



INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ESTER GOMES DE FIGUEIRÊDO

UMA APLICAÇÃO VISUAL DA TRANSFORMADA DE FOURIER E ALGUMAS
CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA INVERSA DE FUNÇÕES

CAMPINA GRANDE - PB

2025

ESTER GOMES DE FIGUEIRÊDO

**UMA APLICAÇÃO VISUAL DA TRANSFORMADA DE FOURIER E ALGUMAS
CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA INVERSA DE FUNÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa

Catálogo na fonte:

Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

F475a Figueirêdo, Ester Gomes de

Uma aplicação visual da transformada de Fourier e algumas considerações a respeito da inversa de funções. / Ester Gomes de Figueirêdo. - Campina Grande, 2025.

62 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de Licenciatura em Matemática.) - Instituto Federal da Paraíba, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa.

1. Matemática 2. Transformada de Fourier 3. Matemática aplicada 4. Processamento de imagens digitais I. Barbosa, Jonathas Jerônimo II. Título.

CDU 51

ESTER GOMES DE FIGUEIRÊDO

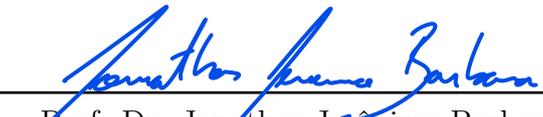
UMA APLICAÇÃO VISUAL DA TRANSFORMADA DE FOURIER E ALGUMAS
CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA INVERSA DE FUNÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa

Aprovado em: 17/03/2025

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa
Instituto Federal da Paraíba



Prof. Me. Baldoino Sonildo da Nóbrega
Instituto Federal da Paraíba



Prof. Dr. Felipe Barbosa Cavalcante
Instituto Federal da Paraíba

Este trabalho é dedicado a Antônio Lopes de Figueirêdo (*in memoriam*) e à Josefa Normando de Figueirêdo, que, por meio da enxada, plantaram a terra para que sua descendência pudesse florescer.

AGRADECIMENTOS

Esse trabalho é fruto de alguns anos de jornada acadêmica, que foi cercada de pessoas que me apoiaram e sempre estiveram presentes. Diante disso, primeiramente gostaria de agradecer a Deus, pois sem Ele, nada seria possível. Ele é meu sustento em todos os segundos da minha vida. Agradeço também aos meus pais Ivan Lopes e Jocilene Gomes, por todo incentivo, apoio tudo que fizeram por mim durante não somente os anos de curso, mas durante toda a minha vida. À minha família, por todo o apoio. Agradeço também ao meu companheiro de todas as horas, meu namorado Manoel Vitor, por sempre estar comigo mesmo nos momentos mais difíceis e por toda a ajuda e contribuição na construção desse trabalho. Aos meus amigos Adrielly Valeska, Pedro Igor e Luis Vinícios por me acompanharem em toda jornada acadêmica. Sentirei falta das nossas conversas e risadas. Ao Instituto Federal, por proporcionar toda a educação necessária. Ao corpo docente, por contribuir com valiosos ensinamentos e a todo o quadro de funcionários da instituição. Agradeço também à banca examinadora, pela contribuição. E finalmente, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa, pela sua orientação, acolhimento, dedicação e paciência para a construção desse trabalho e para comigo durante esses anos de curso. Obrigada por toda ajuda e por todo o ensinamento.

*“Porque o Senhor dá a sabedoria; da sua boca é que vem o conhecimento e o entendimento.”
(Provérbios 2:6)*

RESUMO

Lidamos com problemas tanto de natureza matemática, quanto de outras, em muitas situações. Tais problemas podem ser resolvidos diretamente, a partir das suas hipóteses ou podem se apresentar de tal forma que seja mais fácil abordá-lo de maneira reversa. Trazer para o ambiente matemático, se o problema atender a condições de ser modelado por uma função que admita inversa será possível resolvê-lo em um espaço diferente do original - muitas vezes mais fácil de lidar - e via função inversa retornar para o espaço original recuperando, assim, suas características iniciais. Este é um modelo bastante comum na resolução de problemas matemáticos em equações diferenciais e processamento de imagens digitais. No presente trabalho foram comparadas as condições sobre a existência da inversa de funções elementares e da transformada de Fourier bem como realizada a aplicação desta inversão no processamento de imagens digitais de forma que foi possível visualizar todo o processo pelas imagens geradas. Além disso, foram destacados resultados relevantes à formação do professor e também a formação de bacharéis tanto para o ensino básico, quanto para o ensino superior relativos a funções elementares e à Transformada de Fourier o que caracteriza a importância da abordagem e comparação dos temas propostos.

Palavras-chave: Função inversa. Transformada de Fourier. Processamento de imagem digital.

ABSTRACT

We deal with problems of both mathematical and other natures in many situations. Such problems can be solved directly, based on their hypotheses, or they can be presented in such a way that it is easier to approach them in reverse. Bringing it to the mathematical environment, if the problem meets the conditions of being modeled by a function that admits an inverse, it will be possible to solve it in a space different from the original - often easier to deal with - and via the inverse function return to the original space, thus recovering its initial characteristics. This is a very common model in solving mathematical problems in differential equations and digital image processing. In the present work, the conditions regarding the existence of the inverse of elementary functions and the Fourier transform were compared, as well as the application of this inversion in the processing of digital images so that it was possible to visualize the entire process through the generated images. Furthermore, results relevant to teacher training and also to the training of bachelors for both basic and higher education were highlighted regarding elementary functions and the Fourier Transform, which characterizes the importance of approaching and comparing the proposed themes.

Keywords: Inverse function. Fourier transform. Image digital processing.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Injetividade	17
Figura 2 – Bijetividade	17
Figura 3 – Bijetividade	17
Figura 4 – Representação do Gráfico da Função Cúbica	19
Figura 5 – Imagem Inversa	20
Figura 6 – Função Inversa	20
Figura 7 – Exemplo de Função	21
Figura 8 – Exemplo de Função Inversa	21
Figura 9 – Função Inversa à Esquerda	23
Figura 10 – Função Inversa à Direita	23
Figura 11 – Função Afim	25
Figura 12 – Função Afim Inversa	25
Figura 13 – Função Quadrática	28
Figura 14 – Função Quadrática Inversa	28
Figura 15 – Simetria entre as funções	28
Figura 16 – Função Exponencial	30
Figura 17 – Função Logarítmica	30
Figura 18 – Função Logarítmica e Função Inversa	31
Figura 19 – Função Dente de Serra	39
Figura 20 – Série de Fourier da Função Dente de Serra	41
Figura 21 – Função Onda Quadrada	41
Figura 22 – Série de Fourier da Função de Onda Quadrada	43
Figura 23 – Esquematização da TF	44
Figura 24 – Amostragem e Quantização	51
Figura 25 – 3 Representações de imagens	52
Figura 26 – Aplicação da Transformada	55
Figura 27 – Aplicação da Transformada 2	55
Figura 28 – Aplicação da Transformada na Imagem de um Esquilo	56
Figura 29 – Espectro de Fourier	56
Figura 30 – Ruído na Imagem do Palhaço	57
Figura 31 – Filtro Sendo Aplicado No Ruído	58
Figura 32 – Imagem com Redução de Ruído	58
Figura 33 – Esquema Geral de Processamento no Domínio da Frequência.	58
Figura 34 – Aplicação de Mascara para redução de Ruído	59

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IFPB	Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Paraíba
SF	Série de Fourier
TF	Transformada de Fourier
FT	Transformada de Fourier
DFS	Série Discreta de Fourier
DTFT	Transformada de Fourier em Tempo Discreto
DFT	Transformada Discreta de Fourier
EDP	Equações Diferenciais Parciais

LISTA DE SÍMBOLOS

\in	Pertence
\mathbb{R}^*	Conjunto dos números Reais não nulos
\mathbb{R}^+	Conjunto dos números Reais não negativos
\mathbb{R}^-	Conjunto dos números Reais não positivos
f^{-1}	Função inversa de f

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	OBJETIVOS	15
2.1	Objetivo Geral	15
2.2	Objetivos Específicos	15
3	A INVERSA DE ALGUMAS FUNÇÕES ELEMENTARES	16
3.1	Funções	16
3.2	Gráfico de uma função	18
3.3	Função Inversa	19
3.3.1	Função Inversa à Esquerda	22
3.3.2	Função Inversa à Direita	23
3.3.3	Função Afim	23
3.3.4	Função Quadrática	25
3.3.5	Função Exponencial e Logarítmica	29
4	FOURIER: SÉRIE, TRANSFORMADA E ALGUNS RESULTADOS	32
4.1	Funções periódicas	32
4.2	Convergência de Séries	33
4.2.1	Série Geométrica	34
4.2.2	P-Série	34
4.3	Coefficientes de Fourier	34
4.4	Série de Fourier	38
4.4.1	A série de Fourier de Funções Ímpares e Pares	38
4.4.2	Cálculo de algumas séries de Fourier	39
4.5	Transformada de Fourier	43
4.5.1	Definição da Transformada de Fourier	44
4.6	Transformada Inversa de Fourier	46
5	UMA APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA PARA IMAGENS DIGITAIS	49
5.1	Fundamentos da Imagem digital	49
5.1.1	Elementos da Percepção Visual	49
5.1.2	A luz e o espectro eletromagnético	49
5.2	Amostragem e quantização de imagens	50
5.2.1	Conceitos básicos	50
5.2.2	Representação de imagens digitais	51
5.2.3	Resolução Espacial e de Intensidade	53
5.3	Transformada de Fourier no processamentos de imagens digitais	54
5.4	Filtros, Máscaras e Restauração	56
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	60

Referências 62

1 INTRODUÇÃO

A busca por solução de problemas apresentados por uma necessidade cotidiana, por um problema real ou por uma conjectura científica move o mundo desde os seus primórdios. Em matemática, tão importante quanto obter a solução de um problema posto é garantir que, primeiramente ela exista, dependendo da situação é desejável que ela seja única ou ainda é importante verificar, de antemão, que o problema em questão não apresente solução, evitando, dessa forma, que o tempo dos pesquisadores envolvidos não seja desperdiçado.

Outro ponto bastante importante no fazer matemático é o que se chama de mudança de espaços. A facilidade de resolução de um problema pode mudar dependendo do espaço em que ele seja abordado. As funções que admitem inversas carregam a vantagem de serem os vetores dos elementos de um espaço para outro. Neste contexto, as funções que admitem inversas são bastante relevantes, pois podem ser utilizadas como “pontes” entre diferentes espaços, permitindo a análise ou resolução de problemas sob novas perspectivas. No caso específico deste trabalho, a transformada de Fourier será o vetor da mudança de espaços para a filtragem da imagem digital.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) foi a pessoa que mais contribuiu para o estudo e desenvolvimento das chamadas Séries e as Transformadas de Fourier. Ele fez grandes contribuições para a Teoria das Equações Diferenciais, sendo aluno de Laplace e Legendre, em seu trabalho afirmou que uma função pode ser escrita como um somatório de senos e cossenos.

As séries e Transformadas de Fourier, da mesma forma que sua inversa, são poderosas ferramentas envolvendo o trato de funções e alguns problemas de alta complexidade, e possuem aplicações, como por exemplo, no processamento de imagens, para a restauração, aguçamento, suavização bem como redução do custo computacional e entre outras coisas. Sendo assim, devido a sua importância, o estudo da Transformada de Fourier é justificado.

Além do mais, a condição de existência da inversa da transformada de Fourier depende de por condições sensivelmente distintas daquelas requeridas pelas funções elementares, como a função afim, a função quadrática, a função logarítmica, e entre outras.

Dessa forma, este trabalho tem por finalidade, investigar a condição de existência da inversa da Transformada de Fourier. Nesse processo, será feita uma comparação entre a inversas de algumas funções elementares e a inversa da Transformada de Fourier. Ao final, será apresentada uma aplicação da Transformada de Fourier no uso de processamento de imagens.

Para cumprir os objetivos, será utilizado o respaldo de vários estudiosos, como Djairo Figueiredo, para a fundamentação de Transformada de Fourier; Elon Lages Lima, Os-mundo Lima e entre outros para a base de funções e funções inversas; e Gonzales, Woods

e outros para a fundamentação da aplicação em imagens.

No primeiro capítulo, foi feita uma introdução sobre funções, abordando sua definição, alguns exemplos, a classificação em injetiva, sobrejetiva e bijetiva e a definição de gráfico de uma função. Em seguida, a definição de função inversa será introduzida, bem como a função inversa à esquerda e à direita.

Dando continuidade, ainda no primeiro capítulo, serão abordadas algumas funções que normalmente são vistas no ensino básico, com alguns exemplos, e uma forma de calcular a inversa de cada uma delas. Também será exposta a representação gráfica de cada função.

O segundo capítulo é composto com informações sobre a matemática de Fourier: séries, transformadas e transformada inversa. Inicialmente é feita uma pequena introdução sobre a série de Fourier, e em seguida, será abordado o conceito de funções periódicas e postos alguns exemplos, pois a série de Fourier trata de funções periódicas (senos e cossenos).

Dando continuidade, será lembrado brevemente a convergência de algumas séries. Em seguida, será explorado um pouco mais profundamente sobre os coeficientes de Fourier, que são necessários para determinar a Série de Fourier de uma dada função. Alguns resultados de funções ímpares e pares também serão lembrados, a fim de facilitar futuros cálculos.

Logo após, será feita uma breve introdução sobre a importância da transformada de Fourier, seguindo de sua definição. A Transformada exibe uma característica própria para possuir função inversa. Nesse momento, essa característica será explorada.

O terceiro capítulo conta com uma aplicação da Transformada para imagens digitais. Aqui, será feita uma introdução sobre os fundamentos da imagem digital e alguns conceitos importantes, como o de amostragem e quantização e como é possível se representar imagens digitais. Também será citado o uso da transformada no processamento de imagens com exemplos práticos.

A metodologia utilizada é a de pesquisa bibliográfica, que será abordada em todos os capítulos do trabalho. O resultado será apresentado no capítulo de aplicações da Transformada de Fourier, não de maneira a parte, mas como comentários a cerca do processamento de imagens por meio da Transformada de Fourier.

Para finalizar, será feita uma conclusão com sugestões para futuros trabalhos, e apresentado as referências utilizadas no trabalho.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Investigar a condição para a existência da inversa da Transformada de Fourier.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Classificar algumas funções elementares quanto à existência da função inversa;
- Comparar condições para inversa de função;
- Aplicar a inversa de Fourier para imagens;

3 A INVERSA DE ALGUMAS FUNÇÕES ELEMENTARES

Entender o conceito de função inversa de algumas funções fundamentais é de suma importância para esse trabalho, mas antes é necessário estabelecer alguns breves conceitos, como o de função propriamente dito, além de funções: afim, quadráticas, polinomiais, logarítmicas e exponenciais.

3.1 FUNÇÕES

Segundo Lima (2006) (7), uma função possui três partes: Um conjunto A chamado de domínio da função, um conjunto B chamado de contradomínio e uma regra (lei de formação) que permite associar cada elemento do domínio a um único elemento do contradomínio. Dessa forma, se um elemento do domínio estiver associado a mais de um, ou a nenhum elemento do contradomínio, não é estabelecido uma função.

Iezzi (1977) (5) define uma função como: “Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma relação f de A em B ($f : A \rightarrow B$), recebe o nome de **função** (ou aplicação) de A em B se, e somente se, para todo $x \in A$, existe apenas um $y \in B$, tal que $(x, y) \in f$ ”. Ou seja:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

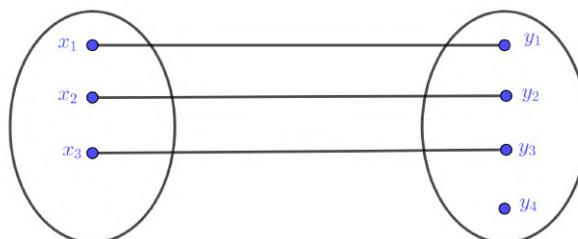
Com $x \in A$ e $f(x) = y \in B$.

É importante que o domínio, o contradomínio e a lei de formação estejam bem estabelecidos para que a função esteja bem definida, ou seja, para que não exista ambiguidade, para que não haja uma quebra na definição de função e para que a função faça sentido no ambiente estudado. Um exemplo disso é a função f , tal que $f(x) = \frac{1}{x}$, se o seu domínio e seu contradomínio forem estabelecidos como o conjunto \mathbb{R} , não existirá um valor definido para quando $x = 0$. Agora se o domínio for modificado para \mathbb{R}^* , a função estará bem definida, pois agora, o zero não fará parte do conjunto domínio.

Uma observação importante a se destacar é a diferença entre as notações f e $f(x)$. A primeira trata-se da função, enquanto a segunda é o valor que f assume em um determinado ponto x do seu domínio. Enquanto o símbolo f representa a função, $f(x)$ é chamada de **imagem da função**, onde para cada valor de x no domínio, irá corresponder a um valor $f(x)$ no contradomínio.

Segundo Lima (2022) (8), uma função ($f : A \rightarrow B$) é **injetiva** (ou biunívoca) quando dados quaisquer x_1, x_2 em A , se $f(x_1) = f(x_2)$, implica que $x_1 = x_2$, ou equivalentemente, se $x_1 \neq x_2$, implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$, como pode ser observado na Figura 1 abaixo:

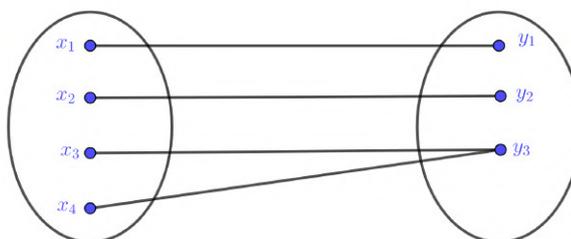
Figura 1 – Injetividade



Fonte: Autor

Uma função $(f : A \rightarrow B)$ é **sobrejetiva** quando para todo $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$, tal que $f(x) = y$, como mostra a Figura 2 abaixo:

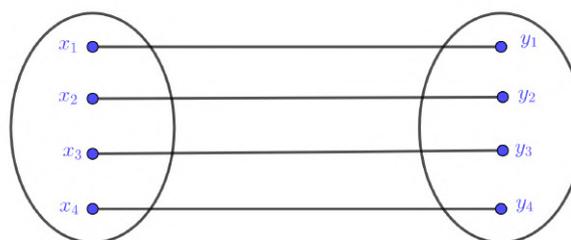
Figura 2 – Bijetividade



Fonte: Autor

Uma função $(f : A \rightarrow B)$ é **bijetiva** (ou correspondência biunívoca) se ela for injetiva e sobrejetiva simultaneamente, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Bijetividade



Fonte: Autor

Assim, considere a a função:

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto f(x) = x^2
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Da forma como o seu domínio e seu contradomínio estão definidos, essa função não se enquadra nem como injetiva, nem como sobrejetiva, pois ela não atende as definições

supracitadas para se classificar como um desses dois tipos. Tome por exemplo $y = -1$ que pertence ao contradomínio \mathbb{R} . Nenhum x pertencente ao domínio, tal que $f(x) = x^2 = -1$, logo, não pode ser classificada como sobrejetiva. Essa função também não é injetiva pois tomando por exemplo, $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$, temos que $f(x_1) = f(x_2) = 1$, embora $x_2 \neq x_1$. Se ela não é injetiva nem sobrejetiva, tão pouco poderia ser bijetiva.

Note que, é possível alterar o domínio dessa função para os reais não negativos. Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dessa forma, ao analisar, tem-se que a função é injetiva, pois dado $f(x_1) = f(x_2)$, implica que $x_1 = x_2$. Isso acontece porque houve um ajuste de domínio, logo, não existe a condição de tomar $x_1 \neq x_2$ no domínio de f , tais que $f(x_1) = f(x_2)$ diferentemente de [3.1](#). Contudo, a função definida desse modo ainda não é sobrejetiva, pelo mesmo motivo supracitado. Dessa forma, se ela não é sobrejetiva, igualmente não será bijetiva.

Já a função:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

É uma função sobrejetiva, pois todo $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$, tal que $f(x) = y$. Entretanto, ela não é injetiva pela mesma causa da função [3.1](#)

Agora, seja a função:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Desta forma, a função [3.4](#) é injetiva e sobrejetiva, pelo mesmo motivo de [3.2](#), e [3.3](#) logo ela é bijetiva. Note que, mudando o domínio de [3.1](#), temos [3.2](#), que é injetiva, e mudando o contradomínio de [3.2](#), temos [3.4](#), que é bijetiva. Do mesmo modo, é possível modificar o domínio e o contradomínio de algumas funções para torna-las bijetivas.

3.2 GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Maciel e Lima 2005 [\(9\)](#) fala que dados dois conjuntos A e B , podemos construir o produto cartesiano de A por B ($A \times B$), que é um novo conjunto cujo os elementos são os pares ordenados (a,b) , com a e b pertencentes a A e B respectivamente ou seja:

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ e } b \in B\}$$

O **gráfico da função** $f : A \rightarrow B$ é denotado pelo conjunto $G(f)$, que é o subconjunto de AXB , cuja a função é dada por:

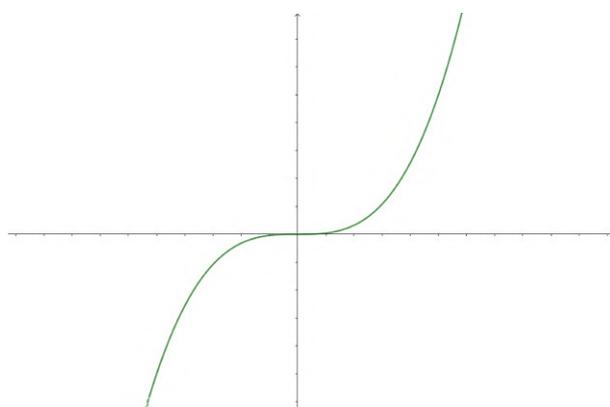
$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B; y = f(x)\} \quad (3.5)$$

O gráfico da função cúbica definida como:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^3 \end{aligned}$$

Pode ser representado como a Figura 4 abaixo:

Figura 4 – Representação do Gráfico da Função Cúbica



Fonte: Autor

3.3 FUNÇÃO INVERSA

Segundo Lima (2022) (8), sendo $f : A \rightarrow B$ uma função e Y um subconjunto não vazio de B , chama-se de **imagem inversa** de Y por a função denotada por $f^{-1}(Y)$, o subconjunto de A definido por

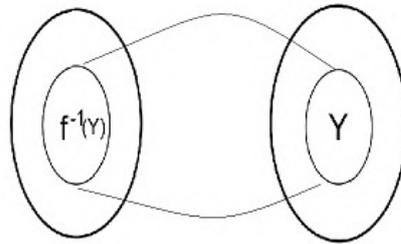
$$f^{-1}(Y) = \{x \in A; f(x) \in Y\}$$

Como mostrado na Figura 5:

Se $f : A \rightarrow B$ é uma bijeção, então temos uma **função inversa** de f bem definida, que segundo Maciel e Lima (2005) (9), é denotada por f^{-1} , com B sendo seu domínio, A seu contradomínio e a função inversa associando cada y pertencente a B a um único x pertencente a A , de modo que $f(x) = y$ e $f^{-1}(y) = x$. É importante ressaltar que nem todos os autores denotam a inversa de uma função f como f^{-1} , as vezes pode ser denotada por g , h , j e entre outros.

De acordo com Iezzi (1997) (5), se f é uma função bijetora, a relação (lei de formação) inversa de $f : A \rightarrow B$, será a função $f^{-1} : B \rightarrow A$.

Figura 5 – Imagem Inversa

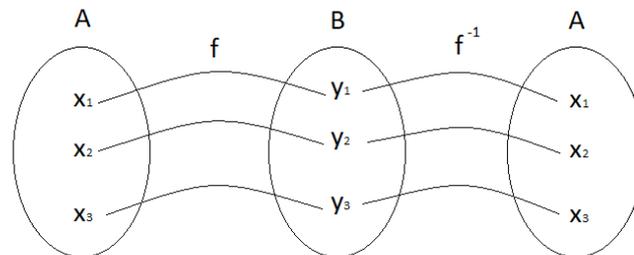


Fonte: Autor

Para um melhor entendimento, imagine que a função f seja o comando de arrumar a casa, o seu inverso, f^{-1} , seria o comando de desarrumar a casa. Note, que no primeiro caso estamos saindo de uma casa desarrumada (domínio), para uma casa arrumada (contradomínio), já na função inversa, estamos saindo de uma casa arrumada (domínio), para uma casa desarrumada (contradomínio).

Observe que quando utilizados a função e sua inversa consecutivamente, estar se trabalhando com a composição de funções, pois a priori, quando trabalhado com f , saí de A para B , e quando trata se de f^{-1} , saí-se de B para A . Dessa forma temos: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, para todo x , como mostrado na Figura 6.

Figura 6 – Função Inversa



Fonte: Autor

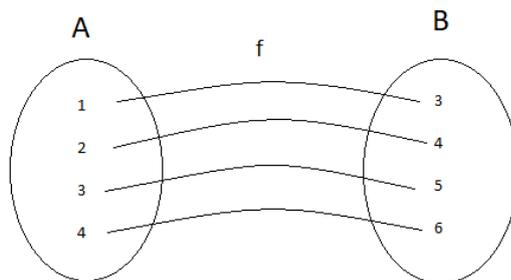
Tendo isso como base, será mostrado agora o processo de cálculo da função inversa de $f : A \rightarrow B$, admitindo que f seja bijetiva: Primeiro, troca-se o x por y e vice-versa, pois inicialmente, tinha-se uma função que associava um x à um y , agora, na função inversa, tem-se uma função que associa um y a um x . E logo depois, isola-se o y . Um exemplo é a função $f : A \rightarrow B$ tal que:

$$y = x + 2 \tag{3.6}$$

Com $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$, que pode ser representado pelo diagrama mostrado na Imagem 7.

¹ Esse algoritmo irá ser útil com a comparação da inversa da Transformada de Fourier

Figura 7 – Exemplo de Função



Fonte: Autor

A inversa da Função 3.6 é a função $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que:

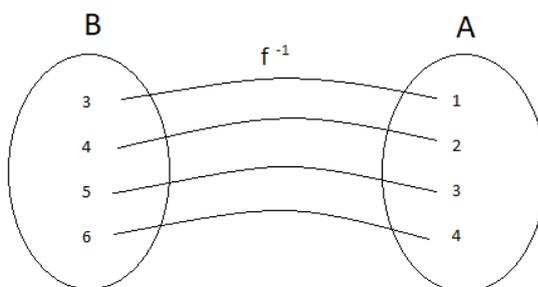
$$y = x - 2 \tag{3.7}$$

Pois, quando fazemos a substituição em 3.6 tem-se:

$$\begin{aligned} x &= y + 2 \\ x - 2 &= y \end{aligned}$$

Sua representação pode ser vista na Figura 8.

Figura 8 – Exemplo de Função Inversa



Fonte: Autor

Note que 3.7 “fez o oposto” de 3.6, enquanto a primeira função estava somando duas unidades à cada cada x pertencente ao domínio, a segunda função subtraiu duas unidades à cada cada x pertencente ao domínio.

Se uma função f admite inversa e se for possível esboçar seu gráfico, os gráficos da função f e da sua inversa f^{-1} apresentam uma característica peculiar, eles são simétricos com relação à reta bissetriz dos quadrantes ímpares. Em f^{-1} o que era domínio vira contradomínio, e o que era contradomínio vira domínio, o que causa uma simetria pelo eixo da função f com sua inversa. Alguns exemplos serão dados posteriormente.

É válido lembrar que o gráfico de f é dado por 3.5, e o gráfico da função inversa f^{-1} é, segundo Iezzi (1977) (5), dado por:

$$G'(f^{-1}) = \{(y, x) \in B \times A; x = f(y)\} \quad (3.8)$$

Para provar essa simetria dos gráficos das funções, é necessário provar a simetria dos pontos $P(a, b)$ e $Q(b, a)$ em relação à reta r de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes 1 e 3). E para isso, é necessário provar que a reta que passa pelos pontos P e Q é perpendicular à reta r e que as distâncias dos pontos P e Q à reta r são iguais. Isso se dá porque segundo Lima 2006 (7), os pontos P e Q no plano são simétricos em relação a reta r , também no mesmo plano quando r é a mediatriz do seguimento \overline{PQ} .

De acordo com Iezzi (1977) (5) o ponto M , médio do segmento \overline{PQ} , tem coordenadas $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$, portanto M pertence à reta r . Tem-se que os pontos P e Q são equidistantes da reta r , pois M é ponto médio do segmento \overline{PQ} , isto é, $MP = MQ$, com $M \in r$.

Agora, é necessário provar que a reta \overline{PQ} é perpendicular à reta r . Para isso considere o ponto $R(c, c)$ da reta r , distinto de M . Deve-se provar que o triângulo PMR é retângulo em M .

Calculando a medida dos lados do triângulo PMR , é possível encontrar, segundo Iezzi (1977) (5):

$$\begin{aligned} PM^2 &= \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \\ MR^2 &= \left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 = 2\left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 \\ PR^2 &= (a-c)^2 + (b-c)^2 \end{aligned}$$

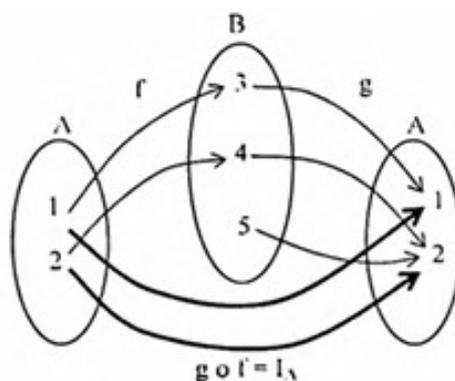
e observemos que:

$$\begin{aligned} PM^2 + MR^2 &= 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} - 2(a+b) \cdot c + 2c^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ac - 2bc + 2c^2 \\ &= (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) = \\ &= (a-c)^2 + (b-c)^2 = PR^2 \end{aligned}$$

3.3.1 Função Inversa à Esquerda

Oliveira e Pinheiro (2009) (11) define que a função $g : B \rightarrow A$ é uma função **inversa à esquerda** de f quando, para dado uma $f : A \rightarrow B$, $g \circ f = I_A$. Ou ainda, diz-se que f é invertível (ou inversível) à esquerda. Como mostrado no exemplo da Figura 9.

Figura 9 – Função Inversa à Esquerda

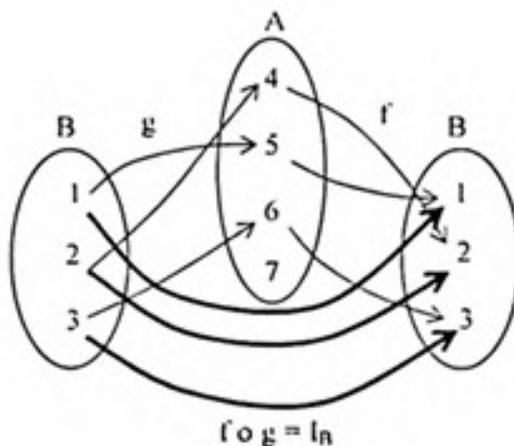


Fonte: Oliveira, Pinheiro 2009 (III)

3.3.2 Função Inversa à Direita

Oliveira e Pinheiro (2009) (III) também define que uma função $g : B \rightarrow A$ é uma **inversa à direita** de f quando, dada uma função $f : A \rightarrow B$, a composição $g \circ f$ resulta na função identidade I_B . Ou seja, diz-se que f é invertível (ou inversível) à direita, como ilustrado no exemplo da Figura 10.

Figura 10 – Função Inversa à Direita



Fonte: Oliveira, Pinheiro 2009 (III)

3.3.3 Função Afim

Uma função f é dita **afim** quando:

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto f(x) = ax + b
 \end{aligned}$$

Com $0 \neq a, b \in \mathbb{R}$.

O gráfico da função afim é uma reta, como pode ser visto na Figura [11](#) abaixo.

Alguns exemplos são as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo:

1. $y = f(x) = 2x - 2$

2. $y = f(x) = 5x$

3. $y = f(x) = \frac{2x}{5}$

O processo para encontrar a inversa da função afim já foi supracitado. No ensino básico, as funções afins não constantes são sempre invertíveis quando definidas sobre \mathbb{R} , mas é importante sempre verificar se a função está bem definida no contexto do problema.

Dessa forma calculando as inversas das funções acima, tem-se respectivamente:

1. $x = 2y - 2$

$$y = \frac{x + 2}{2}$$

2. $x = 5y$

$$y = \frac{x}{5}$$

3. $x = \frac{2y}{5}$

$$y = \frac{5x}{2}$$

De forma geral, para encontrar a inversa da função afim, primeiro é feito a troca de y por x e x por y :

$$x = ay + b$$

Agora, isolando o y tem-se:

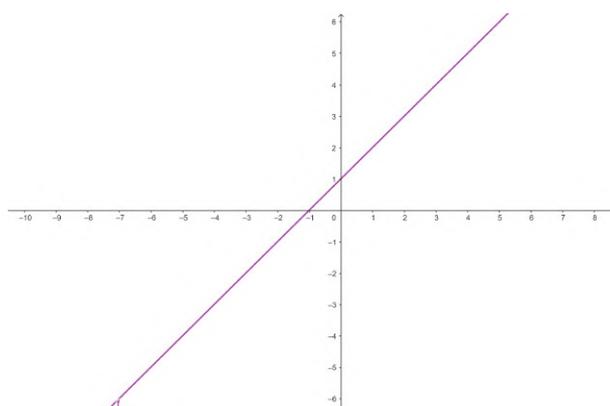
$$x = ay + b$$

$$ay = x - b$$

$$y = \frac{x - b}{a}$$

Graficamente falando, tem-se a representação da função afim como mostrado na Figura [11](#):

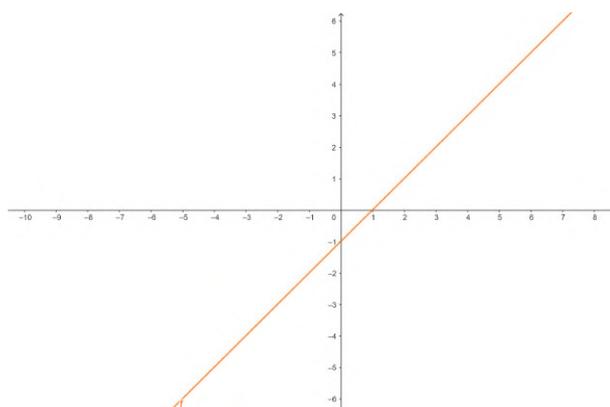
Figura 11 – Função Afim



Fonte: Autor

Por outro lado, tem-se a função afim inversa, que pode ser representada graficamente como a Figura 12:

Figura 12 – Função Afim Inversa



Fonte: Autor

Note que ambos os gráficos possuem simetria com relação a origem, como dito anteriormente.

3.3.4 Função Quadrática

Uma função f chama-se **quadrática** (ou função polinomial do segundo grau), quando:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Com $0 \neq a, b, c \in \mathbb{R}$.

Alguns exemplos são as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo:

1. $y = f(x) = x^2$

$$2. y = f(x) = 2x^2 + 1$$

$$3. y = f(x) = x^2 + 2x - 4$$

Para encontrar a função inversa de uma função quadrática é necessário, primeiro, verificar seu domínio, pois uma função só tem inversa se for bijetiva. As funções acima, da forma que foram definidas, não são bijetivas. Entretanto, se seu domínio e contradomínio for definido apenas nos reais não negativos ou nos reais não positivos (dependendo da lei de formação), encontra-se a bijetividade [\[2\]](#). Assim sendo:

Sejam as funções $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ abaixo:

$$1. y = f(x) = x^2$$

$$2. y = f(x) = 2x^2$$

Por serem bijetivas, as inversas da função acima, são respectivamente funções $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que:

$$1. y = f(x) = \sqrt{x}$$

$$2. y = f(x) = \frac{\sqrt{2x}}{2}$$

De maneira geral, para encontrar a inversa de uma função quadrática bijetora, tomando por exemplo, o domínio e o contradomínio como sendo os reais não negativos, primeiro elas são reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= ay^2 + by + c \\ ay^2 + by &= x - c \end{aligned} \tag{3.9}$$

Agora, para isolarmos o y , utilizaremos completamento de quadrados para transformar o primeiro membro da equação em um trinômio quadrado perfeito, e escrever como um produto notável, ou seja na forma:

$$k^2 + 2kw + w^2 = (k + w)^2$$

Note que o ay^2 faz o papel de k^2 , mas para funcionar, a precisa ser maior que zero. Assim, substituindo temos:

$$\begin{aligned} k^2 &= ay^2 \\ k &= \sqrt{ay^2} \\ k &= \sqrt{a}y \end{aligned}$$

² É importante ressaltar que quando se trabalha nos reais não positivos ou nos reais não negativos, a bijetividade pode não ocorrer. Por exemplo exemplo, em $f(x) = x^2$, mesmo sendo definida como $f : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^-$, ela nem sequer é função.

Nesse caso, entra outra restrição, pois como o domínio e o contradomínio pertencem aos reais não negativos, logo y também precisa ser maior que zero. Já o by faz o papel de $2kw$. Assim:

$$\begin{aligned} 2kw &= by \\ 2\sqrt{ay}w &= by \\ w &= \frac{by}{2\sqrt{ay}} \\ w &= \frac{b}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

E por fim, temos o w^2 . Dessa forma, é necessário adicioná-lo em [3.9](#) para ter-se um trinômio quadrado perfeito. Logo:

$$w^2 = \left(\frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2$$

Adicionando a [3.9](#), tem-se:

$$ay^2 + by + \left(\frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 = x - c + \left(\frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2$$

Agora, é possível reescrever toda a expressão como:

$$\left(\sqrt{ay} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 = x - c + \left(\frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2$$

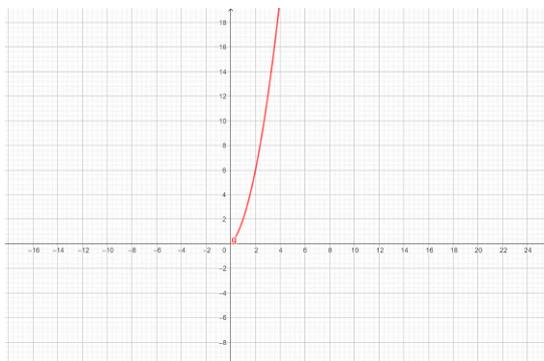
Agora, é necessário realizar algumas manipulações algébricas para encontrar o valor de y :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{ay} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right) &= \sqrt{x - c + \left(\frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2} \\ \sqrt{ay} &= \sqrt{x - c + \left(\frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2} - \frac{b}{2\sqrt{a}} \\ y &= \frac{\sqrt{x - c + \left(\frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2} - \frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{a}} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dessa forma, pode-se concluir que [3.10](#) é a função inversa de uma função quadrática bijetora que tem por domínio e contradomínio o conjunto dos números reais não negativos. O processo é análogo para outros conjuntos de domínio e contradomínio desde que suas restrições sejam respeitadas e que a função seja bijetiva.

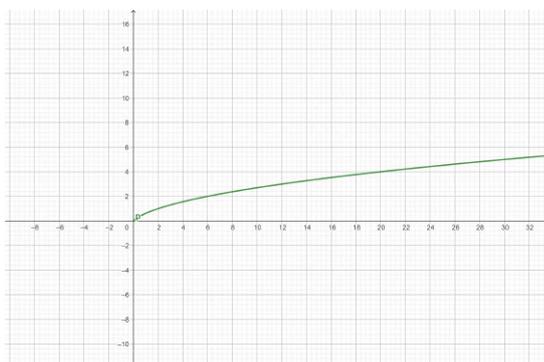
De maneira geral, temos os gráficos das funções f quadráticas e das funções f^{-1} , as quais $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, podendo ser representados pelas Figuras 13 e 14:

Figura 13 – Função Quadrática



Fonte: Autor

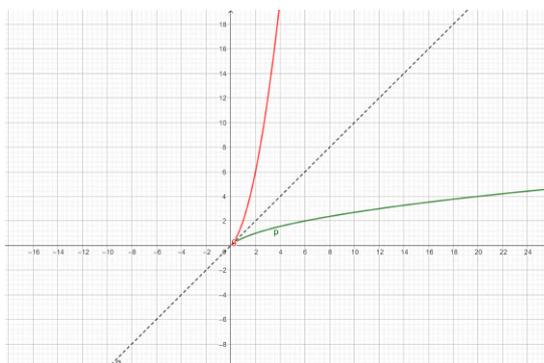
Figura 14 – Função Quadrática Inversa



Fonte: Autor

Note, que ambas as funções são simétricas em relação a origem, como mostra a Figura 15 abaixo:

Figura 15 – Simetria entre as funções



Fonte: Autor

3.3.5 Função Exponencial e Logarítmica

Uma função f chama-se **função exponencial**, quando:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto f(x) = a^x \end{aligned}$$

Com $0 < a \neq 1 \in \mathbb{R}$.

Alguns exemplos são as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que:

1. $y = f(x) = 2^x$
2. $y = f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$
3. $y = f(x) = (\sqrt{2})^x$

O inverso da função exponencial é a função logarítmica, pois, por meio de como os domínios e os contradomínios são definidos, tem-se a bijetividade. Uma função g chama-se **função logarítmica** quando:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \log_a x \end{aligned}$$

Com $0 > a \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Alguns exemplos são as funções $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, tais que:

1. $y = f(x) = \log_2 x$
2. $y = f(x) = \log_{\left(\frac{3}{5}\right)} x$
3. $y = f(x) = \log_{(\sqrt{2})} x$

Essas funções são, respectivamente, as inversas das funções exponenciais dos exemplos anteriores. De maneira geral, para encontrar a inversa de uma função exponencial do tipo $y = a^x$, primeiro, repetimos o mesmo passo que usamos nas funções anteriores. Dessa forma:

$$x = a^y \tag{3.11}$$

Pela definição de logaritmo, temos:

$$\log_m j = n \Leftrightarrow m^n = j \tag{3.12}$$

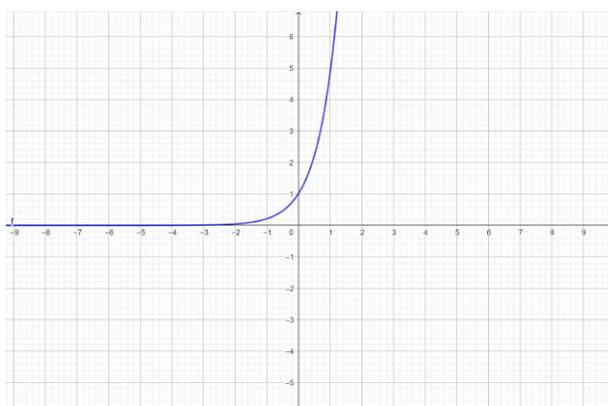
Com $m \neq 1$ e $0 < m, j \in \mathbb{R}$. Perceba a semelhança de 3.11 com a definição presente na equação 3.12, onde o a faz o papel do m , o y faz o papel do n e x faz o papel do j . Dessa forma, reescrevendo 3.11, tem-se:

$$y = \log_a x \quad (3.13)$$

Onde é possível concluir que 3.13 é a função inversa da função exponencial.

Graficamente falando, temos a representação da função exponencial como mostrado na Figura 16:

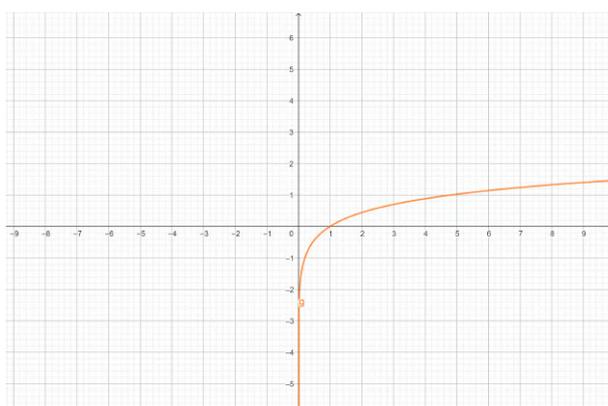
Figura 16 – Função Exponencial



Fonte: Autor

De maneira geral, o comportamento do gráfico de uma função logarítmica pode ser representado pela Figura 17 abaixo:

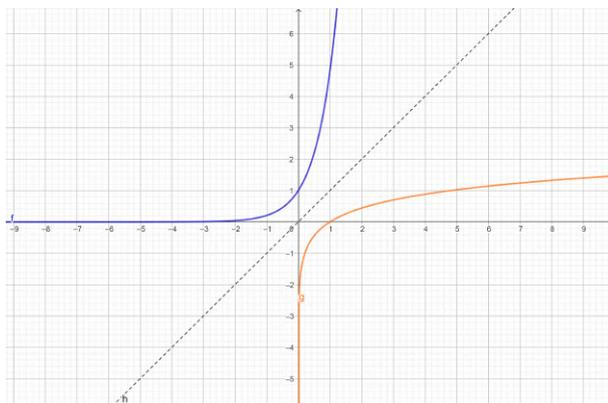
Figura 17 – Função Logarítmica



Fonte: Autor

Note, que ambas as funções são simétricas com relação a origem, como mostrado na Figura 18 abaixo:

Figura 18 – Função Logarítmica e Função Inversa



Fonte: Autor

Ao fim desta seção notamos duas caracterizações marcantes das funções que admitem inversa:

- a. a composição de uma função com a sua inversa resulta da identidade;
- b. quando possível esboçar o gráfico da função e da sua inversa eles se caracterizam pela simetria com relação à reta bisetriz dos quadrantes ímpares.

Estas são características apresentadas em livros do ensino básico, comumente em tópicos do primeiro ano do ensino médio que podem ser ampliadas para quando análises de curvas forem abordadas em outros conteúdos. Para além do ensino básico, é de extrema relevância que o aluno que ingressa em cursos superiores de exatas carregue esse conhecimento prévio, pois nos cursos de cálculo e correlatos tais habilidades são bastante requisitadas e ampliadas pelos resultados matemáticos inerentes a estes cursos. É notória a importância da abordagem e reforço destes resultados em diversos momentos da formação matemática do aluno.

4 FOURIER: SÉRIE, TRANSFORMADA E ALGUNS RESULTADOS

Nesta seção abordaremos alguns elementos relativos à análise de Fourier com o intuito de comparar - entre as funções elementares e as funções que admitem Fourier - as condições que garantem matematicamente que dada uma função é possível obter a sua inversa, neste caso, a transformada inversa de Fourier.

A Série de Fourier trata-se de uma série trigonométrica utilizada para representar funções infinitas e periódicas sofisticadas na forma de funções trigonométricas simples de senos e cossenos, o que facilita a sua visualização e manipulação. Ela é utilizada para manipular e resolver vários problemas, principalmente nos problemas de caráter periódico.

A Série de Fourier é utilizada para funções periódicas, que nesse caso devemos responder para quais funções podemos expressar na forma:

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right)$$

4.1 FUNÇÕES PERIÓDICAS

Funções periódicas representam uma tipologia de funções que são matematicamente definidas por sua repetição em intervalos regulares ao longo da variável independente, apresentando um período constante. Essas funções são essenciais na representação e previsão de comportamentos cíclicos em sistemas físicos, biológicos e sociais. No século XIX, o matemático Jean Baptiste Joseph Fourier encontrou uma forma de decompor algumas dessas funções em séries trigonométricas convergentes, conhecidas como séries de Fourier. A Série de Fourier é uma série trigonométrica. Dessa forma, é de suma importância se fazer um estudo individual sobre funções periódicas.

Matematicamente falando, Figueiredo (1977) [\(3\)](#) diz que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **periódica** de período nT se $f(x + T) = f(x)$ e o menor período positivo é chamado de **período fundamental**.

Como por exemplo, podemos determinar o período da função $f(x) = \sen \frac{n\pi x}{L}$ da seguinte forma:

$$\sen \frac{n\pi(x + T)}{L} = \sen \frac{n\pi x}{L}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

Note que, o lado esquerdo de [4.1](#) pode ser reescrito como:

$$\sen \frac{n\pi(x + T)}{L} = \sen \frac{n\pi x + n\pi T}{L} = \sen \left(\left(\frac{n\pi x}{L} \right) + \left(\frac{n\pi T}{L} \right) \right)$$

Ou seja: $\sen(a + b)$. Desse modo, podemos utilizar a transformação trigonométrica $\sen(a + b) = \sen a \cos b + \cos a \sen b$. Daí, reorganizando e substituindo em [4.1](#), temos:

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi T}{L} + \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi T}{L} = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Assim, para $x = \frac{L}{2n}$, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{n\pi \frac{L}{2n}}{L} \cos \frac{n\pi T}{L} + \cos \frac{n\pi \frac{L}{2n}}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi T}{L} &= \operatorname{sen} \frac{n\pi \frac{L}{2n}}{L} \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi T}{L} + \cos \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi T}{L} &= \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \\ 1 \cdot \cos \frac{n\pi T}{L} + 0 \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi T}{L} &= 1 \end{aligned}$$

O que implica em $\cos \frac{n\pi t}{L} = 1$ e $\operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} = 0$, por meio da identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. Dessa forma:

$$\begin{aligned} \cos \frac{n\pi t}{L} &= 1 & \text{e} & & \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} &= 0 \\ \frac{n\pi t}{L} &= 2\pi & & & \frac{n\pi t}{L} &= 2\pi \end{aligned}$$

Como se quer o período fundamental que satisfaça as equações, temos:

$$\begin{aligned} 2\pi L &= n\pi t \\ t &= \frac{2L}{n} \end{aligned}$$

4.2 CONVERGÊNCIA DE SÉRIES

Figueiredo (1977) [\(3\)](#), define uma série como a soma de termos de uma sequência (a_n) . A série converge, se suas somas parciais [\(4\)](#) também convergirem, ou palavras de Figueiredo:

Uma série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se a sucessão das reduzidas, também chamadas de somas parciais, converge. Lembremos que a sucessão das reduzidas é aquela cujo termo geral é

$$A_n = \sum_{j=1}^n a_j \quad (\text{reduzida de ordem } n).$$

Como o presente trabalho trata com a Série de Fourier, é válido lembrar alguns resultados sobre convergência de série:

¹ Aqui, será admitido que o leitor já tem familiaridade com o tema, entretanto, o livro de Cálculo de James Stewart é uma sugestão para quem quiser se aprofundar na temática.

4.2.1 Série Geométrica

Dado um $k \in \mathbb{N}$ e um $r \in \mathbb{R}$, **uma série geométrica** é definida como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

E se $|r| < 1$, ou seja, se $-1 < r < 1$, a série **converge**, caso contrário, a série **diverge**.

4.2.2 P-Série

Dado um $n \in \mathbb{N}$ e um $p \in \mathbb{R}$, uma **p-série** é definida como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Nesse caso, se $p > 1$ a série **converge**, se $0 < p < 1$, a série **diverge**, e se $p = 1$, tem-se um caso particular, onde a série agora pode ser chamada de **Série Harmônica**, a qual **diverge**.

4.3 COEFICIENTES DE FOURIER

Os coeficientes a_0 , a_n e b_n de Fourier são primordiais nesta teoria, pois eles determinam completamente a função modelada pela série de Fourier associada, isto é, se temos os coeficientes, temos a série e conseqüentemente a função em questão.

Assim, nesta seção o ponto principal será a determinação das expressões para os coeficientes de Fourier. Note que estamos trabalhando até o momento com uma função do tipo:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (4.2)$$

Os termos a_0 , a_n e b_n são chamados de **coeficientes de Fourier**. O seu cálculo é necessário para ter uma modelagem de problema mais preciso.

Dessa forma, Figueiredo (1977) (3) afirma que é possível expressar os coeficientes a_0 , a_n e b_n em função de f . Dessa forma, para o coeficiente a_0 , primeiramente integra-se 4.2. Assim:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sen \frac{n\pi x}{L} dx \right) \quad (4.3)$$

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2}a_0(2L) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n 0 + b_n 0) \quad (4.4)$$

$$\int_{-L}^L f(x) dx = L a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

Note que para a passagem de [4.3](#) para [4.4](#), foi preciso resolver uma integral de cosseno e uma de seno. Assim:

$$\begin{aligned} \text{Para: } \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx & \quad u = \frac{n\pi x}{L} \quad du = \frac{n\pi}{L} dx \quad \Rightarrow dx = \frac{L}{n\pi} du \\ \int_{-L}^L \cos(u) \cdot du & = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \frac{L}{n\pi} \Big|_{-L}^L = \left[\left(\text{sen} \frac{Ln\pi}{L} \right) - \left(\text{sen} -\frac{Ln\pi}{L} \right) \right] \cdot \frac{L}{n\pi} \\ (\text{sen}(n\pi) - \text{sen}(-n\pi)) \cdot \frac{L}{n\pi} & = 0 \cdot \frac{L}{n\pi} = 0 \\ \text{Para: } \int_{-L}^L \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx & \quad u = \frac{n\pi x}{L} \quad du = \frac{n\pi}{L} dx \quad \Rightarrow dx = \frac{L}{n\pi} du \\ \int_{-L}^L \text{sen } u \cdot du & = -\cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \frac{L}{n\pi} \Big|_{-L}^L = \frac{L}{n\pi} \left(-\cos \frac{n\pi L}{L} - \left(-\cos \frac{n\pi L}{L} \right) \right) = \\ \frac{L}{n\pi} \cdot 0 & = 0 \end{aligned}$$

Note que, para todo n natural, o valor do $\text{sen}(n\pi)$ é zero. O mesmo é válido para o $\text{sen}(-n\pi)$. Já para a integral definida do seno, o seu valor é zero, pois se trata de uma função ímpar (trataremos com mais detalhes nas próximas subseções).

Para os demais coeficientes, deve-se ter conhecimento com algumas relações de ortogonalidade, sendo elas:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \quad \text{se } n, m \geq 1 \quad (4.5)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\int_{-L}^L \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

Utilizar-se-a a identidade trigonométrica $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$ para provar o caso [4.6](#). Logo:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{m\pi x}{L} \right) + \cos \left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{m\pi x}{L} \right) \right) dx & = \\ \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(\cos \left(\frac{(n-m)\pi x}{L} \right) + \int_{-L}^L \cos \left(\frac{(n+m)\pi x}{L} \right) \right) dx & \quad (4.8) \end{aligned}$$

Note que, para $m \neq n$, é preciso resolver do lado direito, duas integrais de cosseno, assim:

$$\text{Para } \int_{-L}^L \left(\cos \left(\frac{(n-m)\pi x}{L} \right) \right) dx, \text{ fazemos } u = \frac{(n-m)\pi x}{L} \text{ e } dx = \frac{L}{(n-m)\pi} du$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos u du &= \left(\operatorname{sen} \frac{(n-m)\pi x}{L} \right) \cdot \frac{L}{(n-m)\pi} \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{L}{(n-m)\pi} (\operatorname{sen}(n-m)\pi + \operatorname{sen}(n-m)\pi) \\ &= \frac{L}{(n-m)\pi} (2 \operatorname{sen}(n-m)\pi) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Agora, para $\int_{-L}^L \cos \left(\frac{(n+m)\pi x}{L} \right) dx$, fazemos $u = \frac{(n+m)\pi x}{L}$ e $dx = \frac{L}{(n+m)\pi} du$

Substituindo:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos u du &= \left(\operatorname{sen} \frac{(n+m)\pi x}{L} \right) \cdot \frac{L}{(n+m)\pi} \Big|_{-L}^L = \frac{L}{(n+m)\pi} (\operatorname{sen}(n+m)\pi + \operatorname{sen}(n+m)\pi) \\ &= \frac{L}{(n+m)\pi} (2 \operatorname{sen}(n+m)\pi) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Agora, substituindo [4.9](#) e [4.10](#) em [4.8](#), temos:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left\{ \frac{L}{(n-m)\pi} (2 \operatorname{sen}(n-m)\pi) + \frac{L}{(n+m)\pi} (2 \operatorname{sen}(n+m)\pi) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2L}{(n-m)\pi} [\operatorname{sen}(n-m)\pi] + \frac{2L}{(n+m)\pi} [2 \operatorname{sen}(n+m)\pi] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2L}{(n-m)\pi} [0] + \frac{2L}{(n+m)\pi} [0] \right\} = 0 \end{aligned}$$

Já para $n = m$, partindo de [4.8](#), temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\int_{-L}^L \cos 0 + \int_{-L}^L \cos \left(\frac{2n\pi x}{L} \right) \right) &= \frac{1}{2} \left([x] \Big|_{-L}^L + \left[\left(\operatorname{sen} \left(\frac{2n\pi x}{L} \right) \right) \cdot \left(\frac{L}{2n\pi} \right) \right] \Big|_{-L}^L \right) \\ &= \frac{1}{2} \left([L - (-L)] + \left(\frac{L}{2n\pi} (2 \operatorname{sen}(2n\pi)) \right) \right) = L \end{aligned}$$

Por sua vez, para calcular o coeficiente a_n , segundo Figueiredo (1977) [\(3\)](#), primeiro multiplica-se a equação [4.2](#) por $\cos \frac{n\pi x}{L}$, dessa forma, tem-se:

$$f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2} a_0 \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Integrando, tem-se:

$$\int_{-L}^L f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx =$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right) \quad (4.11)$$

Para $\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0$ (o cálculo já foi explicado anteriormente). Para $\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx$, tem a relação de ortogonalidade [4.6](#), para o caso de $n = m$, assim sendo:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx = L$$

Agora para $\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ tem o caso de ortogonalidade [4.5](#). Logo:

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

Substituindo os cálculos em [4.11](#), tem-se:

$$\int_{-L}^L f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{a_0}{2} \cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot L + b_n \cdot 0) \quad (4.12)$$

$$\int_{-L}^L f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx = a_n \cdot L$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (4.13)$$

Dadas as relações de ortogonalidade todas as parcelas do lado direito de [4.12](#) são nulas exceto para $m = n$, portanto temos como resultado a Equação em [4.13](#)

Finalmente, para o coeficiente b_n , multiplica-se a equação [4.2](#) por $\sin \frac{n\pi x}{L}$ e integra-se. Assim:

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \\ & = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para $\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx$, tem-se o caso de ortogonalidade [4.7](#), com $n = m$, logo:

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = L$$

O cálculo das outras integrais presentes em [4.14](#) já foram resolvidas anteriormente. Dessa forma, é possível reescrever [4.14](#) como:

$$\int_{-L}^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{a_0}{2} \cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot 0 + b_n \cdot L) \quad (4.15)$$

$$\int_{-L}^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx = b_n \cdot L$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (4.16)$$

Dadas as relações de ortogonalidade todas as parcelas do lado direito de [4.15](#) são nulas exceto para $m = n$, portanto temos como resultado a Equação em [4.16](#)

4.4 SÉRIE DE FOURIER

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável (ou diferenciável por partes) se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua.

O **Teorema de Fourier** diz que:

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f ,

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Converge em cada ponto x .

4.4.1 A série de Fourier de Funções Ímpares e Pares

Uma função é dita **par** se $f(x) = f(-x)$. Uma função é dita **ímpar** se $f(x) = -f(-x)$. É importante destacar algumas propriedades de funções pares e ímpares já estudadas em algumas literaturas. Figueiredo (1977) [\(3\)](#) descreve algumas como:

- I) A soma de duas funções pares é par, a soma de duas funções ímpares é ímpar;
- II) O produto de duas funções pares é par;
- III) O produto de duas funções ímpares é par;
- IV) O produto de uma função par e uma função ímpar é ímpar.

Como consequência das propriedades anteriores, segue que:

- 1) Se f é par então:

$$\int_{-L}^L f = 2 \int_0^L f$$

- 2) Se f é ímpar, então:

$$\int_{-L}^L f = 0.$$

Para provar o 1), basta fazer:

$$\int_{-L}^L f = \int_{-L}^0 f + \int_0^L f = 2 \int_0^L f.$$

Isso é possível porque em uma função par $f(-x) = f(x)$, dessa forma, $\int_{-L}^0 f = \int_0^L f$. Já para 2), temos que $f(-x) = -f(x)$, o que implica em $\int_{-L}^0 f = -\int_0^L f$, assim:

$$\int_{-L}^L f = -\int_0^L f + \int_0^L f = 0$$

Note que os coeficientes a_n e b_n da Série de Fourier, são da forma:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \text{ e } b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Se $f(x)$ for par, $f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ também o será, pois o produto de funções pares, é uma função par. De maneira análoga, temos que $f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é ímpar, pois o produto de uma função par por uma ímpar é ímpar. Logo:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \text{ e } b_n = 0$$

Agora, se $f(x)$ for ímpar, $f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ também o será, pois é um produto de uma função par por uma ímpar. Da mesma forma $f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é par por ser o produto de duas funções ímpares. Com isso:

$$a_n = 0 \text{ e } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

No primeiro caso, temos a Série de Fourier como uma série de cossenos, e no segundo caso, como uma série de senos.

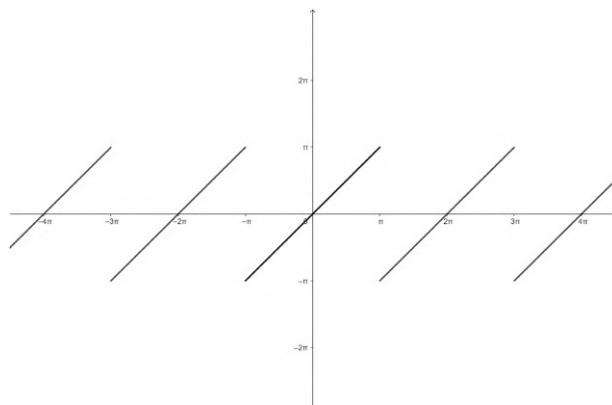
4.4.2 Cálculo de algumas séries de Fourier

Um exemplo de utilização dos coeficientes, é para calcular a representação em Série de Fourier da função da onda dente de serra, com $L = \pi$, e sua forma analítica é dada por:

$$f(x) = x, \text{ com } -\pi \leq x < \pi \text{ e } f(x + 2\pi) = f(x)$$

Como é mostrado na Figura 19 abaixo:

Figura 19 – Função Dente de Serra



Fonte: Autor

Como a função apresenta uma simetria ímpar, tem-se que os coeficientes a_0 e a_n são iguais a 0, com base no resultado do capítulo anterior. Então deve-se determinar apenas o coeficiente b_n . Assim, substituindo em [4.16](#), encontra-se:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x) \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x) \cdot \operatorname{sen} nx dx \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x) \cdot \operatorname{sen} nx dx \end{aligned} \tag{4.17}$$

Houve uma mudança nos limites de integração porque a função seno e a função x são funções ímpares, e o produto de duas funções ímpares é par, então é válido os resultados da seção anterior sobre funções pares e ímpares. Disto, tem-se que $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, e fazendo $u = x$, $du = dx$, $dv = \operatorname{sen} nx$ e $v = \int \operatorname{sen}(nx) dx = -\frac{\cos nx}{n}$, obtem-se:

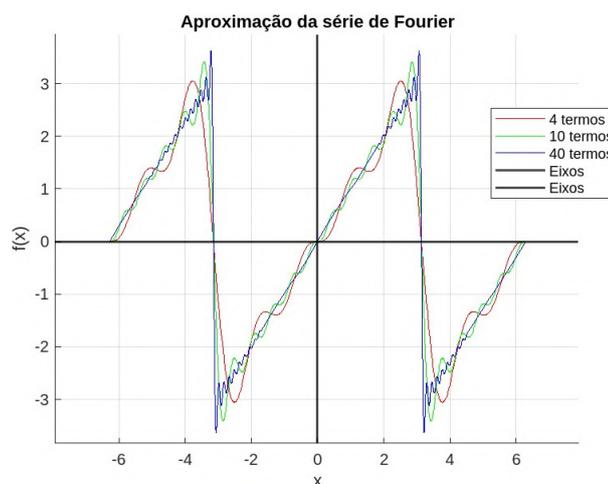
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left[x \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) - \int_0^{\pi} -\frac{\cos nx}{n} dx \right] \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{-x \cos nx}{n} + \frac{\operatorname{sen} nx}{x^2} \right) \Big|_0^{\pi} \right] \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{-x \cos nx}{n} + 0 \right) \Big|_0^{\pi} \right] \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{-\pi \cos n\pi}{n} \right) \\ b_n &= \frac{-2}{n} \cos n\pi \end{aligned}$$

Logo, a série de Fourier para esta função pode ser escrita como:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n} \cos n\pi$$

E seu gráfico pode ser representado como a Figura [20](#), onde quanto mais termos, melhor ficará sua aproximação.

Figura 20 – Série de Fourier da Função Dente de Serra



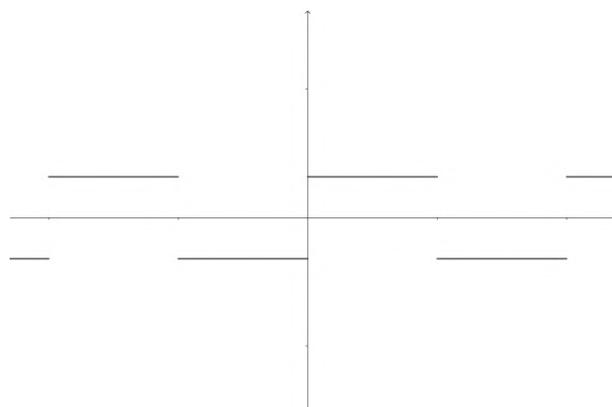
Fonte: Autor

Outro exemplo é a função de onda quadrada, expressa como:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{e} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

Que pode ser observada na Figura 21:

Figura 21 – Função Onda Quadrada



Fonte: Autor

Para o a_0 , tem-se:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -1 dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left((-x)|_{-\pi}^0 + (x)|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} [(0 - \pi) + (\pi - 0)] = \frac{1}{\pi} \cdot 0$$

$$a_0 = 0$$

Calculando-se o a_n :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-2}^2 f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx + \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx \right] \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\cos(nx) dx + \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right] \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left(\operatorname{sen}(nx) \right) \Big|_0^{\pi} \right] \\
a_n &= 0
\end{aligned}$$

Calculando-se o b_n :

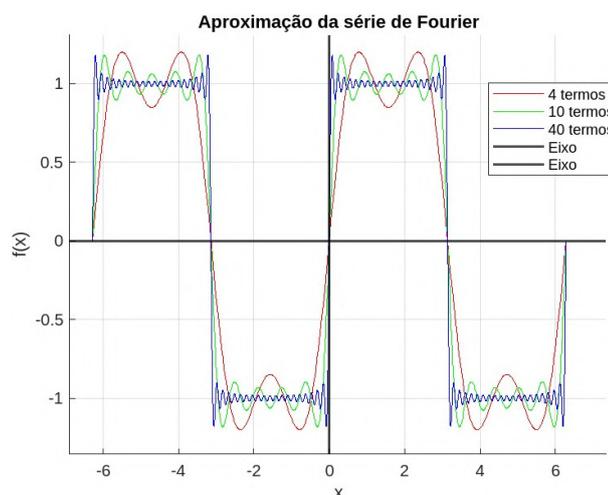
$$\begin{aligned}
bn &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\
bn &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\pi} dx \right] \\
bn &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\operatorname{sen} nx dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx dx \right] \\
bn &= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{1}{n} \cos(nx) \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right) \Big|_0^{\pi} \right] \\
bn &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \cos(n \cdot 0) - \frac{1}{n} \cos(n(-\pi)) + \left(\frac{-1}{n} \cos(n\pi) - \left(-\frac{1}{n} \cos n \cdot 0 \right) \right) \right] \\
bn &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos(-n\pi) - \frac{1}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n} \right] \\
bn &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{n} - \frac{2 \cos(n\pi)}{n} \right] \\
bn &= \frac{2 - 2 \cos(n\pi)}{n\pi}
\end{aligned}$$

Assim, sua série de Fourier pode ser escrita como:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2 \cos(n\pi)}{n\pi}$$

E o seu gráfico pode ser representado pela Figura [22](#) abaixo:

Figura 22 – Série de Fourier da Função de Onda Quadrada



Fonte: Autor

4.5 TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada de Fourier é muito útil quando relacionada a problemas que envolvem equações diferenciais parciais (EDP) dos tipos: vibração de cordas infinitas e semi-infinitas, problemas da condução do calor em barras infinitas e semi-infinitas e o problema de Dirichlet para a equação de Laplace em um semiplano [\[2\]](#). No entanto, neste trabalho, utilizaremos a transformada de Fourier para a filtragem ou mascaramento em processamento de imagens digitais o que será tratado no Capítulo [\[5\]](#).

De maneira geral, a Transformada de Fourier (TF) (utilizando a terminologia de sistemas), facilita a resolução de alguns problemas um pouco mais complexos. Suponha que temos uma função em um domínio onde sua manipulação é difícil. A TF funcionará como uma “máquina” (ferramenta matemática), a transformando em uma função correspondente após ser operada ou transformada. A esquematização pode ser encontrada na Figura [\[23\]](#).

Será utilizado daqui para frente a notação $F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$. Estes sistemas possuem três propriedades, segundo Figueiredo (1977) [\[3\]](#), entretanto, algumas delas são bastante direcionadas para EDPs, como a aplicação é no processamento de imagens então algumas delas serão apenas enunciadas para compor o formalismo teórico do trabalho, sendo elas:

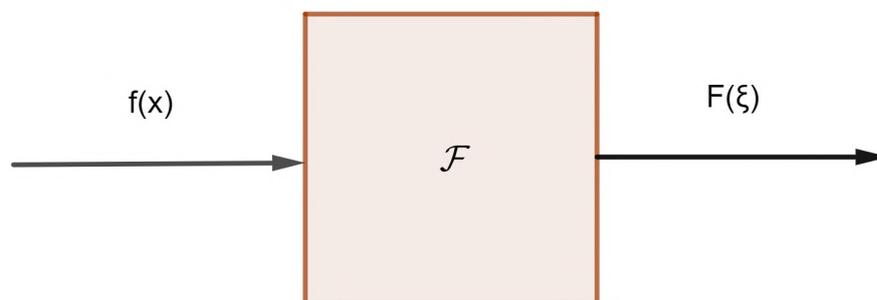
I) O sistema é linear, ou seja, é aditivo e homogêneo:

- $\mathcal{F}[f(x) + g(x)] = \mathcal{F}[f(x)] + \mathcal{F}[g(x)]$
- $\mathcal{F}[\alpha f(x)] = \alpha \mathcal{F}[f(x)]$

II) O sistema “destrói” derivadas. De acordo com Figueiredo (1977) [\[3\]](#):

² Para mais informações, consultar o material de Figueiredo 1977 [\[3\]](#)

Figura 23 – Esquematização da TF



Fonte: Autor

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, então $\mathcal{F}[D^n f] = (i\xi)^n \mathcal{F}[f]$,

III) O sistema é inversível: Se $F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$, então $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\xi)]$

4.5.1 Definição da Transformada de Fourier

Ao se trabalhar com a série de Fourier, é comum utilizar valores reais e valores complexos. Em primeiro momento será trabalhada a definição da transformada com valores reais como sendo:

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, define-se a **Transformada de Fourier** por:

$$F(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx \quad (4.18)$$

Note que em [4.18](#), tem-se uma integral imprópria, que é entendida como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-N}^M e^{-ix\xi} f(x) dx \quad (4.19)$$

Para que [4.19](#) esteja bem definida é necessário que:

I) f seja seccionalmente contínua em cada intervalo $[-M, N]$

II) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$

Essas condições implicam, respectivamente que a função é limitada e integrável, e que o limite existe.

Observe que, $\forall \epsilon > 0, \exists k > 0$ tal que:

$$\int_{|x|>k} |f(x)| dx < \epsilon$$

e

$$\left| \int_{|x|>k} e^{-ix\xi} f(x) dx \right| \leq \int_{|x|>k} |f(x)| dx$$

Abrangendo de forma mais geral uma classe de funções f , para qual a transformada de Fourier (4.18) está bem definida, temos:

O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que as integrais impróprias de f e $|f|$ existem é chamada de espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Cada função pertencente ao espaço é chamada de **função** $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (de agora em diante, será utilizada a notação \mathcal{L}^1). Para que isso ocorra, é necessário que f e $|f|$ sejam integráveis para todo intervalo $[-M, N]$ e que os limites abaixo existam:

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-N}^M f(x) dx$$

e

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-N}^M |f(x)| dx$$

Observe que se f for seccionalmente contínua em cada intervalo $[-M, N]$ e se o segundo limite existir, a função será \mathcal{L}^1 . É comum a utilização desse espaço pois a transformada resulta em algo com melhores propriedades, no entanto, é possível trabalhar com outras funções para quais a (4.18) converge.

Agora, para trabalhar com funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tome uma função f da forma $f(x) = u(x) + v(x)i$, onde u é a parte real da função e v é a parte imaginária. Então a sua integral será da forma:

$$\int f(x) = \int u(x) dx + i \int v(x) dx$$

Em (4.18), aparece o termo " $e^{-ix\xi}$ ", que pela fórmula de Euler, pode ser escrito da forma: $e^{-ix\xi} = \cos(\xi x) - i \sin(\xi x)$. E com isso tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\xi x) f(x) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\xi x) f(x) dx$$

Onde a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma \mathcal{L}^1 se $|f|$, a parte real e a parte imaginária (que são $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) forem \mathcal{L}^1 . Assim, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função \mathcal{L}^1 , a **transformada de Fourier é definida como:**

$$\mathcal{F}[f](\xi) \equiv F(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx \tag{4.20}$$

A transformada de Fourier é um **operador linear**, pois quando utilizada a propriedade aditiva e homogênea em conjunto, observa-se que:

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g]$$

Com f, g pertencentes a \mathcal{L}^1 , e α e β números complexos.

Note que a Transformada de Fourier é uma generalização da Série de Fourier (SF), pois está trata-se apenas de funções periódicas, já a TF trata-se de outras funções, não

necessariamente periódicas. Outra maneira de correlacionar a SF e a TF é fazendo uma analogia com seus coeficientes. Embora não apareçam de maneira explícita, tem-se que os coeficientes da SF são calculados de maneira discreta, e quando o período T tende ao infinito (vai tornando-se não periódico), a separação entre as frequências discretas da SF diminui, e a soma discreta dos coeficientes se aproxima de uma integral contínua. Esse processo leva naturalmente à definição da TF.

4.6 TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER

De acordo com Figueiredo (1977) (3), o espaço \mathcal{S} é um subconjunto de \mathcal{L}^1 , chamado de conjunto de funções de decaimento rápido. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função \mathcal{S} se for infinitamente diferenciável se $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n f(x) = 0$, para todo $m, n \geq 0$ pertencente aos inteiros.

Dessa forma, se a transformada de Fourier é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} F(\xi) d\xi \quad (4.21)$$

quando dada uma função de \mathcal{S} , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e sua transformada é definida por $F(\xi)$.

A fim de provas, seja um operador de \mathcal{S} em \mathcal{S} definido como:

$$\overline{\mathcal{F}}[g](s) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} g(t) dt$$

Pois segundo Figueiredo (1977) (3), ao aplicar-se o operado da seguinte forma:

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[f] = f, \quad f \in \mathcal{S} \quad (4.22)$$

Assim fica mostrada a injetividade, pois, ainda de acordo com Figueiredo (1977) (3), a transformada será injetiva se dado $\mathcal{F}[f_1] = \mathcal{F}[f_2]$, para duas funções f_1 e f_2 pertencentes a \mathcal{S} , $f_1 = f_2$, pela linearidade de \mathcal{F} (Propriedade I, citada acima). Em outras palavras, se $\mathcal{F}[f] = 0$, então $f = 0$.³

Para a TF ser sobrejetiva, significa que dada uma função $F(\xi)$ em \mathcal{S} , existe um $f(x)$ em \mathcal{S} , tal que $\mathcal{F}[f] = F$.

Para provar 4.21, é necessário substituir o $F(\xi)$ pela expressão que aparece em 4.20, e assim, segundo Figueiredo (1977) (3), tentar uma mudança de ordem de integração. Logo, tem-se:

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} (2\pi)^{-1/2} dy d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y) dy d\xi \quad (4.23)$$

Integrando 4.23 em relação a ξ e introduzindo o fator $e^{-\xi^2/n^2}$, com $n = 1, 2, 3, \dots$, tem-se:

³ Um operador linear será injetivo se, e só se, o nucelo for somente o vetor nulo

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{-\xi^2/n^2} dy d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y) dy d\xi \equiv f_n(x) \quad (4.24)$$

A Expressão 4.24 define uma função f_n , de \mathcal{S} , pois $e^{-\xi^2/n^2} \mathcal{F}[f]$ é uma função de \mathcal{S} e $f_n = \overline{\mathcal{F}}[e^{-\xi^2/n^2} \mathcal{F}[f]]$. A mudança na ordem de integração em 4.24 pode ser justificada pela aplicação da Proposição A6.11 do livro de Figueiredo (1977) (3) 4, pois, com $f(y, \xi) = e^{i(x-y)\xi} \times e^{-\xi^2/n^2} f(y)$, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y, \xi)| dy = e^{-\xi^2/n^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y, \xi)| d\xi = |f(y)| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/n^2} d\xi.$$

dai,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y, \xi)| dy d\xi < \infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y, \xi)| d\xi dy < \infty$$

Logo,

$$f_n(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi} e^{-\xi^2/n^2} d\xi dy.$$

Dessa forma, é possível calcular a integral interna de modo que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[(x-y)\xi] e^{-\xi^2/n^2} d\xi + i \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}[(x-y)\xi] e^{-\xi^2/n^2} d\xi &= \\ &= 2 \int_0^{\infty} \cos[(x-y)\xi] e^{-\xi^2/n^2} d\xi \end{aligned}$$

Usando a Relação (27) do Apêndice do capítulo 6 do livro de Figueiredo (1977) (3) 5, tem-se que a integral a cima é igual a

$$n\sqrt{\pi} e^{-(x-y)^2 n^2/4}.$$

Assim,

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-1} \pi^{-1/2} n e^{-(x-y)^2 n^2/4} f(y) dy$$

Com isso, tem-se que:

$$k_n(x) = 2^{-1} \pi^{-1/2} n e^{-x^2 n^2/4}$$

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x-y) f(y) dy.$$

⁴ A proposição fala que: seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que as integrais abaixo converjam

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy dx.$$

Então, as integrais iteradas da f convergem e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy.$$

⁵ A relação fala que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(x\xi) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}$

Agora é necessário mostrar que k_n é uma sucessão de núcleos de Dirac ⁶. Logo:

$$k_n(x) = nk(nx)$$

onde

$$k(x) = 2^{-1}\pi^{-1/2}e^{-x^2/4}$$

E a função $k(x)$ satisfaz às propriedades de ser contínua, positiva e

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x)dx = 1,$$

Essa igualdade é provada por meio da relação (28) do Apêndice do livro de Figueiredo (1977) ³ ⁷. (Essa função $k(x)$ é conhecida como a função de Gauss, e, em Teoria das Probabilidades, como a densidade da distribuição normal). Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \tag{4.25}$$

Por outro lado, ^{4.24} pode ser escrita na forma:

$$f_n(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{-\xi^2/n^2} F(\xi) d\xi$$

e se for mostrado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{-\xi^2/n^2} F(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} F(\xi) d\xi$$

esta relação, juntamente com ^{4.25}, dará a fórmula ^{4.21}. Portanto deve-se mostrar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} (1 - e^{-\xi^2/n^2}) F(\xi) d\xi$$

tende a 0, quando $n \rightarrow \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, tome ξ_0 tal que

$$\int_{|\xi| > \xi_0} |F(\xi)| d\xi < \varepsilon/4$$

o que é possível, pois F é de \mathcal{S} . A seguir, com ξ_0 fixado, tome n_0 tal que $1 - e^{-\xi^2/n^2} < \varepsilon/(4M\xi_0)$, para $|\xi| \leq \xi_0$ e $n \geq n_0$, onde $M = \max |F(\xi)|$. Logo, a integral em (18) é majorada por

$$\begin{aligned} & \int_{|\xi| > \xi_0} (1 - e^{-\xi^2/n^2}) |F(\xi)| d\xi + \int_{-\xi_0}^{\xi_0} (1 - e^{-\xi^2/n^2}) |F(\xi)| d\xi \\ & \leq 2 \int_{|\xi| > \xi_0} |F(\xi)| d\xi + \frac{\varepsilon}{4M\xi_0} M \cdot 2\xi_0 \cdot \varepsilon. \text{ Q.E.D.} \end{aligned}$$

⁶ A função delta de Dirac, denotada por $\delta(x)$, é uma função generalizada definida como:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

Os núcleos de Dirac são seqüências de funções $K_n(x)$ que aproximam a função delta de Dirac no limite $n \rightarrow \infty$

⁷ A proposição fala que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$

5 UMA APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA PARA IMAGENS DIGITAIS

Antes de falar das aplicações das transformadas nas imagens, é necessário uma breve introdução sobre alguns fundamentos da imagem digital, pois geralmente, a transformada de fourier é utilizada na restauração ou aplicação de algum filtro ou máscara para modificar a imagem de maneira mais conveniente para o intuito proposto.

5.1 FUNDAMENTOS DA IMAGEM DIGITAL

5.1.1 Elementos da Percepção Visual

Gonzalez e Woods (2010) (4) fala que o processo de formação de imagem no olho humano é um pouco diferente do processo de captura de imagem em uma câmera fotográfica. Enquanto na câmera, a lente tem uma distância focal fixa e há uma variação da distância entre a lente e o plano-imagem, no olho humano ocorre o inverso: a distância entre a lente e o plano-imagem (a retina) é fixa, e o que varia é o formato do cristalino (estrutura do olho).

Embora o processo de formação de imagem no meio digital seja inverso do modo de formação de imagem no olho humano, Gonzalez e Woods (2010) (4), afirmam que o ser humano desempenha um enorme papel no processamento digital de imagens pois, apesar de o processo ser computacional, aplicando fórmulas, a escolha da técnica utilizada muitas vezes se baseiam em critérios mais abstratos, que máquinas não podem analisar, como por exemplo, a adaptação ao brilho.

O olho humano tem uma grande capacidade de distinguir diferentes níveis de intensidade (da ordem de 10^{10} e o mesmo é válido para o brilho). De acordo com Gonzalez e Woods (2010) (4): “Consideráveis evidências experimentais indicam que o brilho subjetivo é uma função logarítmica da intensidade de luz incidente no olho”, ou seja, o olho humano pode se adaptar a uma gama variada de níveis de intensidade.

5.1.2 A luz e o espectro eletromagnético

Isaac Newton, percebeu o fenômeno de dispersão da luz branca, através de um prisma de vidro, que ocorre quando ela passa por esse objeto e é separada em um espectro contínuo de cores, variando entre a luz visível (cobrindo a faixa que vai de $0,43 \mu m$ (violeta) até $0,79 \mu m$ (vermelho)), que compõe uma parcela muito pequena do espectro eletromagnético. A faixa visível é dividida em violeta, azul, verde, amarelo, laranja e vermelho, onde cada cor vai passando gradativamente para a outra, sem uma interrupção abrupta. Já o espectro eletromagnético é dividido em Raios gama (com o comprimento de onda muito menor do

que o do espectro visível), Raios X, Ultravioleta, Espectro visível, Infravermelho, Micro-ondas e Ondas de Radio (com o comprimento de onda muito maior do que o do espectro visível), segundo Gonzalez e Woods (2010) (4).

Cada faixa do espectro eletromagnético é utilizado para uma (ou algumas) determinadas áreas. Por exemplo, a radiação gama é utilizada para obtenções de imagens na área médica, astronomia e em ambientes nucleares. Os raios X também podem ser utilizados para obtenção de imagens na área médica, bem como a radiação infravermelho, que gera imagens com base na “assinatura de calor”.

Gonzalez e Woods (2010) (4) fala que é possível criar imagens em uma certa faixa se um sensor capaz de detectar energia irradiada por essa faixa do espectro eletromagnético puder ser desenvolvido. Entretanto, esse não é o único método utilizado para gerar imagens, temos por exemplo, as imagens de ultrassom, formadas pelo som refletido de um objeto.

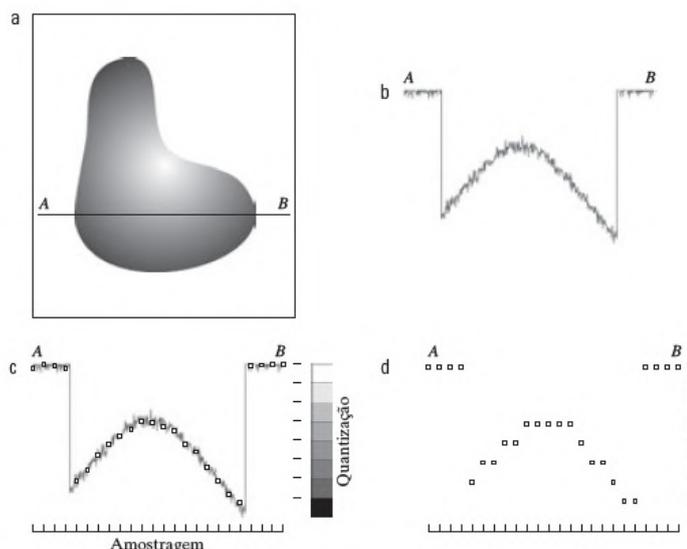
5.2 AMOSTRAGEM E QUANTIZAÇÃO DE IMAGENS

Segundo Gonzalez e Woods (2010) (4), a maioria dos sensores, captam do ambiente informações na forma de uma onda de tensão contínua. Entretanto, para converter essa informação em uma imagem digital, é preciso transformar esses sinais contínuos em um formato discreto, pois normalmente, os computadores não trabalham com sinal contínuo. Para isso, é feito um processo que conta com a amostragem e a quantização.

5.2.1 Conceitos básicos

Uma imagem pode ser expressa como uma função. De maneira geral, chamamos de **amostragem**, a digitalização dos valores de coordenada. Uma imagem pode ser contínua em relação a amplitude (nível de intensidade) e com relação as coordenadas x e y . Para fim de exemplos, seja uma imagem contínua em f que será convertida para o formato digital, como é mostrado na Figura 24. Para que isso ocorra, é necessário fazer a amostragem da função nas coordenadas x e y e na amplitude. A digitalização da amplitude é chamada de **quantização**.

Figura 24 – Amostragem e Quantização



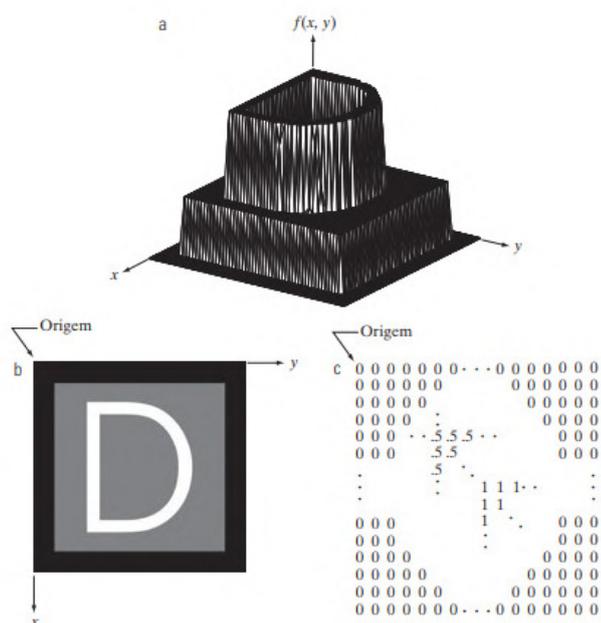
Fonte: Gonzalez, Woods (2010) (4)

5.2.2 Representação de imagens digitais

Seja $f(s, t)$ a representação contínua de uma imagem, definida em duas variáveis s e t . Suponha que essa função tenha sido convertida em uma imagem digital por meio dos processos de amostragem e quantização. A amostragem dessa imagem pode ser representada por uma matriz $f(x, y)$, composta por M linhas e N colunas. Assim, $f(0, 0)$ corresponde ao valor da imagem digital na origem. De maneira geral, conforme Gonzalez e Woods (2010) (4), a função $f(x, y)$ representa a intensidade da imagem nas coordenadas (x, y) . Ao associar a intensidade da imagem a um eixo adicional, a função $f(x, y)$ pode ser interpretada em um espaço tridimensional, no qual $f(x, y) = z$. Nesse contexto, a variável z representa a intensidade da imagem e define o chamado **domínio espacial**, enquanto x e y são denominados **variáveis espaciais** ou **coordenadas espaciais**.

Até então, temos três formas básicas de representar $f(x, y)$. Uma é com os eixos x e y determinando a localização espacial e com o eixo $f(x, y) = z$ representando os valores de f (intensidade), como mostrado na Figura 25 (a). Dessa forma, temos a imagem sendo representada nos eixos das ordenadas e das abscissas, e a intensidade no eixo $f(x, y)$ de modo que quanto “mais branco” estiver a imagem, maior será seu valor nesse eixo. Uma observação importante a se fazer é que esse tipo de representação é comumente utilizada ao se trabalhar com conjuntos em escala de cinza, no qual os elementos são expressos na forma de três variáveis, (x, y, z) . Ela também pode ser utilizada para imagens com um sistema mais complexo de cores, entretanto são de difícil interpretação pelos seus muitos detalhes.

Figura 25 – 3 Representações de imagens



Fonte: Gonzalez, Woods (2010) (4)

A segunda representação é semelhante com o que o olho humano vê em uma fotografia de forma física ou em um monitor, como mostra a Figura 25 (b). Segundo Gonzalez e Woods (2010) (4): “ Aqui, o nível de cinza de cada ponto é proporcional ao valor da intensidade f desse ponto. Nessa figura, temos apenas três valores de intensidade igualmente espaçados. ” Dessa forma, cada ponto da imagem só possui três opções de valores, 0; 0,5 e 1, que é representado como preto, cinza ou branco. É importante ressaltar a escolha da origem no canto superior esquerdo, com o sentido positivo do eixo x sendo estendido para baixo, e o sentido positivo do eixo y sendo estendido para a direita. Essa representação se dá porque muitos dispositivos eletrônicos “exibem” a imagem começando no canto superior esquerdo e vão se movendo para a direita, uma linha por vez.

Já a terceira, Figura 25 (c), é a representação matricial dos valores numéricos de $f(x, y)$. Esse tipo de representação transmite pouca informação para nós, entretanto, em algumas análises de valores numéricas, ela se mostra bastante significativa, pois as matrizes numéricas são muito utilizadas para o processamento e desenvolvimento de algoritmos.

De acordo com Gonzalez e Woods (2010) (4), a representação matricial de uma imagem pode ser dada da seguinte forma:

$$A = f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \dots & f(0, N - 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \dots & f(1, N - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M - 1, 0) & f(M - 1, 1) & \dots & f(M - 1, N - 1) \end{bmatrix}$$

Ambos os lados da equação são equivalentes. O lado direito é uma matriz de números

reais, na qual, cada número pode ser chamado de **pixel**, **pel**, **elemento de imagem** ou **elemento pictórico**. Por meio da matriz, também é possível uma representação vetorial. Por exemplo, podemos ter um vetor coluna v de tamanho $MN \times 1$, de modo que os primeiros M elementos de v correspondam à primeira coluna da matriz, os próximos M elementos à segunda coluna e assim sucessivamente. Ou ainda, é possível utilizar as linhas ao invés das colunas, desde que se mantenha a consistência.

Levada (6) também descreve o conceito matemático de imagem, mas antes, é necessário entender o conceito de *senal*, podendo ser tratado como “Descrição de como um parâmetro varia no tempo (temperatura no dia, variação do dólar no mês, valor de uma ação ao longo de horas)”, como descreve o autor supracitado. Para ele o sinal pode ser representado matematicamente por uma função que pertence ao conjunto S :

$$S = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Esse conjunto é descrito como domínio do tempo. Já no que se refere a **imagem**, é descrita por Levada (6) como: “Do ponto de vista matemático, uma imagem é um sinal bidimensional, pertencente ao conjunto I ”:

$$I = \left\{ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy < \infty \right\}.$$

5.2.3 Resolução Espacial e de Intensidade

Segundo Gonzalez e Woods (2010) (4), “Intuitivamente, a resolução espacial é uma medida do menor detalhe discernível em uma imagem.”, ou em outras palavras, é a quantidade de detalhes que se pode distinguir em uma imagem. Dessa forma, quanto mais detalhada, maior é sua resolução. Quando falamos de forma quantitativa, a resolução espacial pode ser expressa de várias maneiras, dentre elas, por meio de pares de linha por unidade de distância e pontos (pixels) por unidade de distância. Os pares de linha por unidade de distância mede quantos pares de linhas (uma linha preta e uma branca) podem ser distinguidos em uma determinada distância. Para melhor compreensão, imagine um diagrama com linhas verticais pretas e brancas, dispostas de maneiras alternadas. Cada linha possui uma largura W . Dessa forma, um par de linhas possui largura igual a $2W$. Já o número de pares de linha por unidade de distância é dado na forma de $\frac{1}{2W}$. Se por exemplo, uma linha tem uma largura igual a $0,5 \text{ mm}$, então a quantidade linhas por mm será igual a $\frac{1}{2 \cdot 0,5} = 1$. Se for expressa dessa forma, podemos dizer que **resolução espacial** é a maior quantidade de pares de linhas que se é possível ter uma distinção. Editoras e industrias gráficas no entanto, costumam trabalhar com pontos (pixels) por unidade de distância.

Quando se é falado em **resolução de intensidade**, refere-se a variações sutis de intensidades capazes de ser distinguidas. Gonzalez e Woods (2010) (4) fala que é relati-

vamente possível definir a quantidade de amostras para gerar uma imagem digital, mas o mesmo não se aplica a intensidade da imagem. Geralmente, o número de intensidade é igual a 2^k .

5.3 TRANSFORMADA DE FOURIER NO PROCESSAMENTOS DE IMAGENS DIGITAIS

De acordo com Mazet (2025) (II), existem quatro tipos de transformada de Fourier, e cada uma tem sua utilidade no processamento de sinais:

- a “série de Fourier” (SF) aplica-se a sinais de tempo contínuo e periódicos,
- a “transformada de Fourier” (FT) aplica-se a sinais de tempo contínuo e aperiódicos,
- a “série discreta de Fourier” (DFS) se aplica a sinais periódicos e de tempo discreto,
- e a “transformada de Fourier em tempo discreto” (DTFT) se aplica a sinais de tempo discreto e aperiódicos.

A série e a transformada de Fourier já foram definidas nos capítulos anteriores. A **Série Discreta de Fourier**, se tiver um sinal de tempo discreto periódico com período N , pode ser definida como:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+j2\pi kn/N}$$

E:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

Um sinal de duração limitada pode ser considerado como um sinal periódico com período N . Neste caso, é chamada de **Transformada Discreta de Fourier (DFT)**, também conhecido como DTFT.

Para o processamento de imagens, a transformada de Fourier decompõe a imagem em uma combinação de oscilações com diferentes frequências, fases e orientações. A transformada discreta de Fourier de uma imagem que possui tamanho $M \times N$ é uma imagem F definida como:

$$F(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-j2\pi \left(\frac{vm}{M} + \frac{wn}{N} \right)}$$

E sua inversa é definida como:

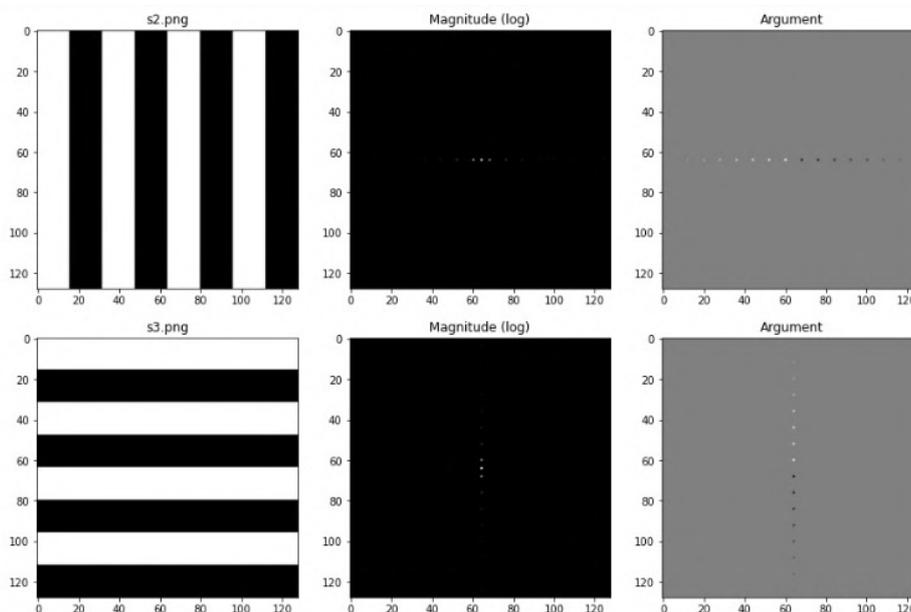
$$f(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{+j2\pi \left(\frac{vm}{M} + \frac{wn}{N} \right)}$$

Como a Transformada de Fourier utiliza uma exponencial complexa, então a transformada discreta de Fourier de uma imagem também pode ser complexa. Sendo assim, ela não pode ser expressa como uma única imagem, mas sim como uma amplitude (módulo)

e a fase (argumento), que representam a distribuição de energia no plano. A amplitude também pode ser chamada de **magnitude**.

É possível ver a aplicação da Transformada de Fourier nas Figuras 26 e 27 a seguir:

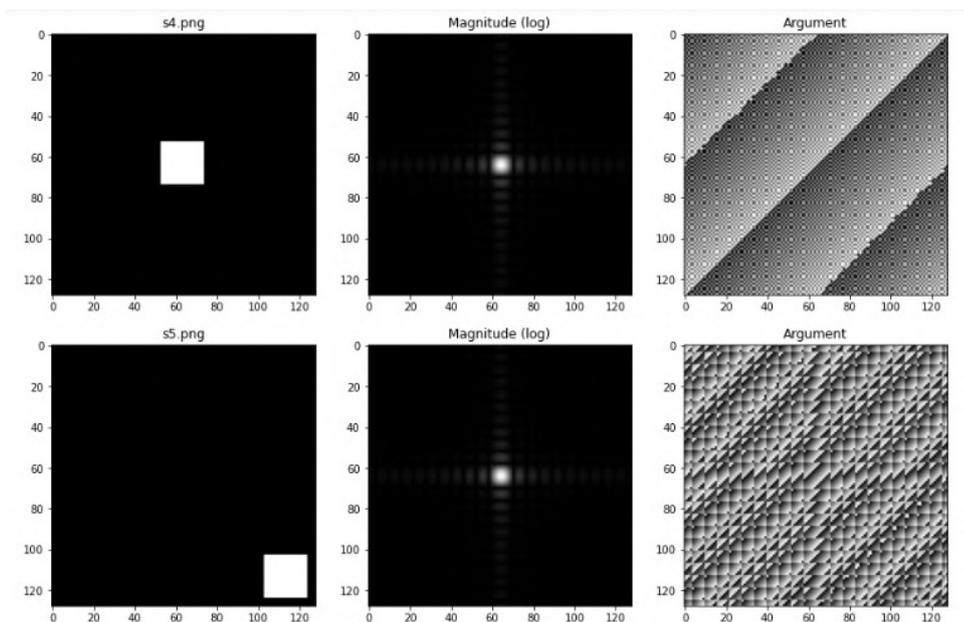
Figura 26 – Aplicação da Transformada



Fonte: Mazet 2025 (10)

Veja que após aplicar a transformada, as “listras” viram “pontos”, e isso facilita o processo computacional, pois se o intuito for apagar essas “listras”, por exemplo, o computador iria trabalhar com coisas bem mais simples.

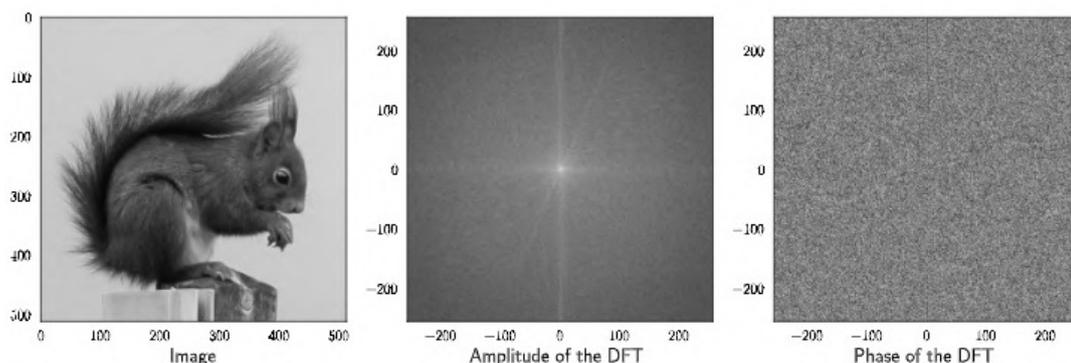
Figura 27 – Aplicação da Transformada 2



Fonte: Mazet 2025 (10)

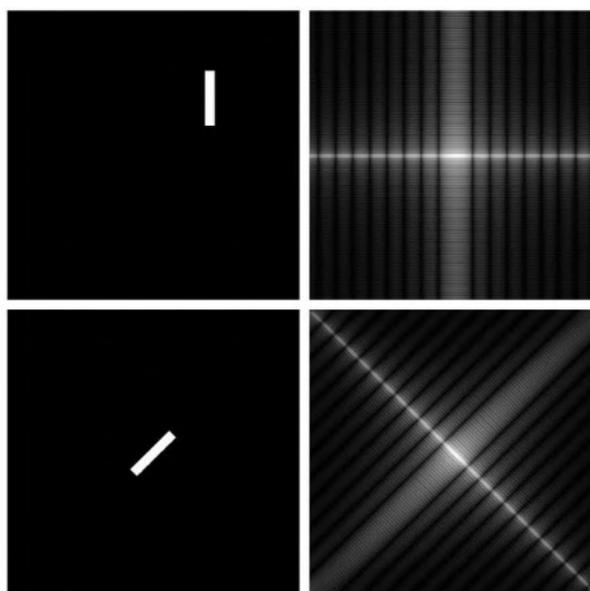
Contudo, na maioria das vezes, a fase (ou argumento) costuma ser desprezado por ser um pouco difícil de interpretação e não dar nenhuma informação nova sobre a estrutura da imagem no domínio espacial como exemplificado na Figura 28. Sendo assim, é trabalhado com o espectro de Fourier, que utiliza apenas a magnitude, como mostrado na Figura 29.

Figura 28 – Aplicação da Transformada na Imagem de um Esquilo



Fonte: Mazet 2025 (10)

Figura 29 – Espectro de Fourier



Fonte: Cámara-Chávez 2025 (11)

Observe, que quando há uma modificação na imagem, há também uma modificação na transformada, como mostrado na Figura 29.

5.4 FILTROS, MÁSCARAS E RESTAURAÇÃO

Segundo Mazet (2025) (10), quando é aplicado um filtro (também chamado de máscara) em uma imagem, significa que é aplicado um operador linear em cada pixel para

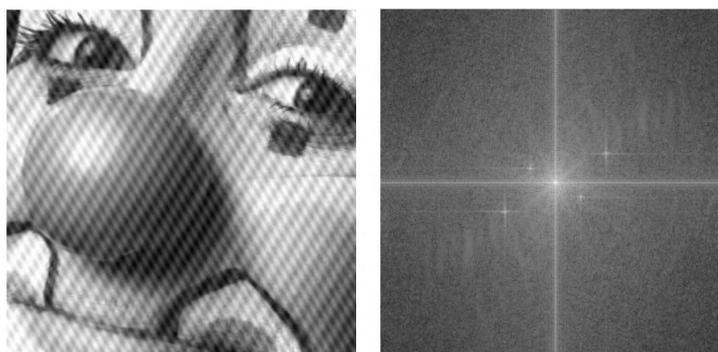
modificar a sua intensidade. Dessa forma, o filtro pode ser representado como uma matriz ou, de maneira equivalente, como uma imagem. Sendo assim, primeiro se inicia o processo de convolução [1] que é uma operação utilizada para calcular o efeito do pixel na imagem, e em seguida, o filtro é utilizado no espectro de Fourier. Já para a restauração, é preciso ter um conhecimento prévio do fenômeno que o degradou, e a partir de um modelo matemático, esse fenômeno é “invertido” para recuperar a imagem original.

Para exemplo, tome uma imagem com ruído como a Figura 30 ou a 34. Mazet (2025) [10] descreve três tipos de ruído [2]: O Ruído branco gaussiano aditivo, o Ruído de Poisson e o Ruído de sal e pimenta. Para definir ruído, Gonzalez (2010) [4] define primeiro a faixa dinâmica como sendo razão entre a intensidade máxima mensurável e a intensidade mínima detectável. O limite superior (intensidade máxima) é chamada de saturação, e o limite inferior (intensidade mínima) é chamada de **Ruído**.

As Figuras supracitadas (30 e 34) apresentam o **ruído periódico** (apresentam um tipo de padrão de repetição) que possuem estruturas específicas na Transformada de Fourier. É possível remover essas estruturas no domínio de Fourier ao cancelar os coeficientes por meio de uma máscara.

Observe a Figura 30 com a imagem de um palhaço. Fala-se que a imagem (do palhaço) está no chamado, domínio do espaço. Ela apresenta um ruído periódico que pode ser observado na forma de “listras” na diagonal. Quando é utilizado a transformada de Fourier, a característica do ruído também é observado na sua magnitude, que pode ser observado, nesse caso, como quatro pontos próximos ao centro. Nesse caso, é dito que o espectro de Fourier está no domínio da frequência.

Figura 30 – Ruído na Imagem do Palhaço



Fonte: Câmara-Chávez 2025 [11]

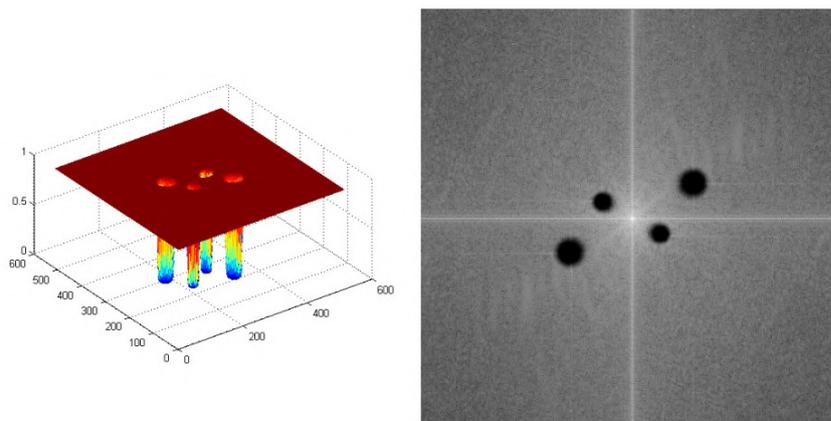
Já na Figura 31, é possível observar o filtro agindo sobre a imagem transformada, retirando o ruído.

Após a aplicação do filtro no ruído, a Transformada Inversa de Fourier irá converter a magnitude (ou o espectro de Fourier que está no domínio da frequência) novamente em

¹ Esse processo não será trabalhado de maneira profunda, para mais informações, consultar Mazet presente nas referências.

² Para mais detalhes sobre esses tipos de ruído, ver na literatura de Mazet.

Figura 31 – Filtro Sendo Aplicado No Ruído



Fonte: Câmara-Chávez 2025 (1)

uma imagem no domínio do espaço. Na Figura 32, é mostrado a imagem com a redução de ruído.

Figura 32 – Imagem com Redução de Ruído



Fonte: Câmara-Chávez 2025 (1)

Já o processamento que ocorreu nessa imagem é o esquema presente na Figura 33 abaixo.

Figura 33 – Esquema Geral de Processamento no Domínio da Frequência.



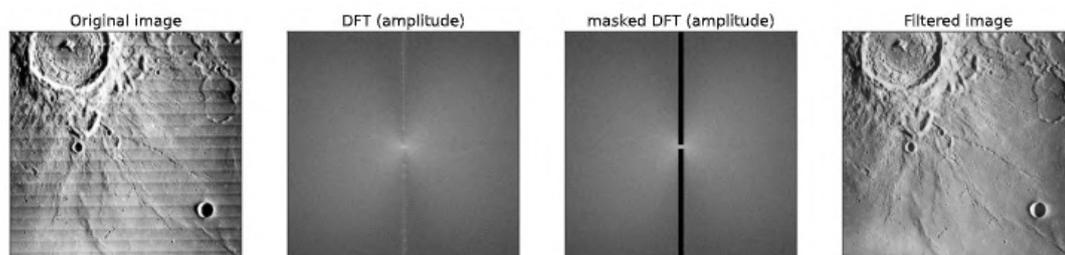
Fonte: Câmara-Chávez 2025 (2)

Primeiro, a imagem é Transformada para o domínio da frequência (espectro de Fourier), em seguida, é feito o processamento da imagem (como a aplicação de filtros, por

exemplo), em seguida, a Transformada Inversa é aplicada na imagem processada para retornar ao domínio da frequência.

Algo semelhante ocorre na Figura 34, onde é aplicada uma máscara (também chamada de filtro) no ruído, e dessa forma, há uma redução.

Figura 34 – Aplicação de Mascara para redução de Ruído



Fonte: Mazet 2025 (10)

A priori, tem-se uma imagem de uma lua com um ruído periódico na forma de “listras” na horizontal no domínio do espaço. No espectro de Fourier (domínio da frequência), esse ruído é apresentado na forma de uma listra na vertical. Em seguida, é aplicado um filtro nesse ruído na frequência do tempo, e a Transformada Inversa de Fourier irá converter novamente a imagem no domínio do espaço com a redução de ruído.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Problemas de naturezas e áreas diversas apresentam métodos de soluções com abordagens distintas. Há problemas que podem ser solucionados de maneira direta - partindo das suas hipóteses e chegando à sua tese, há problemas em que o maior anseio é determinar se há alguma solução e há problemas que se for possível ser apresentado em outro ambiente (em linguagem matemática) outro conjunto ou outro espaço podem ter sua complexidade bastante reduzida.

Problemas de engenharia reversa, por sua vez, analisam o produto final para entender como ele é produzido e com isso poder trabalhar sobre os processos e alterar, ajustar e otimizar o produto.

Este trabalho tem como objetivo comparar as condições impostas para garantir a existência de inversa, tanto para funções elementares quanto para a transformada de Fourier. Ao longo do texto ao passo que os resultados matemáticos foram apresentados surgiram tanto semelhanças, quanto diferenças entre os processos de obtenção da inversa.

A garantia da existência da inversa pode trazer consigo a saída para solucionar algum problema dado. A ação de “levar e trazer” elementos de um conjunto em outro gera a mudança de espaços o que pode diminuir a dificuldade de lidar com o problema e contribuir para a sua resolução.

Para funções elementares a garantia da inversa está na bijetividade da função. No caso de funções que atendem as características da modelagem via métodos de Fourier essa garantia matemática se dá por elementos matemáticos um pouco mais elaborados (não necessariamente mais fáceis ou difíceis, pois obter a lei de formação de uma inversa pode ser um trabalho hercúleo). A condição da inversa na transformada de Fourier requer que f seja integrável e absolutamente integrável.

Um exemplo desta situação foi abordado quando a transformada de Fourier foi utilizada no processamento de imagens digitais. O que no domínio do espaço era um trabalho longo e computacionalmente custoso pois o tratamento seria realizado na vizinhança de cada pixel da imagem, a aplicação da transformada e conseqüentemente a mudança para o domínio ou espaço das frequências, leva o problema a uma circunstância para processamento da imagem mais fácil e direta devido as características intrínsecas desse espaço. O processamento, principalmente para elementos periódicos, tais como ruído periódico, tem tratamento mais imediato no domínio da frequência.

Discussões dessa natureza são salutares em salas de aulas de cursos de formação de professores e também de formação de bacharéis pois ampliam o conhecimento obtido até o ensino básico. Estudar outras abordagens, condições sobre entes matemáticos, espaços distintos daqueles mais usuais enriquecem e sedimentam o fazer matemático do aspirante à sala de aula e à pesquisa científica, mesmo que em muitos casos traga consigo

as dificuldades inerentes ao rigor matemático desses novos ambientes.

Uma pesquisa científica abre campos e indagações ao longo do seu desenvolvimento, o que a torna atraente e frutífera para que seja continuada. Dessa forma, estabelecemos como alguns elementos notadores para trabalhos futuros o que segue:

- aprofundar os estudos para as funções inversas das funções elementares e verificar o grau de dificuldade de dada uma função bijetiva obter a lei de formação da bijeção inversa;
- estudar a transformada de Fourier complexa e suas similaridades ou generalidades com a transformada real;
- incluir nos estudos as funções integráveis à Lebesgue;
- ampliar o estudo da transformada de Fourier para os conjuntos discretos analisando os resultados relacionados;
- investigar as condições de existência da transformada inversa para outras transformadas tais como Laplace, cosseno discreta, Z .

REFERÊNCIAS

- 1 CÁMARA-CHÁVEZ, G. Processamento de Imagens - Restauração. Disponível em: <http://www.decom.ufop.br/guillermo/BCC326/slides/Processamento%20de%20Imagens%20-%20Restauracao.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2025.
- 2 CÁMARA-CHÁVEZ, G. *Processamento de Imagens – Transformada de Fourier 1 e 2*. Disponível em: <http://www.decom.ufop.br/guillermo/BCC326/slides/Processamento%20de%20Imagens%20-%20Tranformada%20de%20Fourier%201%20e%202.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2025.
- 3 FIGUEIREDO, Djairo. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**, (Projeto Euclides). Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.
- 4 GONZALES, R. C., WOODS, R. E. **Processamento Digital de Imagens**. 3. ed. São Paulo : Pearson Prentice Hall, 2010.
- 5 IEZZI, G. et al, **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol. 1, São Paulo, Atual Ed.,1977.
- 6 LEVADA, Alexandre. Fundamentos matemáticos de processamento de imagens: Filtragem, restauração, transformadas e análise de formas. Departamento de computação. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. Universidade Federal de São Carlos.
- 7 LIMA, E. et al. **A Matemática do Ensino Médio** . 9. ed. Rio de Janeiro: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2006. v. 1 p. 237
- 8 LIMA, E. **Curso de Análise**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022. v. 1p. 320 (Projeto Euclides)
- 9 MACIEL, A. B., LIMA, O. A. *Introdução à Análise Matemática*. Campina Grande: EDUEP, 2005.
- 10 MAZET, V. *BIP Restoration*. Disponível em: <https://vincmazet.github.io/bip/restoration/>. Acesso em: 3 mar. 2025.
- 11 OLIVEIRA, M. R., PINHEIRO, M. R. **Coleção elementos da matemática, 1 . conjuntos, funções, aritmética**. 2 ed. Belém: GTR, 2009. v.1 p. 298.
- 12 SANTOS, B. S. **Series de Fourier e Aplicações**. Trabalho de Conclusão de Curso- Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira. Ceará. p. 46. 2016.

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
	Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
	R. Tranquílino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega do TCC

Assunto:	Entrega do TCC
Assinado por:	Ester Gomes
Tipo do Documento:	Tese
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- Ester Gomes de Figueirêdo, DISCENTE (202111230006) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE, em 01/04/2025 11:32:53.

Este documento foi armazenado no SUAP em 01/04/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1442846

Código de Autenticação: b77d9c272b

