INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PEDRO IGOR RIBEIRO DE ARAÚJO PEQUENO

DA REDUÇÃO AO ABSURDO E DA NATUREZA DE ALGUNS NÚMEROS IRRACIONAIS

CAMPINA GRANDE - PB
2025

PEDRO IGOR RIBEIRO DE ARAÚJO PEQUENO

DA REDUÇÃO AO ABSURDO E DA NATUREZA DE ALGUNS NÚMEROS IRRACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonathas Jeronimo Barbosa

Catalogação na fonte:
Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

P425r Pequeno, Pedro Igor Ribeiro de Araújo
Da redução ao absurdo e da natureza de alguns números irracionais. / Pedro Igor Ribeiro de Araújo Pequeno. - Campina Grande, 2025.
29 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de Licenciatura em Matemática.) - Instituto Federal da Paraíba, 2025.
Orientador: Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa.

1. Matemática 2. Lógica matemática - redução ao absurdo 3. Ensino de matemática 4. Teoria dos números - números irracionais I. Barbosa, Jonathas Jerônimo II. Título.

CDU 51

PEDRO IGOR RIBEIRO DE ARAÚJO PEQUENO

DA REDUÇÃO AO ABSURDO E DA NATUREZA DE ALGUNS NÚMEROS IRRACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonathas Jeronimo Barbosa

Aprovado em: _____/_____/__________

BANCA EXAMINADORA

Jonathas Jerônimo Barbosa

Prof. Dr. Jonathas Jeronimo Barbosa
Instituto Federal da Paraíba

Baldoino Sonildo da Nóbrega

Prof. Me. Baldoíno Sonildo da Nóbrega
Instituto Federal da Paraíba

Felipe Barbosa Cavalcante

Prof. Dr. Felipe Barbosa Cavalcante
Instituto Federal da Paraíba

Este trabalho é dedicado à ciência.

AGRADECIMENTOS

A conclusão deste trabalho representa não apenas um marco acadêmico, mas também o resultado de um percurso construído com o apoio e a colaboração de diversas pessoas, às quais expresso minha mais profunda gratidão.

Em primeiro lugar, agradeço aos meus primeiros professores, meus pais, Hugo e Samara, por todo o amor dedicado a mim, pelos valores transmitidos e por sempre me apoiarem na busca pelos meus sonhos.

Ao meu parceiro e irmão, Victor Hugo, cujos embates, discussões e reflexões foram essenciais para o endossar do meu senso crítico.

Agradeço aos meus familiares — Sabrina, Dalva, Silvinha, Suza, Ian — e a todos aqueles que não pude elencar nominalmente, mas cujo apoio, compreensão e encorajamento foram fundamentais ao longo de minha trajetória acadêmica.

Em especial, à minha tia Suelena, cujo incentivo à minha educação e formação acadêmica sempre foi perceptível desde os meus primeiros anos.

À minha melhor amiga, namorada e futura esposa, Vanessa Thaynara, pelo apoio incondicional, pelo companheirismo, por compreender minha ausência em muitos momentos e, sobretudo, pelo amor.

Aos meus amigos Luís Vinícios, Ester Figuerêdo, Adrielly Valeska e Manoel Vitor, cujas amizades, conversas, debates e brincadeiras contribuíram imensuravelmente para o meu crescimento.

Expresso minha gratidão a todos os professores e demais profissionais do IFPB que, ao longo da minha formação, compartilharam ensinamentos e reflexões essenciais para o desenvolvimento do pensamento crítico e científico necessário à realização deste estudo.

Aos professores da banca examinadora, pela aceitação e disponibilidade em contribuir para a avaliação deste trabalho.

Agradeço ao Professor Me. José Elias, atualmente docente da rede estadual de ensino da Paraíba, por sua valiosa contribuição à minha formação acadêmica. Sua orientação e ensinamentos, especialmente durante o curso de Análise Real e o PIBID, foram fundamentais para meu desenvolvimento e serão sempre lembrados com grande apreço.

Finalmente, registro meus sinceros agradecimentos ao meu mentor, orientador e professor, Dr. Jonathas Jeronimo Barbosa, cuja dedicação, expertise, insistência e constante incentivo foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Suas valiosas orientações e reflexões contribuíram significativamente para minha formação como professor.

Enfim, àqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho, expresso minha sincera gratidão.

"A matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha da matemática."

(Carl Friedrich Gauss)

RESUMO

A matemática é uma ciência com caráter sensivelmente distinto de outras quando nos referimos aos resultados alcançados, uma vez que a característica das demonstrações matemáticas são o lastro para essa afirmação, pois a conclusão obtida por uma demostração é irrefutável. Neste trabalho abordaremos a técnica de demonstração por redução ao absurdo com o objetivo de mostrar que, embora não seja tão usual no senso comum, algum ente matemático não apresente uma dada propriedade é tão importante quanto garantir que ele a possua. Por exemplo, um número irracional não possui a característica de poder se escrito com uma razão entre números inteiros. Associada a essa ideia surgem outras: como o principio da não contradição e a do terceiro excluído que originam-se na lógica aristotélica. Para exemplificar o método de demonstração selecionado, foram escolhidos resultados a respeito da irracionalidade de alguns números famosos e também de outros nem tanto assim, contudo todos bastante importantes no meio matemático. Embora algumas ferramentas matemáticas necessárias ao entendimento completo do texto não sejam apresentadas no ensino básico a abordagem deste texto contribui de forma relevante para a formação de professores pois apresenta uma poderosa ferramenta para o dia-a-dia de quem lida com matemática tanto em sala de aula quanto em pesquisa científica e uma parcela considerável do trabalho é completamente acessível a alunos que cursam a partir dos dois últimos anos do ensino fundamental.

Palavras-chave: Demonstração. Redução ao absurdo. Números irracionais.

ABSTRACT

Mathematics is a science with a significantly different character from others when we refer to the results achieved, since the characteristics of mathematical demonstrations are the basis for this statement, as the conclusion obtained by a demonstration is irrefutable. In this work we will approach the demonstration technique of reduction to absurdity with the aim of showing that, although it is not so common in common sense, showing that some mathematical entity does not present a given property is as important as ensuring that it possesses it. For example, an irrational number does not have the characteristic of being able to be written with a ratio of whole numbers. Associated with this idea, others arise, such as the principle of non-contradiction and the excluded middle, which originate in mathematical logic. To exemplify the selected demonstration method, results were chosen regarding the irrationality of some famous numbers and also others that are not so famous, but all of them are very important in mathematics. Although some mathematical tools necessary to fully understand the text are not presented in basic education, the approach of this text contributes significantly to teacher training as it presents a powerful tool for the day-to-day life of those who deal with mathematics both in the classroom and in scientific research and a considerable portion of the work is completely accessible to students studying from the last two years of elementary school.

Keywords: Mathematical proof. Proof by contradiction. Irrational numbers.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\neg$	Negação lógica
$\wedge$	Conjunção lógica
$\lightning$	Absurdo lógico
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto dos números inteiros não-negativos
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$	Conjunto dos números irracionais $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$
ϕ	Phi, número de ouro
e	e, número de Euler
π	Pi

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Demonstrar uma proposição na matemática significa estabelecer uma série de argumentos lógicos e rigorosos que comprovem sua veracidade, partindo de definições, axiomas e teoremas previamente aceitos. As técnicas de demonstração são variadas e estão intrinsecamente relacionadas à natureza do problema. Em alguns casos, métodos como a demonstração direta ou a indução matemática podem ser inviáveis, exigindo o uso de outras abordagens, como a contrapositiva ou a redução ao absurdo. A escolha da estratégia adequada é fundamental para garantir um raciocínio sólido e claro.

O método de redução ao absurdo remonta à antiguidade, tendo sido amplamente utilizado desde os períodos áureos da Grécia Clássica, especialmente nos desenvolvimentos lógicos e matemáticos dos pensadores da época. Como corrobora De Morais Filho (2012), esse modelo argumentativo possui importância fundamental na construção do rigor matemático, permitindo a validação de proposições por meio da refutação de suas negações. Sua aplicação não apenas consolidou demonstrações clássicas, mas também continua sendo uma ferramenta essencial na matemática contemporânea, evidenciando sua atemporalidade e relevância nas argumentações matemáticas.

Entretanto, esse modelo argumentativo apresenta um elevado grau de abstração, uma vez que se fundamenta em princípios filosóficos estritamente teóricos. Conforme destacado por De Morais Filho (2012) e Tenório (1993), sua estrutura lógica depende essencialmente da negação de uma hipótese inicial, sem a necessidade de construção direta da afirmação em questão. Essa característica confere à redução ao absurdo um papel central no formalismo matemático, ao mesmo tempo que exige do leitor um alto nível de compreensão lógica e domínio dos fundamentos teóricos que sustentam essa abordagem.

Ao empregar esse método de argumentação, diversos matemáticos contribuíram significativamente para a consolidação do rigor na matemática, utilizando-o de forma precisa e criteriosa em distintas áreas da disciplina (Boyer, Merzbach, 2012). Desde Euclides, cujas demonstrações em teoria dos números, especialmente a prova da infinitude dos números primos, marcaram o início do formalismo matemático (Euclides, 2009), passando por Leonhard Euler, que estabeleceu a irracionalidade de e, esse modelo argumentativo tem sido um pilar fundamental na validação de resultados matemáticos (Garbi, 2009). Nos tempos modernos, Ivan Niven aperfeiçoou essa abordagem ao apresentar uma demonstração simples e elegante da irracionalidade de π, reafirmando a importância e a longevidade desse método no avanço do conhecimento matemático (Niven, 1946).

A estrutura do presente trabalho segue uma organização sistemática, iniciando-se pela introdução, que delineia o tema da pesquisa, sua relevância e seus objetivos. Em seguida, expõe-se a metodologia, onde são descritos os procedimentos adotados para a condução da investigação, com ênfase na abordagem analítica e nos critérios que orientaram a seleção das demonstrações apresentadas.

Na sequência, desenvolve-se o referencial teórico, que fundamenta o estudo por meio da exposição das principais teorias e demonstrações matemáticas pertinentes, estabelecendo o embasamento conceitual necessário. Posteriormente, são apresentados os resultados, seguidos da análise e discussão, onde se examina a articulação dos elementos estruturais do método de redução ao absurdo e sua aplicação na demonstração da irracionalidade de determinados números.

Por fim, nas considerações finais, sintetizam-se as principais conclusões da pesquisa, ressaltando suas contribuições para o aprofundamento do tema e indicando possíveis desdobramentos para investigações futuras. Essa organização visa assegurar um desenvolvimento coerente e progressivo do estudo, permitindo ao leitor uma compreensão clara do percurso investigativo e de seus achados.

1.1 OBJETIVO GERAL

Identificar, destacar e analisar a fundamentação lógica para o modelo de argumentação por redução ao absurdo, bem como apresentar uma aplicação em algumas demonstrações relacionadas à natureza de números irracionais.

2 METODOLOGIA

A presente pesquisa configura-se como um estudo teórico de natureza qualitativa, cujo objetivo principal é a análise do método de redução ao absurdo e sua aplicação em demonstrações matemáticas, com ênfase na natureza de alguns números irracionais. Para tanto, realiza-se um levantamento bibliográfico em livros, artigos científicos e outras fontes acadêmicas especializadas, com o intuito de fundamentar teoricamente as discussões apresentadas.

Inicialmente, procede-se à apresentação e definição de alguns princípios da filosofia clássica que sustentam esse modelo de argumentação. Posteriormente, é feita uma exposição conceitual do método de redução ao absurdo, abordando sua formulação lógica, relevância no desenvolvimento da matemática e aplicabilidade em diferentes demonstrações. Em seguida, analisam-se demonstrações clássicas baseadas nesse método, com especial atenção àquelas relacionadas à natureza de algus números.

No escopo desta investigação, são apresentadas as demonstrações da irracionalidade $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ sendo proposta uma generalização desses casos quando $\sqrt{p}$ para todo número p primo e, findando esta classe de números irracionais, é apresentada uma conjunto mais abrangente de irracionais na forma de $\sqrt[m]{q^n}$ sob algumas condições. O trabalho encerra-se com as demonstrações da irracionalidade dos números ϕ (número de ouro), e (número de Euler) e π (número "pi" $\approx 3,14$).

A apresentação das demonstrações é conduzida de forma rigorosa e sistemática, respeitando a formalização matemática e evidenciando a estrutura lógica do raciocínio. Para favorecer a compreensão e a clareza expositiva, realiza-se uma análise detalhada dos principais passos demonstrativos, destacando as estratégias empregadas e suas implicações teóricas.

A seleção das fontes bibliográficas pauta-se na busca por referências reconhecidas na literatura matemática, como Santos (1998) e De Morais Filho (2012), garantindo a solidez dos argumentos e a consistência da abordagem adotada. Além da exposição das demonstrações, a pesquisa contempla uma discussão acerca da importância do método de redução ao absurdo no contexto da matemática, examinando sua recorrência em diferentes áreas e sua relevância na construção do conhecimento matemático, como presente nas obras de Andrade (2020), Santos (2003) e Sobrinho Filho (2015).

Dessa maneira, a presente pesquisa pretende não apenas apresentar e sistematizar demonstrações matemáticas baseadas na redução ao absurdo, mas também promover uma reflexão sobre a influência desse método na formalização e validação de resultados matemáticos ao longo da história.

3 DO MODELO DE ARGUMENTAÇÃO POR ABSURDO

O que tratamos como *trivialidade* na matemática é, na verdade, um princípio lógico fundamental, o *princípio da identidade*: tudo é idêntico a si mesmo, como é corroborado em (Tenório, 1993). Apesar desse princípio ser de uma simplicidade evidente, dele ainda partem dois outros princípios que, no campo da lógica clássica, são esteios fundamentais, sendo eles o *princípio da não contradição* e o *princípio do terceiro excluído*.

Como já notório, o princípio da não-contradição, afirma que não deve existir contradição no raciocínio. Por exemplo: Seja uma proposição A. A não é $\neg A$ (lê-se: *não-A*), ou seja, A é sempre igual a A, como apresentado em (Tenório, 1993), podemos entender esse princípio como a negativa do princípio da identidade, de fato, algo não pode ser e não ser ele.

O segundo príncípio supracitado, o princípio do terceiro-excluído, pode ser visto como, segundo Tenório (1993), como "a forma disjuntiva do princípio da identidade: uma coisa é **ou** não é". Dentre essas duas situações opostas, não se apresenta a chance de uma terceira, a qual, portanto, é *excluída*: A **ou** $\neg A$, nunca, A **e** $\neg A$. Com isso, note que o princípio do terceiro excluído é uma "decorrência" ou uma reescrita do princípio da não-contradição, que por sua vez já é uma decorrência do princípio da identidade.

Fundamentado nesse princípio, desenvolveu-se um modelo de demonstração com um elevado grau de abstração, caracterizado pelo uso de argumentos indiretos e raciocínios sofisticados. Esse tipo de abordagem tornou-se um recurso fundamental na matemática, permitindo estabelecer resultados de maneira rigorosa principalmente em contextos onde a verificação direta se mostra inviável. Segundo De Morais Filho (2012), há registros do uso desse modelo argumentativo já por volta do século IV a.C., amplamente empregado por matemáticos da Escola Pitagórica e, posteriormente, formalizado em obras clássicas da matemática grega, como os Elementos de Euclides, evidenciando sua importância no desenvolvimento do pensamento matemático ao longo da história.

Alguns dos mais famosos teoremas são sustentados por um modelo argumentativo de redução ao absurdo, um desses célebres teoremas garante a não finitude dos números primos, atribuído à Euclides de Alexandria[1], a demonstração do Teorema da Infinitude dos Números Primos é tida como uma das mais belas argumentações na matematica, no Livro IX de Os Elementos, esse teorema aparece na Proposição 20 como "Os números primos são mais numerosos do que toda quantidade que tenha sido proposta de números primos" (Euclides, 2009, p. 342)[2]. Para o presente trabalho, nos deteremos à análoga demonstração atualizada em (Boyer e Merzbach, 2012).

1 Euclides de Alexandria (*circa* 300 a.C.), considerado o primeiro autor a explicitar o trato matemático considerando um rigoroso modelo axiomático.

2 Note que Euclides mantém um estrito tratamento geométrico e de relação entre grandezas para a lida, isso se dá, em parte, por não existir um simbolismo algébrico formalizado na época.

Teorema 3.0.1. *O conjunto dos números primos é infinito.*

Demonstração. Suponha por contradição que o conjunto dos números primos é finito e p o maior desses números, então temos que $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots, p\}$. Considere
$q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p) + 1 > p$.
Note que q é estrategicamente definido dessa forma, pois é uma unidade maior do que o produto de todos os primos, ou seja, ele não é divisível por nenhum $p_0 \in \mathcal{P}$. De fato, ao dividir q por qualquer um desses primos, restará sempre 1.
Com isso, decorre dois posíveis casos para q:

1. Ou q é um número primo e isso contradiz a suposição inicial de que o maior número primo é p; $\lightning$

2. Ou q não é um número primo e existe algum número primo que o divide, porém qualquer fator primo de q deve ser maior do que p, pois todos os primos menores ou iguais a p não o dividem. Isso também contradiz a suposição inicial de que p era o maior primo. $\lightning$

Ambos os casos estão reduzidos à absurdos, isso se dá pelo fato da negação da tese ser falsa, ou seja, conclui-se que o conjunto dos números primos é infinito. **Q.E.D.**

Vale salientar que a demonstração apresentada não é direta[3], pois em nenhum momento é construída a infinitude do conjunto dos números primos, mas apenas é mostrado que esse conjunto não é finito[4], fato este citado também em (Boyer, 2012).

3.1 MÉTODO DE DEMONSTRAÇÃO POR REDUÇÃO AO ABSURDO

De maneira geral, o modelo argumentativo em questão consiste em assumir, temporariamente, a falsidade da tese de uma afirmação e, a partir dessa suposição, aplicar um processo dedutivo lógico consistente que conduza a uma inconsistência matemática (ou absurdo[5]). Considerando a validade do princípio do terceiro excluído nesse contexto, a negação da tese não pode ser verdadeira, o que implica que a afirmação inicial deve ser verdadeira.

De forma formal, segundo De Morais Filho (2012), esse processo dedutivo pode ser sintetizado da seguinte forma:

> Para demonstrar uma sentença condicional *Se H, então T* por absurdo, admite-se que H e $\neg T$ ocorram. Com essa suposição, deve-se deduzir uma sentença contraditória qualquer $\neg Q \wedge Q$, chamada *absurdo* ou *contradição.*

[3] Como será percebido, esta é uma recorrente característica desse método argumentativo.
[4] Esse raciocínio é válido exatamente pela existência do Princípio do Terceiro Excluído no espaço lógico vigente.
[5] Vale salientar que o absurdo referido é uma sentença contraditória qualquer da forma $(\neg Q \wedge Q)$, ou seja, a negação de algo e o próprio algo coexistindo.

> A hipótese adicional $\neg T$, considerada nesse método, chama-se *hipótese de absurdo* ou *hipótese de contradição.*

Uma introdução ao estudo nessa área é a demonstração da Proposição (3.1.1). No presente trabalho, sua demonstração fará uso de operadores lógicos. Para um estudo aprofundado sobre o tema, recomenda-se a familiaridade com tais operadores, como apresentado em (De Morais Filho, 2022).

Proposição 3.1.1. *Se* $x, y \in \mathbb{R}$ *e* $x \cdot y = 0$*, então* $x = 0$ *ou* $y = 0$*.*

Demonstração. Inicialmente identifiquemos a hipótese (H), a tese (T) e a própria negação da tese (¬ T):

H: $x, y \in \mathbb{R}$ e $x \cdot y = 0$.

T: $x = 0$ ou $y = 0$.

¬**T**: $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Vamos supor, por absurdo, que a sentença *Se H, então* $\neg T$ ocorra, ou seja, estamos afirmando que o *produto de dois números reais diferentes de zero é zero.* Mas já é sabido que, no Princípio Fundamental da Multiplicação nos números reais, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então o produto $a \cdot b \neq 0$.
Chegamos então na sentença contraditória supracitada, (Q ∧ ¬ Q), onde

Q: Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x \cdot y = 0$, então $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

¬**Q:** Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x \cdot y \neq 0$, então $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Com isso, podemos perceber que a sentença *Se H, então* $\neg T$ é um absurdo, donde concluímos que a hipótese inicial é verdadeira e, de fato, *Se* $x, y \in \mathbb{R}$ *e* $x \cdot y = 0$*, então* $x = 0$ *ou* $y = 0$. **Q.E.D.**

4 DA NATUREZA DE ALGUNS NÚMEROS IRRACIONAIS

É sabido, em um primeiro curso de Análise Real, que os números reais, consiste na união entre os números racionais e irracionais, ou seja, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Como versa Sobrinho Filho (2015), Richard Dedekind[1] garante exatamente isso ao construir os números reais a partir dos racionais, onde a ideia buscada por ele é definir um número real como uma partição do conjunto dos racionais em duas partes:

- Um subconjunto inferior L contendo todos os racionais menores que um certo número real.
- Um subconjunto superior U contendo todos os racionais maiores que esse número.

Com isso, considerando a reta real, é possível preencher as descontinuidades deixadas pelos racionais com alguns números que não podem ser escritos como uma razão entre inteiros. O fato desses números irracionais surgirem durante a construção dos reais é de suma importância para o presente trabalho, pois ao lidar com os reais sendo a união entre esses dois conjuntos, garante-se a existência do princípio citado no capítulo anterior, o Princípio do Terceiro Excluído.

Ou seja, um número real, ou é racional, ou é irracional, não há uma terceira opção; isso garante que a negação da racionalidade de um número, implicará na irracionalidade do mesmo. Esse fato é essencial para a utilização do modelo argumentativo de redução ao absurdo para demonstrar a irracionalidade (ou não-racionalidade) de alguns números reais. Para a presente pesquisa, é fundamental uma definição precisa do que se entende por número racional. Considere-se, então, o conjunto dos números racionais:

Definição 4.0.1 (Conjunto do Números Racionais)**.** *É o conjunto de todos os números que podem ser escritos como uma fração* $\frac{a}{b}$*, onde* a *e* b *são inteiros e* $b \neq 0$*. Em símbolos:*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\, b \neq 0 \right\}.$$

Assim, denomina-se número racional qualquer elemento pertencente ao conjunto $\mathbb{Q}$.

Diante do exposto, o presente trabalho versa sobre uma classe específica de números irracionais: os radicais não exatos. Além disso, serão analisados três célebres números irracionais – ϕ, e e π – apresentando um breve histórico sobre cada um e uma demonstração rigorosa de sua irracionalidade, detendo-se à natureza de tais números.

[1] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916), matemático alemão célebre por suas contribuições à álgebra abstrata e sua formal definição de número real, juntamente com Georg Cantor.

4.1 SOBRE RADICAIS

Um resultado base e importante para a sequências de proposições a seguir é o Lema de Euclides, sendo enunciado da seguinte forma.

Lema 4.1.1 (Lema de Euclides)**.** *Se $a|bc$ (lê-se: a divide bc) e $mdc(a, b) = 1$, então $a|c$.*

A demonstração para esse resultado é construída partir de uma série de outros resultados, como não é escopo do presente trabalho tratar sobre esses resultados, uma demonstração do Lema (4.1.1) pode ser encontrada em (Santos, 1998).

Proposição 4.1.1. *$\sqrt{2}$ é um número irracional.*

Demonstração. Considere $\sqrt{2}$ um número racional, ou seja, $\sqrt{2}$ pode ser escrita como uma fração de a e b inteiros, com $b \neq 0$. Dessa forma, tome $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e considere em particular, a e b relativamente primos ($mdc(a, b) = 1$). Por manipulação algébrica, têm-se

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2$$

Como 2 divide o lado esquerdo da equação, então $2|a^2$, decorre do Lema (4.1.1) que $2|a$, dessa forma, a pode ser escrito como $a = 2k$ para algum número k inteiro. Fazendo as devidas substituições, obtemos que

$$2b^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2b^2 = 4k^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

Repetindo o mesmo raciocínio, tem-se que $2|b$. $\lightning$
Isso é um absurdo, pois contradiz o fato de a e b serem coprimos, então a negação inicial da tese é falsa e concluímos que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **Q.E.D.**

Proposição 4.1.2. *$\sqrt{3}$ é um número irracional.*

Demonstração. Considere $\sqrt{3}$ racional, ou seja, $\sqrt{3}$ pode ser escrita como uma fração de a e b inteiros, com $b \neq 0$. Dessa forma, tome $\sqrt{3} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e considere em particular, a e b relativamente primos. Por manipulação algébrica, têm-se

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 3b^2 = a^2$$

Como 3 divide o lado esquerdo da equação, então $3|a^2$, decorre do Lema (4.1.1) que $3|a$, dessa forma, a é um múltiplo de 3 e pode ser escrito como $a = 3k$ para algum número k inteiro. Fazendo as devidas substituições, obtemos que

$$3b^2 = (3k)^2 \Rightarrow 3b^2 = 9k^2 \Rightarrow b^2 = 3k^2$$

Repetindo o mesmo raciocínio, tem-se que $3|b$. $\lightning$
Isso é um absurdo, pois contradiz o fato de a e b serem coprimos, então a negação inicial da tese é falsa e concluímos que $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **Q.E.D.**

Analogamente às demonstrações apresentadas, podem ser provadas as irracionalidades de $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ e de forma geral $\sqrt{p}$ com p primo. Como apresentado abaixo.

Proposição 4.1.3. *Se p é um número primo pertencente ao conjunto $\mathbb{Z}^+$, então $\sqrt{p}$ é um número irracional.*

Demonstração. Seja, por contradição, $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, então $\sqrt{p}$ é da forma $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que a e b são relativamente primos. Considere a seguinte manipulação algébrica

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow (\sqrt{p})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow pb^2 = a^2$$

Isso implica que $p|a^2$ pelo Lema (4.1.1) temos que $p|a$, ou seja, $a = pk$ para algum inteiro k, seja então

$$pb^2 = (pk)^2 \Rightarrow pb^2 = p^2k^2 \Rightarrow b^2 = pk^2$$

Isso mostra que p também divide b^2, mas isso é um absurdo, pois contradiz a suposição inicial de que a e b são coprimos. Com isso, conclui-se que, se p é um número primo pertencente ao conjunto $\mathbb{Z}^+$, então $\sqrt{p}$ é um número irracional. **Q.E.D.**

Para proceder à próxima demonstração, faz-se necessário enunciar o seguinte resultado fundamental.

Teorema 4.1.4 (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** *Todo número inteiro maior que* 1 *pode ser escrito de maneira única, salvo a ordem dos fatores, como um produto de números primos.*

Assim como a demonstração do Lema de Euclides (4.1.1), uma prova para esse resultado requer uma série de proposições que não são escopo do trabalho, para isso, deixa-se como consulta (Santos, 1998).

Proposição 4.1.5. *Se $q \in \mathbb{Z}$ não for uma potência perfeita e $\frac{n}{m}$ for uma fração não inteira, então a raiz $\sqrt[m]{q^n}$ é irracional.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\sqrt[m]{q^n}$ seja um número racional. Então existe uma fração irredutível $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, tal que

$$\sqrt[m]{q^n} = \frac{a}{b}.$$

Elevando ambos os lados à potência m, obtemos

$$\left(\sqrt[m]{q^n}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \Rightarrow q^n = \frac{a^m}{b^m}.$$

Multiplicando ambos os lados por b^m, temos:

$$q^n b^m = a^m.$$

Agora, analisemos os fatores primos de ambos os lados da equação.

- O lado direito, a^m, é uma potência m-ésima de um número inteiro. Isso significa que todos os expoentes em sua decomposição em fatores primos são múltiplos de m.
- O lado esquerdo, $q^n b^m$, pode conter fatores primos cujos expoentes não são múltiplos de m, pois q não é uma potência perfeita.

Essa diferença nas decomposições primárias implica que os dois lados da equação não podem ser iguais, consequência esta do Teorema Fundamental da Aritmética (4.1.4) o que gera uma contradição. Portanto, nossa suposição inicial era falsa, e concluímos que $\sqrt[m]{q^n}$, nas condições dadas, é irracional. **Q.E.D.**

Perceba que a Proposição (4.1.5) mostra que: *Se a raiz de um número inteiro não é um número inteiro, então ela é irracional.*. Sendo um caso específico disso, o Corolário (4.1.6) que garante que se um número $a \in \mathbb{Z}^+$ não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Corolário 4.1.6. *Se a é um inteiro positivo e não pode ser escrito como $a = x^2$ para algum x inteiro. Então $\sqrt{a}$ é um número irracional.*

Uma demonstração para esse corolário pode ser facilmente obtida ao fazer uso do resultado da Proposição (4.1.5).

4.2 SOBRE ALGUNS CÉLEBRES NÚMEROS IRRACIONAIS

4.2.1 Sobre ϕ

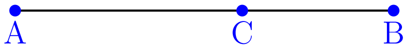
O número ϕ, intrigou os estudiosos da matemática por muitos anos, com suas propriedades e "apariações" consideradas mágicas, tal proporção é utilizada ainda hoje na arquitetura, nas artes, no estudo de estruturas matemáticas; além do aparecimento em proporções naturais, como nos padrões de crescimento de uma planta, na reprodução de alguns animais, entre outras situações. Segundo Livio (2006), vemos que sua presença em tantos aspectos da realidade torna o número ϕ um dos mais emblemáticos e misteriosos da matemática, sendo frequentemente associado à perfeição estética e à harmonia universal.

> Suponha que eu lhe pergunte: o que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro "O Sacramento da Última Ceia", de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum um certo número, ou proporção geométrica, conhecido desde a Antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de "Número Áureo", "Razão Áurea" e "Seção Áurea" (LIVIO, 2006. p. 13).

Segundo Euclides, no livro VI dos Elementos, "Uma reta é dita estar cortada em extrema e média razão, quando como a toda esteja para o maior segmento, assim o maior para o menor". Segundo Andrade (2020), um segmento em "extrema e média razão" pode ser entendido como sendo a Proporção Áurea daquele segmento, sendo a supracitada, a mais antiga definição de "Razão Áurea" que tem-se relatos históricos. Tal definição de Euclides pode ser modernamente interpretada como a seguinte.

Definição 4.2.1. *Tome o segmento de reta AB, dividido em dois segmentos pelo ponto C (Figura 1). Se C é tal que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$, então C é a "Seção Áurea" ou "Divisão Áurea" de AB.*

Figura 1 – Divisão Áurea



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando a definição (4.2.1), faça-se, conforme a figura (1), $AC = x$ e $CB = 1$. Então temos que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Resolvendo essa equação para a incógnita x, encontra-se:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Como x é a medida de um segmento de reta, x_2 pode ser desprezado, pois trata-se de um valor negativo. Assim, a solução positiva, x_1, é o valor numérico do número de ouro ϕ. Diante disso,

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Tal número, tão emblemático, não poderia se tratar apenas de um simples racional.

Proposição 4.2.1. *ϕ é um número irracional.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um racional da forma a/b. Como já sabido, pode-se, sem perda de generalidade, considerar a e b coprimos, então tem-se que

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \sqrt{5} = \frac{2a}{b} + 1$$

Como é de conhecimento geral, o conjunto $\mathbb{Q}$ é fechado para a operação de multiplicação e adição. Então, $\frac{2a}{b} + 1$ pode ser escrito como um racional p/q. Dessa forma, obtêm-se

$$\sqrt{5} = \frac{2a}{b} + 1 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \sqrt{5} = \frac{p}{q} \ \lightning$$

Tem-se que $\sqrt{5}$ pode ser escrito com uma fração de números inteiros, o que, pela Proposição (4.1.3), é um absurdo. Donde conclui-se que ϕ é um número irracional. **Q.E.D.**

4.2.2 Sobre e

Seja o seguinte problema, proposto por Jacques Bernoulli[2], no século XVII (Garbi, 2009).

> **Como cresceria um depósito bancário ao longo do tempo se os juros, ao invés de serem creditados anualmente ou semestralmente, o fossem em intervalos de tempo cada vez menores, até que os acréscimos pudessem ser considerados instântaneos e sobre eles, imediatamente, também incidissem proporcionalmente as mesmas taxas de juros?**

Por exemplo, suponha-se que alguém invista uma quantia de 100 à juros de 10% ao ano, ao término de um ano, claramente, o investidor terá uma quantia de 110. Entretanto, se os juros forem creditados em um intervalo menor que o de um ano, tome semestralmente, e reaplicados, a evolução distinguirá do crédito único da seguinte maneira: após seis meses a quantia será de 105 (100 + metade de 10%), ao final dos doze meses será de 110,25 (105 + 5% de 105).

O valor com crédito semestral dos juros é distintamente maior do que o de creditação única. A indagação de Bernoulli era se este crescimento teria algum limite caso os juros fossem sendo creditados em períodos cada vez mais curtos. Sim, existe esse limite e é definido da seguinte forma:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

O estudo desse problema, por Leonhard Euler[3], levou ao chamado número "e". Com um aprofundado estudo e continuando trabalhos iniciados por outros pesquisadores, Euler desmistificou os segredos desse número e encontrou aplicações para o mesmo em diversas áreas das ciências (Garbi, 2009).

Proposição 4.2.2. *e é um número irracional.*

Demonstração. A seguinte demonstração é a célebre prova apresentada por Joseph Fourier[4] fazendo uso da expansão de Taylor para o número e. Sendo ela

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... \tag{4.1}$$

[2] Jacques Bernoulli (1654-1705), irmão, rival e inimigo de Jean Bernoulli, cuja pergunta sobre juros compostos deu origem ao número e.

[3] Leonhard Euler (1707 - 1783), considerado o mais profícuo dos matemáticos, estima-se que suas obras ultrapasse 800 trabalhos, versando sobre as mais diversas áreas da matemática, física, engenharia e da música.

[4] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), matemático e físico francês célebre por trabalhos sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes.

Por absurdo, suponha e racional, isto é, $e = \frac{a}{b}$, sendo a e b números inteiros positivos[5]. Multiplicando os dois membros da igualdade (4.1) por $b!$, obtêm-se

$$e \cdot b! = b! + b! + \frac{b!}{2!} + \frac{b!}{3!} + \cdots + \frac{b!}{(b-1)!} + \frac{b!}{b!} + \frac{b!}{(b+1)!} + \frac{b!}{(b+2)!} \cdots \tag{4.2}$$

Mas $e = \dfrac{a}{b} \Rightarrow e \cdot b! = a \cdot \dfrac{b!}{b} = a \cdot (b-1)!$, que é, garantidamente, um número inteiro.

$$\underbrace{a \cdot (b-1)!}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{\left(b! + b! + \frac{b!}{2} + \frac{b!}{3} + \cdots + b + 1 \right)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} \cdots \right)}_{A} \tag{4.3}$$

Escólio: A passagem da equação (4.2) para a (4.3) separa a soma em dois termos. O primeiro termo representa uma soma de valores inteiros, enquanto o segundo termo contém frações com denominadores crescentes, levando a um número que pode ser estimado superiormente por uma série infinita de frações decrescentes.

Para o raciocínio ser concluído, basta mostrar que $A \in (0,1)$, já que o primeiro membro da equação é um número inteiro e isso não acontece com o segundo membro.
Como A é o resultado da soma infinita de termos positivos, significa que $A > 0$. Basta verificar que $A < 1$. As seguintes desigualdades são verdadeiras:

$$\frac{1}{(b+2)(b+1)} < \frac{1}{(b+1)^2}, \quad \frac{1}{(b+3)(b+2)(b+1)} < \frac{1}{(b+1)^3} \quad \cdots$$

Utilizando essas desigualdades, temos a seguinte estimativa para A:

$$A = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} \cdots < \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} \cdots$$

Como b é um inteiro positivo, temos uma soma dos termos de uma Progressão Geométrica com razão $\frac{1}{b+1}$ que é menor que 1. Daí:

$$A < \frac{1/(b+1)}{1 - 1/(b+1)} = \frac{1/(b+1)}{b/(b+1)} = \frac{1}{b}$$

Então

$$A < \frac{1}{b} < 1 \quad \Rightarrow \quad A \in (0,1) \ \lightning$$

Chegou-se ao absurdo ansiado, portanto a negação da tese é falsa e $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **Q.E.D.**

Um estudo da expansão de Taylor para o número e pode ser aprofundado em (Vasconcelos, 2013).

[5] Note que, pela expansão de Taylor, $e > 2$, então pode-se, sem perda de generalidade, considerar $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

4.2.3 Sobre π

Sem dúvidas, π é distantemente o número irracional mais conhecido e pesquisado, desde a era antiga com as tabuletas de argila da Mesopotâmia, até o advento do cálculo computacional com os supercomputadores. Como corrobora a citação abaixo, tal fama não se restringe aos matemáticos, mas também estende-se à grande maioria.

> É difícil conceber algum tema matemático que seja mais popular junto de não matemáticos do que o estudo das propriedades do número π. De facto, [. . .], π é um dos poucos conceitos matemáticos cuja menção provoca uma reação de reconhecimento e de interesse por parte de quem não está profissionalmente ligado ao assunto (José Carlos Santos, 2003).

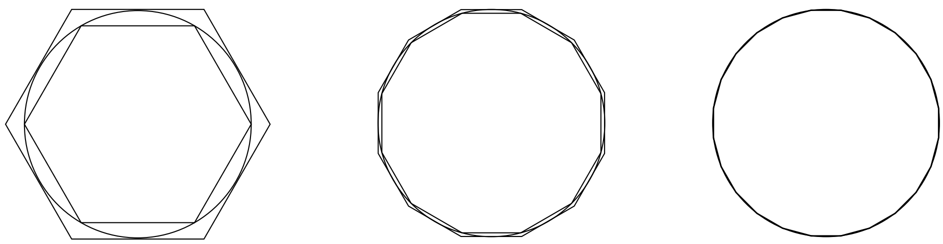
A maioria das pesquisas relacionadas às propriedades desse número, versa sobre a precisa determinação de suas casas decimais. Como tido em Santos (2003), a tentativa de determinar suas casas decimais remonta desde a Mesopotâmia, grande progresso nessa lida ocorreu durante o clássico período da Grécia Antiga, com Arquimedes de Siracusa[6].

Ainda em Santos (2003), o processo de aproximação envolve a determinação de dois polígonos regulares, um inscrito e outro circunscrito, a um círculo cuja área deseja-se calcular. Com apenas hexágonos, Arquimedes conseguiu determinar que $3 < \pi < 4$, mas ele não parou por aí, fora duplicando sucessivamente o número de lados do polígono até alcançar 96 ($2^4 \cdot 6$), o que lhe permitira concluir que

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}, \quad \text{ou seja,} \quad 3,14084 < \pi < 3,142858$$

Figura 2 – Método da exaustão utilizado por Arquimedes.

(a) 6 lados (b) 12 lados (c) 24 lados



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os avanços cresceram exponencialmente com o advento da análise matemática, substituindo os rudimentares métodos geométricos. Com o uso das séries, em especial das séries rapidamente convergentes, e dos produtórios infinitos, foi possível determinar com acurada precisão mais de 70 casas decimais de π.

[6] Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.), matemático e polímata da Grécia Clássica, célebre por suas contribuições à estática, hidroestática e engenharias; além de ser grande influenciador no desenvolvimento da ciência morderna, sendo inspiração para grandes nomes, como: Galileu, Huygens, Newton, entre outros.

Os estudos sobre as propriedades desse número não se limitaram apenas aos aspectos numéricos. Em 1768, Johann Lambert[7] publica um resultado fundamental acerca de sua natureza, π é irracional. Seguindo nessa área, em 1946 foi divulgada uma inovadora demonstração –escopo do presente trabalho–, onde em apenas uma página, Ivan Niven[8], fazendo uso da análise de funções analíticas e cálculo elementar, demonstra belissíma e rigorosamente a irracionalidade de π.

Proposição 4.2.3. *π é um número irracional.*

Demonstração. (Niven, 1946) Suponha, por absurdo, que π seja um número racional. Então existe uma fração irredutível $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}^+$ e $b \neq 0$, tal que

$$\pi = \frac{a}{b}.$$

Definamos o polinômio

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}$$

e a função auxiliar

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x), \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Como $n!f(x)$ tem coeficientes inteiros e termos em x de grau não inferior a n, segue que $f(x)$ e suas derivadas $f^{(i)}(x)$ assumem valores inteiros para $x = 0$ e para $x = \pi = \frac{a}{b}$, já que $f(x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right)$.

Pelo cálculo, temos a identidade

$$\frac{d}{dx}\{F'(x)\sin x - F(x)\cos x\} = F''(x)\sin x + F(x)\sin x = f(x)\sin x.$$

Integrando de 0 a π, obtemos

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\, dx = [F'(x)\sin x - F(x)\cos x]_0^\pi = F(\pi) + F(0). \tag{4.4}$$

Como $F(\pi)$ e $F(0)$ são combinações lineares de valores inteiros de $f^{(i)}(\pi)$ e $f^{(i)}(0)$, segue que $F(\pi) + F(0)$ é um número inteiro.

No entanto, para $0 < x < \pi$, tem-se a estimativa

$$0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!}.$$

Como o lado direito pode ser arbitrariamente pequeno para n suficientemente grande, a integral em (4.4) também é arbitrariamente pequena. Isso contradiz o fato de que ela é um número inteiro.

Portanto, nossa suposição inicial era falsa, e concluímos que π deve ser irracional. **Q.E.D.**

[7] Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777), matemático suíço famoso por ser o pioneiro na demonstração da irracionalidade de π.

[8] Ivan Morton Niven (1915 - 1999) matemático canadense especialista em teoria dos números, autor de diversos livros na área.

As demonstrações de irracionalidade na matemática envolvem uma diversidade de técnicas, que vão desde argumentos clássicos por redução ao absurdo, como os do presente trabalho, até métodos mais sofisticados da teoria dos números. Entretanto, como sustenta (Santos e Santos, 2024), ainda existem números cuja natureza racional ou irracional permanece indeterminada, entre os exemplos mais notáveis estão a constante de Euler-Mascheroni γ, a constante de Catalan G e diversas séries e produtos infinitos que surgem em diferentes contextos da análise e da teoria dos números. A ausência de uma classificação definitiva para esses, números ressalta a complexidade inerente à estrutura dos números reais e demonstra que a investigação sobre a irracionalidade continua a ser um campo de pesquisa fértil.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Ao analisar a demonstração da Proposição (3.1.1), observa-se que o emprego do método de redução ao absurdo conduz a um tratamento indireto da proposição em questão. Nesse modelo argumentativo, a demonstração não estabelece diretamente a veracidade da tese, mas sim a impossibilidade de sua negação, levando à inevitável conclusão de que a afirmação original deve ser verdadeira, graças ao princípio do terceiro excluído. Esse aspecto é particularmente relevante, uma vez que nem toda proposição matemática pode ser demonstrada por meio desse procedimento, sendo necessário que sua negação implique uma contradição dentro do sistema axiomático adotado.

Ainda na demonstração da Proposição (3.1.1), torna-se evidente a importância de uma formulação precisa da negação de uma tese matemática, ou seja, a adição de uma hipótese de absurdo à argumentação; uma vez que é essa negação que conduz à obtenção da contradição almejada. Dessa forma, a clareza na formulação da negação não apenas garante a consistência lógica da demonstração, mas também evidencia a estrutura fundamental desse modelo argumentativo.

A análise das demonstrações apresentadas no Capítulo (4) evidencia que o método de redução ao absurdo, por si só, não é suficiente para conduzir a argumentação matemática de forma independente, exigindo a complementação com outras técnicas e resultados auxiliares. Na Seção (4.1), por exemplo, a demonstração da irracionalidade de certas raízes depende do Teorema de Euclides. Na demonstração da irracionalidade de ϕ (4.2.1), recorre-se à Proposição (4.1.3), além de propriedades fundamentais dos números racionais. Já na prova de que e é irracional (4.2.2), faz-se uso de propriedades de séries infinitas, enquanto na demonstração da irracionalidade de π (4.2.3), a mais sofisticada do estudo, torna-se necessário um arcabouço teórico mais robusto, envolvendo cálculo infinitesimal, análise real e polinômios. Esse panorama reforça que, embora a redução ao absurdo seja um método poderoso, sua aplicação eficaz exige criatividade e um suporte teórico adequado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A redução ao absurdo é um dos métodos mais antigos e amplamente consolidados na matemática, com suas origens na tradição grega, especialmente nos trabalhos de Euclides de Alexandria. Sua aplicação foi profundamente explorada ao longo dos séculos, estando presente em demonstrações de importância fundamental, como a prova da infinitude dos números primos e a irracionalidade de diversos números transcendentais. Este modelo argumentativo mantém-se de extrema relevância na matemática contemporânea, assegurando a validade de proposições por meio da refutação da negação dessas proposições, o que atesta sua robustez lógica e sua importância tanto no desenvolvimento teórico quanto no ensino da disciplina.

A presente pesquisa investigou o método de redução ao absurdo, analisando sua estrutura lógica e sua relevância na matemática, com ênfase em demonstrações de irracionalidade. Foram apresentadas provas clássicas, como a irracionalidade de $\sqrt{2}$, além de demonstrações mais sofisticadas, envolvendo os números π, ϕ e e. A análise dessas demonstrações evidenciou que, embora a redução ao absurdo seja uma ferramenta argumentativa poderosa, sua aplicação não é autossuficiente, exigindo o suporte de outros teoremas e técnicas auxiliares, como propriedades de séries infinitas, análise real e teoria dos números.

Além de reforçar a importância desse método na matemática, o presente trabalho deixa como recomendação para pesquisas futuras a investigação de demonstrações alternativas para a irracionalidade dos números abordados, a apresentação da irracionalidade de outros grupos de números, a generalização do método para outras classes de números, como os algébricos e transcendentais, e um estudo comparativo entre a abordagem indireta e métodos construtivos na teoria dos números. Adicionalmente, a exploração da aplicação pedagógica desse tipo de argumentação pode contribuir para o ensino da matemática, especialmente no desenvolvimento do raciocínio lógico.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANDRADE, Tiego de Moraes. **A Proporção Divina**: Estudando a Beleza do Número de Ouro na Matemática. Rio Claro, f. 106, 2020 Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Estadual Paulista (UNESP).

2. BOYER, Carl ;MERZBACH, Uta. **História da Matemática**. Tradução Helena Castro. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2018. 504 p. Tradução de: A history of mathematics.

3. DE MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro. **Um convite à matemática**: com técnicas de demonstração e notas históricas. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2024. 377 p.

4. EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução Irineu Bicudo. 1 ed. São Paulo: UNESP, 2009. 600 p.

5. GARBI, Gilberto. **O romance das equações algébricas**. 3 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 240 p.

6. LIVIO, Mario. **Razão áurea**: a história de Fi, um número surpreendent. Tradução Marco Shinobu Matsumura. 1 ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2006. 333 p. Tradução de: The golden ratio.

7. MOREIRA TENÓRIO, R. LÓGICA CLÁSSICA: UM PROBLEMA DE IDENTIDADE. **Sitientibus**, *[S. l.]*, n. 11, 1993. DOI: 10.13102/sitientibus.vi11.10065. Disponível em: https://periodicos.uefs.br/index.php/sitientibus/article/view/10065. Acesso em: 9 mar. 2025.

8. NIVEN, Ivan. A simple proof that π is irrational. **Bulletin of the American Mathematica Society**, Estados Unidos, dez 1946.

9. SANTOS, José Carlos de Sousa Oliveira. Uma breve história de π. **Gazeta de Matemática**, Portugal, n. 145. 6 p, jul 2003.

10. SANTOS, Felipe Fonseca dos; SANTOS, Devison Rocha. **Uma demonstração da irracionalidade do número de Euler**. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, Brasil, v. 10, n. 2, p. e3006, 2024. DOI: 10.35819/remat2024v10i2id7115. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/ REMAT/article/view/7115.. Acesso em: 20 mar. 2025.

11. SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. 1 ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, v. 8, 1998. 198 p. (Coleção Matemática Universitária).

12. SOBRINHO FILHO, José Souto. **O Surgimento dos números irracionais**. Rio de Janeiro, f. 61, 2015 Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

13. VASCONCELOS, Getulio de Assis. **A Irracionalidade e Transcendência do Número *e***. Rio Claro, f. 41, 2013 Dissertação (PROFMAT) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Restrito

Entrega de TCC

Assunto:	Entrega de TCC
Assinado por:	Pedro Igor
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Restrito
Hipótese Legal:	Informação Pessoal (Art. 31 da Lei no 12.527/2011)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Pedro Igor Ribeiro de Araújo Pequeno**, **ALUNO (201911230017) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 01/04/2025 17:11:59.

Este documento foi armazenado no SUAP em 01/04/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1443596
Código de Autenticação: 6a2dc682a4