



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA  
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

**JOÃO GABRIEL GOMES DA SILVA**

**UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS BURACOS NEGROS DE REISSNER-  
NORDSTRÖM**

Campina Grande - PB

2025

JOÃO GABRIEL GOMES DA SILVA

**UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS BURACOS NEGROS DE REISSNER-  
NORDSTRÖM**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador (a): Prof. Dr. Francisco Geraldo da Costa Filho.

Campina Grande - PB

2025

Catálogo na fonte:

Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

S587u Silva, João Gabriel Gomes da  
Uma introdução ao estudo dos buracos negros de  
Reissner-Nordström / João Gabriel Gomes da Silva. –  
Campina Grande, 2025.  
36 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em  
Licenciatura em Física) - Instituto Federal da Paraíba,  
2025.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Geraldo da Costa Filho.

1. Astronomia - Buraco negro 2. Teoria da relatividade geral -  
Einstein 3. Espaço-Tempo - Estrutura e propriedades. 4.  
Gravitação I. Costa filho, Francisco Geraldo da II. Título.

CDU 52

JOÃO GABRIEL GOMES DA SILVA

**UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS BURACOS NEGROS DE REISSNER-  
NORDSTRÖM**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física.

Aprovado(a) em: / /

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Francisco Geraldo da Costa Filho - Orientador  
IFPB – Campina Grande

---

Prof. Dr. Carlos Henrique Araújo Bonfim Borges  
IFPB – Campina Grande

---

Prof. Dr. Maxwell Aragão Marques Nogueira  
IFPB – Campina Grande

## AGRADECIMENTOS

Nesta página, deixo meus agradecimentos as pessoas que contribuíram na minha formação acadêmica e que foram importantes durante meus anos na graduação. Gostaria de agradecer à minha família, que sempre me apoiou e estava presente quando precisei. Ao meu pai Manoel, à minha mãe Alba, aos meus irmãos Almir e Márcio, e suas respectivas esposas, Ívyna e Amanda. Agradeço do fundo do meu coração por me ajudarem ao longo dessa caminhada. Amo vocês! Também quero lembrar dos meus sobrinhos lindos, João Miguel (Gueguel), Elisa (Lili) e Heitor (Heitorzinho), titio ama vocês!

Gostaria de agradecer também aos meus colegas e amigos de curso, que no decorrer desses anos passaram por muitas coisas ao meu lado. Foram boas risadas e alguns sufocos que passamos nesses anos. Em especial, agradeço ao meu amigo Paulo Rogério (Júnior) e a minha amiga Francielly (Fran), que me escutaram e me aconselharam em alguns momentos em que eu não estava bem.

Também agradeço aos meus professores que estiveram comigo nesses anos, ensinando, ajudando e fornecendo oportunidades que me auxiliaram a chegar onde estou hoje. Representando todos os professores e a equipe do IFPB – Campus Campina Grande, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Francisco Geraldo (Geraldinho) pela orientação, suporte e paciência.

A todos vocês, muito obrigado!

## RESUMO

Este trabalho busca fazer uma introdução ao estudo de buracos negros simetricamente esféricos e sem rotação, com foco nos buracos negros de Schwarzschild e de Reissner-Nordström. Para isso, é feito uma revisão nos fundamentos da teoria da relatividade especial e da teoria da relatividade geral de Einstein, abordando as transformações relativísticas do comprimento e do tempo, a estrutura do espaço-tempo e o aparato matemático para desenvolver as equações de campo de Einstein. Para o buraco negro mais simples, será analisado o comportamento da métrica no horizonte de eventos e na singularidade. Já no buraco negro com carga elétrica, será analisado o comportamento da métrica nos dois horizontes de eventos, um mais externo e outro mais interno (Cauchy). Também será feita uma comparação entre os dois buracos negros estudados, verificando que o buraco negro de Reissner-Nordström é uma generalização do buraco negro de Schwarzschild, pois sem carga elétrica, os dois apresentam a mesma solução.

**Palavras-chave:** Relatividade; espaço-tempo; equações de Einstein; solução de Schwarzschild; buracos negros; soluções de Reissner-Nordström.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>TEORIA ESPECIAL DA RELATIVIDADE</b>	<b>8</b>
2.1	POSTULADOS DE EINSTEIN	8
2.2	RELATIVIDADE DA SIMULTANEIDADE	9
2.3	DILATAÇÃO DO TEMPO	10
2.4	CONTRAÇÃO DO COMPRIMENTO	11
2.5	AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ	12
2.6	A ESTRUTURA DO ESPAÇO-TEMPO	14
<b>3</b>	<b>TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL E A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD</b>	<b>17</b>
3.1	PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA	17
3.2	GEOMETRIA EM REFERENCIAIS ACELERADOS	18
3.3	EQUAÇÕES DE EINSTEIN	19
3.4	SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	20
<b>4</b>	<b>BURACO NEGRO DE REISSNER- NORDSTRM</b>	<b>24</b>
4.1	CAMPO ELETROMAGNÉTICO	24
4.2	SOLUÇÃO DE REISSNER-NORDSTRÖM	25
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>28</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>29</b>
	<b>APÊNDICE A</b>	<b>30</b>
	<b>APÊNDICE B</b>	<b>35</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O ser humano sempre se sentiu atraído pela natureza e seus fenômenos, buscando compreendê-la e explicá-la. Alguns dos fenômenos mais marcantes para a humanidade são aqueles que envolvem a gravitação e seus efeitos no espaço-tempo.

Em 1915, o físico teórico alemão Albert Einstein desenvolveu a Teoria da Relatividade Geral, e às equações de campo que relacionam a geometria do espaço-tempo com a matéria e a energia. Um ano depois, em 1916, o físico e astrônomo alemão Karl Schwarzschild chegou à solução exata das equações de campo de Einstein, o que posteriormente forneceu uma descrição matemática de buracos negros ideias.

Os buracos negros são objetos astronômicos tão densos e massivos que nem mesmo a luz é capaz de escapar caso ultrapasse uma região limite, chamada de horizonte de eventos. Uma enorme concentração de matéria compactada em espaços minúsculos define um buraco negro. Todo buraco negro possui rotação, o mais rápido conhecido – chamado GRS 1915+105 – possui mais de 1.000 rotações por segundo. Geralmente os buracos negros são definidos em três categorias, de acordo com sua massa: massa estelar, supermassiva e intermediária.

Um buraco negro do tipo estelar é formado quando uma estrela possuindo cerca de 20 vezes a massa do Sol fica sem combustível e seu núcleo colapsa. As massas desses objetos podem variar de algumas a centenas de vezes a massa do Sol.

Os buracos negros supermassivos estão presentes em quase todas as grandes galáxias, localizados em seus centros. Estima-se que esses objetos possuam cerca de centenas de milhares a bilhões de vezes a massa do Sol. No centro da nossa galáxia há um buraco negro, o Sagitário A\*, que possui 4 milhões de vezes a massa do Sol. Embora a origem desse tipo de buraco negro seja misteriosa, sabe-se que pode crescer alimentando-se de objetos menores, como buracos negros estelares ou estrelas de nêutrons.

Já os buracos negros do tipo intermediário se encontram no meio termo entre os estelares e os supermassivos. Como a diferença de tamanho entre os dois últimos é enorme, então acredita-se que ao longo do tempo, colisões entre buracos negros estelares tenham criado buracos negros intermediários. Suas massas devem variar de cerca de dezenas de milhares a centenas de milhares a massa do Sol [5].

Em abril de 2019, foi divulgada a primeira imagem registrada de um buraco negro, localizado no centro da galáxia Messier 87 (M87), a cerca de 55 milhões de anos-luz da Terra. A imagem foi divulgada pela colaboração internacional do *Event Horizon Telescope* (EHT).

O buraco negro descrito pela solução de Schwarzschild é o mais simples a ser analisado, pois possui simetria esférica, não possui rotação, nem carga elétrica. Diferentemente, a solução encontrada pelo engenheiro e físico alemão Hans Reissner, em 1916, e pelo engenheiro e físico finlandês Gunnar Nordström, em 1918, respectivamente, conhecida como solução de Reissner-Nordström, descreve um buraco negro com carga, sendo, portanto, uma generalização da solução de Schwarzschild.

O segundo capítulo destina-se a fazer uma breve revisão sobre a relatividade especial, apresentando os postulados de Einstein, as relações relativísticas para o tempo e o espaço, e o espaço-tempo de Minkowski.

O terceiro capítulo traz uma revisão da teoria da relatividade geral, trabalhando conceitos do princípio de equivalência e da geometria de referenciais acelerados, como também a solução de Schwarzschild para as equações de Einstein.

No quarto capítulo será trabalhado o buraco negro de Reissner-Nordström, onde será visto sua solução e a interpretação dos seus horizontes de eventos.

No quinto e último capítulo será abordado as considerações finais do trabalho. Foi adotado a assinatura  $(-, +, +, +)$  para a métrica do espaço-tempo e a velocidade da luz  $c$  em unidades naturais.

## 2 TEORIA ESPECIAL DA RELATIVIDADE

Em 1905, Albert Einstein publicou quatro artigos de grande importância. Um deles sobre a análise do movimento browniano, outro sobre o efeito fotoelétrico, que lhe rendeu o Prêmio Nobel, e dois postulados sobre sua teoria especial da relatividade, que propunha correções nos conceitos de espaço e tempo conhecidos na época. Salvo indicação em contrário, todas as citações e informações apresentadas neste capítulo foram extraídas de Young e Freedman [7] e Griffiths [3].

### 2.1 POSTULADOS DE EINSTEIN

Um sistema de referência inercial está em repouso ou em movimento com velocidade constante, ou seja, não há aceleração. Como exemplo, pode-se imaginar uma pessoa jogando sinuca no vagão de um trem que se movimenta em trajetória retilínea e com velocidade constante. Nesse caso, a pessoa poderia jogar tranquilamente do mesmo modo como se o trem estivesse parado na estação. A trajetória das bolas não sofreria desvios após as tacadas. Dessa forma, caso as cortinas das janelas estivessem fechadas a pessoa dentro do vagão não saberia dizer se o trem está em movimento ou não. Por outro lado, a pessoa saberia informar se o trem aumentasse ou diminuísse sua velocidade ou se fizesse alguma curva, pois sentiria o balanço e após as tacadas, as bolas sofreriam desvios estranhos em suas trajetórias. Logo, as leis da mecânica não são as mesmas em sistemas de referência acelerados.

Durante o século XIX, muitos físicos acreditavam na existência de um meio invisível que permeava todo o espaço, chamado **éter**. Caso esse meio existisse, a velocidade de propagação da luz seria diferente dependendo da direção de propagação do ‘vento do éter’; por exemplo, se este se propagasse no sentido de propagação da luz, sua velocidade seria máxima, e caso se propagasse no sentido oposto, seria mínima. Portanto, a ideia na época era medir a velocidade da luz em diferentes direções, visando detectar o vento do éter. Para isso, usando um interferômetro ótico de ótima precisão, foi realizada uma experiência, conhecida como experiência de Michelson-Morley. Com o experimento, ficou comprovado que a velocidade da luz era exatamente a mesma em todas as direções, o que indicava a não existência do éter [7].

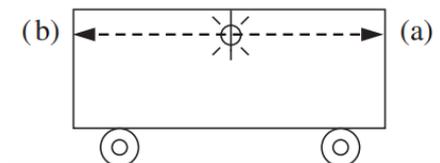
Foi a partir de Einstein que o resultado do experimento obteve seu valor real, indicando que a velocidade da luz é uma constante universal, igual em qualquer direção e independente do movimento do observador ou da fonte. Einstein obteve sua teoria especial da relatividade a partir de seus dois postulados:

1. **Princípio da relatividade:** As leis da física aplicam-se em todos os sistemas de referência inerciais;
2. **A velocidade universal da luz:** A velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores inerciais, independentemente do movimento da fonte [3].

## 2.2 RELATIVIDADE DA SIMULTANEIDADE

Imagine que um vagão de trem está viajando com velocidade constante e em trajetória retilínea. No teto do vagão há uma lâmpada que está equidistante da extremidade traseira e dianteira, como mostrado na Figura 1. Na ilustração, ocorrem dois eventos: luz chega à extremidade dianteira (a) e luz chega à extremidade traseira (b).

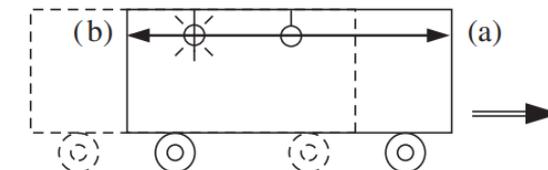
Figura 1: Trajetória da luz em um vagão.



Fonte: GRIFFITHS, 2011, p. 337.

Quando a lâmpada é acesa, a luz se espalha em todas as direções com velocidade  $c$ . Para um observador dentro do trem, a luz chegará nas extremidades traseira e dianteira ao mesmo tempo. Logo, para esse observador, os dois eventos ocorrem simultaneamente. Porém, para um observador no solo a luz percorrerá uma distância menor para atingir a extremidade traseira, pois o vagão está se movimentando para frente, de acordo com a Figura 2.

Figura 2: Trajetória da luz para um observador fora do vagão.



Fonte: GRIFFITHS, 2011, p. 337.

Para o observador no solo, os dois eventos não são simultâneos, pois o evento (b) acontece antes que (a). A partir dessas observações, pode-se chegar à seguinte conclusão: **Dois eventos que são simultâneos em um sistema inercial não são, em geral, simultâneos em outro.**

Para tal observação, seria necessário que o trem estivesse a uma velocidade muito grande para que fosse possível perceber a diferença de tempo dos eventos.

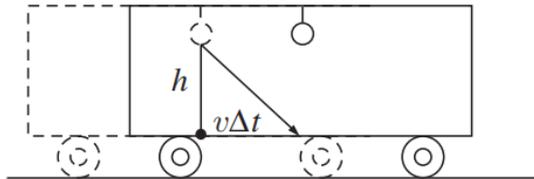
### 2.3 DILATAÇÃO DO TEMPO

Imagine agora que o raio de luz que sai de uma lâmpada presa ao teto do vagão irá percorrer sua trajetória até chegar ao chão do vagão exatamente abaixo da lâmpada. Sendo  $h$  a altura do vagão e  $c$  a velocidade do raio de luz, para um observador dentro do trem, o intervalo de tempo que o raio de luz levaria para chegar ao chão seria:

$$\Delta\bar{t} = \frac{h}{c}. \quad (2.1)$$

Para um observador no solo, o intervalo de tempo para que o raio de luz chegue no chão é maior, pois a luz percorreria uma distância maior, já que o vagão está em movimento.

Figura 3: Representação geométrica da trajetória da luz para um observador no solo.



Fonte: GRIFFITHS, 2011, p. 338.

De acordo com a figura 3, a distância que a luz percorre é  $\sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}$ . Então, o intervalo de tempo para o observador no solo será

$$\Delta t = \frac{\sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}}{c}.$$

Resolvendo para  $\Delta t$ , obtemos

$$\Delta t = \frac{h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

e com isso,

$$\Delta\bar{t} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta t. \quad (2.2)$$

É possível verificar que o intervalo de tempo entre os dois eventos – (a) luz sai da lâmpada e (b) luz atinge o chão – não é o mesmo para os dois observadores. O intervalo registrado no relógio do observador no trem,  $\Delta\bar{t}$ , é menor pelo fator

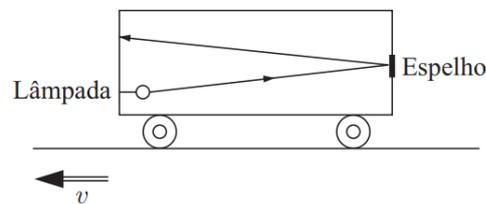
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.3)$$

Então, pode-se chegar à seguinte conclusão: **Relógios em movimento andam mais devagar.**

#### 2.4 CONTRAÇÃO DO COMPRIMENTO

Imagine agora que a lâmpada está posicionada em uma extremidade do vagão e na outra há um espelho, de modo que a luz incida no espelho e retorne ao ponto de partida, como mostrado na Figura 4.

Figura 4: Trajetória da luz antes e depois de incidir no espelho.



Fonte: GRIFFITHS, 2011, p. 341.

Para um observador no trem, o tempo para um sinal de luz bater no espelho e retornar a origem é

$$\Delta \bar{t} = 2 \frac{\Delta \bar{x}}{c}, \quad (2.4)$$

onde  $\Delta \bar{x}$  é o comprimento do vagão para o observador no trem. Para um observador fora do trem e no solo, é necessário levar em consideração o movimento do trem. Seja  $\Delta t_1$  é o tempo para a luz chegar ao espelho e  $\Delta t_2$  é o tempo para ela retornar, então:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x + v\Delta t_1}{c}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x - v\Delta t_2}{c}.$$

Resolvendo para  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$ :

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x}{c - v}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x}{c + v}.$$

Logo, para a viagem de ida e volta, o tempo é

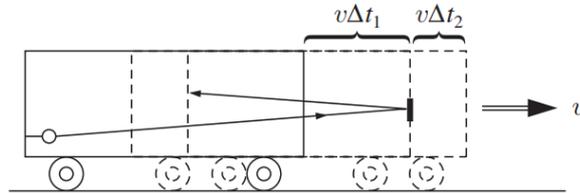
$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2 \frac{\Delta x}{c} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)}. \quad (2.5)$$

Esses intervalos estão relacionados pela fórmula de dilatação do tempo, Equação (2.2):

$$\Delta \bar{t} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta t.$$

A trajetória a luz para um observado no solo pode ser analisada de acordo com a Figura 5:

Figura 5: Representação dos espaços percorridos pela luz.



Fonte: GRIFFITHS, 2011, p. 341.

Aplicando as equações 2.4 e 2.5, é possível obter a fórmula da contração do espaço para um observador no solo:

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta x. \quad (2.6)$$

Portanto, o comprimento do vagão não é o mesmo medido por observadores diferentes. Para um observador no trem, o comprimento do vagão não sofre nenhuma alteração, mas para um observador no solo, o comprimento do sofre uma contração. Com isso, é possível concluir que: **Objetos em movimento são encurtados.**

No entanto, esse encurtamento só ocorre na direção em que o corpo está se movimentando, ou seja, **dimensões perpendiculares à velocidade não sofrem contração.**

É possível notar que o mesmo fator,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

está contido nas duas fórmulas, tanto na de dilatação do tempo, quanto na de contração do comprimento.

## 2.5 AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Um processo físico é constituído de um ou mais **eventos**. Podemos entender um evento como algo que acontece em uma posição  $(x, y, z)$ , em um determinado instante de tempo  $(t)$ . A figura 5 ilustra um evento  $E$  de coordenadas  $(x, y, z, t)$  em um sistema inercial  $S$ . Para calcularmos as coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  desse mesmo evento em outro sistema inercial  $\bar{S}$ , precisamos adequar as coordenadas de  $S$  para  $\bar{S}$ .



## 2.6 A ESTRUTURA DO ESPAÇO-TEMPO

### 2.6.1 A estrutura do espaço-tempo

**Quadrivetores:** Para assumir um aspecto mais simples, as transformações de Lorentz podem ser expressas em termos de quantidades

$$x^0 \equiv ct, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}. \quad (2.9)$$

Se numerarmos as coordenadas  $x, y, z$  de forma que

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,$$

teremos o seguinte aspecto para as transformações de Lorentz

$$\begin{aligned} \bar{x}^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1), \\ \bar{x}^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0), \\ \bar{x}^2 &= x^2, \\ \bar{x}^3 &= x^3, \end{aligned} \quad (2.10)$$

ou, na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Operando com os índices gregos de 0 a 3, pode-se escrever em uma única equação:

$$\bar{x}^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda^\mu_\nu) x^\nu, \quad (2.12)$$

sendo  $\Lambda$  a matriz de transformação de Lorentz, onde sobrescrito  $\mu$  indica a linha e o subscrito  $\nu$  indica a coluna. Um quadrivetor é definido como qualquer conjunto de quatro componentes que se transformam do mesmo modo que  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  sob as transformações de Lorentz:

$$\bar{a}^\mu = \sum_{\nu=0}^3 (\Lambda^\mu_\nu) a^\nu. \quad (2.13)$$

Os quadrivetores possuem um análogo ao produto escalar, porém os componentes de índice 0 têm sinal negativo:

$$-a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3. \quad (2.14)$$

Este é chamado produto escalar quadridimensional. O vetor  $a_\mu$  é chamado de vetor covariante, que difere do vetor contravariante  $a^\mu$  apenas pelo sinal do componente de índice 0. Para levantar ou baixar o índice temporal é necessário acrescentar o sinal negativo ( $a_0 = -a^0$ ). Já para os índices espaciais, não há alteração ( $a_1 = a^1, a_2 = a^2, a_3 = a^3$ ). Com isso, pode-se escrever o produto escalar por meio do símbolo de somatória,

$$\sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu,$$

ou, somente

$$a_\mu b^\mu. \quad (2.15)$$

Esta é a chamada notação de Einstein ou soma de Einstein, e indica que a somatória está implícita sempre que o índice se repetir em um produto – no índice covariante e no contravariante. Então, temos:

$$a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = -a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3. \quad (2.16)$$

**Intervalo invariante:** Se um evento  $A$  ocorre em  $(x_A^0, x_A^1, x_A^2, x_A^3)$ , e o evento  $B$  em  $(x_B^0, x_B^1, x_B^2, x_B^3)$ . Então a diferença,

$$\Delta x^\mu \equiv x_A^\mu - x_B^\mu, \quad (2.17)$$

é o quadrivetor deslocamento. O produto escalar de  $\Delta x^\mu$  consigo gera uma grandeza chamada de intervalo entre dois eventos:

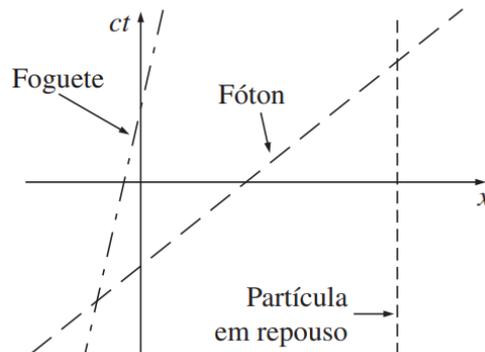
$$I = (\Delta x)_\mu (\Delta x)^\mu \\ I = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -c^2 t^2 + d^2, \quad (2.18)$$

onde  $t$  é a diferença de tempo entre dois eventos e  $d$  a separação espacial. Ao transformar para um sistema em movimento, o *tempo* entre  $A$  e  $B$  é alterado ( $\bar{t} \neq t$ ), e também a *separação espacial* ( $\bar{d} \neq d$ ), porém, o intervalo  $I$  permanece o mesmo.

**Diagramas espaço-tempo:** Para construir o gráfico do movimento de uma partícula, costuma-se traçar a posição *versus* o tempo ( $x$  na vertical e  $t$  na horizontal). Assim, a velocidade pode ser lida como a inclinação da curva. Porém, na relatividade a convenção é inversa e costuma-se colocar a posição no eixo horizontal do gráfico e o tempo ( $x^0 = ct$ ) no eixo

vertical. Uma partícula em repouso é representada por uma linha vertical, um fóton na velocidade da luz é descrito por uma linha a  $45^\circ$ , e um foguete a uma velocidade intermediária segue uma linha com inclinação  $c/v = 1/\beta$ , conforme a Figura 7.

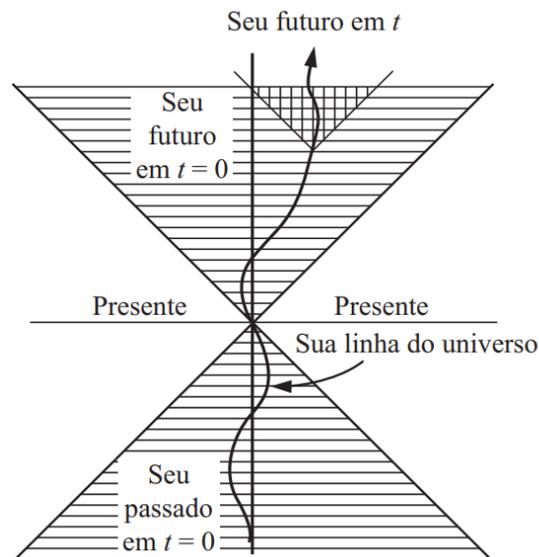
Figura 7: Representação de uma partícula, de um fóton e de um foguete próximo a velocidade da luz.



Fonte: GRIFFITHS, 2011, p. 351.

Na Figura 8 está representado o diagrama de Minkowski. A trajetória de uma partícula em um diagrama de Minkowski é chamada linha do universo. A linha do universo nunca pode ter uma inclinação menor que 1, pois nenhum objeto material pode viajar mais rápido que a luz. Logo, o movimento se restringe à região delimitada pelas duas linhas de  $45^\circ$ , conforme a Figura 8.

Figura 8: Diagrama da linha do universo de Minkowski.



Fonte: GRIFFITHS, 2011, p. 351.

Na ilustração, o seu ‘futuro’ é a região que indica todos os pontos acessíveis que alguém pode chegar a partir da origem do tempo  $t = 0$ . O seu ‘passado’ é a região que indica todos os pontos dos quais alguém possa ter vindo. A região fora das delimitações do futuro e do passado representa o ‘presente’, em que alguém não *pode* chegar e nem *veio* de lá.

### 3 TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL E SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) descreve a gravitação relacionando-a com a geometria do espaço-tempo. A geometria do espaço-tempo é descrita através de um campo tensorial, chamado de tensor métrico ou simplesmente métrica. Esse tensor é determinado pelo conteúdo de matéria e energia presente no espaço-tempo, através das equações de campo da TRG (também conhecidas como equações de Einstein). As citações e informações apresentadas neste capítulo foram extraídas de Carrol [2] e Nussenzveig [6].

#### 3.1 PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA

Considerando um referencial inercial  $S$  nas proximidades da superfície da Terra, a segunda lei de Newton pode ser escrita, para uma partícula de massa  $m$ ,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg + F_1, \quad (3.1)$$

sendo  $g$  a aceleração da gravidade e  $F_1$  as forças não gravitacionais atuando na partícula.

Considerando agora um referencial  $\bar{S}$  que se desloca em relação a  $S$  com movimento retilíneo e com aceleração  $A$ , temos que a aceleração da partícula em relação a  $\bar{x}$  é

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - A, \quad (3.2)$$

então ficamos com

$$m \left( \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + A \right) = -mg + F_1, \quad (3.3)$$

e, no caso particular em que  $A = -g$

$$m \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = F_1. \quad (3.4)$$

Através dessa análise, é possível perceber que em um referencial em queda livre no campo gravitacional, desaparecem os efeitos do campo gravitacional sobre a partícula. Esse efeito de “ausência de peso” acontece com os astronautas em órbita. A equação obtida anteriormente mostra o referencial  $S'$  como um referencial inercial na ausência de campo gravitacional. Em um campo gravitacional  $-g$  uniforme, as leis da mecânica possuem os mesmos resultados como na ausência de campo, porém em um referencial uniformemente acelerado igual a  $-g$ , ou seja, não é possível distinguir as duas situações.

Em 1908, Einstein formula o *Princípio de Equivalência* como uma conclusão a todas as leis da física:

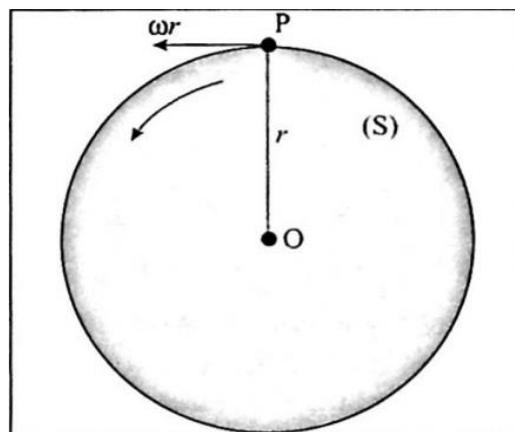
Num recinto suficientemente pequeno para que o campo gravitacional dentro dele possa ser tomado como uniforme, em queda livre dentro desse campo, todas as leis físicas são as mesmas que num referencial inercial, na ausência do campo gravitacional. (Einstein, 1908 apud Nussenzveig, 2014, p. 186-187).

Pelo princípio de equivalência, concluiu-se que referenciais acelerados (não inerciais) são equivalentes à referenciais inerciais na presença de um campo gravitacional.

### 3.2 GEOMETRIA EM REFERENCIAIS ACELERADOS

Imagine um disco de raio  $r$ , que possui velocidade angular  $\omega$  em torno de um eixo de rotação  $O$ . A velocidade  $\omega r \ll c$ , mas ainda suficientemente grande para que os efeitos relativísticos sejam considerados. Supondo que se meça o raio do disco com “régua” de uma unidade de comprimento ao longo de  $\overline{OP}$ , com isso teremos  $r$  régua, conforme a Figura 9.

Figura 9: Disco em rotação.



Fonte: NUSSENZVEIG, 2014, p. 191.

Se essa medição for feita ao longo da circunferência, teremos  $C$  régua para o disco em repouso num referencial inercial,

$$\frac{C}{r} = 2\pi. \quad (3.5)$$

Levando em consideração os efeitos relativísticos, quando o disco possui uma rotação angular  $\omega$ , as régua ao longo do raio, se movimentando numa direção perpendicular à velocidade, não sofrem alteração em seu comprimento, mas as régua que estão ao longo da circunferência e são transportadas na mesma direção da velocidade sofrem contração de

comprimento. Então, é necessário alinhar um número  $C' > C$  de unidades de comprimento para cobrir toda a circunferência, o que nos dá

$$\frac{C'}{r'} > 2\pi. \quad (3.6)$$

Para um disco em rotação, a geometria euclidiana não é válida. De acordo com o princípio de equivalência, no referencial de repouso  $S$ , existe um “campo gravitacional” (campo das forças centrífugas e de Coriolis) que deve afetar a geometria (temporal e espacial) do espaço-tempo. A geometria torna-se não euclidiana, o que corresponde a ter uma *curvatura* no espaço-tempo.

A curvatura espacial pode ser classificada em plano com valor nulo, hiperbólico com valor  $-1$ , ou seja, um universo aberto, e esférico com valor  $1$ , também chamado de universo fechado. A curvatura varia de ponto a ponto, ou seja, é uma curvatura do espaço-tempo quadridimensional e pode ser obtida através da métrica  $g_{\mu\nu}$ , onde

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \quad (3.7)$$

com  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ . A definição da geometria através da métrica é característica da geometria riemanniana.

A métrica  $g_{\mu\nu}$  contém os efeitos gravitacionais e varia de acordo com  $x$ , ou seja, de acordo com a geometria do espaço-tempo, em especial na sua curvatura. Einstein relacionou essa curvatura com a presença de matéria (equivalente a energia) através das equações da relatividade geral. A *linha do universo* de uma partícula no espaço-tempo curvo é uma geodésica – que é uma curva de comprimento mínimo entre dois pontos de um espaço curvo.

### 3.3 EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Nas equações de Einstein da relatividade geral, a gravitação é associada à curvatura do espaço-tempo e essa curvatura é relacionada à presença de matéria. Na expressão do físico John Wheeler, “a matéria diz ao espaço-tempo como se encurvar, e o espaço-tempo diz à matéria como se mover” [6]. As equações de Einstein são definidas como

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

onde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

substituindo (3.9) em (3.8), obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

que relaciona a geometria do espaço-tempo com a presença de matéria/energia. Da equação (3.10), temos:

$G_{\mu\nu}$ : Tensor de Einstein;

$R_{\mu\nu}$ : Tensor de curvatura de Ricci obtido através da contração do tensor de Riemann;

$T_{\mu\nu}$ : Tensor Energia-Momento;

$g_{\mu\nu}$ : Métrica do espaço-tempo;

$R$ : Escalar de curvatura de Ricci, dado por  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ;

$G$ : Constante gravitacional de Newton.

### 3.4 SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

Seja  $M$  a massa de uma partícula em repouso que produz um *campo gravitacional central*. Será adotado um sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  tomando a origem na partícula. A uma grande distância da partícula ( $r \rightarrow \infty$ ), o campo gravitacional tende a zero e a métrica do espaço-tempo será a de Minkowski,

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2. \quad (3.11)$$

Pela presença de  $M$ , a métrica deve ser alterada a uma distância finita, o que produz uma curvatura no espaço-tempo. Como a partícula está em repouso (estática), os coeficientes da métrica não dependem do tempo, e por se tratar de uma simetria esférica, também não dependem de  $\theta$  e  $\phi$ . Dessa forma, utilizando as unidades naturais, temos  $c = 1$ , e o elemento de linha ficará da seguinte maneira

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2, \quad (3.12)$$

onde  $f(r)$  é a função a determinar através da resolução das equações de Einstein.

Em 1916, o físico e astrônomo alemão Karl Schwarzschild obteve uma solução das equações de Einstein da relatividade geral, o que forneceu a chamada *solução de Schwarzschild*, dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_S}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.13)$$

onde,

$$r_S = 2GM. \quad (3.14)$$

é o *raio de Schwarzschild*, que é associado à massa  $M$ . Na métrica de Schwarzschild, há duas problemáticas, pois em  $r = 0$ , as componentes  $g_{00}$  e  $g_{11}$  divergem, e, para  $r = r_S$  (raio de Schwarzschild) a componente  $g_{00}$  se anula e  $g_{11}$  diverge.

Em 1939, J. R. Oppenheimer e H. Snyder estudaram o comportamento de uma estrela quando se encontra na etapa final, ou seja, quando todo combustível nuclear, que alimenta a reação termonuclear e fornece a energia estelar, se exauriu. Nesse caso, não há como a estrela produzir calor e pressão necessários para contrabalançar a atração gravitacional.

Para um objeto compacto, de massa maior que duas a três vezes a massa do Sol, sem a energia necessária, o objeto entra em *colapso gravitacional*: seu raio diminui até ser igual a  $r_S$ , e torna-se menor que  $r_S$  e dessa forma, o objeto continuaria colapsando até o centro, formando assim, um buraco negro [6].

Para compreender melhor a geometria estudada, será analisado seu comportamento através de cones de luz. Para isso, serão consideradas curvas radiais nulas, ou seja, aquelas em que  $\theta$  e  $\phi$  são constantes e  $ds^2 = 0$ . Então, ficamos com:

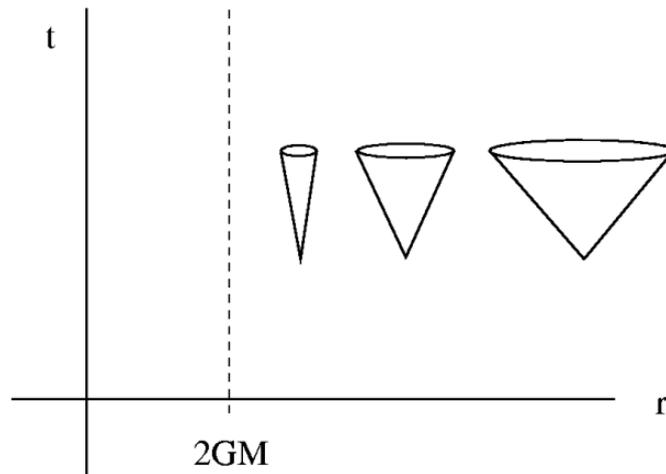
$$ds^2 = 0 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} dr^2, \quad (3.15)$$

do qual se obtém

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)}. \quad (3.16)$$

Esse resultado, mede a inclinação dos cones de luz no diagrama espaço-tempo do plano  $t \times r$ . Para  $r \rightarrow \infty$ , a inclinação é  $\pm 1$ , enquanto à medida que  $r$  se aproxima de  $r_S = 2GM$ ,  $dt/dr \rightarrow \pm \infty$ , então, os cones de luz “se aproximam”, de acordo com a Figura 10:

Figura 10: Gráfico demonstrando o comportamento dos cones de luz no diagrama espaço-tempo.



Fonte: CARROL, 1997, p. 182.

Dessa forma, para o sistema de coordenadas atual, a luz que se aproxima de  $r = 2GM$  parece que nunca chegará, porém, se parecerá a uma assíntota em relação a  $r$ . Isso é uma ilusão, pois o raio de luz (ou uma partícula massiva) não tem dificuldade em chegar à  $r = 2GM$ . Para um observador distante, os sinais enviados do objeto que está indo em direção à  $r_s$  seriam cada vez mais lentos.

Nas coordenadas atuais há o problema de que  $dt/dr \rightarrow \infty$  ao longo de geodésicas que se aproximam de  $r = 2GM$ , ou seja, o avanço na direção  $r$  parece ser cada vez mais lento em relação a coordenada  $t$ . É possível corrigir esse problema fazendo uma alteração na coordenada  $t$ , substituindo-a por uma coordenada que “se move mais devagar” ao longo das geodésicas. Primeiro, vamos considerar:

$$t = \pm r^* + C, \quad (3.17)$$

onde  $r_*$  é a *coordenada de tartaruga* e é definida por

$$r^* = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right). \quad (3.18)$$

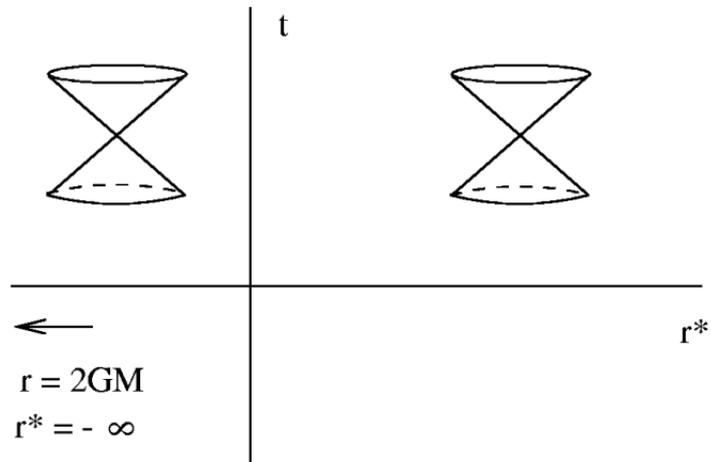
Essa coordenada está relacionada quando  $r \geq 2GM$ . Para a coordenada de tartaruga, a métrica de Schwarzschild fica

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)(-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2. \quad (3.19)$$

De acordo com (3.19), agora, os cones de luz não parecem se fechar em nenhum dos componentes métricos, mas tende ao infinito em  $r = 2GM$ . No entanto, na superfície que

desejamos interpretar, para  $r = 2GM$ , resulta em deslocarmos o horizonte ao infinito, como mostra a Figura 11.

Figura 11: Gráfico demonstrando o comportamento dos cones de luz utilizando a coordenada de tartaruga.



Fonte: CARROL, 1997, p. 184.

## 4 BURACO NEGRO DE REISSNER- NORDSTROM

Hans Jacob Reissner e Gunnar Nordström, nos anos de 1916 e 1918, respectivamente, chegaram de forma independente a uma solução das equações de Einstein, que ficou conhecida como solução de Reissner-Nordström (RN). Essa solução descreve o espaço-tempo ao redor de uma distribuição esfericamente simétrica com massa e carga elétrica. Considerando que a carga elétrica seja zero, a solução de RN fica reduzida à solução de Schwarzschild, publicada em 1916.

As soluções de RN e Schwarzschild também podem descrever o espaço-tempo de buracos negros estáticos com simétrica esférica. Os buracos negros de RN ou buracos negros carregados são uma generalização da solução de Schwarzschild e podem apresentar dois horizontes de eventos: um horizonte externo e outro interno, denominado de Cauchy. As citações e informações apresentadas neste capítulo foram extraídas de Brito *et al.* [1] e Lima Neto [4].

### 4.1 CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Para seguirmos com a solução de RN, iremos trabalhar com o seguinte quadrivetor potencial:

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = \left( \frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) = \left( \frac{Q}{r}, 0, 0, 0 \right), \quad (4.1)$$

onde  $A^0 = \frac{\phi}{c}$  é o potencial escalar,  $\vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$  o potencial vetor e  $Q$  é a carga (em unidades gaussianas) da fonte elétrica e gravitacional.

Também será definido o tensor eletromagnético ou tensor de Maxwell  $F_{\mu\nu}$  como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (4.2)$$

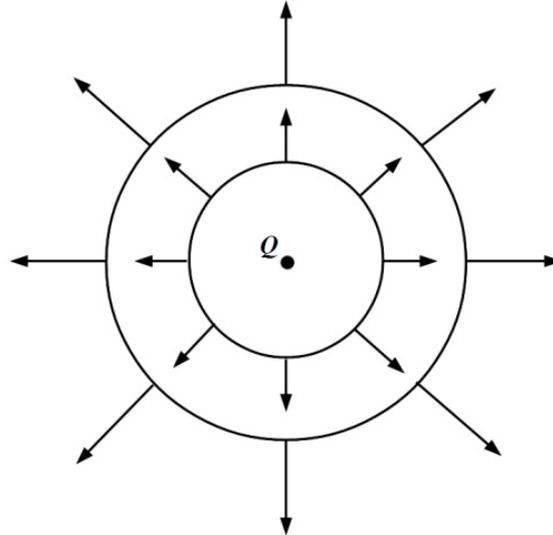
ou na forma matricial

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

onde  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$  por ser um tensor antissimétrico. Por esse motivo suas componentes na diagonal são nulas.

Como o buraco negro tratado é estático e simetricamente esférico, podemos considerar a posição da carga como sendo a origem do sistema de coordenadas, de acordo com a Figura 12.

Figura 12: Campo radial eletrostático de uma partícula pontual carregada  $Q$ .



Fonte: LIMA NETO, 2013, p. 22.

Como o campo elétrico dependerá apenas da coordenada radial, então podemos redefinir o tensor eletromagnético da seguinte forma

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & 0 & 0 \\ F_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Pelas equações de Einstein, o tensor  $G_{\mu\nu}$  é diretamente proporcional ao tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ , que define um tensor genérico. Porém, para este caso, devemos trabalhar com um tensor específico, o tensor energia momento do eletromagnetismo, que é definido por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right), \quad (4.5)$$

onde

$$F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

## 4.2 SOLUÇÃO DE REISSNER-NORDSTRÖM

O elemento de linha que descreve a solução de RN é o mesmo utilizado na solução de Schwarzschild:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2, \quad (4.7)$$

onde  $f(r)$  é a função a determinar através da resolução das equações de Einstein. A solução de  $f(r)$  é determinada da seguinte maneira:

$$f(r) = 1 + \frac{C}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}, \quad (4.8)$$

com  $C = -2GM$ . Também é possível escrever  $f(r)$  da seguinte forma:

$$f(r) = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad (4.9)$$

sendo

$$r_{\pm} \equiv GM \pm \sqrt{G^2M^2 - G^2Q^2}, \quad (4.10)$$

onde  $M$  é a massa da fonte gravitacional. Sendo a solução válida para todo  $r > 0$  e  $M^2 \geq Q^2$ , temos um espaço-tempo de um buraco negro carregado. Com isso,  $r_+$  é a posição radial do horizonte de eventos (externo) e  $r_-$  a posição radial do horizonte de Cauchy (interno). Com isso, podemos escrever a métrica da seguinte forma:

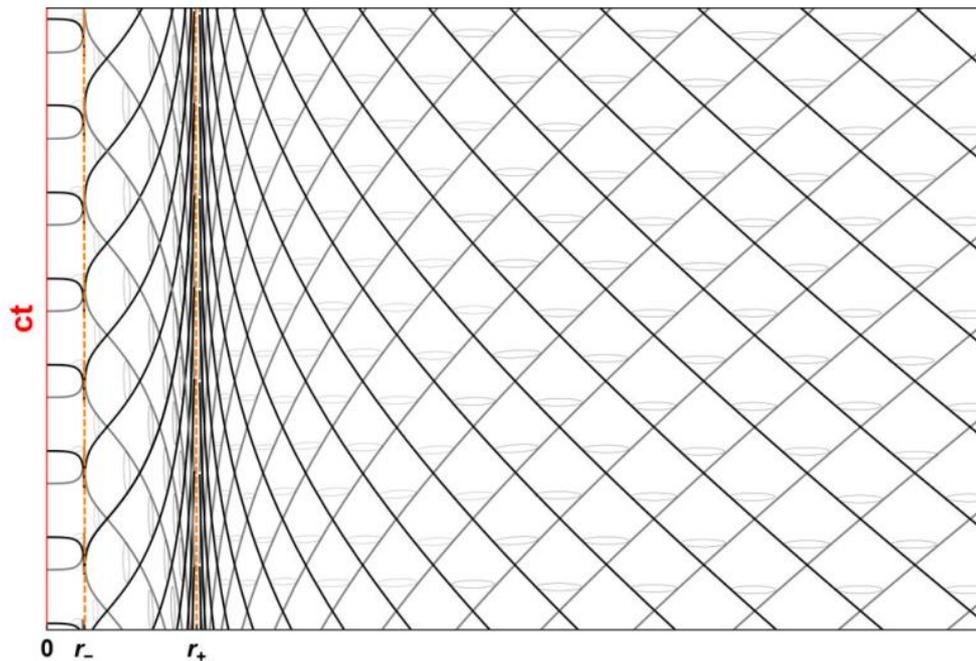
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)} dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2d\Omega^2, \quad (4.11)$$

com  $d\Omega^2 = \text{sen}^2\theta d\phi^2$ .

No cenário em que o buraco negro é descarregado ( $|Q| \rightarrow 0$ ), temos  $r_+ \rightarrow 2GM$  e  $r_- \rightarrow 0$ . Para o caso de um buraco negro carregado ( $|Q| \rightarrow M$ ), temos que os limites  $r_{\pm} \rightarrow GM$ .

É possível analisar as geodésicas radiais nulas, em que  $ds = d\theta = d\phi = 0$ , e com isso, construir um diagrama dos cones de luz do espaço-tempo de RN, nas coordenadas  $t$  e  $r$ . Desconsiderando as coordenadas angulares  $\theta$  e  $\phi$ , os cones de luz se apresentam na interseção das geodésicas tipo-luz *ingoing* (que tendem a entrar no buraco negro) e *outgoing* (que tendem a sair do buraco negro), de acordo com a Figura 12:

Figura 12: Diagrama ilustrando os cones de luz no espaço-tempo de RN.



Fonte: BRITO *et al.*, 2020, p. 3.

Dentro da hipersuperfície  $r = r_+$ , todas as trajetórias tipo-tempo e nulas necessariamente seguem na direção de  $r = r_-$ .

Analisando os efeitos através de um observador estático no infinito espacial:

- (i) as geodésicas demoram um tempo infinito para cruzar o horizonte de eventos;
- (ii) um raio de luz que emerge do horizonte de eventos sofre um desvio para o “vermelho (redshift) infinito” devido ao movimento relativo entre a fonte de luz e o observador;
- (iii) um objeto massivo que cai no buraco negro parece diminuir sua velocidade a zero à medida que se aproxima do horizonte de eventos.

Utilizando os sistemas de coordenadas naturais, esses são os mesmos efeitos observados em um buraco negro de Schwarzschild.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho propôs revisar conteúdos já vistos durante a graduação de Licenciatura em Física e também fazer um estudo introdutório sobre a TRG e sobre os buracos negros mais simples. Através das equações de Einstein, foi possível como as soluções propostas por Schwarzschild e Reissner-Nordström podem ser usadas para buracos negros simetricamente esféricos e sem rotação, ou seja, buracos negros ideias.

A pesquisa bibliográfica forneceu um básico aprofundamento nos estudos sobre a gravitação e seus efeitos no espaço-tempo, servindo também para futuras pesquisas de alunos do curso de física ou estudantes interessados sobre o tema.

Portanto, este trabalho promoveu uma base para um futuro projeto de pesquisa ou especialização na área, através de uma pós-graduação ou mestrado, contribuindo assim, significativamente para minha carreira acadêmica.

## REFERÊNCIAS

- [1] BRITO, João. P. B. *et al.* **Movimento de partículas-teste no espaço-tempo de Reissner-Nordström.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 42, 2020. Disponível em: <https://www.scielo.br/rbef>.
- [2] CARROLL, Sean M. *Lecture notes on general relativity.* Santa Barbara, CA: Institute for Theoretical Physics, University of California, 1997. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019>.
- [3] GRIFFITHS, David J. **Eletrodinâmica.** Tradução de Heloisa Coimbra de Souza. 3. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011.
- [4] LIMA NETO, Luiz Cordeiro de. **Buracos negros carregados.** 2013. 111. f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2013.
- [5] NASA. Black holes. Science@NASA, 21 de maio de 2025. Disponível em: <https://science.nasa.gov/universe/black-holes/> . Acesso em: 4 ago. 2025.
- [6] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de física básica: Ótica, relatividade e física quântica.** 2. ed. v. 4. São Paulo: Blucher, 2014.
- [7] YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física IV: Sears e Zemansky: ótica e física moderna.** Colaboração de A. Lewis Ford. Tradução de Daniel Vieira. Revisão técnica de Adir Moysés Luiz. 14. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

## APÊNDICE A

### MÉTRICA ESFERICAMENTE SIMÉTRICA (SCHWARZSCHILD)

Considerando  $c = 1$ , o elemento de linha de Schwarzschild é definida da seguinte forma:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2,$$

sendo as coordenadas

$$g_{00} = -f(r); g_{11} = \frac{1}{f(r)}; g_{22} = r^2; g_{33} = r^2\text{sen}^2\theta.$$

### OS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

Os símbolos de Christoffel são definidos por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda} \left( \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right).$$

Para  $\rho = 0$  e  $\lambda = 0$ , temos

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}g^{00} \left( \frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} \right).$$

Para  $\begin{cases} \mu = 0 \\ \nu = 1 \end{cases}$ , temos o seguinte resultado:

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2}g^{00} \left( \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} \right)$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{f} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial r} (-f) \right]$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{f'}{2f}.$$

Seguindo o mesmo método, temos que

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{f'}{2f};$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{ff'}{2};$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^0 = -\frac{f'}{2f};$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{f'}{2f};$$

$$\Gamma_{22}^1 = -fr;$$

$$\Gamma_{33}^1 = -fr\text{sen}^2\theta;$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r};$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta\text{cos}\theta;$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r};$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\text{cos}\theta}{\text{sen}\theta}.$$

## OS TENSORES DE RICCI

Os tensores de Ricci são definidos da seguinte maneira:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda}.$$

Para  $\begin{cases} \mu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases}$ , teremos

$$R_{00} = \frac{\partial\Gamma_{00}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial\Gamma_{0\lambda}^0}{\partial x^0} + \Gamma_{00}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{0\lambda}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 0}^{\lambda}.$$

Resolvendo separadamente as partes, ficamos com

$$I) \frac{\partial\Gamma_{00}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial\Gamma_{00}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial\Gamma_{00}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial\Gamma_{00}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma_{00}^3}{\partial x^3} = \frac{\partial\Gamma_{00}^1}{\partial x^1}$$

$$\frac{\partial\Gamma_{00}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{ff'}{2} \right) = \frac{1}{2} (f'f' + ff'') = \frac{f'^2}{2} + \frac{ff''}{2}$$

$$\frac{\partial\Gamma_{00}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{f'^2}{2} + \frac{ff''}{2}.$$

$$II) \Gamma_{00}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} = \Gamma_{00}^0\Gamma_{0\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{00}^1\Gamma_{1\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{00}^2\Gamma_{2\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{00}^3\Gamma_{3\lambda}^{\lambda} = \Gamma_{00}^1\Gamma_{1\lambda}^{\lambda}$$

$$\Gamma_{00}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} = \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3$$

$$\Gamma_{00}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} = \frac{ff' f'}{2} \frac{f'}{2f} + \frac{ff'}{2} \left( -\frac{f'}{2f} \right) + \frac{ff' 1}{2} \frac{1}{r} + \frac{ff' 1}{2} \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{00}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} = \frac{ff'}{r}.$$

$$III) \Gamma_{0\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^{\lambda} = \Gamma_{0\lambda}^0 \Gamma_{00}^{\lambda} + \Gamma_{0\lambda}^1 \Gamma_{10}^{\lambda} + \Gamma_{0\lambda}^2 \Gamma_{20}^{\lambda} + \Gamma_{0\lambda}^3 \Gamma_{30}^{\lambda} = \Gamma_{0\lambda}^0 \Gamma_{00}^{\lambda} + \Gamma_{0\lambda}^1 \Gamma_{10}^{\lambda}$$

$$\Gamma_{0\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^{\lambda} = (\Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{02}^0 \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{03}^0 \Gamma_{00}^3) + (\Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{02}^1 \Gamma_{10}^2 + \Gamma_{03}^1 \Gamma_{10}^3)$$

$$\Gamma_{0\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^{\lambda} = (\Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1) + (\Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0) = \left( \frac{f'}{2f} \frac{ff'}{2} \right) + \left( \frac{ff'}{2} \frac{f'}{2f} \right)$$

$$\Gamma_{0\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^{\lambda} = \frac{f'^2}{2}.$$

Com isso, ficamos com

$$R_{00} = \frac{f'^2}{2} + \frac{ff''}{2} + \frac{ff'}{r} - \frac{f'^2}{2}$$

$$R_{00} = \frac{ff''}{2} + \frac{ff'}{r}$$

Seguindo os mesmos métodos, temos que

$$R_{11} = -\frac{f''}{2f} - \frac{f'}{rf}$$

$$R_{22} = -f'r - f + 1$$

$$R_{33} = \text{sen}^2\theta(-f'r - f + 1).$$

## O ESCALAR DE RICCI

O escalar de Ricci é definido como:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Substituindo os valores obtidos anteriormente, temos que

$$R = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}$$

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{1}{f} \left( \frac{ff''}{2} + \frac{ff'}{r} \right) + f \left( -\frac{f''}{2f} - \frac{f'}{rf} \right) + \frac{1}{r^2} (-f'r - f + 1) \\
&\quad + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} [\text{sen}^2 \theta (-f'r - f + 1)] \\
R &= -f'' - \frac{4f'}{r} - \frac{2f}{r^2} + \frac{2}{r^2}.
\end{aligned}$$

### EQUAÇÕES DE EINSTEIN

As equações de Einstein no vácuo são definidas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0.$$

Para  $\begin{cases} \mu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases}$ , temos

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 0.$$

Fazendo as devidas substituições, ficamos com

$$\left( \frac{ff''}{2} + \frac{ff'}{r} \right) - \frac{1}{2} (-f) \left( -f'' - \frac{4f'}{r} - \frac{2f}{r^2} + \frac{2}{r^2} \right) = 0$$

$$\frac{ff''}{2} + \frac{ff'}{r} - \frac{ff''}{2} - \frac{2ff'}{r} - \frac{f^2}{r^2} + \frac{f}{r^2} = 0$$

$$-\frac{ff'}{r} - \frac{f^2}{r^2} + \frac{f}{r^2} = 0.$$

Simplificando e manuseando a equação, temos

$$rf' + f - 1 = 0$$

$$r \frac{df}{dr} = 1 - f$$

$$\int \frac{df}{1-f} = \int \frac{dr}{r}$$

$$-\ln(1-f) = \ln r + \ln C$$

$$\ln(1-f)^{-1} = \ln(rC)$$

$$\frac{1}{1-f} = rC$$

$$1-f = \frac{C}{r}$$

$$f = 1 - \frac{C}{r}$$

onde  $C = 2GM$ . Com isso, obtemos a solução de Schwarzschild através das equações de Einstein. Portanto, o elemento de linha fica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2.$$

## APÊNDICE B

### SOLUÇÃO DE REISSNER-NORDSTRÖM

Para seguir com a solução, será considerado  $c = 1$ .

### TENSOR ELETROMAGNÉTICO

Para  $\begin{cases} \mu = 0 \\ \nu = 1 \end{cases}$ , temos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{\partial}{\partial t}(0) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q}{r}\right)$$

$$F_{01} = \frac{Q}{r^2}.$$

Para  $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , temos

$$F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10}$$

$$F^2 = -F_{01}F_{01} - F_{10}F_{10}$$

$$F^2 = -2(F_{01})^2$$

$$F^2 = -\frac{2Q^2}{r^4}.$$

Agora, calculando o tensor energia-momento do campo eletromagnético  $T_{\mu\nu}$ , temos que

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\mu\alpha}F_\nu^\alpha - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2 \right),$$

Para  $\begin{cases} \mu = 0 \\ \nu = 0, \text{ ficamos com} \\ \alpha = 1 \end{cases}$

$$T_{00} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{01}F_0^1 - \frac{1}{4}g_{00}F^2 \right)$$

$$T_{00} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{01}F_{01}g^{11} - \frac{1}{4}g_{00}F^2 \right).$$

Substituindo os dados obtidos anteriormente, temos

$$T_{00} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{Q^2 f}{r^4} - \frac{1}{4}(-f) \left( -\frac{2Q^2}{r^4} \right) \right]$$

$$T_{00} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{Q^2 f}{r^4} - \frac{1}{2} \frac{Q^2 f}{r^4} \right)$$

$$T_{00} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{2} \frac{Q^2 f}{r^4} \right)$$

$$T_{00} = \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2 f}{r^4}.$$

EQUAÇÕES DE EISNTEIN

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Para  $\begin{cases} \mu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases}$ , temos

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 8\pi T_{00}.$$

O tensor de curvatura de Ricci  $R_{00}$  e o escalar de curvatura  $R$  são os mesmos encontrados no apêndice A. Com isso, ficamos com

$$\frac{ff''}{2} + \frac{ff'}{r} - \frac{1}{2}(-f) \left( -f'' - \frac{4f'}{r} - \frac{2f}{r^2} + \frac{2}{r^2} \right) = 8\pi G \left( \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2 f}{r^4} \right)$$

$$\frac{ff''}{2} + \frac{ff'}{r} - \frac{ff'}{2} - \frac{2ff'}{r} - \frac{f^2}{r^2} + \frac{f}{r^2} = \frac{GQ^2 f}{r^4}$$

$$-\frac{ff'}{r} - \frac{f^2}{r^2} + \frac{f}{r^2} = \frac{GQ^2 f}{r^4}$$

$$rf' + f = 1 - \frac{GQ^2}{r^2}.$$

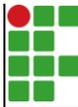
Resolvendo para  $f$ , temos:

$$f(r) = 1 + \frac{C}{r} + \frac{GQ^2}{r^2},$$

com  $C = -2GM$ .

Com isso, o elemento de linha pode ser escrito da forma

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

	<b>INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA</b>
	Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
	R. Tranquílino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

## Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

### Entrega de TCC

<b>Assunto:</b>	Entrega de TCC
<b>Assinado por:</b>	Joao Silva
<b>Tipo do Documento:</b>	Anexo
<b>Situação:</b>	Finalizado
<b>Nível de Acesso:</b>	Ostensivo (Público)
<b>Tipo do Conferência:</b>	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- João Gabriel Gomes da Silva, ALUNO (202011240009) DE LICENCIATURA EM FÍSICA - CAMPINA GRANDE, em 23/08/2025 16:45:31.

Este documento foi armazenado no SUAP em 23/08/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1583855

Código de Autenticação: b0bb7f117b

