, um Número Irracional é aquele número que é Real mas não Racional.

$$Q' = R - Q$$

É aqui onde encontra-se a circularidade da explicação, uma vez que: se para definir um Número Real é necessário a utilização do Número Irracional, não deveria ser utilizada a noção de Número Real para definir um Número Irracional.



Fonte: Reprodução do trecho do vídeo do Youtube" (Matemática Humanista, 2019).

A fim de contornar essa circularidade e chegar a um consenso do que viria a ser o Número Irracional, note que anteriormente, fora apresentada algumas das infinitas casas decimais da $\sqrt{2}$, a qual não apresenta uma quantidade finita ou infinita e periódica de algarismos. Sendo assim, diferenciar um número racional de um número irracional e chegar a uma concepção do que seria o número irracional, surgira com o matemático Richar Dedekind (1831 – 1916), no ano de 1872, que afirma: *um número é irracional, se o somente se, sua representação decimal é infinita e não periódica*. Do contrário, trata-se de uma exclusividade dos números racionais (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017).

Utilizar desse artifício para referenciar os números racionais e irracionais como sendo entes distintos mas que, juntos, compõem o universo dos números reais, embora muito difundida até os dias atuais, parte do pressuposto de que todo número real possui uma representação decimal, algo que embora seja *trivialmente* aceito, filosoficamente não é simples de ser trabalhado. Afinal, uma representação decimal infinita e não periódica existe de fato? "Os livros didáticos, em geral, não discutem esse ponto; apenas afirmam que as dízimas não-periódicas existem. Nós, professores, precisamos colocar essas dúvidas para os alunos" (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017, p. 30 – 31).

> O que se pode observar é que, desde a primeira problematização sobre a ideia de irracionalidade na Grécia antiga até a definição atual de Dedekind, decorreu um longo espaço de tempo. O fato de a gênese que cerca a ideia de irracionalidade ter se prolongado durante tanto tempo pode ser indício de dificuldade de compreensão dos números irracionais no contexto escolar, o que nos aponta como importante nossa reflexão acerca do ensino desses números (JESUS; OLIVEIRA, 2018, p. 334)

Sendo assim, é necessário entender que os números irracionais são causa e consequência do divórcio entre as práticas de contar e medir, presentes nos números racionais. É necessário entender que um número irracional é um objeto matemático inalcançável pelas mãos, mas passível de representação, e que sua relevância na escola perpassa o trato com erros, aproximações, necessidades e suficiências. Mas como construir esse entendimento de maneira significativa quando esse objeto matemático que é o número irracional, um ente complexo de ser entendido, é apresentado de forma prematura no 8º ano dos anos finais apenas para cumprir a ementa curricular?

Na prática cotidiana da sala de aula, a incomensurabilidade presente nos números irracionais implica em aceitar que, este novo conjunto, apenas faz sentido em práticas descritivas, teóricas e abstratas, não se fazendo presente no cotidiano para além da sala de aula. Dessa forma, acaba por ir contra o que o senso comum sugere: "As formulações sugerem o senso de que o que se estuda deve ter uma aplicação direta e imediata na vida cotidiana e que apontam para fatores socioculturais nas representações matemáticas" (SILVEIRA, 2023, p. 64).

> A opinião pensa mal; ela não pensa: ela traduz necessidades de conhecimento. Designando os objetos por sua utilidade, ela impede de conhecê-los. Nada se pode fundamentar na opinião, antes é preciso eliminá-la. Ela é o primeiro obstáculo a transpor. Não bastaria, por exemplo, retificá-la em pontos particulares, mantendo, como uma espécie de moral provisória, um conhecimento vulgar provisório. O espírito científico nos proíbe de manter uma opinião sobre questões que não compreendemos, sobre questão que não sabemos formular claramente. Antes de tudo é necessário saber colocar os problemas. E, por mais que se fale, na vida científica, os problemas não se colocam por si mesmos, é precisamente este sentido do Problema que marca o verdadeiro espírito científico. Para um espírito científico, o conhecimento é uma resposta a uma questão. Se não houver questão, não pode haver conhecimento científico. Nada anda sozinho. Nada é dado. Tudo é construído (BACHELARD, apud REZENDE; DASSIE, 2010, p. 36)

De forma prática, a aplicação do número irracional é servir de referência a uma aproximação de um número racional. Confrontar estas questões, é o aspecto principal presente no ensino deste conteúdo, o qual é (necessita ser) reconstruído em sua enunciação, sem afastar a ideia presente na definição de número irracional.

> Desse modo, importa que valorizemos situações de prática de ensino/aprendizagem de Matemática na escola, situações concretas em que atuam os sujeitos, produzindo sentidos, pois os sentidos pré-construídos de dificuldade, mesmo que constituam

> memória cristalizada, têm sua atuação dependente do "[...] passado, mesmo que realmente memorizado, só pode trabalhar mediando as reformulações que permitem reenquadra-lo no discurso concreto face ao qual nos encontramos" (ACAHARD, 1999). A memória suposta pelo discurso é sempre reconstruída na enunciação, daí a possibilidade de novos sentidos (SILVEIRA, 2023, p. 68).

Esse trabalho com a enunciação que fomente discussões a respeito do tratamento da irracionalidade de maneira a adaptar-se aos programas curriculares, pode vir a ser iniciado com o relacionamento entre as medidas obtidas de forma algébrica e geométrica, problematizando a relação entre o número irracional e sua aproximação racional.

E mais, é a partir deste tratamento que encontram-se encaminhamentos para a seguinte questão: como a compreensão dos números irracionais pode influenciar a percepção dos alunos sobre os limites do conhecimento matemático?

Com base no que fora apresentado até então, vê-se que, é desafiando noções intuitivas e introduzindo a ideia de que a Matemática explora tanto o conhecido quanto o desconhecido, que há nela, a destacar e refletir:

- Introdução à incompletude e ao infinito: nos números irracionais tais como π ou $\sqrt{2}$, existem detalhes que não podem ser representados de forma exata, isto é, há na matemática, estruturas que ultrapassam o que pode ser visualizado e/ou calculado, garantido que a matemática não é completa (pronta e acabada), mas sim que pode ser amplamente discutida, estudada.
- Um limite histórico: quando os Pitagóricos perceberam que a diagonal de um quadrado e seu lado não podiam ser medidos por uma unidade comum, foram gerados novos desafios, criações, desenvolvimentos e descobertas, o que implica na reflexão de como os limites do conhecimento mudam com novas descobertas.
- O papel do concreto e do abstrato: com a representação decimal infinita e não periódica presente nos irracionais, o obstáculo didático em relação a uma representação tangível desse ente matemático, amplia a percepção de que o conhecimento matemático não se limita a aplicações práticas ou físicas, mas inclui o ideal de abstração do conhecimento.
- Expansão do pensamento crítico: revisar concepções e aceitar a existência de elementos que fogem do senso comum, acaba por promover uma expansão do pensamento matemático, explorando a criticidade em deparar-se com novos territórios e desafios.

A compreensão das instâncias apresentadas em relação ao número irracional (e sua monstruosidade), acaba por destacar a natureza aberta e exploratória da Matemática, mostrando que existem sempre novas fronteiras a serem descobertas, questionadas e compreendidas. Para tanto, faz-se necessário o entendimento do que vem sendo feito no tratamento dos números

irracionais na educação básica para compreender a expansão dessas fronteiras. Assunto este, presente no tópico a seguir.

2.2. AS PESQUISAS SOBRE O ENSINO DE NÚMEROS IRRACIONAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

No capítulo anterior, destacamos a importância dos procedimentos de ensino para ampliar o significado da aprendizagem dos números irracionais no que se refere a Educação Matemática, percorrendo um encaminhamento histórico de seu desenvolvimento até a sua definição atual.

A partir da visão sobre a necessidade de enveredar pelo tratamento de uma enunciação adequada e responsável sobre a temática, a qual não contribua com a circularidade presente em explicações superficiais, tem-se, do ponto de vista educativo, um desafio: investigar o que tem sido feito em meio as abordagens tradicionais e construtivistas no ensino de matemática no que diz respeito aos números irracionais na educação básica.

> O trabalho pedagógico com a validação do conhecimento é uma das tarefas do ensino. Mas as características do saber científico não são suficientes para determinar isoladamente a adoção de um único tipo de argumento nas atividades de ensino. Não se pode confundir o território de produção das ciências com a natureza da prática pedagógica. Um aspecto não deve ser vinculado ao outro, ou seja, não se trata de privilegiar um tipo de argumentação exclusiva do raciocínio lógico da Matemática nem circular em torno de interpretações exclusivamente subjetivas (PAIS, 2013, p. 40).

Observa-se que as pesquisas nessa área têm se concentrado em compreender as dificuldades enfrentadas pelos alunos, propor estratégias pedagógicas eficazes e explorar os significados históricos e conceituais que tornam esse tema tão desafiador.

Logo, a intenção, neste capítulo, é dar um norteamento ao leitor sobre práticas, reflexões e análises feitas por terceiros, em relação ao tratamento dos números irracionais na educação básica em diferentes frentes. Para argumentar a possibilidade de um novo olhar para o currículo, foram explorados princípios, conceitos e visões que se fazem presentes nas novas dimensões de integração, de interdisciplinaridade, de relação teoria e prática, ensino e pesquisa, e relação entre professor, aluno e conhecimento.

A reunião de textos de estudiosos e pesquisadores que têm o tema como objetivo principal de suas pesquisas, acaba por oferecer ao leitor diferentes perspectivas de organizar um pensamento crítico e embasado, tratando o que há de mais relevante nesta linha de pesquisa, sua amplitude e possibilidades de participar ativamente nos processos naturais de ensino.

Quadro 4: Análise de Pesquisas sobre os Números Irracionais

Artigos/Pesquisas	Percepções	Conclusões
Sobre possibilidades de ensino e aprendizagem dos números irracionais no 8º ano do Ensino Fundamental (NOBRE, 2017)	A dissertação enfatiza a importância de introduzir números irracionais na Educação Básica, particularmente na 8ª série, para abordar as dificuldades conceituais e aumentar o engajamento dos alunos. Ele se baseia na pesquisa de Olga Corbo e inclui atividades investigativas que exploram características de números irracionais, como sua representação decimal e densidade na reta numérica. O currículo visa construir uma compreensão fundamental que possa ser desenvolvida no ensino médio, alinhando-se às diretrizes educacionais nacionais.	A dissertação destaca a importância de introduzir números irracionais aos alunos da 8ª série de uma forma significativa, abordando suas dificuldades conceituais e aumentando seu engajamento no processo de aprendizagem por meio de pesquisas e apresentações em grupo sobre tópicos como o número áureo e as características dos números racionais e irracionais. Além disso, as atividades projetadas para os alunos não apenas facilitaram a compreensão dos números irracionais, mas também incentivaram discussões sobre conceitos matemáticos históricos, demonstrando assim a necessidade de expandir seus conhecimentos numéricos além dos números racionais.
Representação, reconhecimento e significado do número irracional e da função periódica na formação do Professor de Educação Secundária (REINA; WILHELMI, 2021)	O artigo discute a construção de números irracionais no contexto do ensino médio, destacando as dimensões cognitivas, epistêmicas e de ensino que influenciam a compreensão. Ele enfatiza os conflitos semióticos que surgem durante o reconhecimento visual de números irracionais, o que pode dificultar a compreensão dos alunos. O estudo fornece dados empíricos sobre essas dificuldades, sugerindo que os educadores precisam abordar essas dimensões para melhorar o ensino e a aprendizagem de números irracionais de forma eficaz.	O estudo identifica e analisa os conflitos semióticos que surgem durante o reconhecimento visual de números irracionais e funções periódicas, destacando os desafios cognitivos relacionados à forma como essas noções matemáticas são adquiridas e percebidas pelos alunos. Além disso, enfatiza a importância de compreender a dimensão epistêmica, que diz respeito aos significados atribuídos aos objetos matemáticos, e a dimensão de ensino, que se relaciona com as regras estabelecidas do contrato didático, ao abordar as dificuldades encontradas na construção

		desses conceitos matemáticos.
O Ensino dos Números Irracionais na Educação Básica e na Formação de Professores de Matemática: um círculo vicioso em andamento? (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019)	Na Educação Básica, o ensino de números irracionais costuma ser superficial e carece de profundidade conceitual, baseando-se principalmente em exemplos e não em uma compreensão completa. Essa abordagem falha em equipar os alunos com uma compreensão sólida do assunto, o que é ainda agravado pela desconexão entre a Educação Básica e a formação de professores de matemática. Como resultado, futuros professores se formam sem o treinamento necessário para ensinar números irracionais com eficácia, perpetuando um ciclo de mal-entendidos entre os estudantes à medida que avançam para o ensino superior.	O artigo destaca uma significativa desconexão entre o ensino de números irracionais na Educação Básica e a formação inicial de professores de matemática, levando a uma compreensão superficial do tema nos alunos e a uma preparação inadequada dos professores. Essa desconexão resulta em uma falta de profundidade conceitual no ensino de números irracionais no nível da educação básica. Além disso, o autor sugere que essa incompatibilidade cria um ciclo vicioso: os professores se formam sem o conhecimento necessário para ensinar números irracionais de forma eficaz, o que por sua vez, leva os estudantes a entrarem na universidade com uma compreensão errada do conceito, perpetuando o ciclo de educação inadequada em matemática.
Números irracionais na escolaridade básica: um olhar pelo caminho dos eixos constitutivos dos números reais (POMMER, 2018)	O artigo discute o ensino de números irracionais na educação básica, enfatizando um desenvolvimento operacional que incorpora aspectos exatos, finitos e determinísticos. Ele propõe o uso de estruturas teóricas baseadas em análises históricas e epistemológicas de números reais, especificamente os pares discreto-contínuo, exato-aproximado e finito-infinito. Essas estruturas servem como pilares teóricos para uma abordagem problematizadora dos	O artigo enfatiza a necessidade de uma abordagem problematizadora para o ensino de números irracionais na educação básica, utilizando referenciais teóricos derivados da evolução histórica e epistemológica dos números reais. Além disso, ao mapear vários caminhos para interagir com números irracionais, o artigo sugere que os educadores podem criar uma compreensão mais abrangente e diferenciada desses números, indo além

	números irracionais, permitindo que os educadores explorem vários caminhos para ensinar efetivamente esse conceito na educação básica.	dos métodos tradicionais que se concentram apenas em aspectos exatos, finitos e determinísticos. Essa exploração visa enriquecer a experiência de aprendizado e aprofundar a compreensão conceitual dos alunos sore números irracionais.
Um estudo sobre a compreensão dos números irracionais (VOSKOGLOU; KOSYVAS, 2011)	O estudo destaca que os estudantes enfrentam desafios significativos na compreensão dos números irracionais, principalmente devido às suas representações semióticas – como esses números são descritos e escritos. O experimento em sala de aula revelou que fatores como idade, conhecimento matemático e representações geométricas também influenciam a compreensão. Essas descobertas sugerem que abordar as formas como os números irracionais são apresentados na educação básica pode melhorar a compreensão dos alunos e avaliar suas dificuldades intuitivas com esses conceitos.	A principal dificuldade intuitiva dos alunos em entender os números irracionais está relacionada às suas representações semióticas, que se referem às maneiras pelas quais esses números são descritos e escritos. Além disso, o estudo também conclui que fatores como idade, amplitude do conhecimento matemático e representações geométricas afetam significativamente a compreensão dos números irracionais entre os estudantes.

Fonte: Autoria própria (2025).

Com base na análise do quadro contendo as principais pesquisas sobre os Números Irracionais desenvolvidas nos últimos anos, fica evidente de como estes números desempenham um papel crucial na educação básica, ainda que seu ensino acabe por enfrentar desafios significativos.

As pesquisas analisadas, de maneira geral, indicam que os alunos encontram dificuldades conceituais ao aprender sobre esses números, o que pode dificultar sua compreensão e apreciação ao tópico, bem como suas possibilidades de expansão nos domínios do conhecimento matemático. No aspecto da compreensão conceitual, segundo Nobre (2017), os estudantes muitas vezes lutam com o conceito de números irracionais devido à sua natureza abstrata. Já no que diz respeito às metodologias de ensino, Broetto e Santos-Wagner (2018),

apontam a desconexão entre a educação básica e a formação de professores e como isso pode levar a um tratamento superficial dos números irracionais, perpetuando um ciclo de mal-entendidos.

Nesse sentido, no que diz respeito à formação de professores para tratarem do ensino de matemática na educação básica, essas pesquisas apresentam em comum, que há de se levar em consideração que, cedo ou tarde, os professores poderão vir a encontrar dificuldades em lecionar determinado tipo de conteúdo, seja pela falta de aplicações imediatas ou de curto prazo, seja pelo nível de aprofundamento necessário para discussão, acesso a materiais de apoio, infraestrutura e dentre outras possibilidades. Cabe ao professor refletir sobre o que significa educar no contexto do modelo socioeconômico contemporâneo para poder tomar partido.

> Ao abordarem o conceito de irracionalidade, muitos professores utilizam-se de atividades, por vezes propostas em livros didáticos ou materiais instrucionais, que apresentam estruturas conceituais falhas sobre a natureza dos números irracionais. A análise conceitual de atividades didáticas nem sempre é objeto de apreciação durante a formação inicial do professor de matemática, o que pode contribuir para que muitos docentes, no decorrer de suas rotinas, não atentem para possíveis falhas contidas na elaboração de materiais didáticos disponíveis (LIMA; ACIOLY; GIRALDO, 2021, p. 373).

Ainda que os números irracionais apresentem uma enorme complexidade em seu escopo, os autores explorados elencaram a necessidade de investigar "que aspectos devem ser considerados ao se abordar o ensino do conceito de irracionalidade na formação inicial dos professores que atuarão na educação básica" (LIMA; ACIOLY; GIRALDO, 2019, p. 377). Para além de uma definição de número irracional (a qual deve vir por último), faz-se necessário criar um ambiente problematizador que dê suporte e sentido à criação dos números irracionais, induzindo e suscitando questões que levantem dúvidas e ponham em xeque a contribuição dos números irracionais para o desenvolvimento da matemática. "[...] o que sugerimos é que possamos deslocar nossos alunos para o campo das incertezas, para além das definições e trajetórias possíveis" (LIMA; ACIOLY; GIRALDO, 2019, p. 382). Esse aspecto explorativo, será investigado e melhor desenvolvido na proposta de pesquisa presente no tópico a seguir.

2.3. POSSIBILIDADES DE ESNINO: O DESMANCHE DE UM "MONSTRO" PELA CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADOS

É certo que, dentre tantas demandas que norteiam a prática pedagógica do professor, talvez a mais conhecida seja a de elaboração de materiais para serem utilizados ao longo das aulas: um plano de aula, um plano de ensino, uma lista de exercícios, o planejamento semanal, etc. Todas essas ferramentas frente ao objetivo comum de levar aos alunos, protagonistas da educação, à construção de um conhecimento crítico, significativo e necessário para a compreensão .

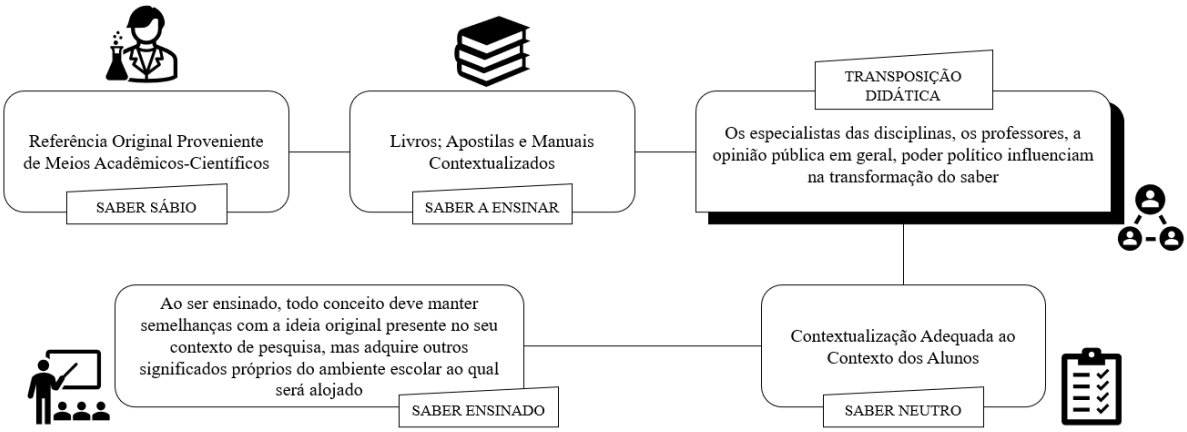
Independentemente de qual via investigativa o professor se encontre, o tratamento da informação a ser trabalhado em sala de aula, deve ser mediado conforme o nível de aprendizagem da turma, isto é, não se deve (ou ao menos não deveria ser assim) prezar por uma linguagem informativa que não seja clara ao público em questão. Pelo contrário, a informação deve vir, por sua vez, próxima a sua realidade: "Um dos problemas do ensino de conteúdos matemáticos é o distanciamento entre o conteúdo abordado, a realidade do aluno e as origens do conhecimento em questão [...]" (LEIVAS; CURY, 2009, p. 67).

Por sua vez, no que diz respeito a divulgação do conhecimento matemático e científico para o público geral da educação básica, presente até mesmo nos livros didáticos e na maneira como a aula é articulada pelo professor, tem-se em Chevallard (1985), a construção e definição do termo transposição didática, isto é:

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre desde então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar o seu lugar entre os objetos de ensino. O 'trabalho' que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado transposição didática (CHEVALLARD, apud LEIVAS; CURY, 2009, p. 68).

Essa definição implica que quando se trata de determinado conhecimento a saber (*saber sábio*), faz-se necessária uma adaptação (*saber a ensinar*) na maneira como o mesmo será divulgado (tornando-se *saber ensinado*), visto que a linguagem e o público-alvo se alteram no processo. Tais adaptações, a fim de tornarem a mensagem mais fácil de ser compreendida, "exilam", por sua vez, o *saber sábio*, isto é, aquele produzido originalmente pelo cientista e/ou pesquisador, para apresentar um *saber neutro* aos alunos, sem ligação com quaisquer necessidades humanas ou jogos de poder (LEIVAS; CURY, 2009). Podemos observar, no esquema a seguir, os encaminhamentos de uma transposição didática:

Figura 5: Esquema da Transposição Didática



Fonte: Autoria própria (2025).

Diante do processo de transposição didática, compreender que duas frentes – a ciência e a sala de aula – caminham lado a lado no processo de construção do conhecimento, é fundamental para entender que as escolhas e adaptações acabam por ser inevitáveis visto que, deve-se fazer "caber" três ou quatro séculos de Ciência em duas ou três aulas semanais ao longo de três ou quatro anos de escolaridade – anos finais e ensino médio.

A partir desta análise, a proposta de elaboração de uma sequência didática que trate do ensino dos números irracionais na educação básica de maneira significativa e que, por sua vez, venha a desmistificar os monstros envoltos deste estudo, está aqui organizada e teorizada, através de encaminhamentos que possam melhorar a prática desse ensino.

2.3.1. A PESQUISA COMO PONTE ENTRE CURIOSIDADE E DESCOBERTA

Gil (2002, p. 17), define pesquisa como sendo "o procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos". Nesse sentido, a temática do tratamento da irracionalidade na educação básica, acaba por destacar alguns aspectos essenciais das mudanças em curso na educação, tanto na compreensão do processo de ensino quanto na do processo de aprendizagem, vistos sobre a ótica do professor.

Diante dos encaminhamentos observados ao longo do texto, algumas implicações didáticas sugerem a elaboração de uma abordagem integrada no que diz respeito ao ensino dos números irracionais na educação básica, a qual combine contextos históricos, representações visuais e ferramentas tecnológicas com um objetivo em comum: superar as barreiras epistemológicas e didáticas deste ensino.

Para tanto, “reconstruir as condições sobre as quais todos os alunos, particularmente aqueles considerados médios e abaixo da média no tocante às habilidades acadêmicas, obtenham acesso a uma significativa e valorosa educação geral básica” (FAGUNDES, 2016, p. 286), ainda que seja vista como desafiadora, necessita de um primeiro passo para a minimização das lacunas que o ensino dos números irracionais acaba deixando passar e, com isso, acumular desentendimentos.

Sendo assim, a pesquisa realizada com o objetivo de investigar possibilidades didático-pedagógicas para o ensino de números irracionais na educação básica, enquadrando-se como uma pesquisa qualitativa de caráter bibliográfico/documental, cujo intuito é desenvolver uma sequência didática de aulas envolvendo a discussão teórica, aplicação prática e registro de procedimentos característicos da avaliação formativa.

Para que tamanha elaboração fosse possível, fora realizada a leitura de diversos textos, cuja bibliografia se faz presente nas referências deste estudo, verificando possibilidades somativas ao desenvolvimento da sequência didática. Ademais, para responder à questão: é possível desenvolver um processo de ensino de números irracionais, na educação básica, que ultrapasse o vazio de significação que tem marcado o estudo deste tema? A delimitação inicial da fundamentação teórica, partindo de Broetto e Santos-Wagner (2017), foi extremamente significativa, oferecendo excelentes subsídios para uma exploração detalhada no estudo dos números irracionais.

Futuras pesquisas podem aprofundar a investigação prática sobre como os alunos desenvolvem e consolidam o conceito de irracionalidade ao longo de sua trajetória na educação básica, com especial atenção às transições entre os diferentes níveis de ensino. Compreender esse processo em maior detalhe pode permitir a identificação de desafios conceituais recorrentes, possíveis lacunas no aprendizado e, talvez, eventuais descontinuidades na abordagem didática. Além disso, tais estudos podem fornecer subsídios para o aprimoramento das estratégias pedagógicas, favorecendo uma progressão mais estruturada e consistente no ensino dos números irracionais na educação básica.

2.3.2. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA COMO FERRAMENTA DE CONSTRUÇÃO DO SABER

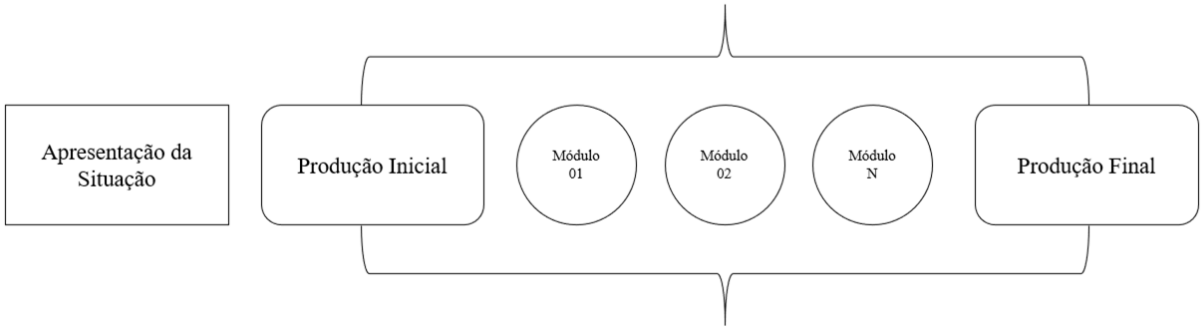
Antes que determinados insucessos possam vir a acontecer ao professor na prática da sala de aula, ter uma breve intuição dos mesmos torna-se necessário para evitá-los e, assim, conduzir boas aulas. Para tanto, entender os mecanismos que favorecem a assimilação do

conhecimento e os fatores que explicam por que, diante de uma mesma situação, alguns estudantes avançam enquanto outros encontram dificuldades, revela-se uma tarefa que, talvez, não tenha uma resposta definitiva, afinal, em meio as aulas, alguns alunos podem construir seu aprendizado de maneiras diversas e, muitas vezes, independentemente da atuação do professor, isto é, aprendem apesar do professor (WEIZ, 2009).

Segundo Fagundes (2016, p. 291), "[...] na prática da profissão existem situações incertas, conflituosas e singulares, que exigem do profissional a criação de soluções inéditas e a construção de novas estratégias de ação para resolvê-las". A uma dessas soluções, denomina-se *sequência didática*. "De modo simples, sequência didática é um modo de o professor organizar as atividades de ensino em função de núcleos temáticos e procedimentais" (DE ARAÚJO, 2013, p. 322-323).

A sequência didática, caracteriza-se por possuir: uma sessão de abertura, na qual apresenta-se de maneira detalhada o que deverá ser feito ao longo do estudo; em seguida, realiza-se uma produção diagnóstica (oficinas), onde o responsável pelo estudo (o professor), avalia as capacidades adquiridas pelos alunos e ajusta, conforme entendimento da turma, as atividades posteriores; por fim, é feita uma produção final, onde os participantes do estudo põem em prática os conhecimentos adquiridos ao longo do processo de construção do conhecimento (DE ARAÚJO, 2013). Conforme esquema a seguir:

Figura 6: Representação do Processo Envolvido em uma Sequência Didática



Fonte: Adaptada pelo autor de Araújo (2013).

Tratando-se do ensino dos números irracionais na educação básica, a partir da ênfase no trabalho docente, vislumbrado nas pesquisas analisadas, fora observado indícios de limites e possibilidades a serem postos à prova nas práticas didático-pedagógicas que perpassam o ensino dos números irracionais.

Dessa forma, com base nas experiências observadas e descritas, foram pensadas e elaboradas as sequências didáticas, dispostas nos apêndices A e B, para os anos finais do ensino fundamental e ensino médio, respectivamente, visando o desmanche do monstro presente na

epistemologia dos números irracionais. Para além delas, os demais apêndices tratam de um aprofundamento (fictício) a ser trabalhado em cada uma das aulas apresentadas em caráter teórico-prático. No tópico a seguir, através de etapas, serão analisadas cada uma das considerações necessárias a serem feitas sobre tal elaboração, desde aparatos normativos como Base Nacional Comum Curricular (BNCC) até a disposição de materiais e avaliações a serem aplicadas nas turmas.

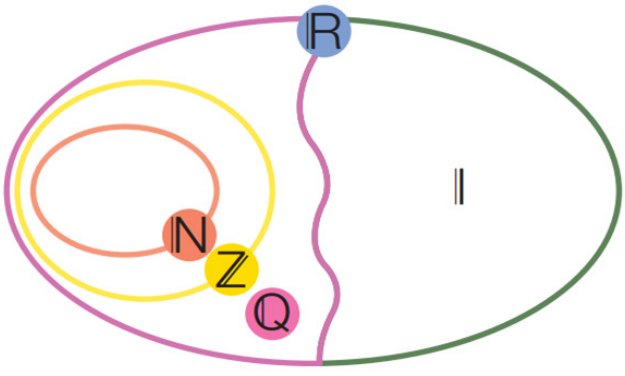
2.3.3. ANÁLISE DA(S) SEQUÊNCIA(S) DIDÁTICA(S)

Levando em consideração que modelos são passíveis de adaptação, o modelo fictício da sequência didática apresentada no Apêndice A (8º ano) e no Apêndice B (1º ano), além das informações básicas como professor e turma, traz um espaço destinado ao "*período*", este que corresponde a um tempo estimado de três aulas – para ambas as turmas.

A escolha de serem trabalhas em três aulas os conteúdos envolvendo os números irracionais, deve-se ao fato de haver, em qualquer instância educacional, um calendário a ser cumprido, este que engloba prazos, metas, conteúdos, avaliações, dentre outras variáveis. Quer queira quer não, o ensino dos números irracionais no 8º ano, acaba por ter apenas um caráter introdutório, consistindo basicamente em apresentar números como $\sqrt{2}$ e π e encontrá-los na reta numérica, onde logo em seguida, já é inserida a apresentação dos números reais.

No que diz respeito ao resgate deste conteúdo no 1º ano do ensino médio, é notório que o mesmo, aparece apenas para complementar a linguagem dos Conjuntos Numéricos e levar a representação gráfica dos conjuntos em sua "totalidade", não sendo (normalmente e infelizmente) explorado com maior profundidade e rigor, apenas para tratar novamente das possibilidades de se lidar com números cuja representação decimal é infinita e não periódica.

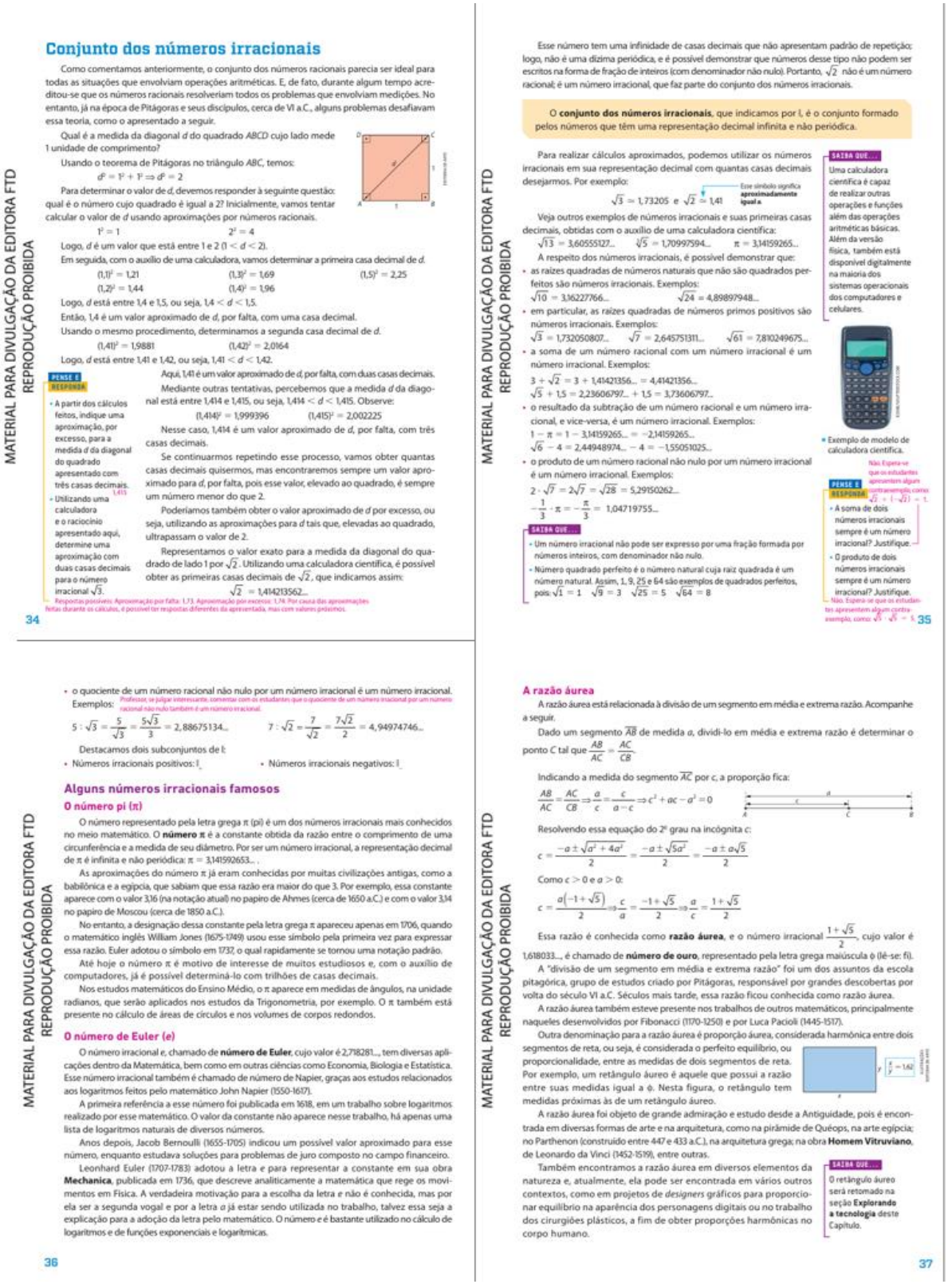
Figura 7: Representação Gráfica dos Conjuntos Numéricos



Fonte: Livro Prisma Matemática: Conjuntos e Funções (Bonjorno, 2020).

Considerando ser esta uma realidade bastante presente nas práticas educacionais – a falta de tempo –, julgamos ser válida a exploração desse conteúdo num espaço de três aulas, ao invés de apenas uma como normalmente é, tanto em relação ao 8º ano quanto ao 1º ano do ensino médio. Além disso, nos livros didáticos utilizados como aporte teórico tanto para os alunos quanto para os professores, este conteúdo acaba por se resumir a uma, talvez duas páginas no máximo (ao menos a parte introdutória), sendo a maioria delas envolvendo exercícios ou exemplos de números irracionais conhecidos e, portanto, como comparação, surge a hipótese da escola (gestão), pais e alunos, virem a questionar os motivos para tanta "demora" em apresentar um "conteúdo curto".

Figura 8: Números Irracionais no 1º ano do Ensino Médio



Conjunto dos números irracionais

Como comentamos anteriormente, o conjunto dos números racionais parecia ser ideal para todas as situações que envolviam operações aritméticas. E, de fato, durante algum tempo acreditou-se que os números racionais resolveriam todos os problemas que envolviam medições. No entanto, já na época de Pitágoras e seus discípulos, cerca de VI a.C., alguns problemas desafiavam essa teoria, como o apresentado a seguir.

Qual é a medida da diagonal *d* do quadrado *ABCD* cujo lado mede 1 unidade de comprimento?

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, temos:

$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2$

Para determinar o valor de *d*, devemos responder à seguinte questão: qual é o número cujo quadrado é igual a 2? Inicialmente, vamos tentar calcular o valor de *d* usando aproximações por números racionais.

$1^2 = 1$ $\qquad$ $2^2 = 4$

Logo, *d* é um valor que está entre 1 e 2 ($1 < d < 2$).

Em seguida, com o auxílio de uma calculadora, vamos determinar a primeira casa decimal de *d*.

$(1{,}1)^2 = 1{,}21$ $\qquad$ $(1{,}3)^2 = 1{,}69$ $\qquad$ $(1{,}5)^2 = 2{,}25$

$(1{,}2)^2 = 1{,}44$ $\qquad$ $(1{,}4)^2 = 1{,}96$

Logo, *d* está entre 1,4 e 1,5, ou seja, $1{,}4 < d < 1{,}5$.

Então, 1,4 é um valor aproximado de *d*, por falta, com uma casa decimal.

Usando o mesmo procedimento, determinamos a segunda casa decimal de *d*.

$(1{,}41)^2 = 1{,}9881$ $\qquad$ $(1{,}42)^2 = 2{,}0164$

Logo, *d* está entre 1,41 e 1,42, ou seja, $1{,}41 < d < 1{,}42$.

Aqui, 1,41 é um valor aproximado de *d*, por falta, com duas casas decimais.

Mediante outras tentativas, percebemos que a medida *d* da diagonal está entre 1,414 e 1,415, ou seja, $1{,}414 < d < 1{,}415$. Observe:

$(1{,}414)^2 = 1{,}999396$ $\qquad$ $(1{,}415)^2 = 2{,}002225$

Nesse caso, 1,414 é um valor aproximado de *d*, por falta, com três casas decimais.

Se continuarmos repetindo esse processo, vamos obter quantas casas decimais quisermos, mas encontraremos sempre um valor aproximado para *d*, por falta, pois esse valor, elevado ao quadrado, é sempre um número menor do que 2.

Poderíamos também obter o valor aproximado de *d* por excesso, ou seja, utilizando as aproximações para *d* tais que, elevadas ao quadrado, ultrapassam o valor de 2.

Representamos o valor exato para a medida da diagonal do quadrado de lado 1 por $\sqrt{2}$. Utilizando uma calculadora científica, é possível obter as primeiras casas decimais de $\sqrt{2}$, que indicamos assim:

$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$

PENSE E RESPONDA

- A partir dos cálculos feitos, indique uma aproximação, por excesso, para a medida *d* da diagonal do quadrado apresentado com três casas decimais.
- Utilizando uma calculadora e o raciocínio apresentado aqui, determine uma aproximação com duas casas decimais para o número irracional $\sqrt{3}$.

Respostas possíveis: Aproximação por falta: 1,73. Aproximação por excesso: 1,74. Por causa das aproximações feitas durante os cálculos, é possível ter respostas diferentes da apresentada, mas com valores próximos.

Esse número tem uma infinidade de casas decimais que não apresentam padrão de repetição; logo, não é uma dízima periódica, e é possível demonstrar que números desse tipo não podem ser escritos na forma de fração de inteiros (com denominador não nulo). Portanto, $\sqrt{2}$ não é um número racional; é um número irracional, que faz parte do conjunto dos números irracionais.

O **conjunto dos números irracionais**, que indicamos por $\mathbb{I}$, é o conjunto formado pelos números que têm uma representação decimal infinita e não periódica.

Para realizar cálculos aproximados, podemos utilizar os números irracionais em sua representação decimal com quantas casas decimais desejarmos. Por exemplo:

$\sqrt{3} \simeq 1{,}73205$ e $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ (Esse símbolo significa **aproximadamente igual a**.)

Veja outros exemplos de números irracionais e suas primeiras casas decimais, obtidas com o auxílio de uma calculadora científica:

$\sqrt{13} = 3{,}6055512...$ $\qquad$ $\sqrt[3]{5} = 1{,}7099759...$ $\qquad$ $\pi = 3{,}1415926...$

A respeito dos números irracionais, é possível demonstrar que:

- as raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos são números irracionais. Exemplos:
  $\sqrt{10} = 3{,}1622776...$ $\qquad$ $\sqrt{24} = 4{,}8989794...$
- em particular, as raízes quadradas de números primos positivos são números irracionais. Exemplos:
  $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ $\qquad$ $\sqrt{7} = 2{,}6457513...$ $\qquad$ $\sqrt{61} = 7{,}8102496...$
- a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional. Exemplos:
  $3 + \sqrt{2} = 3 + 1{,}4142135... = 4{,}4142135...$
  $\sqrt{5} + 1{,}5 = 2{,}2360679... + 1{,}5 = 3{,}7360679...$
- o resultado da subtração de um número racional e um número irracional, e vice-versa, é um número irracional. Exemplos:
  $1 - \pi = 1 - 3{,}1415926... = -2{,}1415926...$
  $\sqrt{6} - 4 = 2{,}4494897... - 4 = -1{,}5505102...$
- o produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional. Exemplos:
  $2 \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7} = \sqrt{28} = 5{,}2915026...$
  $-\frac{1}{3} \cdot \pi = -\frac{\pi}{3} = 1{,}0471975...$

SAIBA QUE...

- Um número irracional não pode ser expresso por uma fração formada por números inteiros, com denominador não nulo.
- Número quadrado perfeito é o número natural cuja raiz quadrada é um número natural. Assim, 1, 9, 25 e 64 são exemplos de quadrados perfeitos, pois: $\sqrt{1} = 1$ $\quad$ $\sqrt{9} = 3$ $\quad$ $\sqrt{25} = 5$ $\quad$ $\sqrt{64} = 8$

SAIBA QUE...

Uma calculadora científica é capaz de realizar outras operações e funções além das operações aritméticas básicas. Além da versão física, também está disponível digitalmente na maioria dos sistemas operacionais dos computadores e celulares.

Exemplo de modelo de calculadora científica.

PENSE E RESPONDA

Não. Espera-se que os estudantes apresentem algum contraexemplo, como $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.

- A soma de dois números irracionais sempre é um número irracional? Justifique.
- O produto de dois números irracionais sempre é um número irracional? Justifique.

Não. Espera-se que os estudantes apresentem algum contraexemplo, como: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

- o quociente de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

Exemplos: Professor, se julgar interessante, comentar com os estudantes que o quociente de um número irracional por um número racional não nulo também é um número irracional.

$5 : \sqrt{3} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = 2{,}8867513...$ $\qquad$ $7 : \sqrt{2} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} = 4{,}9497474...$

Destacamos dois subconjuntos de $\mathbb{I}$:

- Números irracionais positivos: $\mathbb{I}_+$
- Números irracionais negativos: $\mathbb{I}_-$

Alguns números irracionais famosos

O número pi (π)

O número representado pela letra grega π (pi) é um dos números irracionais mais conhecidos no meio matemático. O **número π** é a constante obtida da razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro. Por ser um número irracional, a representação decimal de π é infinita e não periódica: $\pi = 3{,}1415926535...$.

As aproximações do número π já eram conhecidas por muitas civilizações antigas, como a babilônica e a egípcia, que sabiam que essa razão era maior do que 3. Por exemplo, essa constante aparece com o valor 3,16 (na notação atual) no papiro de Ahmes (cerca de 1650 a.C.) e com o valor 3,14 no papiro de Moscou (cerca de 1850 a.C.).

No entanto, a designação dessa constante pela letra grega π apareceu apenas em 1706, quando o matemático inglês William Jones (1675-1749) usou esse símbolo pela primeira vez para expressar essa razão. Euler adotou o símbolo em 1737, o qual rapidamente se tornou uma notação padrão.

Até hoje o número π é motivo de interesse de muitos estudiosos e, com o auxílio de computadores, já é possível determiná-lo com trilhões de casas decimais.

Nos estudos matemáticos do Ensino Médio, o π aparece em medidas de ângulos, na unidade radianos, que serão aplicados nos estudos da Trigonometria, por exemplo. O π também está presente no cálculo de áreas de círculos e nos volumes de corpos redondos.

O número de Euler (e)

O número irracional *e*, chamado de **número de Euler**, cujo valor é 2,7182818..., tem diversas aplicações dentro da Matemática, bem como em outras ciências como Economia, Biologia e Estatística. Esse número irracional também é chamado de número de Napier, graças aos estudos relacionados aos logaritmos feitos pelo matemático John Napier (1550-1617).

A primeira referência a esse número foi publicada em 1618, em um trabalho sobre logaritmos realizado por esse matemático. O valor da constante não aparece nesse trabalho, há apenas uma lista de logaritmos naturais de diversos números.

Anos depois, Jacob Bernoulli (1655-1705) indicou um possível valor aproximado para esse número, enquanto estudava soluções para problemas de juro composto no campo financeiro.

Leonhard Euler (1707-1783) adotou a letra *e* para representar a constante em sua obra **Mechanica**, publicada em 1736, que descreve analiticamente a matemática que rege os movimentos em Física. A verdadeira motivação para a escolha da letra *e* não é conhecida, mas por ela ser a segunda vogal e por a letra *a* já estar sendo utilizada no trabalho, talvez essa seja a explicação para a adoção da letra pelo matemático. O número *e* é bastante utilizado no cálculo de logaritmos e de funções exponenciais e logarítmicas.

A razão áurea

A razão áurea está relacionada à divisão de um segmento em média e extrema razão. Acompanhe a seguir.

Dado um segmento $\overline{AB}$ de medida *a*, dividi-lo em média e extrema razão é determinar o ponto *C* tal que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$.

Indicando a medida do segmento $\overline{AC}$ por *c*, a proporção fica:

$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{a-c} \Rightarrow c^2 + ac - a^2 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau na incógnita *c*:

$c = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$

Como $c > 0$ e $a > 0$:

$c = \frac{a\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Essa razão é conhecida como **razão áurea**, e o número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, cujo valor é 1,618033..., é chamado de **número de ouro**, representado pela letra grega maiúscula φ (lê-se: fi).

A "divisão de um segmento em média e extrema razão" foi um dos assuntos da escola pitagórica, grupo de estudos criado por Pitágoras, responsável por grandes descobertas por volta do século VI a.C. Séculos mais tarde, essa razão ficou conhecida como razão áurea.

A razão áurea também esteve presente nos trabalhos de outros matemáticos, principalmente naqueles desenvolvidos por Fibonacci (1170-1250) e por Luca Pacioli (1445-1517).

Outra denominação para a razão áurea é proporção áurea, considerada harmônica entre dois segmentos de reta, ou seja, é considerada o perfeito equilíbrio, ou proporcionalidade, entre as medidas de dois segmentos de reta. Por exemplo, um retângulo áureo é aquele que possui a razão entre suas medidas igual a φ. Nesta figura, o retângulo tem medidas próximas às de um retângulo áureo.

A razão áurea foi objeto de grande admiração e estudo desde a Antiguidade, pois é encontrada em diversas formas de arte e na arquitetura, como na pirâmide de Quéops, na arte egípcia; no Parthenon (construído entre 447 e 433 a.C.), na arquitetura grega; na obra **Homem Vitruviano**, de Leonardo da Vinci (1452-1519), entre outras.

Também encontramos a razão áurea em diversos elementos da natureza e, atualmente, ela pode ser encontrada em vários outros contextos, como em projetos de *designers* gráficos para proporcionar equilíbrio na aparência dos personagens digitais ou no trabalho dos cirurgiões plásticos, a fim de obter proporções harmônicas no corpo humano.

SAIBA QUE...

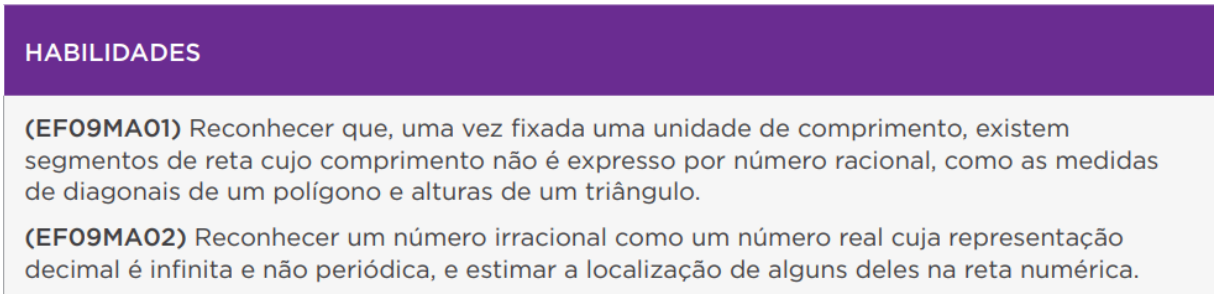
O retângulo áureo será retomado na seção **Explorando a tecnologia** deste Capítulo.

Fonte: Livro Prisma Matemática: Conjuntos e Funções (Bonjorno, 2020).

O recorte acima (Figura 08), traz algumas considerações presentes no livro “Prisma Matemática: Conjuntos e Funções” (BONJORNO, 2020), as quais não se distanciam do que já fora anunciado anteriormente: a introdução ao conteúdo dar-se-á através da análise da diagonal do quadrado unitário seguida da conceituação do que vem a ser o Conjunto dos Números Irracionais; em seguida, é apresentado ao leitor, como realizar cálculos aproximados, incentivando a utilização da calculadora para tal; pode-se dizer também que o capítulo encerra com a apresentação de três exemplos famosos de números irracionais, sendo eles o $\pi \cong 3{,}14$, o número de Euler, $e \cong 2{,}71$, e a Razão Áurea, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}61$.

Entendida a (des)motivação para serem trabalhadas as possibilidades ao longo de três aulas, outro detalhe que cabe ser analisado na sequência didática apresentada, diz respeito as habilidades a serem desenvolvidas. De acordo com a BNCC, estas correspondem as séries do 7º e 9º ano, porém, a introdução aos números irracionais dar-se-a antes desta última (no 8º ano).

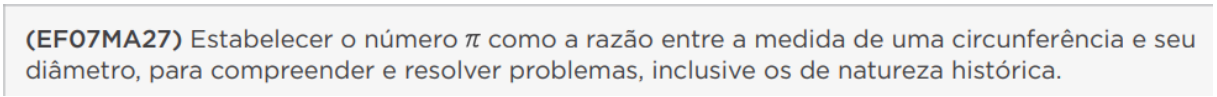
Figura 9: Habilidades a Serem Desenvolvidas no 9º ano



Fonte: BNCC (2018).

No caso de serem analisadas habilidades anteriores que dizem respeito a investigação dos números irracionais, apenas uma encontrada no 7º ano corresponde a uma das possibilidades de exploração presente na sequência didática proposta, sendo ela:

Figura 10: Habilidades a Serem Desenvolvidas no 7º ano



Fonte: BNCC (2018).

Embora não seja um problema mover determinadas habilidades para outras turmas (aparentemente), consideramos destacar essa observação em caso de professores que buscam por uma formalização mais adequada para a turma em questão e, no caso do ensino dos números irracionais no 8º ano e no 1º ano, não há quaisquer habilidades relacionadas diretamente ao

ensino dos números irracionais nesta etapa, segundo o documento oficial (BNCC). Visando contornar essa situação, em especial, no caso do 1º ano do ensino médio, foram consideradas as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos segundo as normativas dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's).

Figura 11: Habilidades nos PCN's

Medidas, quantificações, grandezas e escalas	
Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados.	• Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular comprimentos e distâncias, ângulos, volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica. Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos. • Identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado, probabilístico ou análise de médias. Por exemplo, de acordo com uma dada situação, escolher número de algarismos apropriado ou fazer aproximações adequadas, optar pelo uso de fração, porcentagem, potências de dez; escolher melhor unidade para representar uma grandeza. • Fazer previsões e estimativas de ordens de grandeza, de quantidades ou intervalos esperados para os resultados de cálculos ou medições e, com isso, saber avaliar erros ou imprecisões nos dados obtidos na solução de uma dada situação-problema. • Compreender a necessidade e fazer uso apropriado de escalas; por exemplo, na construção de gráficos ou em representações de plantas e mapas.

Fonte: PCN + Ensino Médio (1997).

Assumindo esse risco, partindo para o desenvolvimento das aulas, as quais estão melhor apresentadas no Apêndice C (aulas para o 8º ano) e Apêndice D (aulas para o 1º ano), elas seguem uma linha de encadeamentos lógicos que constituem: apresentar o desenvolvimento histórico do conteúdo; investigar através de boas práticas a relevância e significação do objeto matemático; avaliar o desenvolvimento da aprendizagem frente a participação das aulas.

Cada aula é dividida em etapas lógicas o que, em nosso entendimento, tornaria mais viável ao trabalho do professor para o tratamento do conteúdo de maneira significativa e diferente de apenas dizer: "isto é um número irracional e partir para os exercícios".

> Quanto mais intensas forem a interatividade e a articulação, mais significativa será a aprendizagem. O aluno realiza articulações quando consegue, por exemplo, a partir da leitura de um texto, montar uma tabela ou um gráfico, equacionar um problema ou descrever um argumento. Deve, ainda, ser estimulado a realizar movimentos em várias direções, tal como a passagem da leitura de uma tabela para a redação de um texto, para uma representação gráfica ou para o exercício da oralidade (PAIS, 2013, p. 52).

Figura 12: Recorte da Aula 02 no 8º ano

Aula 02 – Explorando o π (pi)

- Etapa 01: Apresentar o objetivo geral da aula;
- Etapa 02: Introduzir o conceito do π (pi) a partir de investigações e medidas experimentais;
- Etapa 03: Desenvolver habilidades de medição e registro de dados;
- Etapa 04: Refletir sobre a impossibilidade de representar π como uma fração exata.

Fonte: Autoria própria (2025).

Com base no recorte acima, entendemos que iniciar uma aula detalhando seus objetivos é parte fundamental da tarefa do professor, visto que, talvez, torne-se mais claro para o aluno o que irão aprender e/ou investigar ao longo da aula, ou ainda, o que ele deve esperar compreender até o término desta. As investigações podem favorecer o desenvolvimento da capacidade intelectual e prática do aluno: através da utilização de instrumentos de desenho e realização de trabalhos, prevalece a formação de atitudes de convivência, capacidade de comunicação, desenvolvimento da criatividade e dentre outras possibilidades. Ademais, refletir sobre as etapas finais da discussão, contribuem com o relacionamento da produção cultural da matemática com as grandes civilizações, bem como no exercício de ligar a aprendizagem da disciplina à outras ciências.

Nesse sentido, as aulas foram preparadas contendo, até mesmo, explicações de como proceder com o encaminhamento de ideias, cabendo unicamente ao professor, fazer a relação entre o que será apresentado aos alunos através de uma mediação diretiva e explicativa, visto que, a pretensão deste material elaborado, é substituir a figura do autor e não deixar dúvidas de como direcionar as ideias.

Figura 13: Passo a Passo Apresentado no Plano de Aula

Passo a Passo:

- Distribua as folhas quadriculadas. Peça aos alunos que desenhem um quadrado de lado 10 cm usando a régua. Oriente-os a verificar que os ângulos são retos e os lados têm a mesma medida.
- Com o compasso, os alunos devem apoiar o ponto de apoio no vértice inferior esquerdo do quadrado e traçar o arco que passa pelo vértice superior direito.
- Conecte os vértices opostos com uma linha reta usando a régua.
- Os alunos medem a diagonal com a régua e registram o valor (aproximadamente 14,14 cm para o quadrado de lado 10 cm).
- Com uma calculadora, peça para que multipliquem $\sqrt{2}.10$ e comparem o resultado com a medição.

Fonte: Autoria própria (2025).

Além disso, é comum professores trabalharem com estagiários, monitores ou residentes que, em determinados momentos, acabam assumindo a aula para si. Logo, este material assume a pretensão de substituir a figura principal do professor regente nos momentos em que o aluno, o residente, não o tenham presente, mas que independente dele, saibam conduzir as situações didático-metodológicas das aulas a partir do uso do material.

Vale ressaltar que, embora no 1º ano do ensino médio seja feito um resgate do que fora aprendido sobre o assunto no 8º ano, considerar que seria apenas uma aula repetitiva, isto é, o mesmo trabalho feito nos anos finais seria reproduzido no ensino médio, não fora o caso desta sequência de aulas. Pelo contrário, enfatizamos a necessidade de serem trabalhadas algumas outras explorações e, até mesmo, o rigor matemático, como o caso das demonstrações.

Por fim, são apresentados os materiais que podem vir a ser utilizados nas aulas pelos professores e alunos, sendo estes de baixo custo e passíveis de adaptação a depender de como as aulas forem sendo conduzidas. Através da utilização desses materiais, além do desenvolvimento do conteúdo, habilidades de manipulação, construção e criatividade vão sendo introduzidas e exploradas no contexto da sala de aula, estas que vão além do simples ato de copiar nos cadernos.

Como exemplo de adaptação, podemos observar o caso da aula 01 nas turmas de 1º ano do ensino médio. Em determinado momento, será necessária a utilização do GeoGebra[9] para apresentar a Espiral de Teodoro[10], no entanto, se a escola não dispor de data show ou televisão para a reprodução visual, a mesma poderá ser trabalhada através de papel milimetrado. Para tanto, optamos pelo registro com o GeoGebra visto que, na atualidade, a utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) faz-se cada vez mais presente nas escolas.

[9] Software matemático interativo que permite a exploração de conceitos geométricos, aritméticos, algébricos e estatísticos através de uma visualização gráfica e dinâmica.

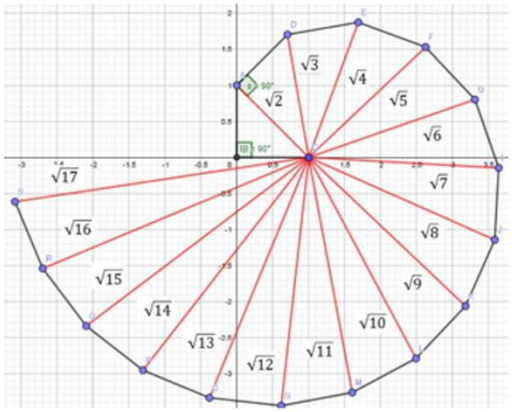
[10] Também chamada de Espiral Pitagórica, é uma construção geométrica baseadas em triângulos retângulos, onde os comprimentos dos catetos e da hipotenusa estão relacionados com os números inteiros e suas raízes quadradas.

Figura 14: Recorte da Aula 01 no 1º ano

- Repetindo o mesmo procedimento, constrói-se qualquer segmento irracional:
  - Traçar uma perpendicular a hipotenusa do triângulo anterior de medida 1.
  - Fechar o triângulo de catetos medindo 1 e hipotenusa do triângulo anterior, obtendo um novo triângulo retângulo.
  - Determinar, através do Teorema de Pitágoras a medida da hipotenusa.

- A reprodução deste procedimento determina o comprimento exato das raízes na forma $\sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, bastando apenas a transposição do segmento desejado com o compasso para a reta real.

Figura 17: Repetição do Procedimento até a $\sqrt{17}$



Fonte: Recorte de Artigo (MÉRCURI, 2024).

Fonte: Autoria própria (2025).

Ademais, no tópico avaliação, consta-se o modelo de avaliação formativa, a qual contabiliza todo o processo de construção do conhecimento, permitindo desde a manipulação dos materiais a elaboração de ideias apreendidas ao longo das aulas.

Sendo assim, neste capítulo, buscamos apresentar uma abordagem prática para o enfrentamento das dificuldades encontradas no ensino dos números irracionais na educação básica, através da apresentação de uma sequência didática a ser posta em prática. Com essa proposta, existe a possibilidade de promover a construção de um conhecimento significativo no ensino deste conteúdo, respeitando limites de tempo, níveis de complexidade e aprofundamento, desmanchando o monstro e desconstruindo sua complexidade aparente.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de Matemática na educação básica, sempre apresentou desafios, especialmente quando se trata da construção de significados para conceitos abstratos, como o caso dos números irracionais discutido nesse trabalho. Muitos alunos encontram dificuldades porque esse conteúdo, na maioria das vezes, é ensinado de forma mecânica, sem uma conexão clara com o cotidiano ou com sua própria intuição matemática. Desde logo, é preciso deixar claro que não se trata de uma peculiaridade, ou ainda, uma culpa assumida por eles, os alunos, pois se assim a fazem, é em decorrência do contexto em que vivem.

As pesquisas aqui exploradas, mostram que o ensino desse tema costuma ser superficial, com pouca preocupação em aprofundar o entendimento dos estudantes, o que acaba gerando lacunas na aprendizagem, as quais são disseminadas pela sociedade como um todo (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019). Foi com essa preocupação que este trabalho buscou investigar as dificuldades no ensino dos números irracionais e propor estratégias que pudessem torná-lo mais acessível e significativo.

Ao longo da pesquisa, pude perceber como o ensino desse conteúdo muitas vezes se restringe à apresentação de definições e procedimentos algébricos, sem um cuidado maior em explorar o significado por trás dos conceitos apresentados. Esse distanciamento faz com que os alunos vejam os números irracionais apenas como um detalhe técnico, sem compreender sua importância na Matemática e em diversas áreas do conhecimento.

Dessa forma, as discussões propostas na pesquisa, pretenderam mostrar que as ideias matemáticas – os conceitos, as estratégias, as ferramentas, os modos de representar, as normas – não existem independentemente das práticas associadas a elas, isto é, um conceito, nesse caso o conceito de número irracional, não pode ser caracterizado por sua definição (SADOVSKY, 2007). Além de trazer contribuições para a prática docente, essa pesquisa foi essencial para minha formação como futura professora.

Durante esse processo, aprofundei minha compreensão sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática e desenvolvi um olhar mais atento para os desafios enfrentados em sala de aula. Percebi que, muitas vezes, a dificuldade dos alunos não está na complexidade do conteúdo em si, mas na forma como ele é apresentado. Isso me fez refletir sobre a importância de um ensino mais investigativo e conectado com a realidade dos estudantes. Um ponto fundamental que essa pesquisa destacou foi a relevância da investigação na formação de professores, tanto na fase inicial quanto ao longo da carreira docente. O ensino de Matemática precisa ser constantemente revisitado, com o professor assumindo um papel ativo na busca por estratégias mais eficazes.

No caso específico dos números irracionais, ficou evidente que a falta de articulação entre a educação básica e a formação inicial dos professores contribui para a manutenção de abordagens inadequadas (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2019). Muitas vezes, o professor ensina da mesma forma que aprendeu, sem questionar se aquele método realmente funciona para os alunos. A análise realizada, junto à elaboração da sequência didática, mostrou que um dos principais problemas no ensino dos números irracionais está na maneira excessivamente formal com que o tema é abordado. Quando esse conteúdo é tratado apenas por meio de definições e propriedades abstratas, sem contextualização ou conexão com o mundo real, os alunos têm dificuldade em enxergar sua utilidade e acabam apenas decorando fórmulas sem compreendê-las. Diante do exposto, talvez tenha ficado claro que estratégias mais acessíveis e interativas no âmbito da sala de aula, podem contribuir para uma aprendizagem mais significativa, tornando o ensino dos números irracionais algo mais "concreto" e interessante para os estudantes.

A questão central desta pesquisa: "É possível desenvolver um processo de ensino de números irracionais na educação básica que ultrapasse o vazio de significação que tem marcado o estudo desse tema?", foi um dos pontos mais instigantes ao longo do trabalho. Os estudos indicaram que sim, há caminhos possíveis para tornar esse ensino mais significativo. A sequência didática desenvolvida se mostrou uma alternativa viável, pois propõe um ensino mais contextualizado e reflexivo. No entanto, sua eficácia dependerá da forma como for aplicada em sala de aula, respeitando as particularidades de cada turma e a realidade de cada escola.

Os objetivos estabelecidos no início da pesquisa foram alcançados, uma vez que foi possível: (01) explorar os conceitos fundamentais sobre os números irracionais, analisando suas características, origens históricas e implicações matemáticas. Estas que moldaram a forma como o público entende (ou busca entender) as ideias por trás dos números irracionais; (02) propor estratégias pedagógicas que favorecem a compreensão desse tema, destacando a importância da contextualização, do uso de múltiplas representações e da problematização em sala de aula. Ajudar os jovens a usar o conhecimento a seu favor vale o esforço que custa, e no caso da pesquisa, dedicar outros olhares a compreensão dos números irracionais, ainda que permeado por um sistema educacional de ensino, tende a ser um primeiro passo para a contribuição e fortalecimento de possibilidades de realização de boas práticas em sala de aula; (03) avaliar a aplicabilidade dessas estratégias com base na fundamentação teórica e na análise de pesquisas anteriores. Ainda que a aplicação prática em sala de aula possa ser um próximo passo relevante para o complemento desta pesquisa, compreender quais práticas já vem sendo

desenvolvidas na educação básica, faz-se necessário à medida que se torna difícil elaborar projetos de ensino quando, no âmbito da Matemática, esta é objeto de interrogação.

Com isso, a pesquisa não apenas contribuiu para a compreensão do ensino dos números irracionais, mas também abriu espaço para novas investigações. Esse estudo pode ser expandido em uma monografia de especialização, por exemplo, com um foco maior na implementação prática das propostas sugeridas, ou até mesmo em uma dissertação de mestrado, aprofundando a relação entre as dificuldades dos alunos e a formação dos professores para ensinar a respeito dos números irracionais. De modo geral, essa pesquisa me fez perceber que ensinar Matemática vai muito além de simplesmente passar conteúdos e resolver exercícios. O verdadeiro desafio está em encontrar formas de conectar o conhecimento formal com a realidade dos alunos, tornando a aprendizagem mais significativa.

Refletir sobre a prática docente me mostrou que o ensino é um processo dinâmico, que exige adaptação constante, investigação e, acima de tudo, um compromisso genuíno com a aprendizagem dos alunos. Já dizia Freire (2020), que ensinar não é apenas transmitir conhecimento, mas sim criar pontes que ajudem os estudantes a construir seu próprio entendimento sobre o mundo. E essa, sem dúvida, é a maior responsabilidade e, também, a maior recompensa de ser professor.

4. REFERÊNCIAS

BICUDO, Maria Aparecida; BORBA, Marcelo. **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. 4.ed. – São Paulo: Cortez, 2012.

BOALER, Jo. **O que a matemática tem a ver com isso? Como professores e pais podem transformar a aprendizagem da matemática e inspirar sucesso /** Jo Boaler ; tradução: Daniel Bueno ; revisão técnica: Fernando Amaral Carnaúba. – Porto Alegre: Penso, 2019.

BONJORNO, José Roberto. **Prisma matemática: conjuntos e funções: ensino médio: manual do professor : área do conhecimento: matemática e suas tecnologias /** José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto Câmara de Sousa. – 1. ed. – São Paulo : Editora FTD, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1997.

BROETTO, Geraldo Claudio, 1975. **Números irracionais para professores (e futuros professores) de matemática /** Geraldo Claudio Broetto, Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner. – Vitória, ES, Edifes, 2017, 270 p.

BROETTO, Geraldo Claudio; SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira dos. **O Ensino de Números Irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso?**. Scielo Brasil. Rio Claro – SP, agosto, 2019.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 23. ed. – São Paulo: Papirus, 2012.

D'ÁVILA, Cristina; VEIGA, Ilma Passos; et. al. **Didática e docência na educação superior: implicações para a formação de professores** / Cristina d'Ávila ; Ilma Passos Alencastro Veiga (orgs.). – Campinas, SP: Papirus, 2012. – (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico)

DE ARAÚJO, Denise Lino. **O que é (e como faz) sequência didática?**. Entrepalavras, v. 3, n. 1, p. 322-334, 2013.

DE JESUS, Bárbara Cristina Dâmaso; DE OLIVEIRA, Viviane Cristina Almada. **Sobre números irracionais e possibilidades para seu ensino**. Instrumento: Revista de Estudo e Pesquisa em Educação, v. 20, n. 2, 2018.

FAGUNDES, Tatiana Bezerra. **Os conceitos de professor pesquisador e professor reflexivo: perspectivas do trabalho docente**. Revista brasileira de educação, v. 21, p. 281-298, 2016.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. 73.ed. – São Paulo: Paz e Terra, 2020.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. – São Paulo: Atlas, 2002.

LEIVAS, José Carlos Pinto; CURY, Helena Noronha. **Transposição didática: exemplos em educação matemática**. Educação Matemática em Revista-RS, v. 1, n. 10, 2009.

LEMOS, André. **O futuro da internet: em direção a uma ciberdemocracia /** André Lemos e Pierre Lévy. – São Paulo: Paulus, 2010. – (Coleção comunicação).

LIMA, Adriana de Souza; ACIOLY, Vitor; GIRALDO, Victor Augusto. **PROCURANDO II: uma investigação sobre números irracionais**. Revista Teias, v. 22, n. ESPECIAL, p. 372-385, 2021.

MACHADO, Nilson José. (1998). **Matemática e Língua Materna: análise de uma Impregnação Mútua**. 4. ed. São Paulo: Cortez.

MATEMÁTICA HUMANISTA. **Episódio 8 – Números Irracionais: como abordá-los na escola**. Youtube, 2 de abril de 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ywIGaNxxsDQ&lc=UgzSjGUOR6P1tdr-RBd4AaABAg>. Acesso em: 23 de dezembro de 2024.

MÉRCURI, Johnny Luis. **A irracionalidade da raiz quadrada de dois e a construção da espiral de Teodoro no Geogebra**. Revista ft, Rio de Janeiro – RJ, Brasil, v. 28, março de 2024. Disponível em: https://revistaft.com.br/a-irracionalidade-da-raiz-quadrada-de-dois-e-a-construcao-da-espiral-de-teodoro-no-geogebra/ .Acesso em: 27 jan. 2025.

MORALES, Elisson dos Santos; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **Um estudo sobre a abordagem dos números irracionais em livros didáticos de matemática do ensino médio**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, São Paulo, v. 1, n. 3, p. (1-12), julho, 2016.

NOBRE, Ronaldo Bezerra. **Sobre possibilidade de ensino e aprendizagem dos números irracionais no 8º ano do Ensino Fundamental**. Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. São Paulo, 188 p., 2017.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática /** Luiz Carlos Pais. – 2. ed. – 1. reimp. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

PEREIRA, Cicero da Silva. **Aprendizagem em Trigonometria no Ensino Médio: Contribuições da Teoria da Aprendizagem Significativa /** Cicero da Silva Pereira. Jundaí, Paco Editorial: 2012, 84 p.

POMMER, Wagner Marcelo. **Números irracionais na escolaridade básica: um olhar pelo viés dos eixos constitutivos dos números reais**. Revista de Educação Matemática, v. 15, n. 20, p. 610-628, 2018.

REINA, Luis; WILHELMI, Miguel. Representation, recognition and meaning of the irrational number and the periodic function in the training of Secondary Education Teachers / **Representação, reconhecimento e significado do número irracional e da função periódica na formação de professores do ensino médio**. Saberes y prácticas Revista de Filosofía y Educación. Vol. 6 N° 1. 1-24. 10.48162/rev.36.023.

REZENDE, Wanderley Moura; DASSIE, Bruno Alves. **Epistemologia dos Números Relativos: uma reflexão necessária e atual para a sala de aula de matemática**. Boletim GEPEM, n. 57, 2010.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. [S.l.]: Zahar, 2012.

SADOVSKY, Patrícia. **O ensino de matemática hoje – enfoques, sentidos e desafios /** Patricia Sadovsky; tradução Antonio de Padua Danesi. – São Paulo: Àtica, 2007. 112 p:. – (Educação em ação).

SILVEIRA, Maria Rosâni Abreu da. **Matemática, discurso e linguagem: contribuições para a Educação Matemática /** Maria Rosâni Abreu da Silveira. LF Editorial; 1ª ed, 2023, 312 p.

VASCONCELOS, Daniel Victor Menezes de, 1989. **Números Irracionais: uma abordagem para o ensino básico /** Daniel Victor Menezes de Vasconcelos. – Viçosa, MG, 2016.

VOSKOGLOU, Michael Gr; KOSYVAS, Georgios. **A study on the comprehension of irrational numbers**. Quaderni di Ricerca in Didattica (Scienze Mathematiche),(21), p. 127-141, 2011.

WEIZ, Telma. **O diálogo entre o ensino e a aprendizagem /** Telma Weiz; com Ana Sanchez. – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2009.

APÊNDICE A – (SEQUÊNCIA DIDÁTICA 8º ANO)

<table>
<tr><th colspan="4">SEQUÊNCIA DIDÁTICA ANOS FINAIS</th></tr>
<tr><td colspan="2">Profª.: Maria Beatriz.</td><td colspan="2">Turma: 8º ano.</td><td>Período: 3 aulas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Área do Conhecimento: Ciências Exatas.</td><td colspan="2">Componente Curricular: Matemática.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Unidade Temática: Números.</td><td colspan="3">Objeto de Conhecimento: Números Irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Habilidade:
(EF07MA27) Estabelecer o número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional, como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo.
(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Desenvolvimento:
Aula 01 – Introdução aos Números Irracionais
• Etapa 01: Apresentar o objetivo geral da aula;
• Etapa 02: Introduzir o conceito de número irracional a partir da construção geométrica;
• Etapa 03: Promover habilidades práticas através de desenhos e medições;
• Etapa 04: Demonstrar que a medida da diagonal do quadrado de lado unitário não pode ser representada por um número racional.
Aula 02 – Explorando o π (pi)
• Etapa 01: Apresentar o objetivo geral da aula;
• Etapa 02: Introduzir o conceito do π (pi) a partir de investigações e medidas experimentais;
• Etapa 03: Desenvolver habilidades de medição e registro de dados;
• Etapa 04: Refletir sobre a impossibilidade de representar π como uma fração exata.
Aula 03 – Avaliação para a Aprendizagem
• Etapa Única: Avaliar a compreensão dos alunos sobre números irracionais, suas propriedades e aplicações.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Recursos: Régua; Compasso; Folhas Quadriculadas; Lápis; Borracha; Cartolina ou EVA; Barbante ou Fio; Calculadora; Quadro Branco; Slides; Fita Métrica; Objetos Circulares (tampas, copos, pratos, CD’s, etc.).</td></tr>
<tr><td colspan="5">Avaliação: Observação e Registro das Interações ao Longo das Aulas; Produções Individuais e em Grupo; Produção Textual e Resolução de Questões.</td></tr>
</table>

APÊNDICE B – (POSSIBILIDADES DE ENSINO 8º ANO)

Aula 01: Introdução aos Números Irracionais

Objetivo Geral:

O objetivo principal é introduzir o conceito de números irracionais a partir de uma perspectiva geométrica, utilizando a construção da diagonal de um quadrado como contexto. Também se pretende desenvolver habilidades práticas, como desenho e medição, relacionando-as a conceitos matemáticos abstratos.

Objetivos Específicos:

- Introduzir o conceito de números irracionais a partir da construção geométrica.
- Relacionar a diagonal de um quadrado com a raiz de 2.
- Promover habilidades práticas de desenho e medição.

- Construir e medir a diagonal de um quadrado utilizando régua e compasso.
- Demonstrar que a medida da diagonal não pode ser representada por um número racional.

Recursos Didáticos:

Régua; Compasso; Folhas Quadriculadas; Lápis e Borracha; Cartolina ou EVA; Barbante ou Fio Flexível; Calculadora; Quadro Branco ou Slides e Explicações.

Roteiro da Aula:

Parte 01 - Contextualização:

Inicie com uma breve conversa sobre números irracionais, no esquema de perguntas e respostas.

Pergunte aos alunos: "Vocês lembram o que é um número Racional? Quando um número não é racional? Conseguem pensar em exemplos além do π?"

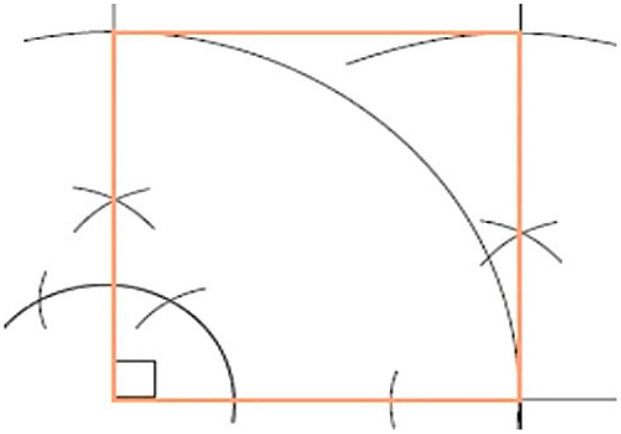
Apresente o objetivo da aula: "Hoje vamos construir a diagonal de um quadrado e ver como ela nos ajuda a entender os números irracionais."

Parte 02 - Construção Geométrica:

Passo a Passo:

- Distribua as folhas quadriculadas. Peça aos alunos que desenhem um quadrado de lado 10 cm usando a régua. Oriente-os a verificar que os ângulos são retos e os lados têm a mesma medida.
- Com o compasso, os alunos devem apoiar o ponto de apoio no vértice inferior esquerdo do quadrado e traçar o arco que passa pelo vértice superior direito.
- Conecte os vértices opostos com uma linha reta usando a régua.
- Os alunos medem a diagonal com a régua e registram o valor (aproximadamente 14,14 cm para o quadrado de lado 10 cm).
- Com uma calculadora, peça para que multipliquem $\sqrt{2}.10$ e comparem o resultado com a medição.

Figura 15: Ilustração do Passo a Passo



Fonte: Google Imagens. Disponível em: https://images.app.goo.gl/Hgknh73jNsJ3kpWu8

Parte 03 - Exploração Manipulativa:

- Distribua quadrados de cartolina ou EVA com lado 10 cm (cortados previamente ou pelos próprios alunos).
- Oriente-os a traçar e cortar a diagonal usando o mesmo método da construção geométrica vista na parte 02 da aula.
- Use barbante ou fio flexível para medir a diagonal. Compare o comprimento do barbante com o valor obtido pela calculadora.

Parte 04 – Discussão Final:

A partir das construções e manipulações feitas e observadas ao longo da aula, incentive os alunos a refletirem sobre as questões: “Ao ser dado um zoom na fita métrica, seria possível chegar à raiz de 2?”, "Como isso mostra que a raiz de 2 é irracional?".

A partir deste ponto, a escrita na forma decimal do resultado da raiz quadrada de dois deve ser apresentada visando mostrar o que, de fato, caracteriza um número irracional: número cuja

forma decimal apresenta infinitas casas decimais não periódicas. Finalizando-se a aula com o registro de tal conceito, seja visual ou escrito.

Aula 02: Explorando o π (pi)

Objetivo Geral:

O principal objetivo é introduzir o conceito de números irracionais utilizando o π como exemplo central, demonstrando a relação constante entre a circunferência e o diâmetro de um círculo. Além disso, a aula visa estimular a investigação matemática através de atividades práticas de medição e registro de dados.

Objetivos Específicos:

- Introduzir o conceito de números irracionais com foco no π.
- Demonstrar a relação constante entre a circunferência e o diâmetro de um círculo.
- Estimular a investigação matemática por meio de medidas experimentais
- Compreender que π é uma constante irracional.
- Desenvolver habilidades de medição e registro de dados.
- Refletir sobre a impossibilidade de representar π como uma fração exata.

Recursos Didáticos

Objetos Circulares (tampas, copos, pratos, CDs, etc.); Barbante ou Fita Métrica Flexível; Régua; Calculadora; Papel Quadriculado ou Sulfite; Tabela para Registro das Medidas (impressa ou feita à mão); Slide ou Cartaz Explicando π e sua História.

Roteiro da Aula:

Parte 01 - Contextualização:

Relembre, brevemente, o que são números irracionais e como π é um exemplo.

Apresente curiosidades sobre π, como sua relação com a circunferência e o diâmetro, e fatos históricos interessantes, a exemplo de suas infinitas casas decimais e não periódicas conterem dados que são utilizados em sistemas de segurança, por exemplo.

Provoque os alunos com perguntas: "Vocês já ouviram falar de π? Por que acham que ele é importante na matemática e no mundo real?"

Apresente o objetivo da aula: “Medir a circunferência e o diâmetro de objetos para observar a constante π”.

Parte 02 - Atividade Prática:

- Distribua os objetos circulares, barbantes, réguas e tabelas.
- Explique como medir a circunferência com o barbante (ajustando o barbante ao redor do objeto e depois medindo-o com a régua).
- Oriente a medição do diâmetro diretamente com a régua.

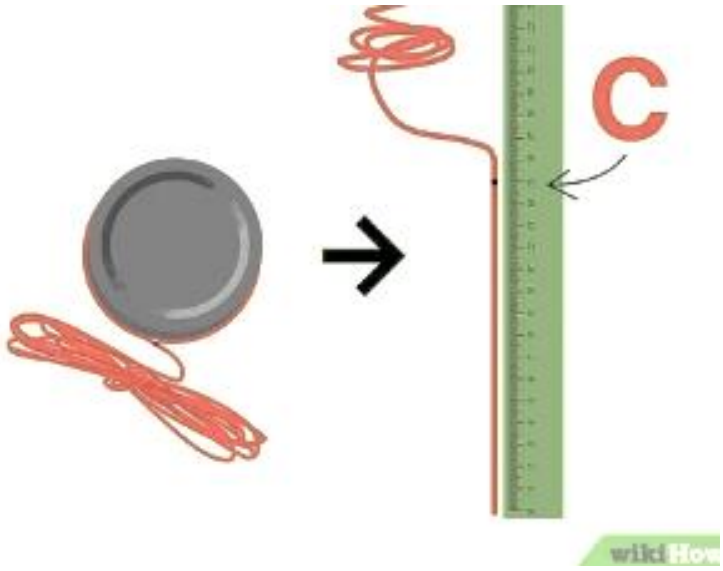
- Cada grupo ou aluno mede pelo menos 3 objetos diferentes.
- Registre os valores em uma tabela com as colunas.
- Compare os valores e mostre que, apesar das diferenças nos objetos, a razão se aproxima de 3,14.

Tabela 1: Ilustração Possível da Tabela

Objeto	**Circunferência medida (cm)**	**Diâmetro medido (cm)**	**Razão (Circunferência ÷ Diâmetro)**

Fonte: a autora (2025).

Figura 16: Ilustração do Passo a Passo



Fonte: Google Imagens. Disponível em: https://images.app.goo.gl/QiYACgnr3GqM4doL6

Parte 03 - Discussão Orientada:

Pergunte: “Por que o valor da razão é sempre próximo de 3,14, mas nunca exato?"

Explique que isso ocorre porque π é um número irracional, ou seja, ele não pode ser representado como uma fração exata ou com um número decimal finito.

Mostre uma aproximação histórica famosa de π, como o caso da razão $\frac{22}{7}$, e pergunte: "Por que usamos essa aproximação mesmo sabendo que π é irracional?"

Finalize o encontro com um feedback dos conhecimentos construídos ao longo das explorações feitas até o presente momento.

Aula 3 – Avaliação para a Aprendizagem

Objetivo Geral: Avaliar o entendimento dos conceitos explorados ao longo dos encontros.

Objetivos Específicos:

- Avaliar a compreensão dos alunos sobre números irracionais, suas propriedades e aplicações.
- Estimular a capacidade de comunicação matemática por meio de um texto explicativo.

Parte 01 - Desenvolvimento:

Relembrar rapidamente os conceitos fundamentais vistos nas aulas anteriores:

- Definição de números irracionais.
- Exemplos de números irracionais, como $\sqrt{2}$ e π.
- Relação com a geometria (diagonal de um quadrado).

Parte 02 - Atividade Proposta:

Os alunos escrevem em uma folha avulsa, previamente entregue, um texto curto explicando o que aprenderam sobre números irracionais ao longo dos encontros, usando exemplos práticos para suas representações. Em seguida, são direcionados a resolverem algumas questões simples, mas pertinentes sobre o tema: como identificar números irracionais e realizar cálculos aproximados envolvendo π.

Orientações:

- Explique o que espera do texto: "Quero que vocês escrevam como se estivessem explicando números irracionais para alguém que nunca ouviu falar deles."
- Enquanto escrevem, circule pela sala, respondendo dúvidas e incentivando ideias criativas.
- Peça que compartilhem suas conclusões em grupo ou com a turma, promovendo uma discussão sobre o que acharam mais interessantes.

APÊNDICE C – (SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1º ANO)

<table>
<tr><th colspan="4">SEQUÊNCIA DIDÁTICA ENSINO MÉDIO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Profª.: Maria Beatriz.</td><td colspan="2">Turma: 1º ano.</td><td>Período: 3 aulas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Área do Conhecimento: Ciências Exatas.</td><td colspan="2">Componente Curricular: Matemática.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Unidade Temática: Números.</td><td colspan="3">Objeto de Conhecimento: Números Irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Habilidade:
• Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular comprimentos e distâncias, ângulos, volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica. Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos.
• Identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado, probabilístico ou análise de médias. Por exemplo, de acordo com uma dada situação, escolher número de algarismos apropriado ou fazer aproximações adequadas, optar pelo uso de fração, porcentagem, potências de dez; escolher melhor unidade para representar uma grandeza.
• Fazer previsões e estimativas de ordens de grandeza, de quantidades ou intervalos esperados para os resultados de cálculos ou medições e, com isso, saber avaliar erros ou imprecisões nos dados obtidos na solução de uma dada situação-problema.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Desenvolvimento:
Aula 01 – Um Resgate dos Números Irracionais
• Etapa 01: Apresentar o objetivo geral da aula;
• Etapa 02: Introduzir o conceito de número irracional a partir da ruptura do senso comum;
• Etapa 03: Promover discussões em torno da incompletude da Matemática, desmistificando a noção de que trata-se de uma ciência pronta e acabada;
• Etapa 04: Demonstrar o caso da $\sqrt{2}$ e mencionar a importância de números como π e e em padrões da natureza.
Aula 02 – Explorando a Razão Áurea φ (phi)
• Etapa 01: Apresentar o objetivo geral da aula;
• Etapa 02: Introduzir o conceito do φ (phi) a partir de investigações e medidas experimentais;
• Etapa 03: Desenvolver habilidades de medição e registro de dados;
• Etapa 04: Refletir sobre a importância da padronização em processos de representação e desenvolvimento matemático.</td></tr>
</table>

Aula 03 – Avaliação para a Aprendizagem • Etapa Única: Avaliar a compreensão dos alunos sobre números irracionais, suas propriedades e aplicações.
Recursos: Régua; Compasso; Folhas Quadriculadas; Lápis; Borracha; Cartolina ou EVA; Barbante ou Fio; Calculadora; Quadro Branco; Slides; Fita Métrica; Objetos Circulares (tampas, copos, pratos, CD's, etc.).
Avaliação: Observação e Registro das Interações ao Longo das Aulas; Produções Individuais e em Grupo; Produção Textual e Resolução de Questões.

APÊNDICE D – (POSSIBILIDADES DE ENSINO 1º ANO)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PARAÍBA
Campus Campina Grande

Aula 01: Um Resgate dos Números Irracionais

Objetivo Geral:

O objetivo principal é introduzir o conceito de números irracionais a partir de uma perspectiva geométrica, utilizando a construção da demonstração da diagonal de um quadrado unitário, resgatando conceitos históricos sobre a primeira crise da Matemática. Também se pretende desenvolver percepções iniciais a respeito do que consiste uma demonstração matemática.

Objetivos Específicos:

- Introduzir o conceito de números irracionais a partir da demonstração da diagonal do quadrado unitário.
- Identificar a necessidade da criação de outros Conjuntos Numéricos.
- Compreender a existência e a importância dos Números Irracionais no Conjunto dos Números Reais.
- Apresentar menções a outros números irracionais a partir da padronização da Espiral de Teodoro.
- Utilizar softwares inteligentes, como o Geogebra para a apresentação de construções geométricas no Plano Cartesiano.

Recursos Didáticos:

Régua; Compasso; Lápis e Borracha; Calculadora; Quadro Branco ou Slides e Explicações; Geogebra.

Roteiro da Aula:

Parte 01 - Contextualização:

Inicie com uma breve conversa sobre números irracionais, no esquema de perguntas e respostas, pedindo aos alunos para escolherem um número qualquer e o compartilharem com a turma.

Pergunte aos alunos: "Por que os números escolhidos são geralmente racionais e não irracionais?". Com base nas respostas obtidas, comente sobre a dificuldade de determinar se alguns números são irracionais ou não.

Apresente o objetivo da aula: "Hoje vamos compreender, através de uma demonstração matemática e com base em situações prováveis, a importância e presença dos irracionais em diferentes áreas do conhecimento."

Parte 02 - Demonstração:

Resgate a história da primeira crise da matemática apresentando o contexto dos Pitagóricos.

Apresente o que, na Matemática, é considerada uma demonstração e a importância das mesmas para a construção do conhecimento matemático.

Introduza a demonstração a partir do desenho geométrico do quadrado unitário partindo para a utilização do Teorema de Pitágoras. (Demonstração meramente ilustrativa).

Figura 17: Demonstração da Irracionalidade da $\sqrt{2}$

2.2 A RAIZ QUADRADA DE DOIS É IRRACIONAL

Para demonstrar tal fato, usaremos o método de demonstração por absurdo, onde vamos supor que a √2 é racional, chegando assim em uma contradição, logo sendo irracional.

Suponhamos que a √2 é um número racional com p e q primos entre si, logo temos que:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad tal\ que\ p\ e\ q\ inteiros\ onde\ q \neq 0 \qquad (1)$$

Elevando ao quadrado de ambos os lados de (1) temos:

$$(\sqrt{2})^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2.q^2 = p^2$$

Assim, temos que p² é o dobro de um número inteiro, portanto p² é par e ainda p também é par por ser divisível por 2, mas isso é um absurdo pois por hipótese temos que p e q são primos entre si, logo concluímos que √2 não é racional, sendo assim irracional.

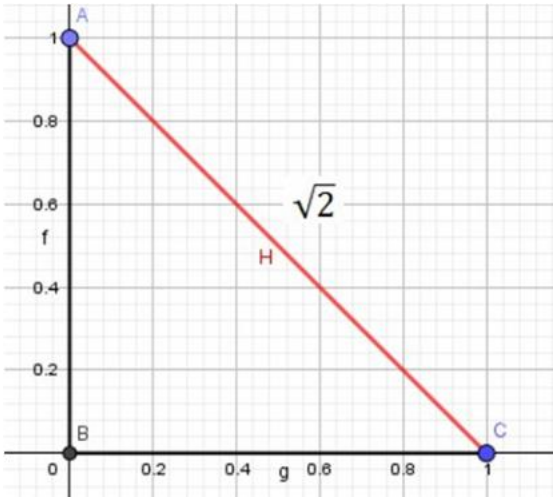
Fonte: Recorte de Artigo (MÉRCURI, 2024).

A partir da demonstração, enfatize a necessidade da exploração de um novo Conjunto Numérico que pudesse satisfazer o que fora demonstrado.

Parte 03 – Exploração no Geogebra: A Espiral de Teodoro

- Tome um triângulo ABC, retângulo em B de cateto medindo 1.

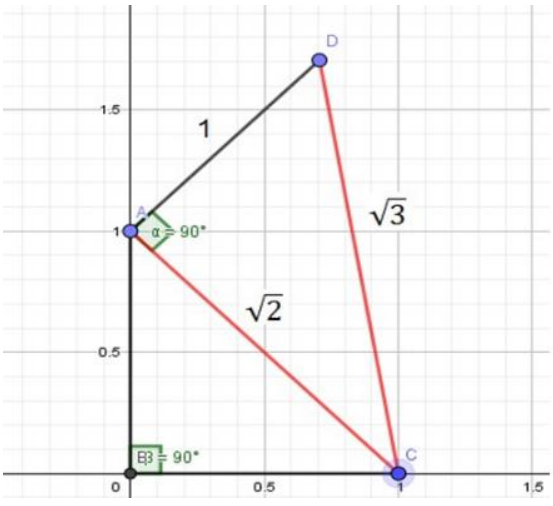
Figura 18: Triângulo ABC de lado hipotenusa $\sqrt{2}$



Fonte: Recorte de Artigo (MÉRCURI, 2024).

- Trace um segmento de comprimento 1 perpendicular a hipotenusa AC, formando o triângulo ADC, retângulo em A.
- Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se a hipotenusa DC medindo $\sqrt{3}$.

Figura 19: Triângulo ADC de hipotenusa $\sqrt{3}$



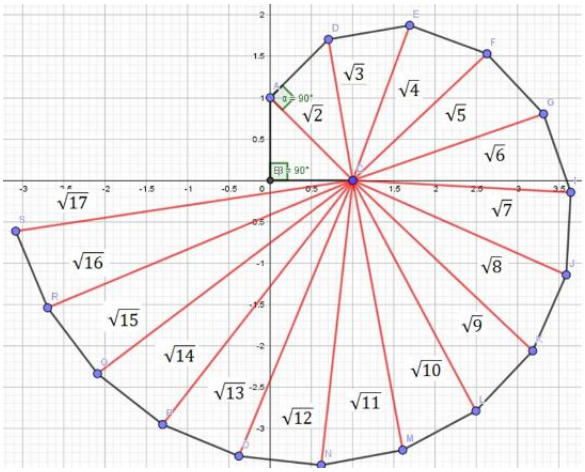
Fonte: Recorte de Artigo (MÉRCURI, 2024).

- Repetindo o mesmo procedimento, constrói-se qualquer segmento irracional:
  - Traçar uma perpendicular a hipotenusa do triângulo anterior de medida 1.

- Fechar o triângulo de catetos medindo 1 e hipotenusa do triângulo anterior, obtendo um novo triângulo retângulo.
- Determinar, através do Teorema de Pitágoras a medida da hipotenusa.

- A reprodução deste procedimento determina o comprimento exato das raízes na forma $\sqrt[m]{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, bastando apenas a transposição do segmento desejado com o compasso para a reta real.

Figura 20: Repetição do Procedimento até a $\sqrt{17}$



Fonte: Recorte de Artigo (MÉRCURI, 2024).

Parte 04 – Discussão Final:

A partir das construções e manipulações feitas e observadas ao longo da aula, apresente aos alunos o conceito e/ou definição de um número irracional.

Aula 02: Explorando o φ (phi)

Objetivo Geral:

O principal objetivo é alimentar o conceito de números irracionais utilizando o φ como exemplo central, demonstrando a relação de proporção presente na Razão Áurea. Além disso, a aula visa estimular a investigação matemática através de atividades práticas de medição e registro de dados.

Objetivos Específicos:

- Ampliar o conceito de números irracionais com foco no φ.
- Estimular a curiosidade e investigação matemática por meio da presença desta razão na natureza, na arte e na própria matemática.
- Desenvolver habilidades de medição e registro de dados.

Recursos Didáticos

Régua ou Fita Métrica Flexível; Espelho ou Fotografia do Rosto; Calculadora; Papel Quadriculado ou Sulfite; Tabela para Registro das Medidas; Papel e Lápis.

Roteiro da Aula:

Parte 01 - Contextualização:

Exiba imagens que ilustrem a presença da Razão Áurea, como a concha do náutilo, o corpo humano e obras de arte clássicas.

Explique que a Razão Áurea é outro exemplo de número irracional, cuja representação decimal é próxima de 1,68 e a letra grega que a representa é o φ (phi).

Provoque os alunos com perguntas: "Vocês já ouviram falar dessa razão? Por que embora ela apareça em circunstâncias convenientes aos olhos e em especificidades naturais do cotidiano, não é comum sua representação na forma $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$?"

Apresente o objetivo da aula: “Promover a compreensão conceitual da Razão Áurea através de suas particularidades”.

Parte 02 - Atividade Prática:

- Divida os alunos em grupos e distribua régua, papel milimetrado e a sequência numérica de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...).
- Peça aos alunos que calculem a razão entre os números consecutivos da sequência e observem como o resultado das divisões vão se aproximando de 1,618 ...
- Discuta: Por que essa razão aparece repetidamente? Qual a sua ligação com os números irracionais?
- Peça aos alunos que utilizem réguas para medir proporções em suas faces e verificar aproximações da Razão Áurea: como o comprimento do rosto dividido pela largura do rosto; largura da boca dividida pela largura do nariz; distância entre os olhos dividido pela largura do olho.
- Registre os valores obtidos em cada par de razões e compare os resultados com o valor de $\varphi \cong 1{,}618$ ...

Parte 03 - Discussão Orientada:

Pergunte: “O que mais chamou atenção na Razão Áurea?"

Conecte esse resultado aos números irracionais, como a abundância de sua representação decimal.

Explique aos alunos que o conceito de beleza provém da associação com a Razão Áurea, muito embora seja apenas uma observação estatística e não um padrão absoluto.

Discuta as implicações culturais e matemáticas da presença de proporções áureas no rosto humano.

Finalize o encontro com um feedback dos conhecimentos construídos ao longo das explorações feitas até o presente momento.

Aula 3 – Avaliação para a Aprendizagem

Objetivo Geral: Avaliar o entendimento dos conceitos explorados ao longo dos encontros.

Objetivos Específicos:

- Avaliar a compreensão dos alunos sobre números irracionais, suas propriedades e aplicações.
- Estimular a capacidade de comunicação matemática por meio de um texto explicativo.

Parte 01 - Desenvolvimento:

Relembrar rapidamente os conceitos fundamentais vistos nas aulas anteriores:

- Definição de números irracionais.
- Exemplos de números irracionais, como $\sqrt{\sqrt{2}}$, π e φ.
- Relação com a geometria (diagonal de um quadrado) e as proporções (razão áurea).

Parte 02 - Atividade Proposta:

Os alunos escrevem em uma folha avulsa, previamente entregue, um texto curto explicando o que aprenderam sobre números irracionais ao longo dos encontros, usando exemplos práticos para suas representações. Em seguida, são direcionados a resolverem algumas questões simples, mas pertinentes sobre o tema: como traspor um número irracional da representação da Espiral de Teodoro para a reta numérica, identificar números irracionais, estabelecer razões e proporções e realizar cálculos aproximados envolvendo π.

Orientações:

- Explique o que espera do texto: "Quero que vocês escrevam como se estivessem explicando números irracionais para alguém que nunca ouviu falar deles."
- Enquanto escrevem, circule pela sala, respondendo dúvidas e incentivando ideias criativas.
- Peça que compartilhem suas conclusões em grupo ou com a turma, promovendo uma discussão sobre o que acharam mais interessantes.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Trabalho de Conclusão de Curso

Assunto:	Trabalho de Conclusão de Curso
Assinado por:	Maria Silva
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Maria Beatriz de Azevedo Silva**, **ALUNO (202011230034) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 24/03/2025 19:50:51.

Este documento foi armazenado no SUAP em 24/03/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1432368
Código de Autenticação: cef53d0d57