



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Adrielly Valeska Gonçalves de Oliveira

POLINÔMIOS DE LEGENDRE: Uma aplicação em Integrais

CAMPINA GRANDE - PB

2025

Adrielly Valeska Gonçalves de Oliveira

POLINÔMIOS DE LEGENDRE: Uma aplicação em Integrais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Ma. Kíssia Carvalho
Coorientador: Prof. Me. Balduino Sonildo da Nóbrega

Catálogo na fonte:

Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

O48p Oliveira, Adrielly Valeska Gonçalves de.

Polinômios de Legendre: uma aplicação em integrais /
Adrielly Valeska Gonçalves de Oliveira. - Campina Grande,
2025.

97 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em
Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da
Paraíba, 2025.

Orientadora: Profa. Ma. Kíssia Carvalho.

Coorientador: Prof. Me. Balduino Sonildo da Nóbrega.

1. Polinômios de Legendre. 2. Integração numérica. 3.
Quadratura de Gauss-Legendre. I. Carvalho, Kíssia. II.
Nóbrega, Balduino Sonildo da. III. Título

CDU 517.9

Dedico este trabalho a toda minha família.

Adrielly Valeska Gonçalves de Oliveira

POLINÔMIOS DE LEGENDRE: Uma aplicação em Integrais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 12 / 08 / 2025

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **KISSIA CARVALHO**
Data: 18/08/2025 19:43:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profª. Ma. Kíssia Carvalho
Orientadora

Instituto Federal da Paraíba - Campus CG

Documento assinado digitalmente
 **BALDOINO SONILDO DA NOBREGA**
Data: 18/08/2025 11:59:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Baldoino Sonildo da Nóbrega
Coorientador

Instituto Federal da Paraíba - Campus CG

Documento assinado digitalmente
 **JONATHAS JERONIMO BARBOSA**
Data: 18/08/2025 13:54:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jonathas Jerônimo Barbosa
Instituto Federal da Paraíba - Campus CG

Documento assinado digitalmente
 **TACIANA ARAUJO DE SOUZA**
Data: 18/08/2025 00:01:03-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dra. Taciana de Araújo de Souza
Instituto Federal da Paraíba - Campus JP

AGRADECIMENTOS

Para realizar este trabalho, pude contar com a ajuda de algumas pessoas às quais prestarei, através de poucas palavras, os meus sinceros agradecimentos:

Primeiramente quero agradecer a Deus por esta presente em todos os momentos de minha vida e por ser tão bondoso e misericordioso em minha vida.

Aos meus pais, Ivone Gonçalves dos Santos e Edicio Gonçalves de Oliveira, aos meus irmãos, Evertton Onofre e Kayron Rosil por terem me dado muita força e incentivo que foram fundamentais nesta trajetória, e ao meu namorado Iallison Rodrigues, por todo apoio e carinho, que mesmo de longe nunca deixou de me incentivar.

Aos meus amigos, Ester Gomes, Pedro Igor, Manoel Victor, Luis Vinicius, Livia, Beatriz, Renildo, Lucas que estiveram comigo desde do começo e nunca me deixaram desistir.

A Professora e Orientadora Profa. Ma. Kíssia Carvalho, pela atenção, compreensão, paciência, ensinamentos, dedicação e carinho a este trabalho.

Ao Professor e Coorientador Prof. Me. Balduino Sonildo da Nóbrega, por toda compreensão, ensinamentos e dedicação a este trabalho.

A todos os Professores do curso de Licenciatura em Matemática, ao IFPB por todo aconchego e estrutura, em nome de Aécio, agradeço a todos os funcionários do IFPB em geral. A CAPES, pelo PIBID que foi um grande incentivo para o curso e que serviu de muita experiência e aprendizado.

Enfim, a todos os envolvidos que contribuíram para a realização deste trabalho.

*“Ainda que eu andasse pelo vale da sombra da morte, não temeria mal algum, porque tu
estás comigo.”
(Salmos 23:4)*

RESUMO

Há integrais definidas que não podem ser resolvidas por métodos analíticos, torna-se necessária a utilização de técnicas de integração numérica. Os Métodos como Newton-Cotes (Trapézio e Simpson) e Quadratura de Gauss-Legendre permitem estimar com precisão o valor de integrais em contextos onde a solução analítica é inviável ou temos pontos discretos da função a ser integrada. O objetivo deste trabalho é investigar o papel dos Polinômios de Legendre como base teórica para o método da Quadratura de Gauss-Legendre, afim de compreender sua importância e possíveis aplicações. Para isso, foram estudadas suas origens, propriedades, a fundamentação teórica da integração numérica de Gauss-Legendre, além de realizar aplicações práticas do método. A pesquisa é de natureza quali-quantitativa, caráter básico e aplicado, baseou-se em revisão bibliográfica de obras e artigos nas áreas de cálculo numérico e equações diferenciais, e experimentos em casos reais. Os resultados obtidos confirmam a hipótese de que os Polinômios de Legendre são essenciais para o desenvolvimento da Quadratura de Gauss-Legendre e apresentam ampla aplicabilidade em problemas reais. Espera-se que este trabalho contribua para o aprofundamento do tema e sirva de base para estudos futuros.

Palavras-chave: Integração numérica. Polinômios de Legendre. Gauss-Legendre. Aplicações.

ABSTRACT

There are definite integrals that cannot be solved by analytical methods, the use of numerical integration techniques becomes necessary. Methods such as Newton-Cotes (Trapezoidal and Simpson's rules) and Gauss-Legendre Quadrature allow for accurate estimation of integral values in contexts where an analytical solution is unfeasible or when we have discrete points of the function to be integrated. The objective of this work is to investigate the role of Legendre Polynomials as the theoretical basis for the Gauss-Legendre Quadrature method, aiming to understand their importance and possible applications. To this end, their origins, properties, and the theoretical foundation of Gauss-Legendre numerical integration were studied, in addition to conducting practical applications of the method. The research is of a qualitative-quantitative nature, with a basic and applied approach, based on a bibliographic review of works and articles in the fields of numerical calculus and differential equations, as well as experiments with real-world cases. The obtained results confirm the hypothesis that Legendre Polynomials are essential for the development of Gauss-Legendre Quadrature and demonstrate broad applicability in real-world problems. It is expected that this work contributes to a deeper understanding of the topic and serves as a foundation for future studies.

Keywords: Numerical integration. Legendre Polynomials. Gauss-Legendre. Applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Le Collège des Quatre-Nations - Gravura de Israel Silvestre, 1670	14
Figura 2 – Nome de Legendre na Torre Eiffel	16
Figura 3 – Imagens do político e do matemático Legendre	17
Figura 4 – Imagem do livro Elementos da Geometria	19
Figura 5 – Imagem do livro Teoria dos Números	19
Figura 6 – Livros de Legendre	21
Figura 7 – Polinômios de Legendre para $\ell=0,1,2,3$	33
Figura 8 – Imagem de Olinda Rodrigues	34
Figura 9 – Área sob curva	42
Figura 10 – Área Sob a curva dividida em retângulos	43
Figura 11 – Área sob o gráfico de f de a até x	44
Figura 12 – Área sob o gráfico de uma função comparado a escolha de pontos	48
Figura 13 – Área sob o gráfico de uma função comparado a escolha de pontos	49
Figura 14 – Área sob o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e do polinômio $p(x)$	52
Figura 15 – Tabela de abscissas e pesos para quadratura de Gauss-Legendre	69
Figura 16 – Gráfico da função $e^x + \text{sen}(x)$ e da função $e^x = -\text{sen}(x)$	70
Figura 17 – Cálculo da abscissas e pesos para as fórmulas de Gauss-Legendre	70
Figura 18 – Algoritmo Gauss-Legendre	71
Figura 19 – Área sob o gráfico de $f(x) = e^{-x^2}$ e dos polinômios $p(x)$	72
Figura 20 – Área sob o gráfico de $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$ e dos polinômios $p(x)$	72
Figura 21 – Área sob o gráfico de $f(x) = \cos(x^2)$ e dos polinômios $p(x)$	72
Figura 22 – Gráfico da função $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$	75
Figura 23 – Açude velho dividido em 35 subintervalos de 26 m	80
Figura 24 – Área do açude calculada pelo Google Earth	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades da função gama	30
Tabela 2 – Propriedades da função gama para x real	30
Tabela 3 – Tabela com polinômios de Legendre.	32
Tabela 4 – Polinômios de Legendre para alguns valores de ℓ	39
Tabela 5 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$	51
Tabela 6 – Tabela de Complexidade computacional por operações do método Gauss- Legendre	61
Tabela 7 – Tabela de resultados do 1º teste	62
Tabela 8 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$ do 1º teste para $n = 2$	62
Tabela 9 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$ do 1º teste para $n = 3$	63
Tabela 10 – Tabela de resultados do 2º teste	64
Tabela 11 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$ do 2º teste para $n = 2$	64
Tabela 12 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$ do 2º teste para $n = 3$	64
Tabela 13 – Tabela de resultados do 3º teste	66
Tabela 14 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$ do 3º teste para $n = 2$	66
Tabela 15 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$ do 3º teste para $n = 3$	66
Tabela 16 – Tabela de resultados obtidos na implementação no MATLAB	76
Tabela 17 – Tabela de resultados obtidos no MATLAB e manualmente	76
Tabela 18 – Tabela de resultados obtidos pela quadratura de Gauss-Legendre e Go- ogle Earth	82

SUMÁRIO

Sumário	10
1 Introdução	11
2 Polinômios de Legendre	14
2.1 Um pouco de História	14
2.1.1 Algumas contribuições matemáticas de Legendre	17
2.2 Equação Diferencial Ordinária de Legendre - A origem dos polinômios de Legendre	22
2.2.1 Gerando os polinômios de Legendre	33
2.3 A fórmula de Rodrigues	34
2.4 Relação de Ortogonalidade para os Polinômios de Legendre	36
3 Calculo de Integrais	41
3.1 A Integral	41
3.2 Integrais Numéricas	45
3.3 Quadratura de Gauss-Legendre	47
3.3.1 Implementação	60
3.3.2 Testes	62
4 Aplicações da quadratura de Gauss-Legendre	73
4.0.1 Aplicação 1	73
4.0.2 Aplicação 2	77
4.0.3 Aplicação 3	79
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	84
REFERÊNCIAS	86
Anexos	88
ANEXO A Código em MATLAB para integração por Gauss-Legendre de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$ e $\int_0^\pi \cos(x^2) dx$	89
ANEXO B Código em MATLAB para integração por Gauss-Legendre de $\int_0^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$	94
ANEXO C Implementação no PYTHON pela quadratura de Gauss-Legendre da aplicação 3	96

1 INTRODUÇÃO

Os polinômios de Legendre surgiram no final do século XVIII, no contexto dos estudos do matemático e astrônomo francês Adrien-Marie Legendre. Inicialmente, esses polinômios apareceram na resolução da equação de Laplace em coordenadas esféricas, especialmente na análise do potencial gravitacional e eletrostático de corpos esféricos. Legendre utilizou essas funções para simplificar problemas envolvendo simetria esférica, dando origem a uma classe de funções ortogonais que hoje são fundamentais na física matemática (EVES, 2004).

Matematicamente, os polinômios de Legendre formam uma sequência de funções ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com respeito ao peso constante $w(x) = 1$. Essa propriedade de ortogonalidade os torna ideais para diversas aplicações em aproximação de funções, séries ortogonais e, especialmente, integração numérica. Eles também satisfazem uma equação diferencial de segunda ordem conhecida como equação de Legendre, o que os qualifica como soluções em muitos problemas clássicos da física.

Nas aplicações modernas, os polinômios de Legendre aparecem em várias áreas, como:

- Métodos de quadratura de Gauss, como o Gauss-Legendre, utilizados em integração numérica de funções suaves (CAMPOS FILHO, 2007; CHAPRA; RAYMOND, 2016);
- Métodos espectrais e de Galerkin, na solução numérica de equações diferenciais parciais (LIMA; LOBATO, 2024; AL-TAWEEL; HUSSAIN; MALLIKARJUNIAH, 2025);
- Expansões em séries de Legendre, na física teórica e na engenharia, para resolver problemas de potencial, ondas e difusão (JUNIOR, 2012);
- Análise estatística e harmônica, especialmente em modelagem de superfícies esféricas (como no estudo da radiação cósmica de fundo, na cosmologia) (PEREIRA, 2008).

O estudo de integrais é uma parte essencial do cálculo integral e possui aplicações em diversas áreas do conhecimento, como física, engenharia, estatística e economia. A integração pode ser vista como o processo inverso da diferenciação (Teorema fundamental do Cálculo - Parte I), e sua principal aplicação é a determinação da área sob curvas, o cálculo de volumes, trabalho, massa e outras grandezas contínuas.

As integrais analíticas (algébricas) referem-se às soluções obtidas por meio de técnicas formais e exatas da matemática, como substituições, integração por partes, frações parciais, entre outras. Esse tipo de abordagem busca expressar o resultado da integral em termos de funções conhecidas (como polinômios, logaritmos, exponenciais, etc.). No entanto, nem todas as funções possuem primitivas expressáveis em forma fechada, o que

significa que muitas integrais definidas não podem ser resolvidas analiticamente, mesmo sendo bem definidas do ponto de vista matemático.

Diante dessa limitação, surge a necessidade das integrais numéricas, que consistem em métodos de aproximação para calcular o valor de uma integral definida com base em avaliações da função em certos pontos do intervalo. Esses métodos, como os de Newton-Cotes (Trapézio, Simpson) e os métodos de quadratura de Gauss (como o Gauss-Legendre), são fundamentais na prática computacional, pois permitem estimar com boa precisão o valor de integrais que não têm solução exata ou cuja obtenção analítica (ou algébrica) é inviável.

O avanço da computação permitiu que os métodos numéricos se tornassem uma alternativa eficiente e confiável. Dessa forma, o estudo das integrais numéricas não apenas complementa o tratamento analítico, como também oferece uma abordagem poderosa para problemas reais, em que funções são obtidas por medidas experimentais ou possuem comportamentos complexos que dificultam a manipulação simbólica.

Para um professor de matemática, entender as integrais numéricas vai além do domínio técnico: trata-se de ampliar a visão sobre como a matemática é aplicada na prática e como ela evolui para responder a problemas reais. Embora o ensino tradicional valorize as técnicas analíticas de integração, muitos problemas no mundo físico não admitem soluções fechadas e exigem métodos de aproximação. Conhecer e saber explicar métodos como a quadratura de Gauss-Legendre permite ao professor de matemática compreender que a matemática é viva, dinâmica e aplicada — conectando teoria e prática.

A principal motivação para este trabalho foi demonstrar que a matemática vai além do cálculo algébrico, podendo ser aplicada com a mesma eficácia no campo da análise numérica. Essa abordagem permite resolver uma ampla variedade de problemas em áreas como física, engenharia, economia, entre outras. Além disso, busquei evidenciar que é possível realizar cálculos numéricos com precisão tanto manualmente quanto por meio de implementações computacionais em linguagens como Python e MATLAB.

Neste contexto, surge um questionamento: COMO OS POLINÔMIOS DE LEGENDRE CONTRIBUEM PARA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA? E É POSSÍVEL APLICAR EM QUAIS SITUAÇÕES PRÁTICAS? Para responder a essa pergunta foi definido como objetivo geral, compreender qual a importância dos Polinômios de Legendre no método de integração da quadratura de Gauss-Legendre. Desta forma, para alcançar o objetivo geral foram definidos os seguintes objetivos específicos: Estudar a origem e propriedades dos Polinômios de Legendre, entender e analisar como é o desenvolvimento teórico do Integração Numérica pela quadratura de Gauss-Legendre, aplicar em situações reais a Integração Numérica. A hipótese é que o Polinômio de Legendre é a base do método de Integração de Gauss-Legendre e tem aplicações nas mais diversas áreas de estudo.

Deste modo, apoiando-se nos conceitos de [Prodanov \(2013\)](#) esta é uma pesquisa qualitativa, de cunho básico e aplicado, que inicia-se com uma revisão histórica docu-

mental e bibliográfica, que é diluída ao longo dos capítulos desse trabalho. Também foi realizada uma revisão bibliográfica em livros de Equações Diferenciais para compreensão de conceitos matemáticos do Polinômio de Legendre e suas propriedades. Para o estudo das Integrais analíticas e numéricas foram estudados trabalhos de conclusão de cursos, artigos e livros de Cálculo diferencial e Integral, Cálculo Numérico e Métodos Numéricos, que torna essa pesquisa também de cunho exploratório e descritivo. Os livros de Cálculo Numérico e Métodos Numéricos também serviram de base para implementação e teste do método de integração que foi utilizado para solucionar as aplicações encontradas na literatura consultada bem como para aplicação inédita, assim sendo essa pesquisa também é de cunho experimental.

Desta forma esse trabalho se divide em quatro capítulos além da introdução. Um capítulo que trata do Polinômio de Legendre, sua historia, obtenção e propriedades, seguido do estudo das integrais com ênfase no método de integração numérica de Gauss-Legendre. Um capítulo em que apresentados algumas aplicações que podem ser solucionados com o Método de Gauss-Legendre e o último capítulo apresenta as considerações finais e lacunas para futuros trabalhos.

Espero que este trabalho contribua tanto para minha formação como docente quanto para aqueles que venham a consultá-lo, evidenciando a importância dos polinômios de Legendre no desenvolvimento do cálculo numérico. E ressaltando que esses polinômios desempenham um papel fundamental na resolução de equações diferenciais e Integrais que não admitem solução analítica, além de oferecerem ferramentas eficazes para lidar com problemas reais que exigem esse tipo de abordagem matemática.

2 POLINÔMIOS DE LEGENDRE

O presente capítulo discorre sobre a história de Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), do seu nascimento, desenvolvimento como cidadão e profissional até sua morte, e suas contribuições acadêmicas na área de Matemática e Física. Destacando a equação de Legendre, sua resolução por séries que geram os Polinômios de Legendre e suas propriedades, que dá nome a este capítulo.

2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Adrien-Marie Legendre nasceu no mês de setembro de 1752, na cidade de Paris (SILVA, 2010). Sua família tinha algumas posses porém, não era da nobreza, mesmo assim Legendre estudou em um dos colégios mais avançados do século XVII, chamado Colégio Mazarin conhecido como *Le Collège des Quatre-Nations* (Colégio das Quatro Nações - Figura 1), e foi neste colégio que começou a surgir o seu interesse, por livros científicos, literatura antiga e especificamente matemática.

Figura 1 – Le Collège des Quatre-Nations - Gravura de Israel Silvestre, 1670



Fonte: Blog Matemática na Veia ¹

Ao decorrer dos estudos, perceberam que Legendre era superdotado e segundo Silva (2010, p. 21-22) “Aos 18 anos ele defendeu sua tese em Matemática e em Física e concluiu seus estudos no Colégio Mazarin em Paris. Em 1774, aos 22 anos, publicou um tratado de Mecânica com a coparticipação de Joseph-François Marie”, que era seu professor de matemática e física do mesmo colégio.

Ainda segundo Silva (2010), em 1775, Legendre foi nomeado professor na Escola Militar de Paris, cargo que ocupou até 1780. Dois anos depois, aconteceu um feito que deixou Legendre independente financeiramente e com uma dedicação exclusiva a pesquisa, que foi o Grande Prêmio da Academia de Ciências em Berlim com o seu trabalho Trajetórias em projéteis em meios resistentes. E neste mesmo ano, publicou seu trabalho de Figuras

de Planetas em que demonstrou que a forma elipsoidal é a única forma conveniente a uma massa fluida e homogênea no movimento de rotação.

No mês de março do ano de 1783, Laplace foi promovido a membro efetivo da Academia de Ciências em Paris, com isso Legendre assumiu o cargo antigo de Laplace como membro adjunto da Academia, e anos depois foi promovido a membro efetivo da classe de Mecânica da Academia de Paris, em 1795.

Em 1785, a academia designou a Legendre juntamente com Cassini² e Méchain³ para “realizar as medidas geodésicas de Greenwich à Paris, cujos trabalhos foram iniciados em 1789.” Silva (2010, p. 22-23). Para realizar estas medidas, Legendre empregou métodos analíticos para calcular o arco meridiano entre Greenwich e Paris, utilizando triângulos esféricos, assim como aqueles que conectavam a costa da Inglaterra a Greenwich.

Este trabalho resultou em um grande cargo para Legendre como membro da Sociedade Real de Londres em novembro de 1788, porém só se tornou membro efetivo em abril de 1789. Como membro da Academia, Legendre divulgou contribuições significativas tanto para Matemática quanto para Física. Legendre, Cassini e Méchain que já tinham sido nomeados pela Academia de Ciências em Paris, foram convocados novamente para integrar a comissão responsável pelos cálculos finais da definição do sistema métrico único.

Alguns anos depois, Legendre casou-se com Marguerite-Claudine Couhin em 1792, permaneceu com ela por 40 anos, sem deixar herdeiros. Em uma carta dele, escrita para Jacobi em 30 de junho de 1832, Legendre revela que foi sua amada esposa ao final da vida que o ajudou a recuperar seus negócios (que foram perdidos por causas não identificadas durante a Revolução Francesa), proporcionando a tranquilidade necessária para que ele focasse em seus trabalhos e novas obras.

Ao conseguir recuperar suas finanças, Legendre não parou de produzir. Em 1792 produziu seu trabalho sobre os transcendentel elípticos, que foi lido apenas pela Academia de Ciência, pois a academia veio a fechar sem publicá-lo. Porém, em 1793 Legendre, finalmente com muita luta, conseguiu publicar o trabalho com recursos próprios, sem vínculos acadêmicos.

Por um certo período de tempo, Legendre ficou afastado dos cargos de professor nas instituições. O motivo desse afastamento é explicado por Beaumont⁴ cuja fala diz que Legendre não foi chamado para as instituições ou as escolas normais por conta da sua situação financeira e por outros motivos não citados, porém isso não perdurou por muito tempo, pois seus colegas o reconheceram e o incluíram no Instituto Nacional na cadeira de Matemática.

² Cassini foi o primeiro astrônomo a observar as luas de saturno e é conhecido como um dos pesquisadores mais importantes dos séculos XVII e XVIII. As descobertas de Cassini foram tão memoráveis que em 1997, a Missão Cassini-Huygen foi lançada ao espaço com rota para Saturno.

³ Méchain era um observador astrônomo, em 1781 descobriu dois cometas e calculou a órbita dos cometas de 1532 e 1661, provando que eles não eram os mesmos.

⁴ Beaumont foi um cirurgião do Exército dos Estados Unidos que se tornou conhecido como o pai da Filosofia gástrica, pelas suas pesquisas sobre a digestão humana.

Após seus colegas o reconhecerem, Legendre voltou a exercer sua docência, tornando-se professor da primeira classe, da seção de Ciência Física e Matemática em dezembro de 1795, ano em que foi criado o Instituto Nacional da França. E embora exercesse a profissão docente, Legendre não interrompeu suas pesquisas científicas.

Um ano antes de voltar ao Instituto, foi lançada a primeira edição de *Éléments de Géométrie* (Elementos da Geometria), seu livro mais célebre. Legendre assegurou sua fortuna por conta do seu livro que superou a marca de cem mil exemplares vendidos, teve uma grande repercussão que alcançou vinte edições ainda com o autor em vida. E em 1805, a partir da obra de determinações ópticas dos cometas, Legendre criou uma régua de cálculos na determinação de pequenas medidas na trajetória dos cometas.

Além de sua trajetória acadêmica, Legendre ocupou alguns cargos no serviço público em 1808, como Conselheiro Titular na recém criada Universidade Imperial, se tornou membro do Conselho de Instrução Pública, recebeu também uma medalha na Legião de Honra. Segundo [Silva \(2010, p.39\)](#) “Em 1813 Legendre ocupou o lugar vago, por ocasião da morte de Lagrange, no Bureau de Longitudes, posto em que permaneceu até o fim de sua vida (ARQUIVOS DA ACADEMIA DE CIÊNCIAS DE PARIS, 2009; GILLESPIE, 1970-1980, Vol. VIII).”

Legendre veio a óbito em 9 de janeiro de 1833 em Paris. Como ele foi uma figura muito importante para o ensino de Matemática em Paris, seu nome foi gravado no monumento mais famoso de Paris que é a Torre Eiffel junto com o nome de mais 72 cientistas importantes para a França (Figura 2). Ele também foi homenageado com seu nome em uma rua da capital francesa. Entretanto, em 1824, Legendre recusou-se a votar no candidato do governo para o Instituto Nacional, com isso sua pensão foi suspensa e ele morreu na pobreza.

Figura 2 – Nome de Legendre na Torre Eiffel



Fonte: Clube de Matemática da OBMEP

Um fato curioso sobre Legendre, é que por muito tempo o identificavam como esta

Figura 3 – Imagens do político e do matemático Legendre



(a) Imagem do político Louis Legendre



(b) Caricatura Andrien-Marie Legendre

Fonte: Wikipedia

representado na Figura 3a, porém este não é Andrien-Marie Legendre, na verdade quem aparece na figura é o político francês Louis Legendre. O verdadeiro retrato que temos de Legendre, é apenas uma caricatura, como mostrado na Figura 3b. Segundo [Clubes de Matemática da OBMEP \(2025\)](#) “O mal-entendido foi solucionado em 2007 pelo professor Gerard P. Michon em seu site Numericana, mas veio à tona novamente em um artigo de Peter Duren chamado *Changing Faces: The Mistaken Portrait of Legendre* (Rostos em Mudança: O Equivocado Retrato de Legendre) publicado na edição de Dezembro de 2009 da revista *Notices of the American Mathematical Society*”.

Segundo o site Mac Tutor [5](#), Adrien-Marie Legendre talvez não tivesse gostado de conhecermos tanto sobre sua vida pessoal, pois no discurso do funeral de Legendre, Poisson [6](#) escreveu:

“Nosso colega expressou muitas vezes o desejo de que, ao falar dele, se tratasse apenas de suas obras, que são, na verdade, toda a sua vida.”

2.1.1 Algumas contribuições matemáticas de Legendre

Como já foi visto no início deste capítulo Legendre ao longo de sua vida desenvolveu muitas pesquisas nas áreas de Matemática e Física. Vamos elencar algumas contribuições para a matemática em ordem cronológica conforme visto em [\(SILVA, 2010\)](#), [\(BOYER;](#)

⁵ <https://mathshistory-st-andrews-ac-uk.translate.goog/Biographies/Legendre/>

⁶ (Pithiviers, 21 de junho de 1781 — Paris, 25 de abril de 1840) foi um matemático e físico francês, que fez contribuições na Mecânica, Ótica, Eletricidade e Magnetismo e Matemática Aplicada e Estatística

(MERZBACH, 2012) e (Clubes de Matemática da OBMEP, 2025).

Em 1785, Andrien-Marie Legendre publicou o primeiro de vários trabalhos em Teoria dos Números, sendo ele Estudos sobre a Análise Indeterminada, que contém em particular o teorema da reciprocidade quadrática. Este teorema estabelece uma relação entre a existência de raízes quadráticas de números primos em relação a outros números primos.

Em 1786, Legendre apresenta os Polinômios que carregam seu nome que são polinômios ortogonais \mathcal{P}_n de grau n , definidos no intervalo $[-1, 1]$, em que $P_n(1) = 1$, soluções polinomiais da equação diferencial de Legendre. Esta equação diferencial ordinária é frequentemente encontrada na física e em outros campos técnicos. Em particular, ela surge na resolução da equação de Laplace⁷ e equações diferenciais parciais em coordenadas esféricas. A equação de Legendre, bem como os polinômios de Legendre, serão discutidos nas seções seguintes deste capítulo.

Ainda em 1786, Legendre foi um dos primeiros a desenvolver os fundamentos da teoria de funções elípticas, que mais tarde seria aperfeiçoada por Abel⁸ e Jacob⁹. Na mesma época, ele voltou sua atenção para o cálculo variacional, deduzindo um critério para máximos e mínimos, tendo Jacob revisado e corrigido sua demonstração em 1836, tornando-a mais rigorosa.

Legendre escreveu a integração de algumas equações diferenciais parciais que foram inspiradas pelos estudos de Monge¹⁰ sobre superfícies mínimas, que foi publicado pela Academia de Paris em 1787.

Seu primeiro livro foi o *Eléments de géométrie* (Elementos de Geometria - Figura 4) publicado em 1794, que ganhou um prêmio no concurso de obras didáticas destinadas ao ensino fundamental na França. Nele, Legendre deixa claro no prefácio que pretendia criar uma geometria que agradasse ao intelecto (BOYER; MERZBACH, 2012).

O livro se tornou rapidamente a principal referência entre os clássicos da geometria, pois além de ser adotado no ensino de geometria nas escolas secundárias francesas, também foi utilizado em outros países. Em menos de trinta anos teve mais de quatorze edições, traduzido em praticamente todos os idiomas da Europa e em sua primeira edição atingiu um grande número de tiragens. O livro também foi traduzido para o árabe e adotado nas escolas do Egito.

Ele publicou também um *Essai sur la théorie des nombres* (Ensaio sobre a teoria dos

⁷ A equação de Laplace é uma equação diferencial parcial que descreve o potencial em um espaço onde a densidade de carga é zero.

⁸ Niels Henrik Abel foi um matemático norueguês (Nedstrand, 5 de agosto de 1802 — Froland, 6 de abril de 1829), famoso pelo seu rigor matemático, fez várias contribuições à matemática e é conhecido com gênio inovador

⁹ Jakob Bernoulli, ou Jacob, ou Jacques, ou Jacob I Bernoulli (Basileia, 27 de dezembro de 1654 — Basileia, 16 de agosto de 1705), foi um dos muitos matemáticos proeminentes da família Bernoulli, responsável pela criação do cálculo variacional.

¹⁰ Gaspard Monge (Beaune, 10 de maio de 1746 — Paris, 28 de julho de 1818) foi um matemático francês, criador da geometria descritiva (a base matemática de desenho técnico) e pai da geometria diferencial.

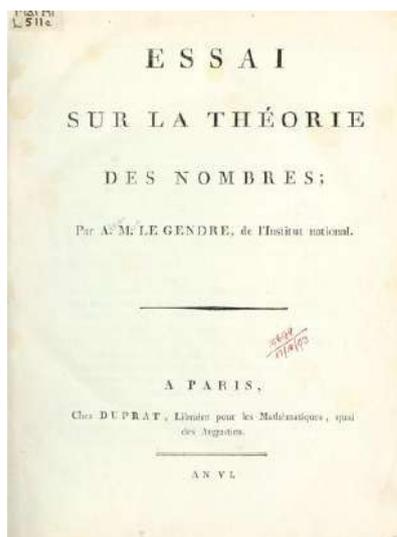
Figura 4 – Imagem do livro Elementos da Geometria



Fonte: Clube de Matemática da OBMEP

números, 1797-1798), em dois volumes (veja Figura 5). Neste mesmo período publicou um teorema sobre congruências: “ Dados dois inteiros p e q , existe um inteiro x tal que $x^2 - q$ é divisível por p , então q é chamado de um resto quadrático de p ”.

Figura 5 – Imagem do livro Teoria dos Números



Fonte:Clube de Matemática da OBMEP

Ainda nos anos de 1797-1798, surgiu a necessidade de descrever a distribuição dos números primos entre os números naturais. Os matemáticos da época passaram a buscar uma expressão — conhecida mais tarde como teorema dos números primos — que descrevesse a quantidade de números primos menores que um inteiro n , por meio de uma

função denotada $\pi(n)$. Assim, segundo Boyer e Merzbach (2012), Legendre supôs baseado em uma contagem de um grande número de primos, que $\pi(n)$ se aproximava de $\frac{n}{(\ln(n) - 1,08366)}$ quando n cresce indefinidamente. Essa conjectura estava bem perto da verdade, pois em um enunciado preciso do teorema em que $\pi(n) \rightarrow \frac{n}{\ln(n)}$, sugerido durante o século seguinte foi demonstrado em 1896. Legendre mostrou que nem sempre vai haver uma função algébrica racional que forneça primos, porém ele observou que $n^2 + n + 17$ é primo para todos os valores de n entre 1 e 16, e $2n^2 + 29$ é primo para valores de n entre 1 e 28.

Legendre também redescobriu e aprimorou o teorema de Euler, sobre a lei da reciprocidade quadrática: se p e q são primos ímpares, então as congruências $x^2 \equiv q \pmod{p}$ e $x^2 \equiv p \pmod{q}$ são *ambas* resolúveis ou *ambas* não resolúveis, a menos que p e q sejam ambos da forma $4n + 3$, e nesse caso uma é resolúvel e a outra não. Essa seria a forma como Euler enunciou o teorema. Na forma moderna usual de Legendre ficou da seguinte forma

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{(-1)^{(p-1)(q-1)}}{4}$$

onde o símbolo de Legendre (p/q) denota 1 ou -1 conforme $x^2 \equiv p \pmod{q}$ tenha ou não solução em x .

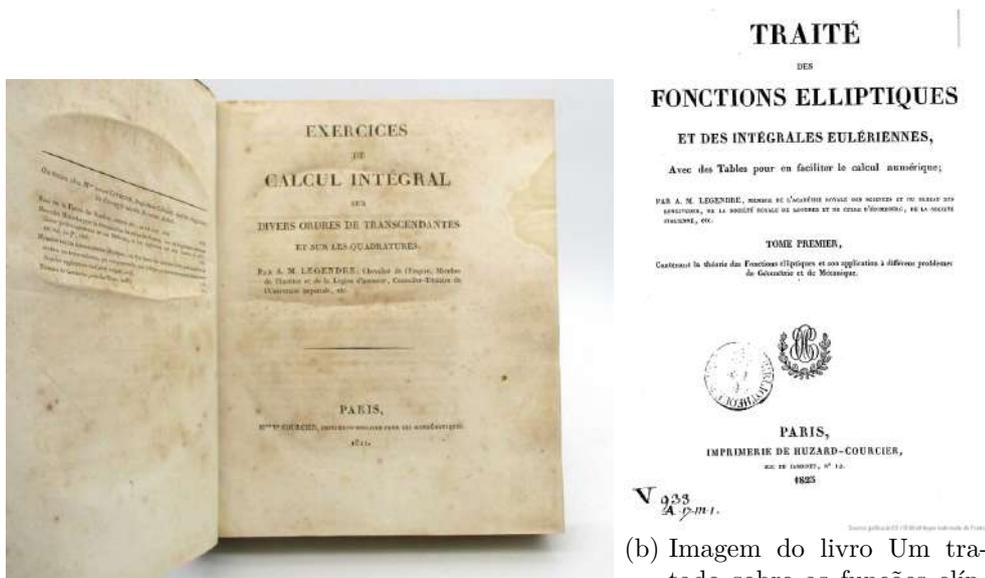
A segunda edição do Ensaio sobre a Teoria dos Números de Legendre foi publicada em 1808. Essa edição incluía melhorias e extensões ao trabalho original, incluindo uma demonstração do Grande Teorema de Fermat para o caso $n=5$. Além disso, a correspondência de Sophie Germain¹¹ com Legendre sobre teoria dos números e elasticidade foi incluída nesta segunda edição, com Legendre descrevendo Sophie Germain como muito engenhosa.

Após publicar a segunda edição do Ensaio sobre Teoria dos Números, continuou suas pesquisas sobre integrais eulerianas apresentadas no trabalho sobre transcendentel elípticos de 1793 e publicou os Estudos sobre Diversos Tipos de Integrais Definidas.

Ele publicou mais um de seus trabalhos, um tratado em três volumes *Exercices du calcul intégral* (Exercício do Cálculo Integral (1811-1819). Veja Figura 6a) - que criou uma certa rivalidade e abrangência com o de Euler; em seguida, aprofundou mais alguns pontos deste trabalho e criou outros três volumes do *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes* (Um tratado sobre as funções elípticas (1825-1832), Figura 6b). Nesses tratados, Legendre apresenta ferramentas muito úteis e importantes para os físicos-matemáticos que leva seu nome. Nelas estão segundo Boyer e Merzbach (2012) “as funções de Legendre, que são solução da equação diferencial de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$. As soluções polinomiais para valores inteiros positivos de n são chamadas polinômios de Legendre.”

¹¹ Marie-Sophie Germain (Paris, 1 de abril de 1776 — Paris, 27 de junho de 1831) foi uma matemática, física e filósofa francesa com contribuições fundamentais à teoria dos números e à teoria da elasticidade.

Figura 6 – Livros de Legendre



(a) Imagem do livro Exercício do Calculo Integral

(b) Imagem do livro Um tratado sobre as funções elípticas

Fonte: Wikipedia

O presente matemático francês, ainda se dedicou intensamente a simplificar as integrais elípticas, conseguindo reduzi-las a três formas padrão, que mais tarde passaram a levar seu nome. Essas integrais elípticas na forma Legendre de primeira e segunda espécie são

$$F(K, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi}}$$

$$E(K, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

respectivamente, onde $K^2 < 1$; as de terceira espécie são um pouco mais complicadas. As integrais elípticas de primeira espécie aparecem em algumas resoluções de equações diferenciais no movimento de um pêndulo simples; e quando se procura o comprimento do arco de uma elipse, as integrais elípticas de segunda espécie aparecem também.

Encerrando algumas das descobertas de Legendre, temos o método do desenvolvimento estatístico dos mínimos quadrados. Um caso simples deste método pode ser descrito segundo Boyer e Merzbach (2012) “digamos $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$ e $a_3x + b_3y + c_3 = 0$, toma-se como “melhores” valores de x e y a solução das duas equações simultâneas

$$(a_2^2 + a_3^2)x + (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)y + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) = 0$$

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)x + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)y + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) = 0.”$$

Adrien-Marie Legendre fez muitas outras contribuições na matemática e na física, entre elas, em 1791 organizou e padronizou juntamente com outros matemáticos a tabela

de logaritmos e funções trigonométricas, e para isso sob o seu comando e de dois outros matemáticos, trabalharam com mais de 70 assistentes concluindo o trabalho em 1801.

2.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA DE LEGENDRE - A ORIGEM DOS POLINÔMIOS DE LEGENDRE

Nesta seção apresentaremos a equação diferencial de segunda ordem de Legendre, que aparece com frequência no estudo de problemas envolvendo Eletromagnetismo, em específico na Eletrostática. Sua solução dá origem aos Polinômios de Legendre. Esta seção tem como referências principais os livros (MACHADO, 2019) e (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

A equação de Legendre dada pela expressão

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \lambda(\lambda + 1)y = 0 \quad (2.1)$$

Além de estudos de Eletromagnetismo, a equação (2.1) também está associada ao potencial eletrostático que, se conhecido, pode obter um campo elétrico \vec{E} .

Para resolvê-la usaremos o método de série de potência, em que:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad (2.4)$$

Substituindo (2.2) (2.3) (2.4) em (2.1), temos

$$(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

Desenvolvendo e associando os somatórios temos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad (2.5)$$

Fazendo a mudança de variável de n para m

$$m = n - 2$$

$$n = m + 2$$

Rescrevendo a primeira somatória da equação (2.1) com a mudança de variável, ficamos com,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} x^m.$$

Voltando para variável n :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n \quad (2.6)$$

Utilizando (2.6) em (2.5), obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \ell(\ell+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad (2.7)$$

As somatórias começam em valores diferentes de n , sendo $n \geq 2$ a faixa comum. Portanto, explicitando os elementos com $n = 0$ e $n = 1$, na primeira, terceira e quarta somatória, temos que:

Na primeira somatória

$$p/n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n = (0+2)(0+1)a_{0+2} x^0 = 2 \cdot 1 \cdot a_2 \cdot 1 = 2a_2$$

$$p/n = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n = (1+2)(1+1)a_{1+2} x^1 = 3 \cdot 2 \cdot a_3 x = 6a_3 x$$

Com isso, a primeira somatória fica da seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n = 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$$

A terceira somatória fica:

$$p/n = 0$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = 0 \cdot a_0 x^0 = 0$$

$$p/n = 1$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = 2 \cdot 1 \cdot a_1 x^1 = 2a_1 x$$

Com isso, a terceira somatória fica da seguinte forma

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = 2a_1 x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n$$

Quarta somatória teremos:

$$p/n = 0$$

$$l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = l(l+1)a_0 x^0 = l(l+1)a_0$$

$$p/n = 1$$

$$l(l+1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = l(l+1)a_1 x^1 = l(l+1)a_1 x$$

Assim, a quarta somatória fica da seguinte forma

$$a_7 = \frac{-(l-5)(l+6)}{7 \cdot 6} \cdot \left[\frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!} a_1 \right]$$

Substituindo a primeira somatória na equação (2.5) temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + l(l+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Depois de explicitarmos os somatórios para $n = 0$ e $n = 1$, substituindo agora na equação (2.5), temos que:

$$\begin{aligned} & 2a_2 16a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)a_n x^n - 2a_1 x \\ & - 2 \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n + l(l+1)a_0 + l(l+1)a_1 x + l(l+1) \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & [2a_2 + l(l+1)a_0] + [6a_3 - 2a_1 + l(l+1)a_1] \cdot x + \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \{(n+2)(n+1)a_{n+2} + [l(l+1) - n(n-1) - 2n]a_n\} \cdot x^n = 0 \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} & [2a_2 + l(l+1)a_0] + [6a_3 - 2a_1 + l(l+1)a_1] \cdot x + \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \{(n+2)(n+1)a_{n+2} + [l(l+1) - n(n-1)]a_n\} \cdot x^n = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para que a equação (2.8) seja válida termo a termo, temos que satisfazer:

$$2a_2 + l(l+1)a_0 = 0 \quad (2.9)$$

além de

$$6a_3 - [l(l+1) - 2]a_1 = 0 \quad (2.10)$$

e de

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + [l(l+1) - n(n+1)]a_n = 0 \quad (2.11)$$

Dá equação (2.9) temos que:

$$\begin{aligned} 2a_2 &= -l(l+1)a_0 \\ a_2 &= -\frac{l(l+1)}{2} \cdot a_0 \end{aligned}$$

Dá equação (2.10) temos:

$$\begin{aligned} 6a_3 &= -[\ell(\ell+1) - 2]a_1 \\ a_3 &= \frac{-[\ell(\ell+1) - 2]}{6}a_1 \end{aligned}$$

E da equação (2.11) termos que:

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)a_{n+2} &= -[l(l+1) - n(n+1)]a_n \\ a_{n+2} &= -\frac{[l(l+1) - n(n+1)]}{(n+2)(n+1)}a_n; n \geq 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

A equação (2.12) é a relação de recorrência, que vale inclusive para $n = 0$ e $n = 1$. Podemos reescrevê-la se considerarmos que

$$-(l-n)(l+n+1) = n(n+1) - l(l+1). \tag{2.13}$$

Usando as equações (2.12) e (2.13), obtemos:

$$a_{n+2} = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n; n \geq 0. \tag{2.14}$$

Agora vamos determinar alguns termos da série, utilizando a relação apresentada na equação (2.14)

$p/n = 0$, achamos

$$a_{0+2} = \frac{(l-0)(l+0+1)}{(0+2)(0+1)}a_0 \Rightarrow a_2 = -\frac{l(l+1)}{2}a_0$$

$p/n = 1$

$$\begin{aligned} a_{1+2} &= -\frac{(l-1)(l+1+1)}{(1+2)(1+1)}a_1 \\ a_3 &= \frac{-(l-1)(l+2)}{3!}a_1 \end{aligned}$$

$p/n = 2$

$$\begin{aligned} a_{2+2} &= -\frac{(l-2)(l+2+1)}{(2+2)(2+1)} \cdot a_2 \\ a_4 &= \frac{-(l-2)(l+3)}{4 \cdot 3} \cdot \left[-\frac{l(l+1)}{2}a_0 \right] \\ a_4 &= -\frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{4!}a_0 \end{aligned}$$

$$p/n = 3$$

$$\begin{aligned} a_{3+2} &= \frac{-(l-3)(l+3+1)}{(3+2)(3+1)} a_3 \\ a_5 &= \frac{-(l-3)(l+4)}{5 \cdot 4} \cdot \left[\frac{-(l-1)(l+2)}{3!} a_1 \right] \\ a_5 &= \frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!} a_1 \end{aligned}$$

$$p/n = 4$$

$$\begin{aligned} a_{1+2} &= \frac{-(l-4)(l+4+1)}{(4+2)(4+1)} a_4 \\ a_6 &= \frac{-(l-4)(l+5)}{6 \cdot 5} \cdot \left[\frac{-l(l-2)(l-1)(l+3)}{4!} a_0 \right] \\ a_6 &= \frac{l(l-2)(l-4)(l+1)(l+3)(l+5)}{6!} a_0 \end{aligned}$$

$$p/n = 5$$

$$\begin{aligned} a_{5+2} &= \frac{-(l-5)(l+5+1)}{(5+2)(5+1)} a_5 \\ a_7 &= \frac{-(l-5)(l+6)}{7 \cdot 6} \cdot \left[\frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!} a_1 \right] \\ a_7 &= -\frac{(l-1)(l-3)(l-5)(l+2)(l+4)(l+6)}{7!} a_1 \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Agora, substituindo do a_2 ao a_7 na equação (2.2) temos

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

ou

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x - \frac{l(l+1)}{2!} a_0 x^2 - \frac{(l-1)(l+2)}{3!} a_1 x^3 + \frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{4!} a_0 x^4 \\ &+ \frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!} a_1 x^5 - \frac{l(l-2)(l-4)(l+1)(l+3)(l+5)}{6!} a_0 x^6 \\ &- \frac{(l-1)(l-3)(l-5)(l+2)(l+4)(l+6)}{7!} a_1 x^7 + \dots \end{aligned}$$

ou ainda,

$$y(x) = a_0 \left\{ 1 - \frac{l(l+1)}{2!} x^2 + \frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{4!} x^4 - \frac{l(l-2)(l-4)(l+1)(l+3)(l+5)}{6!} x^6 + \dots \right\} \quad (2.15)$$

e

$$y(x) = a_1 \left\{ x - \frac{(l-1)(l-2)}{3!} \cdot x^3 + \frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!} x^5 - \frac{(l-1)(l-3)(l-5)(l+2)(l+4)(l+6)}{7!} x^7 + \dots \right\} \quad (2.16)$$

Com isso, formamos duas séries, uma com o coeficiente a_0 com potências pares de x e a outra com coeficiente a_1 com potências ímpares de x . Observe que ambas as séries convergem quando $|x| < 1$.

Quando l é um número inteiro par positivo ou nulo, ou um número inteiro ímpar negativo, a série relacionada a a_0 , dada, torna-se um polinômio finito.

Por exemplo:

Se $l = 0$, só existe o primeiro termo da série, e $y_0(x) = a_0$. Se $l = 4$, a série com o coeficiente a_0 torna-se um polinômio, de grau 2 e o mesmo ocorre se $l = -3$. Nesse caso a série com o coeficiente a_1 permanece infinita.

Por outro lado, se l for um número inteiro ímpar positivo, ou um número inteiro par negativo, a série com coeficiente a_1 fica finita.

Por exemplo:

Para $l = 1$ e $l = -2$, a série com coeficiente a_0 permanece infinita, e a série com coeficiente a_1 fica $y(x) = a_1 x$ e $y(x) = a_1 \{x + 2x^3\}$. Dessa forma, concluímos que se uma das séries for finita, a outra será infinita e vice-versa.

Se $l \notin \mathbb{Z}$, ou seja, não é um número inteiro, então, nenhuma das séries termina, e, recordando que no método de séries temos as duas soluções L.I. (linearmente independentes), a equação de $y(x)$ é uma solução mais geral nesse caso, para $|x| < 1$ e as séries $y_0(x)$ e $y_1(x)$ são chamadas de **funções de Legendre**. Assim, se precisássemos da solução apenas para $|x| < 1$ para um l qualquer, a equação de $y(x)$ seria nossa resposta.

A questão aqui é que os pontos onde $|x| = 1$ são importantes, de modo que é preciso analisar o que ocorre nesses pontos. Para isso, vamos fazer o teste da razão, para ver se as séries são convergentes.

Considerando a relação de recorrência $a_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+2)(n+1)} a_n$ com $n \geq 0$ temos:

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+2)(n+1)}$$

de modo que

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \simeq \frac{n^2}{n^2} \simeq 1; n \rightarrow \infty$$

Esse teste não nos, permite afirmar que a série converge. No entanto, ele nos diz que, quando n é suficientemente grande, os coeficientes a_n da série são iguais. Já que extraímos, do teste da razão, $a_{n+2} \simeq a_n$, quando $n \rightarrow \infty$. Podemos entender que a partir de um certo N suficientemente grande podemos escrever a série como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + a_{N+1} x^{N+1} + a_{N+2} x^{N+2} + a_{N+3} x^{N+3} + \dots$$

onde incluímos, na primeira somatória, os termos até N em que a_{n+2} e a_n ainda são diferentes explicitando os termos a partir dos quais eles passam a ser iguais.

Podemos escrever também

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^N a_n x^n + a_{N+1} x^{N+1} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^N a_n x^n + a_{N+1} x^{N+1} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \quad (2.17)$$

A segunda somatória da série (2.17) é uma série geométrica de razão $r = x$ e $a_0 = 1$, cuja soma converge, de acordo com a equação, para

$$S_{\infty} = \frac{a_0}{1 - x}$$

desde que $|x| < 1$. A série geométrica diverge para $|x| \geq 1$, de modo que as séries $y(x)$, $y_0(x)$ e $y_1(x)$ divergem em $x = \pm 1$ se forem infinitas. Como precisamos garantir que $x = \pm 1$ sejam pontos onde o potencial elétrico exista e não divirja, precisamos fazer com que a série termine.

Note que não podemos, fazer a_0 e a_1 serem nulos ao mesmo tempo, pois a solução geral seria a solução trivial $y = 0$, que não tem interesse físico. Então conforme discutido é preciso que l não seja negativo. Nesse caso, sendo um número inteiro, se par, a série $y_0(x)$ termina, tornando-se um polinômio. Se for ímpar, é a série $y_1(x)$ que termina. Vamos discutir inicialmente estas duas situações.

Sendo l um inteiro, podemos reescrever $y_0(x)$ na forma de uma série dada por

$$y_{0,l}(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{l!!}{(l-2n)!!} \cdot \frac{(l+2n-1)!!}{(l-1)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (2.18)$$

O símbolo matemático $!!$ significa duplo fatorial em que $n!! = n(n-2)(n-4) \times \dots \times 4 \times 2$, se n for par e $n!! = n(n-2)(n-4) \times \dots \times 3 \times 1$, se n for ímpar (MACHADO, 2019, p.530).

De forma similar, a série $y_1(x)$ torna-se

$$y_{1,l}(x) = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(l-l)!!}{(l-2n-1)!!} \cdot \frac{(l+2n)!!}{l!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (2.19)$$

Vamos considerar agora que l é um inteiro par, dado por $l = 2m$. Nesse caso, a série $y_{0,l}(x)$ termina no termo com $n = m$, havendo $m+1$ termos na soma, que pode ser, escrita como

$$y_{0,2m}(x) = a_0 \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{(2m)!!}{(2m-2n)!!} \cdot \frac{(2m+2n-1)!!}{(2m-1)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (2.20)$$

Como $2l$ é par e $2l-1$ é ímpar temos:

$$(2l)!! = 2^l l! \quad \text{e} \quad (2l-1)!! = \frac{(2l)!}{2^l l!}$$

Substituindo na equação (2.20)

$$\begin{aligned} y_{0,2m}(x) &= a_0 \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{2^m m!}{2^{m-n} (m-n)!} \cdot \frac{(2m+2n)!}{2^{m+n} (m+n)!} \cdot \frac{2^m m!}{(2m)!} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ y_{0,2m}(x) &= a_0 \frac{(m!)^2}{(2m)!} \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{(2m+2n)!}{(m-n)!(m+n)!} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Vamos efetuar uma mudança na variável da somatória definindo

$$k = m - n \quad n = m - k$$

Substituindo as variáveis na equação (2.21) temos que:

$$y_{0,2m}(x) = a_0 \frac{(m!)^2}{(2m)!} \sum_{k=0}^m (-1)^m (-1)^{-k} \frac{[2m+2m-2k]!}{(k!(2m-k)!)} \cdot \frac{x^{2(m-k)}}{(2m-2k)!}$$

lembrando que $(-1)^{-k} = (-1)^k$,

$$y_{0,2m}(x) = a_0 \frac{(-1)^m (m!)^2}{(2m)!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(4m-2k)!}{k!(2m-k)!} \cdot \frac{x^{2m-2k}}{(2m-2k)!}$$

Como $l = 2m$, obtemos

$$y_{0,l}(x) = a_0 \frac{(-1)^m (m!)^2}{(2m)!} \sum_{k=0}^{l/2} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{k!(l-k)!} \cdot \frac{x^{l-2k}}{(l-2k)!} \quad (2.22)$$

Por conversão, para expressar os polinômios de Legendre escolhe-se:

$$a_0 = \frac{1}{2^l} \frac{(2m)!}{(-1)^m (m!)^2} \quad (2.23)$$

Utilizando o valor de a_0 dado na equação (2.23) na equação (2.21) e voltando para o índice n na somatória, obtemos os polinômios de Legendre de ordem par, dados por:

$$\mathcal{P}_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\frac{\ell}{2}} \frac{(-1)^n (2\ell-2n)!}{2^\ell n!(\ell-n)!} \frac{x^{\ell-2n}}{(\ell-2n)!}$$

E no caso que $\ell = 2m + 1$, seguindo os mesmos passos, a partir da equação (2.19) podemos mostrar que :

$$\mathcal{P}_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} \frac{(-1)^n (2\ell-2n)!}{2^\ell n!(\ell-n)!} \frac{x^{\ell-2n}}{(\ell-2n)!}, \quad (2.24)$$

para qualquer valor de ℓ . Em que $[a]$ indica o maior inteiro igual ou menor que a .

Antes de continuarmos, apresentaremos a função Gama e função Hipergeométrica conforme definidas em (MACHADO, 2019, 470-472), e

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{1}{2} \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots$$

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, \alpha) = 1 + \sum \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+(n-1)) \cdot \beta(\beta+1) \cdots (\beta+(n-1))}{\gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+(n-1))} \frac{x^n}{n!}$$

E a Função Gama $\Gamma(x)$ definida pela integral,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Em que x pode ser inclusive um número complexo.

Propriedades da função gama:

Tabela 1 – Propriedades da função gama

Condição	Valor / Relação
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma(0)$	∞
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(-1)$	$-\infty$
$\Gamma(x)$	$(x-1)\Gamma(x-1)$
$\Gamma(x-1)$	$\frac{\Gamma(x)}{x-1}$
$\Gamma(n+1), n \in \mathbb{Z}^+$	$n!$

Se x for um número real

Tabela 2 – Propriedades da função gama para x real

Condição	Valor / Relação
$\Gamma(x+1), x \neq -1, -2, -3, \dots$	$x!$
$\Gamma(\phi+n), n \in \mathbb{Z}$	$(\phi+n-1)!$ $= (\phi+n-1)(\phi+n-2) \cdots (\phi+1)\phi\Gamma(\phi)$
$\frac{\Gamma(\phi+n)}{\Gamma(\phi)}$	$(\phi+n-1) \cdots (\phi+1)\phi$
$\frac{\Gamma(n-\phi)}{\Gamma(-\phi)}$	$(-1)^n \frac{\Gamma(\phi+1)}{\Gamma(\phi-n-1)}$
$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{(2n)!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2n}n!}$
$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$
$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$	$\frac{2^{2\ell}\ell!}{(2\ell)!}$
$\Gamma\left(\ell+\frac{1}{2}\right)$	$(2\ell)!$

Juntando a função Hipergeométrica com a função Gama, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma; x) &= 1 + \sum \frac{(\alpha(\alpha+1) \cdots (\gamma+(n-1))(\beta(\beta+1) \cdots (\beta+(n-1)))}{(\gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+(n-1)))} \frac{x^n}{n!} \\ \mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}}{\frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)}} \frac{x^n}{\Gamma(n+1)!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(n+1)} \cdot x^n \\ &= 1 + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \cdot \frac{x^n}{\Gamma(n+1)}\end{aligned}$$

Observações:

1) Se $\alpha = 1$ e $\beta = \gamma$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \\ \mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma; x) &= \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

2) Se $\alpha = m$, $\beta = \gamma$

$$\mathcal{F}(m, \beta, \beta; x) = \frac{1}{(1-x)^m}$$

3) Se $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ $x \rightarrow -x$

$$\mathcal{F}(1, 1, 2; -x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

4) Se $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{3}{2}$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right) = \frac{\arcsin x}{x}$$

Vistas algumas propriedades de função Hipergeométrica e função Gama, voltemos a dedução do polinômio de ordem par

Inicialmente vamos obter $\mathcal{F}\left(-l, l + 1/2, \frac{1}{2}, x^2\right)$, lembrando que, nesse caso como l é um inteiro, a função hipergeométrica torna-se um polinômio, ou seja,

$$\mathcal{F}\left(-l, l + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-l)\Gamma\left(l+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-l)\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)} \frac{(x^2)^n}{\Gamma(n+1)}$$

Utilizando as propriedades de $\Gamma(x)$, para x um número real, obtemos:

$$\mathcal{F}\left(-l, l + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) = \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l)!} \sum_{n=0}^l \frac{(-1)^n [(2l+2(l-n))!]}{2^{2l} (2n)!(l+n)!} \frac{x^{2n}}{(l-n)!},$$

fazendo a mudança de variável $m = l - n$ e assim, $n = l - m$, temos

$$\mathcal{F}\left(-l, l + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) = \frac{(-1)^l 2^{2l}(l!)^2}{(2l)!} \sum_{m=0}^l \frac{(-1)^m (4l-2m)!}{2^{2l} (2l-2m)!(2l-m)!} \frac{x^{2l-2m}}{m!},$$

Voltando para o índice n e como $(-1)^{-m} = (-1)^m$,

$$\mathcal{F}\left(-l, l + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) = \frac{(-1)^l 2^{2l} (l!)^2}{(2l)!} \sum_{n=0}^l \frac{(-1)^n}{2^{2l}} \frac{(4l - 2n)!}{(2l - 2n)!(2l - n)!} \frac{x^{2l-2n}}{n!}. \quad (2.25)$$

Agora vamos reescrever a expressão da equação (2.24) para $l \rightarrow 2l$, ou seja

$$\mathcal{P}_{2\ell}(x) = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{(-1)^n}{2^{2\ell}} \frac{(4\ell - 2n)!}{n!(2\ell - n)!(2\ell - 2n)!} x^{(2\ell-2n)}. \quad (2.26)$$

Assim sendo comparando a equação (2.25) com a equação (2.26), obtemos:

$$\mathcal{P}_{2\ell}(x) = \frac{(-1)^\ell (2\ell)!}{2^{2\ell} (\ell!)^2} \mathcal{F}\left(-\ell, \ell + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) \quad (2.27)$$

E seguindo o mesmos passos podemos mostrar que os polinômios de Legendre de ordem ímpar são dados por:

$$\mathcal{P}_{2\ell+1}(x) = x \frac{(-1)^\ell (2\ell + 1)!}{2^{2\ell} (\ell!)^2} \mathcal{F}\left(-\ell, \ell + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) \quad (2.28)$$

Desta forma podemos apresentar os polinômios de Legendre

Polinômios de Legendre	
Par	Ímpar
$\mathcal{P}_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\frac{\ell}{2}} \frac{(-1)^n}{2^\ell} \frac{(2\ell - 2n)!}{n!(\ell - n)!(\ell - 2n)!} x^{\ell-2n}$	$\mathcal{P}_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} \frac{(-1)^n}{2^\ell} \frac{(2\ell - 2n)!}{n!(\ell - n)!(\ell - 2n)!} x^{\ell-2n}$
$\mathcal{P}_{2\ell}(x) = \frac{(-1)^\ell (2\ell)!}{2^{2\ell} (\ell!)^2} \mathcal{F}\left(-\ell, \ell + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right)$	$\mathcal{P}_{2\ell+1}(x) = x \frac{(-1)^\ell (2\ell + 1)!}{2^{2\ell} (\ell!)^2} \mathcal{F}\left(-\ell, \ell + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right)$

Tabela 3 – Tabela com polinômios de Legendre.

Uma propriedade importante dos polinômios de Legendre é que, os de ordem l par são funções pares, isto é $P_l(x) = P_l(-x)$, já os de ordem l ímpares são funções ímpares, isto é $P_l(x) = -P_l(-x)$. De uma forma geral podemos escrever:

$$\mathcal{P}_\ell(x) = (-1)^\ell \mathcal{P}_\ell(-x). \quad (2.29)$$

Os polinômios de Legendre podem ser gerados a partir da relação de recorrência, que pode ser provada a partir da construção dos polinômios de Legendre com a função hipergeométrica juntamente com a propriedade (2.29), conforme demonstrado em Machado (2019, p.564-576).

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(x) &= 1; \mathcal{P}_1(x) = x; \\ \ell \mathcal{P}_\ell(x) &= x(2\ell - 1) \mathcal{P}_{\ell-1}(x) - (\ell - 1) \mathcal{P}_{\ell-2}(x) \end{aligned} \quad (2.30)$$

A função apresentada na equação (2.30) é chamada de Função Geratriz.

2.2.1 Gerando os polinômios de Legendre

Assim usando a fórmula apresentada na equação (2.24) é possível gerar os polinômios de Legendre, dado o l .

Por exemplo, para $l = 0$

$$\mathcal{P}_0(x) = \sum_{n=0}^0 \frac{(-1)^0 (0-2n)! x^{0-2n}}{2^0 n! (1-n)! (1-2n)!} = 1$$

Para $l = 1$

$$\mathcal{P}_1(x) = \sum_{n=0}^{[1/2]} \frac{(-1)^n (2-2n)! x^{1-2n}}{2^1 n! (1-n)! (1-2n)!} = x$$

Para $l = 2$

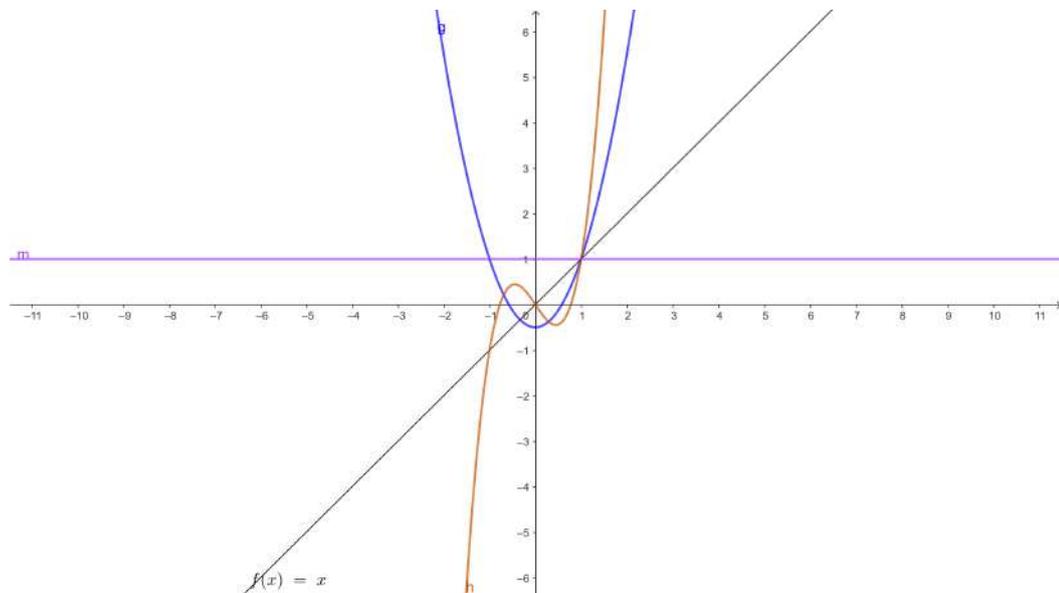
$$\mathcal{P}_2(x) = \sum_{n=0}^1 \frac{(-1)^n (4-2n)! x^{2-2n}}{4n! (2-n)! (2-2n)!} = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Para $l = 3$

$$\mathcal{P}_3(x) = \sum_{n=0}^{[3/2]} \frac{(-1)^n (6-2n)! x^{3-2n}}{8n! (3-n)! (3-2n)!} = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

A Figura (7) mostra representação gráfica dos polinômios de Legendre para $0 \leq l \leq 3$.

Figura 7 – Polinômios de Legendre para $l=0,1,2,3$



A autora

(12)

Ainda observando a equação (2.29), temos $\mathcal{P}_\ell(0) = -\mathcal{P}_\ell(-0)$, para ℓ ímpar, assim $\mathcal{P}_\ell(0) = 0$.

Por outro lado, quando $\ell = 2m$ é par,

$$\mathcal{P}_{2m}(0) = \frac{(-1)^m (4m - 2m)! x^{(2m-2m)}}{2^{2m} m! (2m - m)! (2m - 2m)!} = (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2}$$

Daí resulta que

$$\mathcal{P}_\ell(0) = \begin{cases} 0, & \ell \text{ ímpar} \\ (-1)^{1/2} \frac{(2\ell)!}{2^{2\ell} (\ell/2!)^2}, & \ell \text{ par} \end{cases} \quad (2.31)$$

Também é possível recorrermos a Função Geratriz

Por exemplo para $l = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(x) &= 1 \\ \mathcal{P}_1(x) &= x \\ 2\mathcal{P}_2(x) &= x(3)\mathcal{P}_1(x) - 1\mathcal{P}_0(x) \\ 2\mathcal{P}_2(x) &= 3x^2 - 1 \\ \mathcal{P}_2(x) &= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.3 A FÓRMULA DE RODRIGUES

Segundo [Roque \(2012\)](#) Benjamin Olinde Rodrigues (Figura [8](#)) foi um matemático, banqueiro e economista francês que introduziu a fórmula que gera os polinômios de Legendre em 1816 para séries de polinômios ortogonais, conhecida como fórmula de Rodrigues, ou pela fórmula de rotação de Rodrigues.

Figura 8 – Imagem de Olinde Rodrigues



Fonte: Wikipedia

Considere a expansão do binômio

$$(x^2 - 1)^2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k} \quad (2.32)$$

Calculando a derivada de ordem m do fator x^{2n-2k} temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^{2n-2k}) &= (2n-2k)x^{2n-2k-1} \\ \frac{d^2}{dx^2}(x^{2n-2k}) &= (2n-2k)(2n-2k-1)x^{2n-2k-2} \\ \frac{d^3}{dx^3}(x^{2n-2k}) &= (2n-2k)(2n-2k-1)(2n-2k-2)x^{2n-2k-3} \\ &\vdots \\ \frac{d^m}{dx^m}(x^{2n-2k}) &= \frac{(2n-2k)!}{(2n-2k-m)!} x^{2n-2k-m} \end{aligned}$$

Fazendo $m = n$, temos:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k}) = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} \quad (2.33)$$

Algumas observações sobre o valor de n , são necessárias:

Para que o valor da derivada (2.33), não se anule, devemos ter $n \geq 2k$

1 - Se $n = 2k$

$$\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}(x^{2k}) = \frac{(2k)!}{(0)!} x^0 = (2k)! \quad (2.34)$$

2- Se $n = 2k - 1$

$$\frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}}(x^{2k-2}) = \frac{(2k-2)!}{(-1)!} x^{-1} = 0, \quad (2.35)$$

pois $(-1)! \rightarrow \infty$. Isso ocorre para todos os $n < 2k$. Assim:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k}) = \begin{cases} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}, & n \geq 2k \\ 0, & n < 2k \end{cases} \quad (2.36)$$

Considere a expressão (2.32), calculando sua n -ésima derivada, utilizando a equação (2.36), e notando que o índice da somatória deve ir até $[n/2]$ para que o termo seja não-nulo.

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad (2.37)$$

Fazendo $n \rightarrow l$ e $k \rightarrow n$ e multiplicando por $\frac{1}{2^l l!}$ temos:

$$\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l = \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^k}{2^l} \frac{(2l - 2k)!}{k!(l - k)!(l - 2k)!} x^{l-2k}, \quad (2.38)$$

e, comparando com equação (2.24), obtemos a fórmula de Rodrigues para polinômios de Legendre.

$$\mathcal{P}_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell \quad (2.39)$$

Assim, para $\ell = 0$

$$\mathcal{P}_0(x) = \frac{1}{2^0 0!} (x^2 - 1)^0 = 1$$

Para $\ell = 1$

$$\mathcal{P}_1(x) = \frac{1}{2^1 1!} \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^1 = \frac{1}{2} (2x) = x,$$

Para $\ell = 2$

$$\mathcal{P}_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{8} (12x^2 - 4) = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

E assim por diante! Os polinômios de Rodrigues são uma forma de representar os polinômios ortogonais clássicos, permitindo calcular suas expressões explicitamente. Os polinômios ortogonais clássicos são um conjunto de polinômios que possuem propriedades de ortogonalidade e são amplamente utilizados em diversas áreas da matemática e física. Entre os mais importantes estão os polinômios de Hermite, Laguerre, Jacobi (incluindo Gegenbauer, Chebyshev e Legendre).

2.4 RELAÇÃO DE ORTOGONALIDADE PARA OS POLINÔMIOS DE LEGENDRE

Vamos obter agora a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre. Cada polinômio é uma solução da equação diferencial de Legendre (2.1),

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \ell(\ell + 1)y = 0$$

que pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \ell(\ell + 1)y = 0$$

já que

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] = (1 - x^2) \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] + \frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{dy}{dx}$$

ou

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] = (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx}$$

Como o polinômio $\mathcal{P}_\ell(x)$ é solução da equação (2.1), então podemos substituir y por $\mathcal{P}_\ell(x)$.

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\mathcal{P}_\ell(x)}{dx} \right] + \ell(\ell+1)\mathcal{P}_\ell(x) = 0 \quad (2.40)$$

Multiplicando por $\mathcal{P}_{\ell'}(x)$ em ambos os lados da equação, e integrando no intervalo $[-1, 1]$, temos:

$$\int_{-1}^1 \mathcal{P}_{\ell'}(x) \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\mathcal{P}_\ell(x)}{dx} \right] dx + \ell(\ell+1) \int_{-1}^1 \mathcal{P}_{\ell'}(x) \mathcal{P}_\ell(x) dx = 0 \quad (2.41)$$

Para resolver a primeira integral da expressão (2.41), usaremos a técnica de integral por partes, em que:

a) $u = \mathcal{P}_{\ell'}(x)$, assim $\frac{du}{dx} = \frac{d\mathcal{P}_{\ell'}(x)}{dx} dx$, e

b) $dv = \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\mathcal{P}_\ell(x)}{dx} \right]$, logo $v = \left[(1-x^2) \frac{d\mathcal{P}_\ell(x)}{dx} \right]$

Assim resolvendo a primeira integral da expressão (2.41) obtemos:

$$\int_{-1}^1 \mathcal{P}_{\ell'}(x) \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\mathcal{P}_\ell(x)}{dx} \right] dx = - \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{d\mathcal{P}_{\ell'}(x)}{dx} \frac{d\mathcal{P}_\ell(x)}{dx} dx \quad (2.42)$$

Substituindo a expressão obtida em (2.42), na equação (2.41), temos:

$$- \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{d\mathcal{P}_{\ell'}(x)}{dx} \frac{d\mathcal{P}_\ell(x)}{dx} dx + \ell(\ell+1) \int_{-1}^1 \mathcal{P}_\ell(x) \mathcal{P}_{\ell'}(x) dx = 0 \quad (2.43)$$

Observe se ao invés de substituirmos $\mathcal{P}_\ell(x)$ na expressão (2.1), fizermos os mesmos procedimentos com $\mathcal{P}_{\ell'}(x)$, chegaremos em uma expressão similar a (2.43)

$$- \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{d\mathcal{P}_{\ell'}(x)}{dx} \frac{d\mathcal{P}_\ell(x)}{dx} dx + \ell'(\ell'+1) \int_{-1}^1 \mathcal{P}_\ell(x) \mathcal{P}_{\ell'}(x) dx = 0 \quad (2.44)$$

Subtraindo a expressão (2.43) da expressão (2.44), obtemos:

$$[\ell(\ell+1) - \ell'(\ell'+1)] \int_{-1}^1 \mathcal{P}_\ell(x) \mathcal{P}_{\ell'}(x) dx = 0$$

$$(\ell - \ell')(\ell + \ell' + 1) \int_{-1}^1 \mathcal{P}_\ell(x) \mathcal{P}_{\ell'}(x) dx = 0$$

Assim,

$$\int_{-1}^1 \mathcal{P}_\ell(x) \mathcal{P}_{\ell'}(x) dx = 0, \quad \ell' \neq \ell \quad (2.45)$$

O que indica que os polinômios de Legendre são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$.

Vamos analisar agora o que ocorre quando $\ell = \ell'$ na equação (2.45). Para isso, precisamos da função geratriz (2.30).

$$(1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} P_{\ell}(x) \quad (2.46)$$

Multiplicando essa equação por ela mesma, atentando para o uso de índices diferente nas somatórias, e integrando no intervalo $[-1, 1]$, temos

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \int_{-1}^1 \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} P_{\ell}(x) \right] \left[\sum_{\ell'=0}^{\infty} t^{\ell'} P_{\ell'}(x) \right] dx \quad (2.47)$$

ou

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \int_{-1}^1 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} t^{\ell+\ell'} P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) dx \quad (2.48)$$

O lado esquerdo de (2.47) pode ser efetuado por meio da substituição

$$\begin{aligned} u &= 1 - 2tx + t^2 & du &= -2tdx \\ x_1 = -1 &\rightarrow u_1 = 1 + 2t + t^2 & x_2 = 1 &\rightarrow u_2 = 1 - 2t + t^2 \\ dx &= -\frac{du}{2t} \end{aligned}$$

e ele fica

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \int_{(1+t)^2}^{(1-t)^2} \frac{-\frac{du}{2t}}{u}$$

ou

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = -\frac{1}{2t} [\ln u]_{(1+t)^2}^{(1-t)^2}$$

ou, ainda,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = -\frac{1}{2t} \ln \frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}$$

que fica

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \frac{1}{t} \ln \left[\frac{1+t}{1-t} \right] \quad (2.49)$$

O lado direito de (2.47) pode ser reescrito mediante a troca da ordem das somatórias com a integral, ou seja,

$$\int_{-1}^1 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} t^{\ell+\ell'} P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) dx = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} t^{\ell+\ell'} \int_{-1}^1 P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) dx \quad (2.50)$$

Utilizando a condição, quando $\ell \neq \ell'$, a integral se anula, de modo que a equação (2.47) se torna, efetuando a soma em ℓ' ,

$$\int_{-1}^1 \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} t^{\ell+\ell'} P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) dx = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{2\ell} \int_{-1}^1 [P_{\ell}(x)]^2 dx \quad (2.51)$$

Substituindo (2.49) e (2.51) em (2.50) , achamos

$$\frac{1}{t} \ln \left[\frac{1+t}{1-t} \right] = \sum_{t=0}^{\infty} t^{2t} \int_{-1}^1 [P_t(x)]^2 dx \quad (2.52)$$

e como

$$\ln \left[\frac{1+t}{1-t} \right] = t \sum_{t=0}^{\infty} \frac{2}{2t+1} t^{2t} \quad (2.53)$$

Assim, utilizando (2.53) em (2.52), achamos

$$\frac{1}{t} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2}{2\ell+1} t^{2\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{2\ell} \int_{-1}^1 [P_{\ell}(x)]^2 dx$$

ou

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2}{2\ell+1} t^{2\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{2\ell} \int_{-1}^1 [P_{\ell}(x)]^2 dx \quad (2.54)$$

Comparando os termos de igual grau em (1.53), obtemos, finalmente,

$$\int_{-1}^1 [P_{\ell}(x)]^2 dx = \frac{2}{2\ell+1} \quad (2.55)$$

de modo que, reunindo com (1.44), ficamos com

$$\int_{-1}^1 P_{\ell} P_{\ell'} dx = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell,\ell'} \quad (2.56)$$

em que $\delta_{\ell,\ell'}$ é o delta de Dirac.

Esta é a relação de ortogonalidade para os polinômios de Legendre. O quadro 4 apresenta alguns dos polinômios de Legendre, tanto em função de x , como, explicitamente em função de $\cos \theta$.

Tabela 4 – Polinômios de Legendre para alguns valores de ℓ

ℓ	$P_{\ell}(x)$	$P_{\ell}(\cos \theta)$
0	1	1
1	x	$\cos \theta$
2	$\frac{1}{2} (3x^2 - 1)$	$\frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$
3	$\frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$	$\frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$
4	$\frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$	$\frac{1}{8} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$
ℓ	$\frac{1}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} (x^2 - 1)^{\ell}$	$\frac{1}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell}}{d(\cos \theta)^{\ell}} (\cos^2 \theta - 1)^{\ell}$

As soluções finitas da equação diferencial de Legendre são os polinômios de Legendre, e para cada polinômio existe um valor de ℓ associado, que é um inteiro não negativo. Normalmente esses polinômios são representados por $\mathcal{P}_{\ell}(x)$ ou $\mathcal{P}_{\ell}(\cos(\theta))$.

A relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre, calcula o produto interno entre dois polinômios de Legendre de ordens diferentes, que resulta em zero, e o produto interno de um polinômio de Legendre com ele mesmo, que resulta em um valor não nulo. Essa propriedade é fundamental para diversas aplicações, entre elas o cálculo da integral definida realizada de forma numérica, este é o assunto explorado no próximo capítulo.

3 CALCULO DE INTEGRAIS

Nesse capítulo apresentaremos uma aplicação do polinômio de Legendre, que é a integração numérica, amplamente aplicada em problemas em que as integrais são de funções impossíveis ou difíceis de serem resolvidas, ou ainda quando é uma função discreta. Os conceitos e exemplos aqui apresentados foram baseados principalmente em (CAMPOS FI-LHO, 2007; CHAPRA; RAYMOND, 2016; EVES, 2004; NOBREGA, 2012; STEWART, 2013a).

3.1 A INTEGRAL

Segundo Eves (2004) os primeiros problemas da história do cálculo estavam diretamente relacionados à determinação de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Enquanto as formas delimitadas por linhas retas já eram estudadas e calculadas com precisão há milênios, como demonstram registros da geometria egípcia e grega, os cálculos precisos envolvendo curvas representam um desenvolvimento relativamente recente.

O mesmo autor ainda afirma que nome “cálculo integral” foi utilizado pela primeira vez por Johann Bernoulli, embora a ideia fundamental já estivesse presente em trabalhos anteriores, como os de Arquimedes, que usava métodos de exaustão para calcular áreas e volumes.

Já notação do símbolo de integral (\int) foi introduzida por Gottfried Wilhelm Leibniz em 1675, durante o desenvolvimento de seu trabalho sobre cálculo. Leibniz escolheu o símbolo \int como uma adaptação do “s longo”, a letra inicial da palavra latina *summa* (soma), indicando a ideia de uma soma contínua. Essa notação tornou-se um marco na formalização do cálculo integral e permanece em uso até hoje.

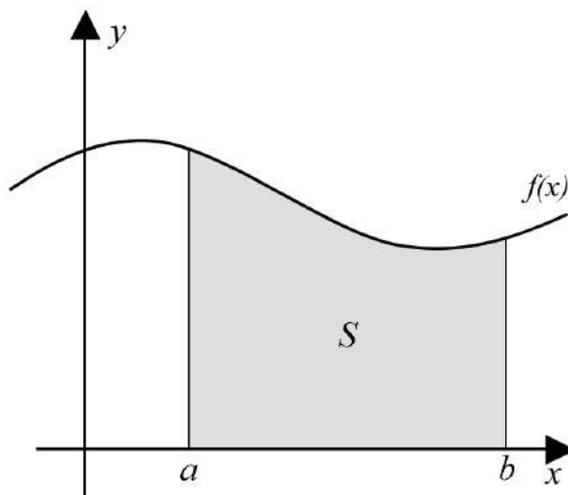
E só mais tarde, o matemático Joseph Fourier foi responsável por introduzir a notação moderna da integral definida, utilizando limites superior e inferior ao lado do símbolo \int para indicar os intervalos de integração (MELCHIORIS; SOARES, 2019).

A dificuldade em lidar com formas compostas por linhas curvas foi um dos principais motivadores para o surgimento do cálculo diferencial e integral, cujas ferramentas matemáticas permitiram avanços significativos na resolução desses problemas.

No século XX George Riemann tornou claro o conceito de integrabilidade pela definição do que chamamos hoje “integral Riemann”, que é baseada no conceito de aproximar a área sob uma curva dividindo-a em retângulos e somando suas áreas. Essa soma, conhecida como soma de Riemann, é refinada tomando o limite quando o número de retângulos tende ao infinito e sua largura tende a zero, resultando na integral definida. Os conceitos a seguir são baseados em (NOBREGA, 2012; STEWART, 2013a).

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, com a e b números reais e $a < b$, sendo f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ e seja S a região limitada pela curva $y = f(x)$, as retas $x_0 = a$ e $x_n = b$ e o eixo x conforme mostra a Figura (9)

Figura 9 – Área sob curva



Fonte: Brasil Escola - UOL □

Uma partição do intervalo $[a, b]$ com n subintervalos, é definida escolhendo $n - 1$ pontos entre a e b , da seguintes forma,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Sejam $\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$, o comprimento do subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ com $k = 1, 2, \dots, n$, t_k um ponto em $[x_{k-1}, x_k]$ e S_k o retângulo com altura $f(t_k)$ e largura $\Delta_k x$. Dessa forma, encontramos um valor aproximado para a área que se deseja calcular, somando as áreas dos retângulos S_k , ou seja,

$$\text{Área de } S \approx f(t_1) \Delta_1 x + f(t_2) \Delta_2 x + \dots + f(t_{n-1}) \Delta_{n-1} x + f(t_n) \Delta_n x = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta_k x$$

Observe na Figura (10), que quanto maior for o valor de n na partição considerada, mais próximo da região S estará a soma das áreas dos retângulos. Seja $\|P\|$ o comprimento do maior subintervalo da partição, isto é,

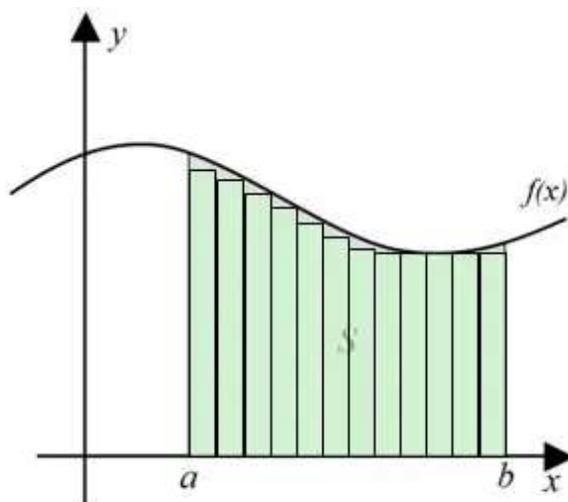
$$\|P\| = \max \{ \Delta_k x, 1 \leq k \leq n \}$$

Quanto mais próximo $\|P\|$ estiver de 0, mais próxima estará das somas das áreas dos retângulos da área da região S .

Logo,

$$\text{Área de } S = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta_k x$$

Figura 10 – Área Sob a curva dividida em retângulos



Fonte: Brasil Escola - UOL [2](#)

Dessa forma, temos que:

Dada uma função f limitada num intervalo fechado $[a, b]$, e uma partição

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

desse intervalo, uma Soma de Riemann é dado por:

$$\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta_k x, \text{ onde } t_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ e } \Delta_k x = x_k - x_{k-1}$$

Dizemos que um número $I = \int_a^b f(x)dx$ é a integral definida de f em $[a, b]$ e que I é o limite das somas de Riemann $\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta_k x$, se a seguinte condição é satisfeita:

Dado qualquer número $\epsilon > 0$, existe um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para qualquer partição $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ de $[a, b]$ com $\|P\| < \delta$ e qualquer escolha de t_k em $[x_{k-1}, x_k]$, temos

$$\left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta_k x - I \right| < \epsilon$$

Portanto, a área da região S é dada por:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

De acordo com [Boyer e Merzbach \(2012\)](#) em 1675 o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral já se tinham feito muitas integrações. O que faltava ainda era a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um novo desenvolvimento utilizando essas regras. A criação de um cálculo manipulável proveitoso, foi onde Newton e Leibniz deram sua contribuição, trabalhando independentemente. Assim, embora Newton e Leibniz tenham tido muitos precursores, a criação do

cálculo em geral é atribuído a eles, mas o desenvolvimento dos conceitos fundamentais com bases aceitáveis, teria de esperar um período de aplicação rigorosa do assunto e seria alcançado por Augustin-Louis Cauchy e seus sucessores do século XIX.

O Teorema Fundamental do Cálculo é um dos resultados mais importantes da história da Matemática, pois Newton e Leibniz perceberam que o Teorema, dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral e eles viram também que o Teorema Fundamental os capacitava a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas (STEWART, 2013a).

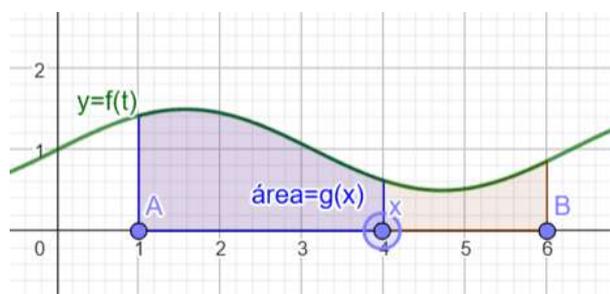
A primeira parte do Teorema Fundamental lida com funções definidas por uma equação da forma

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

onde f é uma função contínua de $[a, b]$ e x varia entre a e b . Observe que g depende somente de x , que aparece como o limite superior variável da integral. Se x for um número fixado, então a integral $\int_a^x f(t)dt$ é um número definido. Se variamos x , o número $\int_a^x f(t)dt$ também varia e define uma função de x denotada por $g(x)$.

Se f for uma função positiva, então $g(x)$ pode ser interpretada como a área sob o gráfico de f de a até x , onde x pode variar de a até b conforme a Figura (11).

Figura 11 – Área sob o gráfico de f de a até x



Fonte: A autora

3

A segunda parte do Teorema Fundamental afirma que se conhecermos uma primitiva F de f , então poderemos calcular $\int_a^b f(x)dx$ simplesmente subtraindo os valores de F nas extremidades do intervalo $[a, b]$. É surpreendente que $\int_a^b f(x)dx$, definida por um procedimento complicado envolvendo todos os valores de $f(x)$ para $a \leq x \leq b$, possa ser encontrada sabendo-se os valores de $F(x)$ em somente dois pontos, a e b , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Embora o Teorema possa ser surpreendente à primeira vista, ele fica plausível se o interpretamos em termos físicos. Se $v(t)$ é a velocidade de um objeto e $s(t)$ é sua posição no tempo t , então $\dot{v}(t) = s'(t)$, de forma que s é uma primitiva de v . Se consideramos um objeto que se move sempre no sentido positivo e fizemos a conjectura de que a área sob a

curva da velocidade é igual à distância percorrida. Em símbolos:

$$\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a)$$

Isso é exatamente o que o Teorema Fundamental do Cálculo parte 2 diz nesse contexto.

3.2 INTEGRAIS NUMÉRICAS

Ainda segundo [Eves \(2004\)](#) o cálculo, apoiado pela geometria analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII. Ele se mostrou uma ferramenta poderosa e eficiente para solucionar problemas impossíveis em tempos anteriores. No século XVIII muitos buscavam utilizá-lo para resolver os problemas sem se preocupar com a fundamentação teórica. Entretanto no século XIX foi dedicado a construir uma fundamentação teórica lógica e sólida para enorme superestrutura construída nos séculos anteriores.

Os problemas econômicos e tecnológicos ocasionados no século XIX pela industrialização da Europa Ocidental e dos Estados Unidos, o clima de guerra mundial no século XX, o desenvolvimento da computação eletrônica e a corrida espacial impulsionaram diversos avanços na área da matemática. Esses eventos fizeram com que muitas pessoas passassem a compreender e aprofundar a matemática sob uma nova ótica, que ultrapassa a abordagem puramente algébrica.

A matemática numérica, embora totalmente embasada nos conceitos matemáticos já desenvolvidos até então, passou a ter grande relevância nos séculos XX e XXI. Ela contribui significativamente para a comprovação de conjecturas matemáticas ainda em aberto, bem como para a obtenção de resultados que o formalismo algébrico tradicional, por si só, não consegue alcançar, como por exemplo o maior número primo que tem 41 milhões de dígitos e é da forma $2^p - 1$, que são os primos de Mersene [\[4\]](#)

Com o avanço das ferramentas computacionais, a matemática numérica consolidou-se como uma área essencial nas ciências, engenharias e tecnologias. Sua relevância vai além do aspecto teórico, pois permite a obtenção de soluções aproximadas e eficientes para problemas complexos que, de outra forma, seriam intratáveis por métodos analíticos tradicionais.

Um exemplo clássico dessa aplicabilidade está no cálculo de integrais definidas. Muitas vezes, deparamo-nos com integrais que não podem ser resolvidas por técnicas analíticas usuais, como substituição, integração por partes ou frações parciais. Isso ocorre, por exemplo, quando a função integranda:

- é uma função transcendente (como $\sin(x^2)$ ou e^{-x^2}),
- é definida por uma série infinita,

⁴ <https://impa.br/notices/por-que-a-descoberta-do-maior-numero-primo-importa/>

- não possui primitiva elementar (isto é, não pode ser expressa por funções elementares),
- apresenta comportamento impróprio com singularidades (como $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$),
- possui limites de integração que envolvem pontos complexos ou infinitos.

Para esses casos, os métodos numéricos de integração tornam-se ferramentas indispensáveis. Eles permitem a obtenção de valores aproximados com alta precisão, ajustando o número de subdivisões ou a ordem do método conforme a necessidade prática.

Assim, a matemática numérica não apenas amplia o leque de problemas resolúveis, como também reforça a ponte entre o rigor matemático e as aplicações concretas do mundo real.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

De acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo apresentado na seção 3.1 dada uma função $f(x)$ integrável no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ onde } F'(x) = f(x)$$

Quando a forma analítica de $F(x)$ for de difícil obtenção ou se forem conhecidos somente valores discretos de $f(x)$, se faz necessário o uso de métodos numéricos para avaliar a integral de $f(x)$. Esses métodos consistem em aproximar a função $f(x)$ por um polinômio interpolador e determinar analiticamente a integral desse polinômio no intervalo $[a, b]$ (CAMPOS FILHO, 2007).

Um desses métodos numéricos, é a fórmula de Newton-Cotes, que segundo Chapra e Raymond (2016) são os esquemas mais comuns de integração numérica. Elas são baseadas na estratégias de substituir uma função complicada ou dados tabulados por uma função aproximadora simples que seja fácil de integrar:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_n(x) dx$$

em que $f_n(x)$ é um polinômio da forma

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

em que n é o grau do polinômio. As fórmulas de Newton-Cotes estão divididas em duas formas: aberta e fechada. Em geral, as fórmulas abertas não são usadas para integração definida, apenas as fechadas. E a primeira fórmula fechada de Newton-Cotes é a regra do trapézio. Mais detalhes e um estudo mais aprofundado dessa fórmula, encontramos no livro de Chapra e Raymond (2016).

3.3 QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE

Segundo Barroso et al. (1987), a fórmula de Gauss-Legendre para o cálculo da integral numérica ou quadratura gaussiana, como é mais conhecida, é uma fórmula que fornece um resultado bem mais preciso que outras formas de integrais numéricas, como por exemplo a de Newton-Cotes, considerando um número de pontos semelhantes.

Isso se deve porque o método de Gauss-Legendre utiliza pontos de avaliação otimizados dentro do intervalo de integração, ao invés de pontos igualmente espaçados como os métodos de Newton-Cotes. Essa otimização leva a uma aproximação mais precisa da integral, especialmente para funções que não são polinomiais de baixo grau.

O método de Gauss-Legendre, escolhe os pontos de avaliação de forma otimizada para minimizar o erro da aproximação. Esses pontos não são necessariamente igualmente espaçados e, em muitos casos, são escolhidos como as raízes de um polinômio ortogonal específico, daí os polinômios de Legendre que são ortogonais como mostrado na 2.4.

A integração gaussiana utiliza os polinômios de Legendre tanto para determinar os nós de integração quanto para calcular os pesos correspondentes. A ortogonalidade dos polinômios de Legendre é um conceito fundamental para a construção da quadratura gaussiana, pois garante que a integração seja exata para polinômios de um certo grau (ALVES, 2009).

Ainda segundo Alves (2009), os nós da quadratura gaussiana são as raízes dos polinômios de Legendre correspondentes ao número de pontos de integração desejado. Por exemplo, para uma quadratura gaussiana de 2 pontos, os nós seriam as raízes do polinômio de Legendre de grau 2.

Os pesos, por sua vez, são calculados utilizando os próprios polinômios de Legendre e suas derivadas. A fórmula para o cálculo dos pesos envolve a avaliação da derivada do polinômio de Legendre nos nós.

A ortogonalidade dos polinômios de Legendre no intervalo $[-1, 1]$ é o que garante a precisão da integração gaussiana. Essa propriedade permite que a integração seja exata para polinômios de grau igual ou inferior a $(2n - 1)$, onde n é o número de pontos de integração.

A seguir o método de Gauss é apresentado baseado em Barroso et al. (1987), Campos filho (2007).

O problema continua sendo determinar:

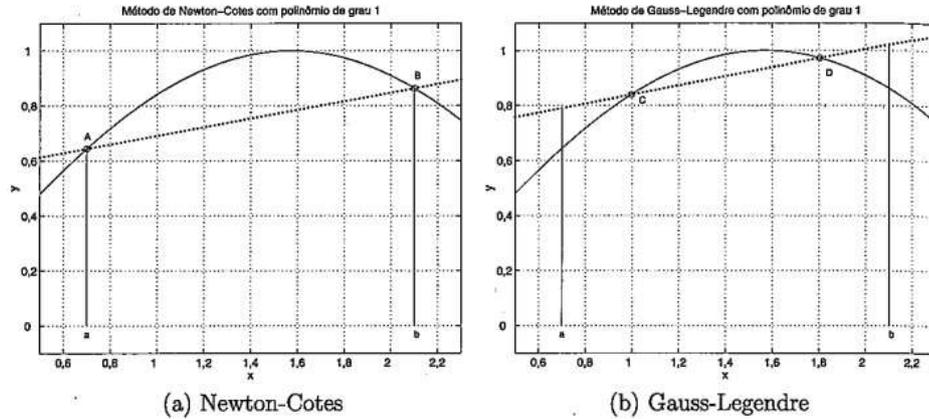
$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Será feita, a seguir, a dedução do método de Gauss para dois pontos pois para mais pontos o procedimento é análogo.

Observe a Figura (12). Para calcular a área abaixo da figura, são escolhidos dois pontos. Observe que se forem escolhidos o primeiro e o último ponto A e B , a área do trapézio formado não se aproxima da área da curva. Entretanto se escolhermos os dois

pontos C e D , utilizando as propriedades dos polinômios de Legendre a área do trapézio formado se aproxima mais da área abaixo da curva desejada.

Figura 12 – Área sob o gráfico de uma função comparado a escolha de pontos



Fonte: (CAMPOS FILHO, 2007, 230)

Para isso, inicialmente, o intervalo de integração deve ser mudado de $[a, b]$ para $[-1, 1]$, que é o intervalo onde são definidos os polinômios de Legendre. Isto pode ser conseguido mediante uma troca de variável:

$$x = x(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}.$$

Agora, a variável x é parametrizada por t , de modo que:

$$dx = \frac{b-a}{2}dt,$$

assim a função $f(x)$ pode ser reescrita

$$f(x) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right).$$

Assim definindo

$$F(t) = \frac{b-a}{2}f(x(t)), \tag{3.1}$$

e

$$F(t) = \frac{b-a}{2}f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right),$$

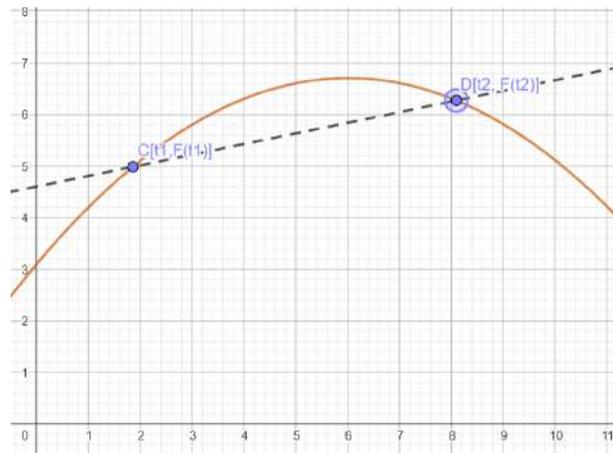
ou seja,

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{b-a} F(t) \frac{b-a}{2} dt = \int_{-1}^1 F(t) dt$$

Observe a Figura (13), como o ponto C tem coordenadas $(t_1, F(t_1))$ e o ponto D tem coordenadas $(t_2, F(t_2))$, então desejamos

$$\int_{-1}^1 F(t) dt = A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2) \tag{3.2}$$

Figura 13 – Área sob o gráfico de uma função comparado a escolha de pontos



Fonte: A autora

Observe que em vista da equação (3.1)

$$A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2) = \frac{b-a}{2} (A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)),$$

que nada mais é, do que a área do trapézio.

Assim A_1, A_2, t_1 e t_2 são incógnitas a se determinar e independente da função F escolhida.

Para determinar estas quatro incógnitas são necessárias quatro equações que podem ser facilmente obtidas ao se considerar $F(t) = t^k$, onde $k = 0, 1, 2, 3$, já que, como foi dito, A_1, A_2, t_1 e t_2 , independente da função $F(t)$.

Então:

$$\int_{-1}^1 t^k dt = A_1 F(t_1^k) + A_2 F(t_2^k)$$

Para $k = 0$

$$F(t) = 1 \rightarrow \int_{-1}^1 1 dt = 1 - (-1) = 2 = A_1 1 + A_2 1$$

Para $k = 1$

$$F(t) = t \rightarrow \int_{-1}^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 = A_1 t_1 + A_2 t_2$$

Para $k = 2$

$$F(t) = t^2 \rightarrow \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} = A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2$$

Para $k = 3$

$$F(t) = t^3 \rightarrow \int_{-1}^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 = A_1 t_1^3 + A_2 t_2^3$$

As expressões acima constituem um sistema de equações não lineares de ordem 4:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ A_1 t_1 + A_2 t_2 = 0 \\ A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 = \frac{2}{3} \\ A_1 t_1^3 + A_2 t_2^3 = 0 \end{cases}$$

Cuja a solução é:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \\ t_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0,5774 \\ A_2 &= 1 \\ t_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774 \end{aligned}$$

Substituindo as valores encontrados na equação [3.2](#), tem-se a fórmula de Gauss para dois pontos:

$$I_G = F\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Conforme [Barroso et al. \(1987\)](#), a fórmula de Gauss-Legendre obtém resultados exatos para aplicações em polinômios de até grau 3. Observe que quando temos funções discretas, e desejamos a área abaixo desses pontos, a ideia é usar um método para construir polinômios para estes pontos e então calcularmos as integrais numéricas.

Exemplo 3.3.1. *Calcular a integral definida*

$$\int_4^9 \sqrt{x} dx$$

ex:exemplo1

Resolvendo de forma algébrica teremos:

$$\begin{aligned} \int_4^9 \sqrt{x} dx &= \int_4^9 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_4^9 \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_4^9 \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{9^3} - \frac{2}{3} \sqrt{4^3} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{729} - \frac{2}{3} \sqrt{64} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 27 - \frac{2}{3} \cdot 8 \\ &= \frac{54}{3} - \frac{16}{3} = \frac{38}{3} = 12,66 \end{aligned}$$

Agora, vamos resolver utilizando o método de Gauss-Legendre:

Primeiro vamos calcular o valor de $x_i(t)$:

Sabendo que $x_i(t) = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2}$ temos que:

$$x_i(t) = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2}$$

$$x_i(t) = \frac{9-4}{2}t_i + \frac{4+9}{2}$$

$$x_i(t) = \frac{5}{2}t_i + \frac{13}{2}$$

Em seguida calculamos $F(t) = \frac{b-a}{2} \cdot f \cdot \left(\frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} \right)$, onde f é a função que estamos trabalhando.

Assim temos que

$$F(t) = \frac{b-a}{2} \cdot f \left(\frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} \right)$$

$$F(t) = \frac{9-4}{2} \cdot f \left(\frac{5}{2}t_i + \frac{13}{2} \right)$$

$$F(t) = \frac{5}{2} \cdot f \left(\frac{5}{2}t_i + \frac{13}{2} \right)$$

Agora substituindo f por \sqrt{x} e no lugar de x substituímos pelo valor de x_i , ficamos com:

$$F(t) = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}t_i + \frac{13}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Calculando os valores para $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, observamos os seguintes valores:

Tabela 5 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$

	x_i	$f(x_i)$
t_1	5,056625	2,24869
t_2	7,943370	2,81839

Utilizando a equação (3.2), com $A_1 = A_2 = 1$ temos que:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 F(t) dt &\cong A_0 F(t_0) + A_1 F(t_1) \cong 1 \cdot F(-0,5774) + 1 \cdot F(0,5774) \\ &\cong \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot (-0,5774) + \frac{13}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} (0,5774) + \frac{13}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\cong \frac{5}{2} \cdot (-1,4435 + 6,5)^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} (7,9435)^{\frac{1}{2}} \\ &\cong \frac{5}{2} \cdot (5,0565)^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} \cdot 2,8184 \\ &\cong \frac{5}{2} \cdot 2,2486 + \frac{5}{2} \cdot 2,8184 \\ &\cong 5,6215 + 7,046 \\ &\cong 12,6675 \end{aligned}$$

Vamos calcular o polinômio de Gauss-Legendre para essa função:

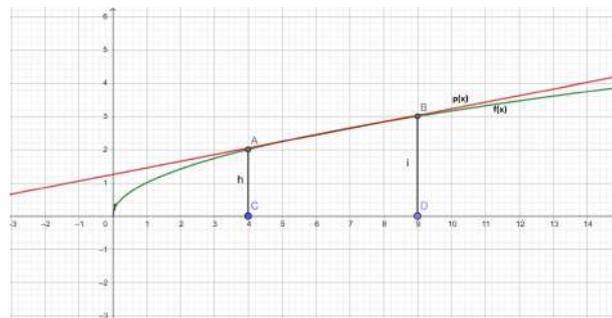
$$p(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$p(x) = 2,24869 + 0,197350(x - 5,056625)$$

$$p(x) = 0,197350x + 1.25076$$

O gráfico mostrado na figura 14, demonstra que no intervalo de $[4, 9]$, a área abaixo da curva $f(x) = \sqrt{x}$ é muito próxima a área sob o polinômio de Legendre $p(x) = 0,197350x + 1.25076$

Figura 14 – Área sob o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e do polinômio $p(x)$



Fonte: a autora

FÓRMULA GERAL

A fórmula geral para obter os parâmetros, que é determinada por um processo semelhante ao adotado para o cálculo da fórmula para 2 pontos, é baseada em propriedades dos polinômios de Legendre e ela é apresentada da seguinte forma:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 F(t) dt$$

$$I_n = \sum_{i=1}^n A_i F(t_i) = A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2) + \dots + A_n F(t_n) \tag{3.3}$$

onde; n - é o número de pontos, A_i - são os coeficientes e os t_i - são as raízes.

De modo que I_n seja exata para polinômios de grau menor ou igual a $2n - 1$, assim fazendo

$$F(t) = t^k, k = 0, 1, 2, 3, \dots, 2n - 1,$$

e sabendo que eles

$$\int_1^1 t^k dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ for ímpar} \\ \frac{2}{k+1} & \text{se } k \text{ for par} \end{cases}$$

Daí considerando que I_n é exata para integração de $F(t) = t^k$, é possível formar o seguinte sistema não linear.

$$\begin{aligned}
A_1 &+ A_2 + \cdots + A_n = 2 \\
A_1 t_1 &+ A_2 t_2 + \cdots + A_n t_n = 0 \\
A_1 t_1^2 &+ A_2 t_2^2 + \cdots + A_n t_n^2 = \frac{2}{3} \\
&\vdots \\
A_1 t_1^{2n-1} &+ A_2 t_2^{2n-1} + \cdots + A_n t_n^{2n-1} = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

cuja solução forne os n valores de A_i e as n abscissas t_i , que estamos procurando e para $x_i = x(t_i)$

$$I_n = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$$

Para resolvermos o sistema linear utilizamos a fórmula de recorrência de Legendre, a função geratriz (2.30) apresentada no capítulo 2. Entretanto para associar ao grau dos polinômios conforme é necessário nesse capítulo, vamos substituir ℓ por n .

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{(2n-1)\mathcal{P}_{n-1}(x) - (n-1)\mathcal{P}_{n-2}(x)}{n} \tag{3.5}$$

Lembrando que os polinômios de Legendre possuem as propriedades, já citadas no capítulo 2:

$$\mathcal{P}_n(1) = 1, \mathcal{P}_n(-1) = (-1)^n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\int_{-1}^1 \mathcal{P}_n(x) \mathcal{Q}_n(x) dx = 0, \quad \text{se } n > k$$

sendo $\mathcal{Q}(x)$ um polinômio qualquer de grau $k < n$. Assim como apresentamos no capítulo 2, na seção 2.4, temos que:

$$\int_{-1}^1 \mathcal{P}_n(x) \mathcal{P}_{n'}(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,n'},$$

em que

$$\delta_{n,n'} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq n' \\ 1 & \text{se } n = n' \end{cases},$$

é o delta de Diric.

Outra propriedade, também já citada no capítulo 2 é que $\mathcal{P}_n(x) = 0$, possuem n raízes distintas pertencentes ao intervalo $(-1, 1)$ e simétricas em relação a origem.

Considere os polinômios

$$F_k(t) = t^k P_n(t), \quad k = 1, 2, \dots, 2n-1$$

em que $P_n(t)$ é o polinômio de Legendre de grau n . Desde de que $F_k(t)$ é de grau menor ou igual a $2n-1$, então I_n como apresentada na equação (3.3) é exata.

$$\int_1^{-1} F_k(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i F_k(t_i), k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

$$\int_1^{-1} t^k \mathcal{P}_n(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i t^k \mathcal{P}_n(t_i), k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

E devido a ortogonalidade dos polinômios de Legendre com qualquer polinômio do grau menor que o polinômio de Legendre, temos que:

$$\int_1^{-1} t^k \mathcal{P}_n(t) dt = 0, n > k$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n A_i t^k \mathcal{P}_n(t_i) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Essa expressão será verdadeira para qualquer valor de A_i se $\mathcal{P}_n(t_i) = 0$ para todo i . Assim para obter maior exatidão na forma de quadratura de Gauss-Legendre apresentada na equação (3.3), é suficiente que t_i , para $i = 1, 2, \dots, n$ sejam as raízes dos polinômios de Legendre de grau n .

Sendo conhecida as abscissas t_i , então o sistema não linear apresentado em equação (3.4), se transforma em um sistema linear de ordem n , cuja solução fornece os pesos de A_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

$$\begin{bmatrix} 1 & + & 1 & + & \dots & + & 1 \\ t_1 & + & t_2 & + & \dots & + & t_n \\ t_1^2 & + & t_2^2 & + & \dots & + & t_n^2 \\ \vdots & & & & & & \\ t_1^{2n-1} & + & t_2^{2n-1} & + & \dots & + & t_n^{2n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Os pesos A_i s podem ser obtidos conforme Rybick (1997, *apud* CAMPOS FILHO, 2007, p.229).

$$A_i = \frac{2}{(1 - t_i^2)(\mathcal{P}'_n(t_i))^2}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Em que $\mathcal{P}'_n(t_i)$ é a derivada de $\mathcal{P}_n(t)$ calculado na abscissa t_i .

Os valores de t_i e A_i para $n = 1, 2, \dots, 10$, são apresentados em Campos filho (2007, 237), e estão apresentados na Figura (15).

Ainda acordo com Demidovich e Maron (1981), o erro de integração de Gauss-Legendre é dado por :

$$E_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{((2n)!)^3 (2n+1)} f^{2n}(\theta), a < \theta < b$$

onde θ é a abscissa, na qual a derivada $f^{2n}(x)$ apresenta maior valor em módulo no intervalo $[a, b]$. Consequentemente, a equação (3.3) fornece a cota máxima do erro de integração da fórmula de Gauss-Legendre.

Voltando ao Exemplo (1), vamos calcular agora, o erro de integração da fórmula de Gauss-Legendre da integral $\int_4^9 \sqrt{x} dx$ para $n = 2$.

Inicialmente vamos calcular a primeira, segunda, terceira e quarta derivada da função, já que no exemplo obtivemos a integral para $n = 2$, assim para o erro precisamos da IV derivada.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8x^2\sqrt{x}} \\ f^{iv}(x) &= -\frac{15}{16\sqrt{x} \cdot |x^3|} \\ f^k(x) &= (-1)^{k+1} \frac{(2k-3)!!}{2^k} x \cdot \frac{-(2k-1)}{2} \end{aligned}$$

a derivada de ordem $2n$ é:

$$f^{2n}(x) = (-1)^{2n+1} \frac{(4n-3)!!}{2^{2n}}$$

Agora, aplicando na fórmula do erro de integração de Gauss-Legendre, temos que:

$$E_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{((2n)!)^3 (2n+1)} f^{2n}(\theta), \quad a < \theta < b$$

Calculando para $n = 2$:

$$\begin{aligned} E_2 &\approx \frac{(b-a)^5}{4320} f^{(4)}(\theta) \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16\sqrt{x}|8^3|} \Rightarrow f^{(4)}(x) = -\frac{105}{16} x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} E_2 &\approx \frac{(5)^5}{4320} \left(-\frac{105}{16} \theta^{-\frac{7}{2}} \right) \\ &\approx \frac{3125}{4320} \cdot \left(-\frac{105}{16} \theta^{-\frac{7}{2}} \right) \\ &\approx - \left(\frac{3125 \cdot 105}{4320 \cdot 16} \cdot \theta^{-\frac{7}{2}} \right) \\ E_2 &\approx -\frac{328125}{69120} \cdot \theta^{-\frac{7}{2}} \\ E_2 &\approx 4,74717 \cdot \theta^{-\frac{7}{2}} (I) \end{aligned}$$

Sabendo que $\theta \in [4, 9]$, θ valor máximo de $|\theta^{-\frac{7}{2}}|$ ocorre em $\theta = 4$ pois: A função $f(\theta) = \theta^{-\frac{1}{2}}$ é decrescente em $\theta > 0$.

Isso significa que:

- Quando θ aumenta, $q(\theta)$ diminui.

- Quando θ diminui, $f(\theta)$ aumenta

Portanto, no intervalo $[4, 9]$

- valor máxima de $\theta^{-\frac{7}{2}}$ ocorre no extremo inferior ($\theta = 4$). - valor mínimo de $\theta^{-\frac{7}{2}}$

ocorre no extremo superior ($\theta = 9$).

Com isso, substituindo $\theta = 4$ em (I), temos que

$$E_2 \approx 4,74717 \cdot 4^{-\frac{7}{2}}$$

$$E_2 \approx 4,74717 \cdot 0,00781$$

$$E_2 \approx 0,0370$$

Ou seja a conta máxima de erro para o polinômio de Gauss-Legendre de grau dois é 0,0370

De fato pois de forma algébrica obtivemos o valor $V_A = 12,66$, pelo método de Gauss-Legendre utilizando $n = 2$, obtivemos $V_{GL} = 12,6675$. Assim o erro real obtido.

$$E_R = |V_A - V_{GL}| = |12,66 - 12,6675| = |0,0075| < 0,037.$$

Exemplo 3.3.2. Calcular a integral definida

$$\int_0^\pi (e^x + \text{sen}(x) + 2) dx$$

utilizando o método de Gauss-Legendre para $n = 2$ e $n = 3$.

Calculando algebricamente:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (e^x + \text{sen}(x) + 2) dx &= \int e^x dx + \int \text{sen}(x) dx + \int 2 dx \\ &= e^x - \cos(x) + 2x \Big|_0^\pi \\ &= e^\pi - \cos(\pi) + 2\pi - e^0 - \cos(0) + 2 \cdot 0 \\ &= e^\pi - (-1) + 2\pi - 1 \cdot 0 \\ &= e^\pi + 1 + 2\pi \\ &\simeq 30,42382 \end{aligned}$$

Calculando a integral, pela quadratura gaussiana. Inicialmente obtemos $x(t)$ para o intervalo $[0, \pi]$

$$\begin{aligned}x_i &= \frac{b-a}{2}ti + \frac{a+b}{2} \\x_i &= \frac{\pi-0}{2}ti + \frac{0+\pi}{2} \\x_i &= \frac{\pi}{2}ti + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Determinando $F(t)$, temos

$$\begin{aligned}F(t) &= \frac{b-a}{2}f\left(\frac{b-a}{2}ti + \frac{a+b}{2}\right) \\F(t) &= \frac{\pi-0}{2} \cdot f \cdot \left(\frac{\pi}{2}ti + \frac{\pi}{2}\right) \\F(t) &= \frac{\pi}{2} \cdot f \cdot \left(\frac{\pi}{2}ti + \frac{\pi}{2}\right) \\F(t) &= \frac{\pi}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}ti + \frac{\pi}{2}} + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}ti + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \right)\end{aligned}$$

Para $n = 2$, consultando a tabela apresentada na Figura (15), temos

$$I = \int_{-1}^1 F(t) dt = A_0F(t_0) + A_1F(t_1),$$

em que $A_0 = A_1 = 1$ e $t_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0,5774$ e $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 F(t) dt &\cong A_1F(t_1) + A_2F(t_2) \\&\cong \frac{\pi}{2} \left(e^{\left(\frac{\pi}{2} \cdot (-0,5774) + \frac{\pi}{2}\right)} + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot (-0,5774) + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \right) \\&+ \frac{\pi}{2} \left(e^{\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0,5774 + \frac{\pi}{2}\right)} + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0,5774 + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\&\cong \frac{\pi}{2} \left(e^{(0,66381)} + \text{sen}(0,66381) + 2 \right) + \frac{\pi}{2} \left(e^{(2,47776)} + \text{sen}(2,47776) + 2 \right) \\&\cong \frac{\pi}{2} (1,94217 + 0,616122 + 2) + \frac{\pi}{2} (11,91454 + 0,61614 + 2) \\&\cong \frac{\pi}{2} (4,558292) + \frac{\pi}{2} (14,53068) \\&\cong 7,160148 + 22,824738 \\&\cong 29,98488\end{aligned}$$

Para calcular a cota máxima do erro de integração para $n = 2$, devemos calcular até a 4ª derivada.

$$\begin{aligned}f(x) &= e^x + \text{sen}(x) + 2 \\f'(x) &= e^x + \cos(x) \\f''(x) &= e^x - \text{sen}(x) \\f'''(x) &= e^x - \cos(x) \\f^{iv}(x) &= e^x + \text{sen}(x)\end{aligned}$$

Aplicando agora, a fórmula do erro de integração da quadratura de Gauss-Legendre, temos que:

$$\begin{aligned} E_2 &\approx \frac{(b-a)^5}{4320} f^{(4)}(\theta) \\ E_2 &\approx \frac{(\pi-0)^5}{4320} \cdot (e^\theta + \text{sen}(\theta)) \\ E_2 &\approx \frac{\pi^5}{4320} \cdot (e^\theta + \text{sen}(\theta)) \quad (II) \\ E_2 &\approx \frac{306,01968}{32} \cdot (e^\theta + \text{sen}(\theta)) \\ E_2 &\approx 0,07083 \cdot (e^\theta + \text{sen}(\theta)) \end{aligned}$$

Sabendo que θ é a abcissa, na qual a derivada $f^{2n}(x)$ apresenta o maior valor em módulo no intervalo dado. Temos que $f^{(4)}(x) = e^x + \text{sen}(x) + 2$ é crescente no intervalo $[0, \pi]$. Assim, o erro máximo ocorre em $x = \pi = \theta$.

Logo, substituindo $\theta = \pi$, temos que:

$$\begin{aligned} E_2 &\approx 0,07083 \cdot (e^\pi + \text{sen}(\pi)) \\ E_2 &\approx 0,07083 \cdot (e^\pi + 0) \\ E_2 &\approx 0,07083 \cdot 23,14069 \\ E_2 &\approx 1,63905 \end{aligned}$$

De fato pois de forma algébrica obtivemos o valor $V_A = 30,42382$, pelo método de Gauss-Legendre utilizando $n = 2$, obtivemos $V_{GL} = 29,98488$. Assim o erro real obtido.

$$E_R = |V_A - V_{GL}| = |30,42382 - 29,98488| = |0,43894| < 1,63905.$$

A seguir, aplicaremos o método da quadratura de Gauss-Legendre para os polinômios de grau 3 utilizando as abcissas e os pesos para $n = 3$ da Tabela apresentada na Figura (15). Com os respectivos valores para t_i e A_i , sendo $t_0 = -0,77459$, $A_0 = 0,55556$, $t_1 = 0,77459$, $A_1 = 0,55556$, $t_2 = 0$ e $A_2 = 0,88889$.

Após coletarmos as abcissas e os pesos da tabela, e sabendo que nosso discriminante é $x_i = \frac{\pi}{2}ti + \frac{\pi}{2}$, vamos calcular a integral para 3 pontos:

$$\int_0^\pi (e^x + \text{sen}(x) + 2) \approx A_1 \cdot F(t_1) + A_2 \cdot F(t_2) + A_3 \cdot F(t_3)$$

$$\begin{aligned}
&\approx 0,555556 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(e^{\frac{\pi}{2}(-0,77459) + \frac{\pi}{2}} + \sin\left(\frac{\pi}{2}(-0,77459) + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \right) \\
&\quad + 0,555556 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(e^{\frac{\pi}{2}(0,77459) + \frac{\pi}{2}} + \sin\left(\frac{\pi}{2}(0,77459) + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \right) \\
&\quad + 0,888889 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(e^{\frac{\pi}{2}(0) + \frac{\pi}{2}} + \sin\left(\frac{\pi}{2}(0) + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \right) \\
&\approx 0,555556 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(e^{0,35407} + \sin(0,35407) + 2 \right) \\
&\quad + 0,555556 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(e^{2,7875} + \sin(2,7875) + 2 \right) \\
&\quad + 0,888889 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(e^{1,57079} + \sin(1,57079) + 2 \right) \\
&\approx 0,555556 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (1,42485 + 0,34671 + 2) \\
&\quad + 0,555556 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (16,24036 + 0,34673 + 2) \\
&\quad + 0,888889 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (4,81044 + 0,99998 + 2) \\
&\approx 0,555556 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3,77156 + 0,555556 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 18,58709 + 0,888889 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 7,81042 \\
&\approx 3,29132 + 16,22036 + 10,90537 \\
&\approx 30,41702
\end{aligned}$$

Agora, para calcular a cota máxima do erro de integração para 3 pontos, temos que calcular a sexta derivada f^{vi} da função. Com isso, temos que:

$$f(x) = e^x + \text{sen}(x) + 2$$

$$f^{iv}(x) = e^x + \cos(x)$$

$$f^v(x) = e^x - \text{sen}(x)$$

$$f^{vi}(x) = e^x - \cos(x)$$

Calculando a cota máxima do erro de integração para $n = 3$, temos:

$$\begin{aligned}
E_2 &\approx \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} \cdot \frac{2^{2n+1} \cdot (n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} \cdot \gamma^{(2n)} \cdot \theta \\
E_2 &\approx \left(\frac{\pi-0}{2}\right)^{2 \cdot 3+1} \cdot \frac{2^{2 \cdot 3+1} \cdot (3!)^4}{(2 \cdot 3+1)((2 \cdot 3)!)^3} \cdot (e^\theta + \text{sen}(\theta)) \\
E_2 &\approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \cdot \frac{2^7 \cdot (3!)^4}{7 \cdot (6!)^3} \cdot (e^\theta + \text{sen}(\theta)) \\
E_2 &\approx \frac{\pi^5}{32} \cdot \frac{128 \cdot 1296}{2612736000} \cdot (e^\theta + \text{sen}(\theta)) \\
\tilde{h}_2 &\approx \frac{306,01968}{32} \cdot \frac{165888}{2612736000} \cdot (e^\theta + 1 \text{sen}(\theta)) \\
E_2 &\approx 9,563115 \cdot 0,00006 \cdot (e^\theta + \text{sen}(\theta)) \\
E_2 &\approx 0,00057 \cdot (e^\theta + \text{sen}(\theta))
\end{aligned}$$

Sabendo que θ é a abscissa, na qual a derivada $f^{2n}(x)$ apresenta o maior valor em módulo no intervalo dado. Assim, temos que derivar novamente e encontrar a sétima derivada da função que será $f^{vii}(x) = e^x + \text{sen}(x)$, e igualá-la a 0, para acharmos o ponto crítico e assim encontrarmos o ponto de máximo.

Com isso, sabendo que a função seno é limitada no intervalo de $[-1, 1]$ e a função e^x cresce indefinidamente, logo, pelo gráfico da Figura 16 vemos que elas se cruzam em pontos negativos que estão fora do intervalo $[0, \pi]$ assim, resulta que ela não tem ponto crítico. Dessa forma concluímos que o ponto de mínimo será em 0 o ponto de máximo será em π . Então nosso $\theta = \pi$.

$$E_2 \approx 0,00057 \cdot (e^\pi + \text{sen}(\pi))$$

$$E_2 \approx 0,00057 \cdot (23,14069)$$

$$E_2 \approx 0,01319$$

De fato pois de forma algébrica obtivemos o valor $V_A = 30,42382$, pelo método de Gauss-Legendre utilizando $n = 3$, obtivemos $V_{GL} = 30,417017$. Assim o erro real obtido.

$$E_R = |V_A - V_{GL}| = |30,42382 - 30,417017| = |0,006823| < 0,01319.$$

Portanto, verificamos que calculando a integral pelo método da quadratura de Gauss para 3 pontos nos dá um resultado bem mais aproximado do algébrico, do que para 2 pontos.

3.3.1 Implementação

Implementar o método de Gauss-Legendre para o cálculo de integrais definidas tem várias vantagens, especialmente quando buscamos eficiência e precisão. Como já foi visto o método de Gauss-Legendre escolhe pontos e pesos ótimos de forma que ele integre exatamente polinômios de grau até $2n - 1$ em que n é o número de pontos usados. Isso o torna muito mais preciso do que, por exemplo, a regra dos trapézios (que é exata até polinômios de grau 1) e regra de Simpson (exata até grau 3).

Esse método fornece boa precisão com menos pontos, ele reduz o número de avaliações da função, o que é ótimo quando a função a ser integrada é computacionalmente cara e usa diretamente os pontos dentro do intervalo de integração transformado. Isso simplifica o processo e melhora a performance. Se a função a ser integrada for suave (derivável várias vezes), o Gauss-Legendre apresenta uma convergência exponencial, ou seja, o erro cai rapidamente com o aumento do número de pontos.

Segundo Campos filho (2007), inicialmente, as abscissas t_i , isto é, as raízes dos polinômios de Legendre

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{(2n-1)x\mathcal{P}_{n-1}(x) - (n-1)\mathcal{P}_{n-2}(x)}{n}$$

podem ser calculadas utilizando qualquer método numérico para encontrar raízes de equação, como por exemplo o Método Newton (CAMPOS FILHO, 2007, 308) e os pesos A_i pela expressão

$$A_i = \frac{2}{(1 - t_i^2) (\mathcal{P}'_n(t_i))^2}, i = 1, 2, \dots, n$$

segundo um esquema proposto por Rybicki (Press et al. (1992, 145)). Esse esquema foi implementado no algoritmo **PesAbsGL**, apresentado por Campos filho (2007, p.241).

O algoritmo é apresentado na Figura (17), e temos que o parâmetro de entrada é o número de pontos n da fórmula desejada. Os parâmetros de saída são o vetor **A** com os pesos, o vetor **T** com abcissas e **CondErro**, a condição de erro no parâmetro de entrada. Se **CondErro=0** não houve erro de consistência ($n \geq 1$), e **CondErro=1** significa que $n < 1$. Como os zeros dos polinômios de Legendre são simétricos em relação à origem, somente as abcissas não negativas são calculadas.

Já o algoritmo de Gauss-Legendre, para integrar uma função $f(x)$ de a até b com qualquer número de pontos $n \geq 1$, é apresentado na Figura (18) Tem como parâmetros de entrada os limites de integração inferior a e superior b e o número de pontos n da fórmula desejada. A função $f(x)$ deve ser especificada de acordo com a linguagem de programação adotada.

Os parâmetros de saída são o valor da integração Integral e **CondErro**, a condição de erro do número de pontos, sendo que **CondErro = 0** significa que não houve erro de consistência ($n \geq 1$) e **CondErro = 1** indica que $n < 1$.

Os pesos e as abcissas são calculados pelo algoritmo **PesAbsGL** da Figura (17). No entanto, o algoritmo GaussLegendre pode ser adaptado de forma que os pesos e as abcissas possam ser fornecidos como parâmetros de entrada.

Durante o cálculo da integral, a variável k , avaliada de modo não trivial, fornece a posição dos pesos e das abcissas nos vetores **Avet** e **Tvet**, respectivamente, além de controlar o sinal das abcissas, visto que somente aquelas positivas e nulas são calculadas e armazenadas.

Ainda segundo Campos filho (2007) a complexidade computacional do algoritmo de Gauss-Legendre conforme apresentado na Figura (18) é de:

Tabela 6 – Tabela de Complexidade computacional por operações do método Gauss-Legendre

Operações	Complexidade
Adições	$7n + 2$
Multiplicações	$6n + 1$
Divisões	2

3.3.2 Testes

A implementação do método de Gauss-Legendre foi feita conforme o algoritmo apresentado na Figura (18), a linguagem de programação escolhida para gerar o código foi o MATLAB.

Escolhemos o MATLAB pois a sintaxe é intuitiva para operações matemáticas, o que torna a implementação do algoritmo mais simples e rápida. Já que possui funções para manipulação de matrizes, vetores e cálculos matemáticos que podem ser reutilizadas no código, otimizando o desenvolvimento. Seu ambiente permite visualizar os resultados da integração e analisar o comportamento da função integrada, facilitando a validação do método. Além disso, a plataforma *Mathworks*⁶ permite o uso gratuito para estudantes, por até três meses. O código escrito em MATLAB está apresentado no anexo A.

Para testes utilizamos três integrais definidas que não possuem solução analítica ou algébrica.

1º Teste

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx,$$

Tabela 7 – Tabela de resultados do 1º teste

Método de Integração de Gauss-Legendre		
n	Valor estimado obtido	Cota máxima de erro
2	0,7465946837	2,7777777778e-03
3	0.7468145842	5.9523809524e-05

Calculando o polinômio de Gauss-Legendre para $n = 2$ e $n = 3$ desta função, temos que:

Tabela 8 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$ do 1º teste para $n = 2$

-	x_i	$f(x_i)$
t_1	0,7887	0,26842
t_2	0,2113	0,47817

$$p(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$p(x) = 0,47817 + \frac{0,26842 - 0,47817}{0,7887 - 0,2113} (x - 0,2113)$$

$$p(x) = 0,47817 + \frac{(-0,20975)}{0,5774} \cdot (x - 0,2113)$$

$$p(x) = 0,47817 + (-0,36326) \cdot (x - 0,2113)$$

$$p(x) = 0,47817 - 0,36326x + 0,076756$$

$$p(x) = -0,36326x + 0,554573$$

⁶ <https://matlab.mathworks.com/>

Para $n = 3$ temos que o polinômio de Gauss-Legendre é:

Tabela 9 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$ do 1º teste para $n = 3$

-	x_i	$f(x_i)$
t_1	0,112705	0,0127024
t_2	0,887295	0,227375
t_3	0,5	0,5

$$p(x) = f(x_1) \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + f(x_2) \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + f(x_3) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$p(x) = 0,0127024 \cdot \frac{(x^2 - 0,5x - 0,889295x + 0,4436495)}{(-0,7 + 459)(-0,387295)}$$

$$+ 0,227375 \cdot \frac{(x^2 - 0,5x - 0,112705 + 0,05637)}{(0,77459) \cdot (0,387295)}$$

$$+ 0,5 \cdot \frac{(x^2 - 0,887295x - 0,112705x + 0,100002)}{(0,387295)(-0,387395)}$$

$$= 0,0127024 \cdot \frac{(x^2 - 1,387295x + 0,4436475)}{0,299994}$$

$$+ 0,227375 \cdot \frac{(x^2 - 0,612705x + 0,0563525)}{0,299994}$$

$$+ 0,5 \cdot \frac{(x^2 - 0,9x + 0,100002)}{-0,149997}$$

$$= \frac{0,0127024x^2 - 0,0176219x + 0,00563}{0,299994} + \frac{0,227375x^2 - 0,139313x + 0,12813}{0,29994}$$

$$- \frac{0,5x^2 - 0,45x + 0,050001}{0,149997}$$

$$p(x) = \frac{0,2400774x^2 - 0,1569349x + 0,13376}{0,299994} - \frac{0,5x^2 - 0,45x + 0,050001}{0,149997}$$

$$p(x) = 0,80027x^2 - 0,52312x + 0,44587 - 3,33340x^2 - 3,00006x + 0,33334$$

$$p(x) = -2,53313x^2 + 3,52318x + 0,77921$$

O gráfico mostrado na figura [19](#), demonstra que no intervalo de $[0, 1]$, a área abaixo da curva $f(x) = e^{-x^2}$ é relativamente próxima a área sob o polinômio de Legendre $p(x) = -0,36326x + 0,554573$ de grau 1, já a área sob o polinômio de Legendre de grau 2 $p(x) = -2,53313x^2 + 3,52318x + 0,77921$ não é próxima a área da função.

2º Teste

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx,$$

Vamos calcular o polinômio de Gauss-Legendre para esta função para $n = 2$ e $n = 3$:

Tabela 10 – Tabela de resultados do 2º teste

Método de Integração de Gauss-Legendre		
n	Valor estimado obtido	Cota máxima de erro
2	0.17000555	1.87500000e-02
3	0.17305383	4.09226190e-03

Tabela 11 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$ do 2º teste para $n = 2$

-	x_i	$f(x_i)$
t_1	0,2113	0,0209
t_2	0,7887	0,1490975

$$p(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

$$p(x) = 0,0209 + \frac{0,1490975 - 0,0209}{0,7887 - 0,2113} \cdot (x - 0,2113)$$

$$p(x) = 0,0209 + \frac{0,1281975}{0,5774} \cdot (x - 0,2113)$$

$$p(x) = 0,0209 + 0,22202 \cdot (x - 0,2113)$$

$$p(x) = 0,0209 + 0,22202x - 0,01072$$

$$p(x) = 0,22202x + 0,01018$$

Para $n = 3$ temos que o polinômio de Gauss-Legendre é:

Tabela 12 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$ do 2º teste para $n = 3$

-	x_i	$f(x_i)$
t_1	0,112705	0,102963
t_2	0,887295	0,168435
t_3	0,5	0,29752

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f(x_2) \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
p(x) &= 0,102963 \cdot \frac{(x-0,887295)(x-0,5)}{(0,112705-0,887295)(0,112705-0,5)} \\
&+ 0,168435 \cdot \frac{(x-0,112705)(x-0,5)}{(0,887295-0,112705)(0,887295-0,887295)} \\
&0,29752 \cdot \frac{(x-0,112705)(x-0,887295)}{(0,5-0,112705) \cdot (0,5-0,887295)} \\
&= 0,102963 \cdot \frac{(x^2-0,5x-0,887295x+0,4436475)}{(-0,77459)(-0,387295)} \\
&+ 0,29752 \cdot \frac{(x^2-0,887295x-0,112705x+0,100002)}{(0,387295) \cdot (-0,387295)} \\
&+ 0,168435 \cdot \frac{(x^2-0,5x-0,112705x+0,056325)}{(0,77459)(0,387295)} \\
&= 0,102963 \cdot \frac{(x^2-1,387295x+0,4436475)}{0,299994} \\
&+ 0,168435 \cdot \frac{(x^2-0,612705x+0,0563525)}{0,299994} \\
&+ 0,29752 \cdot \frac{(x^2-0,9x+0,100002)}{-0,149997} \\
&= \frac{(0,102963x^2-0,142840x+0,045679)}{0,299994} + \frac{0,168435x^2-0,10320x+0,00949}{0,299994} \\
&+ \frac{0,29752x^2-0,267768x-0,02975}{-0,149997} \\
p(x) &= \frac{0,271398x^2+0,24604x+0,055169}{0,299994} - \frac{(0,29752x^2-0,267768x+0,02975)}{-0,149997} \\
p(x) &= 0,90467x^2-0,82014x+0,18390-1,98350x^2+1,78515x-0,19833 \\
p(x) &= -1,07883x^2+0,96501x-0,01443
\end{aligned}$$

O gráfico mostrado na figura [20](#), demonstra que no intervalo de $[0, 1]$, a área abaixo da curva $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$ é próxima a área sob o polinômio de Legendre $p(x) = 0,22202x+0,01018$ de grau 1, e a área sob o polinômio de Legendre de grau 2 $p(x) = -1,07883x^2+0,96501x-0,01443$ é relativamente próxima a área da função.

3º Teste

$$\int_0^\pi \cos(x^2) dx,$$

Vamos calcular o polinômio de Gauss-Legendre para esta função para $n = 2$ e $n = 3$:

Tabela 13 – Tabela de resultados do 3º teste

Método de Integração de Gauss-Legendre		
n	Valor estimado obtido	Cota máxima de erro
2	2.97516408	6.78213202e+00
3	-0.15204033	2.96044264e+00

Tabela 14 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$ do 3º teste para $n = 2$

-	x_i	$f(x_i)$
t_1	0,66382	1,34137
t_2	2,47776	-0,00411

$$p(x) = 1,34137 + \frac{(-0,00411) - 1,34137}{2,47776 - 0,66382} \cdot (x - 0,66382)$$

$$p(x) = 1,34137 + \frac{(-1,34548)}{1,81438} \cdot (x - 0,66382)$$

$$p(x) = 1,34137 + (-0,74156) \cdot (x - 0,66382)$$

$$p(x) = 1,34137 - 0,74156x + 0,49226$$

$$p(x) = -0,74156x + 1,833$$

Para $n = 3$ temos que o polinômio de Gauss-Legendre é:

Tabela 15 – Tabela de valores de x_i e $f(x_i)$ do 3º teste para $n = 3$

-	x_i	$f(x_i)$
t_1	0,35407	1,55845
t_2	2,78751	0,13142
t_3	1,57079	1,57079

$$\begin{aligned}
p(x) &= f(x_1) \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f(x_2) \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
p(x) &= 1,55845 \cdot \frac{(x-2,78751)(x-1,57079)}{(0,35407-2,78751)(0,35407-1,57079)} \\
&+ 0,13142 \cdot \frac{(x-0,35407)(x-1,57079)}{(2,78751-0,35407)(2,78751-1,57079)} \\
&+ 1,57079 \cdot \frac{(x-0,35407)(x-2,78751)}{(1,57079-0,35407)(1,57079-2,78751)} \\
&= 1,55845 \cdot \frac{(x^2-1,57079x-2,78751x+4,37859)}{(-2,43344)(-1,21672)} \\
&+ 0,13142 \cdot \frac{(x^2-1,57079x-0,35407x+0,55826)}{(1,21672)(-1,21672)} \\
&+ 1,57079 \cdot \frac{(x^2-2,78751x-0,35407x+0,98697)}{(1,21672)(-1,21672)} \\
&= 1,55845 \cdot \frac{(x^2-4,3583x+4,37859)}{2,96081} + 0,13142 \cdot \frac{(x^2-1,92486x+0,55826)}{-1,48040} \\
&+ 1,57079 \cdot \frac{(x^2-3,14158x+0,98697)}{-1,48040} \\
&= \frac{1,55845x^2-6,79219x+6,82381}{2,96081} - \frac{0,13142x^2-0,25296x+0,07336}{1,48040} \\
&- \frac{1,57079x^2-4,93476x+1,55032}{1,48040} \\
&= \frac{1,55845x^2-6,79219x+6,82381}{2,96081} - \frac{1,70221x^2-5,187722x+1,62368}{1,48040} \\
p(x) &= 0,52635x^2-2,29403x+2,30471-1,14987x^2-3,50426x+1,09678 \\
p(x) &= -0,62352x^2-5,79829x+3,40149
\end{aligned}$$

O gráfico mostrado na figura [21](#), demonstra que no intervalo de $[0, \pi]$, a área abaixo da curva $f(x) = \cos(x^2)$ é relativamente próxima a área sob o polinômio de Legendre $p(x) = -0,74156x + 1,833$ de grau 1, já a área sob o polinômio de Legendre de grau 2 $p(x) = -0,62352x^2 - 5,79829x + 3,40149$ não é próxima a área da função.

Percebemos ao final da análise dos testes, que os dois primeiros testes chegaram em um erro muito próximo de 0. Porém o terceiro erro não chegou, e o porque que ele não chegou, é que a função $f(x) = \cos(x^2)$ não é suave o suficiente para ser bem aproximada por polinômios de baixo grau no intervalo $[0, \pi]$. O aumento da frequência das oscilações faz com que a quadratura de Gauss (que é ótima para funções suaves) tenha dificuldade em capturar o comportamento da função com poucos pontos. Para reduzir o erro, seria necessário aumentar n significativamente (por exemplo, $n \geq 6$ ou mais).

O método de Gauss-Legendre é uma técnica de quadratura numérica que busca aproximar integrais definidas com alta precisão, utilizando pontos e pesos escolhidos de forma

a maximizar a ordem de exatidão. Diferentemente de métodos como os de Newton-Cotes, os pontos de avaliação (chamados de pontos de Gauss) não são igualmente espaçados, sendo definidos como as raízes dos polinômios de Legendre. Essa escolha torna o método eficiente do ponto de vista computacional, pois permite alcançar alta precisão com um número relativamente pequeno de pontos. Contudo, o custo computacional pode aumentar se os pesos e os pontos precisarem ser recalculados para cada nova aplicação. O método é especialmente adequado para funções suaves e contínuas, isto é, funções sem descontinuidades ou variações bruscas em seu domínio.

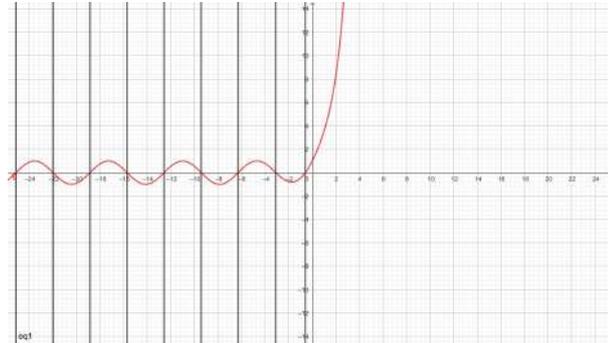
No próximo capítulo apresentaremos algumas aplicações dos Método de Integração Gauss-Legendre

Figura 15 – Tabela de abscissas e pesos para quadratura de Gauss-Legendre

n	i	t_i	A_i
1	1	0	2
2	2; 1	$\pm 0,57735\ 02691\ 89626$	1
3	2	0	0,88888 88888 88889
	3; 1	$\pm 0,77459\ 66692\ 41483$	0,55555 55555 55556
4	3; 2	$\pm 0,33998\ 10435\ 84856$	0,65214 51548 62546
	4; 1	$\pm 0,86113\ 63115\ 94053$	0,34785 48451 37454
5	3	0	0,56888 88888 88889
	4; 2	$\pm 0,53846\ 93101\ 05683$	0,47862 86704 99366
	5; 1	$\pm 0,90617\ 98459\ 38664$	0,23692 68850 56189
6	4; 3	$\pm 0,23861\ 91860\ 83197$	0,46791 39345 72691
	5; 2	$\pm 0,66120\ 93864\ 66265$	0,36076 15730 48139
	6; 1	$\pm 0,93246\ 95142\ 03152$	0,17132 44923 79170
7	4	0	0,41795 91836 73469
	5; 3	$\pm 0,40584\ 51513\ 77397$	0,38183 00505 05119
	6; 2	$\pm 0,74153\ 11855\ 99394$	0,27970 53914 89277
	7; 1	$\pm 0,94910\ 79123\ 42759$	0,12948 49661 68870
8	5; 4	$\pm 0,18343\ 46424\ 95650$	0,36268 37833 78362
	6; 3	$\pm 0,52553\ 24099\ 16329$	0,31370 66458 77887
	7; 2	$\pm 0,79666\ 64774\ 13627$	0,22238 10344 53374
	8; 1	$\pm 0,96028\ 98564\ 97536$	0,10122 85362 90376
9	5	0	0,33023 93550 01260
	6; 4	$\pm 0,32425\ 34234\ 03809$	0,31234 70770 40003
	7; 3	$\pm 0,61337\ 14327\ 00590$	0,26061 06964 02935
	8; 2	$\pm 0,83603\ 11073\ 26636$	0,18064 81606 94857
	9; 1	$\pm 0,96816\ 02395\ 07626$	0,08127 43883 61574
10	6; 5	$\pm 0,14887\ 43389\ 81631$	0,29552 42247 14753
	7; 4	$\pm 0,43339\ 53941\ 29247$	0,26926 67193 09996
	8; 3	$\pm 0,67940\ 95682\ 99024$	0,21908 63625 15982
	9; 2	$\pm 0,86506\ 33666\ 88985$	0,14945 13491 50581
	10; 1	$\pm 0,97390\ 65285\ 17172$	0,06667 13443 08688

Fonte: (CAMPOS FILHO, 2007, p. 237)

!

Figura 16 – Gráfico da função $e^x + \text{sen}(x)$ e da função $e^x = -\text{sen}(x)$ 

Fonte: A autora

Figura 17 – Cálculo da abcissas e pesos para as fórmulas de Gauss-Legendre

```

Algoritmo PesAbsGL
{ Objetivo: Calcular pesos e abcissas para a fórmula de Gauss-Legendre }
parâmetros de entrada  $n$  { número de pontos }
parâmetros de saída  $A$ ,  $T$ ,  $CondErro$ 
  { Pesos, abcissas e condição de erro, sendo }
  {  $CondErro = 0$  se não houve erro ( $n \geq 1$ ) e  $CondErro = 1$  se  $n < 1$  }
  se  $n < 1$  então  $CondErro \leftarrow 1$ , abandone, fim se
   $CondErro \leftarrow 0$ ;  $pi \leftarrow 3,14159265358979323846$ ;  $m \leftarrow \text{trunca}(0,5 * (n + 1))$ 
  para  $i \leftarrow 1$  até  $m$  faça
     $z \leftarrow \cos(pi * (i - 0,25)/(n + 0,5))$ 
    repita
       $p1 \leftarrow 1$ ;  $p2 \leftarrow 0$ 
      para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
         $p3 \leftarrow p2$ ;  $p2 \leftarrow p1$ 
        { polinômio de Legendre no ponto  $z$  }
         $p1 \leftarrow ((2 * j - 1) * z * p2 - (j - 1) * p3)/j$ 
      fim para
      { derivada do polinômio de Legendre no ponto  $z$  }
       $pp \leftarrow n * (z * p1 - p2)/(z^2 - 1)$ ;  $z1 \leftarrow z$ 
      { método de Newton para calcular os zeros do polinômio }
       $z \leftarrow z1 - p1/pp$ 
      se  $\text{abs}(z - z1) < 10^{-15}$  então interrompa, fim se
    fim repita
     $T(m + 1 - i) \leftarrow z$  { abcissa }
     $A(m + 1 - i) \leftarrow 2/((1 - z^2) * pp^2)$  { peso }
    { somente as raízes não negativas são calculadas devido à simetria }
  fim para
fim algoritmo

```

Fonte: (CAMPOS FILHO, 2007, p.241)

Figura 18 – Algoritmo Gauss-Legendre

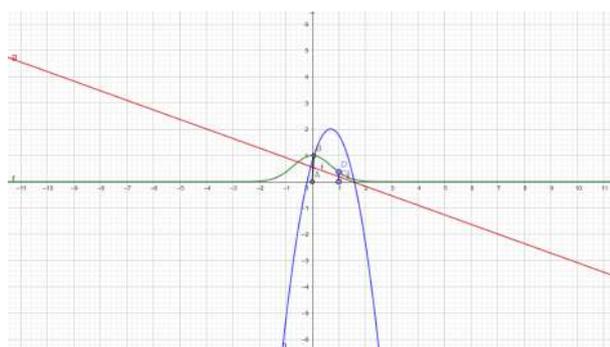
```

Algoritmo Gauss-Legendre
{ Objetivo: Integrar uma função pelo método de Gauss-Legendre }
parâmetros de entrada a, b, n
  { limite inferior, limite superior, número de pontos }
parâmetros de saída Integral, CondErro
  { valor da integral e condição de erro, sendo }
  { CondErro = 0 se não houve erro ( $n \geq 1$ ) e CondErro = 1 se  $n < 1$  }
  Integral  $\leftarrow$  0
  { cálculo dos pesos e abscissas }
  [Avet, Tvet, CondErro]  $\leftarrow$  PesAbsGL(n) (ver Figura 5.12)
  se CondErro  $\neq$  0 então abandone, fimse
  { cálculo da integral }
  e1  $\leftarrow$  (b - a)/2
  e2  $\leftarrow$  (a + b)/2
  se resto(n, 2) = 0 então
    c1  $\leftarrow$  1; c2  $\leftarrow$  0,5
  senão
    c1  $\leftarrow$  0; c2  $\leftarrow$  1
  fimse
  para i  $\leftarrow$  1 até n faça
    k  $\leftarrow$  trunca(i - 0,5 * (n + 1) + sinal(i - 0,5 * (n + c1)) * c2)
    t  $\leftarrow$  sinal(k) * Tvet(abs(k))
    x  $\leftarrow$  e1 * t + e2
    y  $\leftarrow$  f(x) { avaliar a função integrando em x }
    c  $\leftarrow$  Avet(abs(k))
    Integral  $\leftarrow$  Integral + y * c
    escreva i, t, x, y, c
  fim para
  Integral  $\leftarrow$  e1 * Integral
fim algoritmo

```

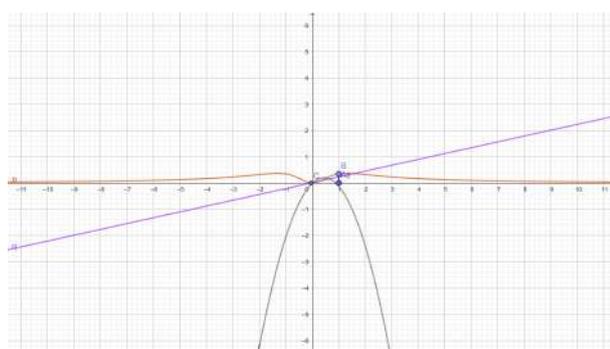
Fonte: (CAMPOS FILHO, 2007, p.242)

Figura 19 – Área sob o gráfico de $f(x) = e^{-x^2}$ e dos polinômios $p(x)$



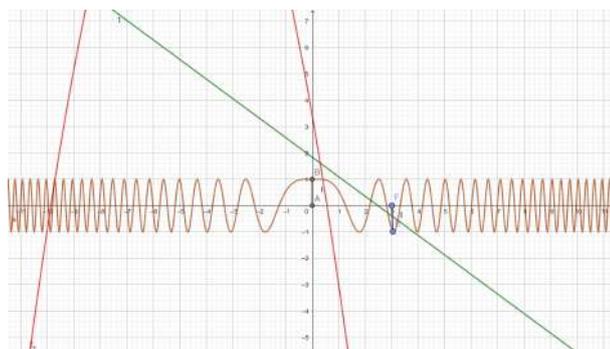
Fonte: A autora

Figura 20 – Área sob o gráfico de $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$ e dos polinômios $p(x)$



Fonte: A autora

Figura 21 – Área sob o gráfico de $f(x) = \cos(x^2)$ e dos polinômios $p(x)$



Fonte: A autora

4 APLICAÇÕES DA QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE

Devido à sua alta precisão, o método de Gauss-Legendre é amplamente utilizado em diversas áreas da ciência e engenharia. Ele é particularmente eficaz em simulações físicas, como no cálculo de integrais envolvidas em métodos de elementos finitos e análise estrutural, onde a avaliação precisa de integrais é essencial. Também é aplicado em problemas de mecânica quântica, propagação de ondas, engenharia elétrica e na solução de equações diferenciais integrais. Sua capacidade de lidar com funções suaves o torna uma escolha confiável quando se busca precisão numérica com desempenho computacional razoável.

Neste capítulo apresentaremos alguns exemplos do uso de Fórmulas de Integração Numérica e conseqüentemente os Polinômios de Legendre, na solução de problemas envolvendo Física, Geometria, Teoria das Probabilidades e problemas reais.

4.0.1 Aplicação 1

Probabilidade de que um evento ocorra dentro de um intervalo

O PROCON de uma cidade tem recebido reclamações com relação ao peso dos pacotes de açúcar de $5kg$. Com a finalidade de verificar a validade das reclamações, foi coletada uma amostra de 100 pacotes. Com isto, chegou-se a conclusão de que para determinar a probabilidade dos pacotes de açúcar pesar menos que $5kg$ deve ser avaliada a expressão a seguir. Essa expressão mostra a distribuição de probabilidade mais comum da natureza,

$$\beta = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4.1)$$

Para determinar a probabilidade de que um evento ocorra dentro de um intervalo $[a, b]$ é necessário antes, obtermos o valor da integral

$$I = \int_0^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4.2)$$

Como a integral não tem solução analítica, visto que $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ é uma função cuja primitiva não pode ser expressa como uma combinação finita de funções elementares, usaremos algumas técnicas de integração numérica, para estimar o valor dessa integral.

Sendo assim, podemos estimar a probabilidade e o erro máximo cometido, através do método da Quadratura de Gauss-Legendre. Utilizaremos a quadratura e o erro para 2 e 3 pontos, calculando manualmente e pelo MATLAB, para compararmos os valores obtidos.

Solução:

Dada a integral $\int_0^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, para resolvê-la pelo método da quadratura gaussiana manualmente, temos que primeiro calcular o seu discriminante. Assim,

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} \quad (4.3)$$

$$x_i = \frac{1.8-0}{2}t_i + \frac{0+1.8}{2} \quad (4.4)$$

$$x_i = 0,9t_i + 0,9 \quad (4.5)$$

$$(4.6)$$

Agora, vamos calcular nosso $F(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot f \cdot \left(\frac{b-a}{2}ti + \frac{a+b}{2}\right)$:

$$F(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot f \cdot \left(\frac{b-a}{2}ti + \frac{a+b}{2}\right) \quad (4.7)$$

$$F(t) = 0,9 \cdot e^{-\frac{(0,9ti+0,9)^2}{2}} \quad (4.8)$$

$$(4.9)$$

Com isso, integrando a função no intervalo $[-1, 1]$ do método da quadratura de Gauss-Legendre e sabendo que para $n = 2$, $A_1 = A_2 = 1$, $t_1 = -0,5774$ e $t_2 = 0,5774$, temos que:

$$\int_{-1}^1 F(t) = A_1F(t_1) + A_2F(t_2) \quad (4.10)$$

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 1f(-0,5774) + 1 \cdot f(0,5774) \quad (4.11)$$

$$\approx 0,9 \cdot e^{-\frac{(0,9 \cdot (-0,5774) + 0,9)^2}{2}} + 0,9 \cdot e^{-\frac{(0,9 \cdot 0,5774 + 0,9)^2}{2}} \quad (4.12)$$

$$\approx 0,9 \cdot e^{-\frac{(-0,51966+0,9)^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(0,51966+0,9)^2}{2}} \quad (4.13)$$

$$\approx 0,9 \cdot 0,93023 + 0,9 \cdot 0,36505 \quad (4.14)$$

$$\approx 0,837207 + 0,328545 \quad (4.15)$$

$$\approx 1,165752 \quad (4.16)$$

$$(4.17)$$

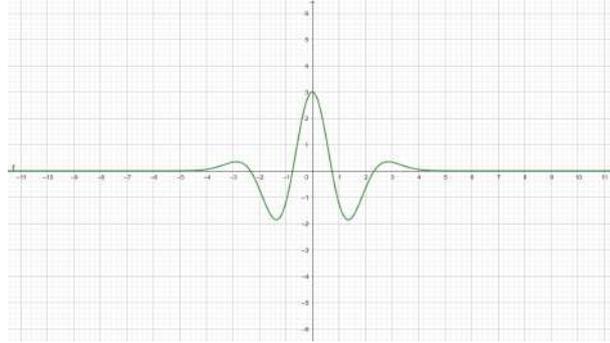
Obtido o resultado da nossa integral, pode-se calcular o β

$$\beta = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4.18)$$

$$\beta = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1,165752 \quad (4.19)$$

$$\beta = 0,9650 \quad (4.20)$$

Dando continuidade, vamos calcular nosso erro de integração pelo método da quadratura gaussiana. E para isso, temos que obter nossa derivada quarta, dessa forma, temos:

Figura 22 – Gráfico da função $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 

Fonte: A autora

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (4.21)$$

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad (4.22)$$

$$f''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1) \quad (4.23)$$

$$f'''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (-x^3 + 3x) \quad (4.24)$$

$$f^{iv}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^4 - 6e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^2 + 3e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (4.25)$$

$$(4.26)$$

Agora, com o valor da nossa quarta derivada, podemos calcular o erro para $n = 2$:

$$E_2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} \cdot \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} \cdot f^{2n} \cdot \theta \quad (4.27)$$

$$E_2 \approx (0,9)^5 \cdot \frac{2^5 \cdot (2!)^4}{5 \cdot (4!)^3} \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{2}} (x^4 - 6x^2 + 3)\right) \quad (4.28)$$

$$E_2 \approx 0,59049 \cdot \frac{32 \cdot 16}{5 \cdot 13824} \cdot e^{-\frac{\theta^2}{2}} (\theta^4 - 6\theta^2 + 3) \quad (4.29)$$

$$(4.30)$$

Sabendo que θ é a abcissa, na qual a derivada $f^{2n}(x)$ apresenta o maior valor em módulo no intervalo dado. Temos que pelo gráfico, o valor máximo da função será igual a 3. Logo $\theta = 3$, assim

$$E_2 \approx 0,004374 \cdot e^{-\frac{3^2}{2}} (3^4 - 6 \cdot 3^2 + 3) \quad (4.31)$$

$$E_2 \approx 0,004374 \cdot 0,01110899653 \cdot 30 \quad (4.32)$$

$$E_2 \approx 0,00145 \quad (4.33)$$

Implementamos, no MATLAB, a quadratura de Gauss-Legendre para os casos $n = 2$ e $n = 3$ aplicada à integral definida utilizada nesta análise. Além disso, calculamos o

erro de integração por meio da própria quadratura de Gauss-Legendre. Os procedimentos detalhados podem ser consultados no anexo deste trabalho. Os valores obtidos estão apresentados a seguir:

Tabela 16 – Tabela de resultados obtidos na implementação no MATLAB

n	Valor estimado Obtido	Cota máxima de erro
2	1.16575494	2.95245000e-02
3	1.16305458	2.84700536e-03

Calculando o β para os valores obtidos na implementação, temos que:

Para a integral aproximada de $n = 2$, o β será:

$$\beta = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4.34)$$

$$\beta = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1,16575494 \quad (4.35)$$

$$\beta = 0,9650 \quad (4.36)$$

Para a integral aproximada de $n = 3$, o β será:

$$\beta = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4.37)$$

$$\beta = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1,16305458 \quad (4.38)$$

$$\beta = 0,9639 \quad (4.39)$$

Organizando os resultados encontrados em uma tabela, e comparando seus valores, temos que:

Tabela 17 – Tabela de resultados obtidos no MATLAB e manualmente

n	Modo de resolver	Valor estimado Obtido	Cota máxima de erro
2	Manualmente	1,165752	0,00145
2	MATLAB	1.16575494	2.95245000e-02
3	MATLAB	1.16305458	2.84700536e-03

Percebemos que o valor do cálculo manual e o do MATLAB foram basicamente os mesmos, aproximando em 5 casas decimais. Com isso, vemos que podemos calcular manualmente e de forma simples essa aplicação, utilizando o método da quadratura de Gauss-Legendre e chegando em um resultado elegante e preciso como o do MATLAB.

Dessa forma, analisamos que manualmente e pelo MATLAB as possibilidades de calcular o valor β , foram bem precisas, junto com os erros cometidos, e percebemos que os valores obtidos manualmente e pelo MATLAB para $n = 2$ foram iguais e com erros muito pequenos e consideráveis. Com isso, o PROCON conclui que 96,5% dos pacotes de açúcar estão abaixo de 5kg, se concretizando as reclamações.

4.0.2 Aplicação 2

Naftalina

Segundo [Asano e Colli \(2009\)](#), durante um experimento, observou-se que o raio $r(t)$ de uma bolinha de naftalina diminui com o tempo devido à sublimação, de modo que a taxa de variação do raio é proporcional ao quadrado do raio, ou seja:

$$\frac{dr}{dt} = -kr^2(t)$$

com $r(0) = r_0$ e $k > 0$ sendo uma constante de sublimação. Sabendo-se que a sublimação ocorre na superfície da bolinha, deseja-se calcular o volume total de naftalina perdido entre os instantes $t = 0$ e $t = T$. Assumindo que:

$$r_0 = 0,01m$$

$$k = 0,5m^{-1}s^{-1}$$

$$T = 3s$$

$$\pi \approx 3,14$$

Solução:

A EDO dada é:

$$dx = -kx^2(t)$$

Separando as variáveis e resolvendo:

$$\frac{1}{r(t)} = kt + \frac{1}{r_0}$$

$$r(t) = \frac{1}{kt + \frac{1}{r_0}}$$

Sabendo que o volume da bolinha é θ mesmo volume da esfera, temos que:

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$$

A taxa de variação do volume:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 4\pi r^2(t) \cdot \frac{dr}{dt} \\ &= 4\pi r^2(t) \cdot (-kr^2(t)) \\ \frac{dv}{dt} &= -4\pi kr^4(t) \end{aligned}$$

Construindo a integral definida da perda de volume, temos que θ volume perdido entre $t = 0$ e $t = T$ é:

$$\Delta V = \int_0^T 4\pi kr^4(t) dt$$

Substituindo $r(t) = \frac{1}{kt + \frac{1}{r_0}}$ temos:

$$\Delta V = \int_0^t 4\pi k \left(\frac{1}{kt + \frac{1}{r_0}} \right)^4 dt$$

Agora, que construímos a integral definida, vamos aplicar a quadratura de Gauss-Legendre.

$$\begin{aligned}x_i &= \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} \\x_i &= \frac{T-0}{2} + i + \frac{0+T}{2} \\x_i &= \frac{T}{2}t_i + \frac{T}{2} \\F(t) &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot f \cdot \left(\frac{b-a}{2} + i + \frac{a+b}{2}\right) \\F(t) &= \frac{T}{2} \cdot 4\pi k \left(\frac{1}{k \cdot \left(\frac{T}{2}t_i + \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{r_0}}\right)^4\end{aligned}$$

Integrando a função no intervalo $[-1, 1]$ do método da quadratura de Gauss-Legendre e sabendo que para $n = 2$, $A_1 = A_2 = 1$, $t_1 = -0,5774$ e $t_2 = 0,5774$, temos que:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(t) &= A_1 \cdot f(t_1) + A_2 \cdot f(t_2) \\ \int_{-1}^{-1} 4\pi k \left(\frac{1}{kt + \frac{1}{r_0}}\right)^4 dt &\approx \frac{T}{2} \cdot 4\pi k \left(\frac{1}{k \cdot \left(\frac{T}{2}t_i + \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{r_0}}\right)^4 + \\ \frac{T}{2} \cdot 4\pi k \left(\frac{1}{k \cdot \left(\frac{T}{2}t_i + \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{r_0}}\right)^4 & \\ \approx \frac{T}{2} \cdot 4\pi k \left(\frac{1}{k \cdot \left(\frac{T}{2} \cdot (-0,5774) + \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{r_0}}\right)^4 &+ \frac{T}{2} \cdot 4\pi k \left(\frac{1}{k \cdot \left(\frac{T}{2}(0,5744) + \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{r_0}}\right)^4\end{aligned}$$

Substituindo os valores de r_0, k, T, π , temos que:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{-1} 4\pi k \left(\frac{1}{kt + \frac{1}{r_0}}\right)^4 dt &\approx \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot (3,14) \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{1}{0,5 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot (-0,5774) + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{0,01}}\right)^4 \\ + \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot (3,14) \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{1}{0,5 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot 0,5774 + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{0,01}}\right)^4 & \\ \approx 9,42 \left(\frac{1}{0,5 \cdot 0,6339 + 100}\right)^4 + 9,42 \left(\frac{1}{0,5 \cdot 2,3661 + 100}\right)^4 & \\ \approx 9,42 \cdot \left(\frac{1}{100,31695}\right)^4 + 9,42 \left(\frac{1}{101,18305}\right)^4 & \\ \approx 9,42 \cdot (0,00996)^4 + 9,42 \cdot (0,00988)^4 & \\ \approx 9,42 \cdot (8,7078 \cdot 10^{-9}) + 9,42 \cdot (9,52857 \cdot 10^{-9}) & \\ \approx 8,20275 \cdot 10^{-8} + 8,97591 \cdot 10^{-8} & \\ \int_{-1}^{-1} 4\pi k \left(\frac{1}{kt + \frac{1}{r_0}}\right)^4 dt &\approx 1,71787 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3\end{aligned}$$

Calculando a erro de integração:

Temos que calcular até a quarta derivada da função para aplicarmos na fórmula do erro:

$$\begin{aligned} f(t) &= 4\pi k \left(\frac{1}{kt + \frac{1}{n_0}} \right)^4 \\ f'(t) &= -\frac{16\pi k^2 r_0^5}{(kr_0 t + 1)^5} \\ f''(t) &= -\frac{80\pi k^3 r_0^6}{(kr_0 t + 1)^6} \\ f'''(t) &= \frac{480\pi k^4 r_0^7}{(kr_0 t + 1)^7} \\ f^{iv}(t) &= \frac{3360\pi k^5 r_0^8}{(kr_0 t + 1)^8} \end{aligned}$$

Calculando o erro para $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned} E_1 &\approx \left(\frac{b-a}{2} \right)^{2n+1} \cdot \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} - f^{2n} \cdot \theta \\ E_2 &\approx \left(\frac{T}{2} \right)^5 \cdot \frac{2^5 \cdot (2!)^4}{(4+1) \cdot (4!)^3} \cdot \left(\frac{3360\pi k^5 r_0^8}{(kr_0 \cdot \theta + 1)^8} \right) \\ E_2 &\approx \left(\frac{T}{2} \right)^5 \cdot \frac{32 \cdot 16}{5 \cdot 13824} \cdot \left(\frac{3360\pi k^5 r_0^8}{(kr_0 \cdot \theta + 1)^8} \right) \\ E_2 &\approx \left(\frac{T}{2} \right)^5 \cdot 1415,577,6 \cdot \left(\frac{3360\pi k^5 r_0^8}{(kr_0 \cdot \theta + 1)^8} \right) \end{aligned}$$

Substituindo os valores de T , r_0 , K e π , e considerando que o ponto máximo da função é em $t = 0$, Logo, a função não tem ponto máximo, e $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} E_2 &\approx \left(\frac{3}{2} \right)^5 \cdot 1415,577,6 \cdot \left(\frac{3360 \cdot 3,14 \cdot (0,5)^5 \cdot (0,01)^8}{(0,5 \cdot 0,01 \cdot 0 + 1)^8} \right) \\ E_2 &\approx 7,59375 \cdot 1415,577,6 \cdot \left(\frac{3,297 \cdot 10^{-14}}{1^8} \right) \\ E_2 &\approx 10.749,542,4 \cdot 3,297 \cdot 10^{-14} \\ E_2 &\approx 3,54412413 \cdot 10^{-7} \\ E_2 &\approx 0,003231 \end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que o volume total de naftalina perdido entre os instantes $t = 0$ e $t = 3$ segundos é aproximadamente: $1,771787 \cdot 10^{-7} m^3$. Com uma margem de erro muito próxima de 0. Esse resultado evidencia a eficácia da quadratura de Gauss-Legendre, que se mostra uma ferramenta precisa e aplicável em diversas situações envolvendo integrais definidas.

4.0.3 Aplicação 3

Cálculo da área do Açude Velho

Localizado no centro da cidade de Campina Grande, no estado da Paraíba, Brasil, o Açude Velho é um dos principais cartões-postais e patrimônio histórico da cidade. Originalmente, foi construído como fonte de abastecimento de água para Campina Grande e sua região.

Em seu livro sobre a cidade de Campina Grande, Vianna (2013) conta que a origem do Açude Velho remonta ao período de intensa seca que assolou o Nordeste entre 1824 e 1828. Diante dessa crise, o governo provincial da Paraíba iniciou, em 1829, a construção do açude, concluída em 1831. Antes de sua existência, a área era atravessada por um pequeno curso d'água conhecido como Riacho das Piabas.

Durante quase um século, o Açude Velho foi o maior reservatório da região e desempenhou papel vital no abastecimento, especialmente em períodos de estiagem severa, como as secas de 1845 e 1877. Com a chegada do sistema de abastecimento encanado, sua função original perdeu importância, mas sua relevância histórica e cultural permaneceu, transformando-o em um marco urbano e ponto turístico de Campina Grande.

É às suas margens que está localizado o Museu de Arte Popular da Paraíba (MAPP) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), projetado pelo arquiteto Oscar Niemeyer. Não somente os campinenses se beneficiaram com ele, mas também habitantes de outros municípios da Serra da Borborema.

Considerando que o Açude Velho é tão importante para a cidade de Campina Grande, vamos fazer uma aplicação do método de cálculo numérico de Gauss-Legendre que estamos estudando neste trabalho, para calcularmos sua área, utilizando também o Google Earth para nos auxiliar com a imagem do açude.

Solução:

Inicialmente é necessário determinar um eixo x , que consiga atingir as extremidades horizontais do açude e este segmento possa possibilitar sua divisão em subintervalos de mesma distância.

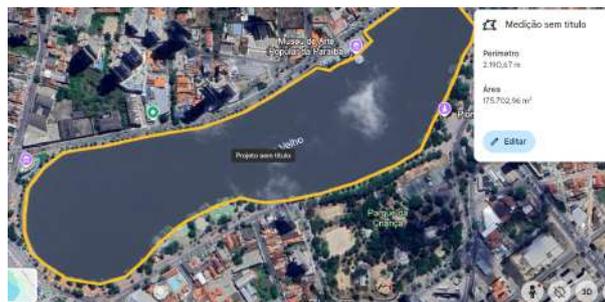
Tal segmento tem $910m$, foi dividido em 35 subintervalos de $26m$ cada. Após essa etapa, em cada subintervalo foram medidas as imagens (altura, considerando o eixo y), que estão expressas na Figura 23

Figura 23 – Açude velho dividido em 35 subintervalos de 26 m



Fonte: Google Earth

Figura 24 – Área do açude calculada pelo Google Earth



Fonte: Google Earth

2

Após dividir o açude em seus respectivos intervalos, temos que, para calcular a área do açude pela quadratura de Gauss-Legendre, precisamos utilizar o Teorema de Green que segundo (STEWART, 2013b) O teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região do plano D delimitada por C . Ao enunciarmos o Teorema de Green, usamos a convenção de que a orientação positiva de uma curva fechada simples C refere-se ao sentido anti-horário de C , percorrido uma só vez. Assim, se C é dada pela função vetorial $r(t)$, $a \leq t \leq b$, então a região D está sempre do lado esquerdo quando $r(t)$ percorre C .

Teorema de Green: Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então

$$\int \int_C P dx + Q dy = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Apresentado o teorema, usaremos para o cálculo do açude, a aplicação da direção inversa do Teorema de Green no cálculo de áreas. Como a área de uma região D é $\int \int_D 1 dA$, desejamos escolher P e Q tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Existem várias possibilidades:

$$P(x, y) = 0$$

$$Q(x, y) = x$$

$$P(x, y) = -y$$

$$Q(x, y) = 0$$

$$P(x, y) = -\frac{1}{2}y$$

$$Q(x, y) = -\frac{1}{2}y$$

Assim, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de D :

$$A = \oint_C xdy = - \oint_C ydx = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$$

Para calcularmos, temos os seguintes passos:

i) Inicialmente devemos retirar as coordenadas do contorno do açude para obtermos os valores de x e y ;

ii) Em seguida, calculamos os polinômios $p(x)$ e $p(y)$ e suas derivadas, depois obtemos a integral de linha de Green;

iii) Logo depois aplicamos a quadratura de Gauss-Legendre para $n = 5$ para resolvermos a integral obtida e assim, obter o valor da área do açude.

Porém, percebemos que para calcularmos manualmente, iria gastar muito tempo, pois seriam 35 polinômios para conseguirmos gerar e depois teríamos que derivá-los e obter a integral para depois aplicarmos a fórmula da quadratura de Gauss Legendre. Dessa forma, criamos o código e fizemos a implementação no PYTHON, para facilitarmos o processo. Os valores obtidos estão apresentados a seguir e os procedimentos detalhados podem ser consultados no anexo deste trabalho.

Tabela 18 – Tabela de resultados obtidos pela quadratura de Gauss-Legendre e Google Earth

n	Modo de resolver	Valor estimado Obtido
5	Quadratura de Gauss-Legendre	176.863,362107m ²
-	Google Earth	175.702,96m ²

Comparando o valor obtido pelo método da quadratura de Gauss-Legendre com $n = 5$ ao valor calculado pelo Google Earth, observa-se uma excelente proximidade entre os resultados. A diferença calculada, de apenas 1.160,4m², representa um erro muito pequeno em relação à escala total da área analisada, o que evidencia a eficiência do método aplicado. Esse baixo erro reforça que, mesmo com um número moderado de pontos ($n = 5$), a técnica é capaz de fornecer estimativas bastante confiáveis.

Do ponto de vista numérico, a tendência é que o erro se aproxime de zero à medida que aumentamos a quantidade de intervalos ou adotamos polinômios de grau mais elevado, elevando assim o valor de n . Esse comportamento está alinhado com a teoria da quadratura de Gauss, na qual a exatidão cresce conforme a ordem dos polinômios aumenta, permitindo capturar de forma mais fiel o comportamento da função integrada.

Além disso, a utilização dos polinômios de Legendre como base para este processo se justifica pela sua ortogonalidade no intervalo $[-1, 1]$, característica que maximiza a

precisão da integração numérica ao distribuir de forma otimizada os pontos de avaliação. Tal propriedade não apenas minimiza erros de aproximação, mas também torna esses polinômios ferramentas versáteis em diversas áreas da matemática aplicada — desde a resolução de equações diferenciais até a modelagem de problemas reais que demandam elevada precisão computacional.

Portanto, este estudo demonstra que a quadratura de Gauss-Legendre, associada às propriedades dos polinômios de Legendre, constitui um método robusto e eficiente para cálculos de integração, especialmente quando há interesse em obter resultados precisos com um número reduzido de avaliações da função.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, foi realizada toda a construção teórica dos Polinômios de Legendre, avançando para o estudo das integrais numéricas e culminando no método da quadratura de Gauss-Legendre. Desde o início, buscou-se responder ao questionamento: COMO OS POLINÔMIOS DE LEGENDRE CONTRIBUEM PARA A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA? Essa pergunta foi esclarecida no decorrer da pesquisa, evidenciando que tais polinômios constituem a base teórica do método de integração adotado, a quadratura de Gauss-Legendre. Constatou-se que este método está entre os mais eficazes e precisos, pois permite escolher pontos de avaliação de forma a obter uma aproximação da área sob a curva extremamente próxima do valor exato.

Outro questionamento levantado foi: É POSSÍVEL APLICAR ESTE MÉTODO NA PRÁTICA? No último capítulo, essa questão foi respondida positivamente, demonstrando que a quadratura de Gauss-Legendre, fundamentada nos Polinômios de Legendre, é aplicável tanto na resolução de equações diferenciais quanto na modelagem de problemas reais. O objetivo geral — compreender a importância dos Polinômios de Legendre no método de integração da quadratura de Gauss-Legendre — foi plenamente atingido, confirmando a hipótese de que esses polinômios constituem o núcleo teórico do método e possuem aplicações diversas em diferentes áreas do conhecimento.

A metodologia adotada mostrou-se adequada, iniciando com uma revisão histórica, documental e bibliográfica, caracterizando a pesquisa como quali-quantitativa. Em seguida, procedeu-se a uma revisão bibliográfica específica em obras de equações diferenciais, cálculo diferencial e integral, cálculo numérico e métodos numéricos, o que conferiu à pesquisa um caráter exploratório e descritivo. Por fim, foram utilizados livros de cálculo numérico e métodos numéricos como base para a implementação e testes do método de integração da quadratura de Gauss-Legendre.

Não foram encontradas dificuldades relevantes, uma vez que há abundante material bibliográfico, incluindo livros, artigos e trabalhos acadêmicos sobre Polinômios de Legendre, cálculo numérico, quadratura de Gauss-Legendre e suas aplicações. O trabalho foi estruturado em três capítulos: o primeiro aborda a biografia de Adrien-Marie Legendre e suas contribuições para a Matemática, a equação diferencial ordinária de Legendre, a fórmula de Rodrigues e a relação de ortogonalidade; o segundo revisa o cálculo de integrais algébricas, apresenta as integrais numéricas e detalha o método da quadratura de Gauss-Legendre, incluindo sua implementação e testes; e o terceiro traz as aplicações do método em problemas reais.

Espera-se que este trabalho contribua tanto para minha formação como docente quanto para futuros leitores, evidenciando a relevância dos Polinômios de Legendre no desenvolvimento do cálculo numérico. Ressalta-se que esses polinômios desempenham papel

fundamental na resolução de equações diferenciais e integrais sem solução analítica, além de fornecerem ferramentas eficazes para problemas práticos que demandam esse tipo de abordagem matemática.

Como trabalhos futuros, sugere-se incluir o cálculo do erro de integração pela quadratura de Gauss-Legendre na aplicação 3, bem como aplicar o método para diferentes valores de n nas aplicações apresentadas, de modo a obter resultados ainda mais precisos. Outra possibilidade é comparar os resultados obtidos com outros métodos de integração numérica, analisando sua eficácia relativa.

Assim, conclui-se que os resultados desta pesquisa confirmam que os Polinômios de Legendre são a base teórica do método de integração da quadratura de Gauss-Legendre e que, mesmo com poucos pontos, é possível obter soluções aproximadas para equações diferenciais sem solução analítica, bem como calcular áreas irregulares com alto grau de precisão.

REFERÊNCIAS

AL-TAWEEL, A.; HUSSAIN, S.; MALLIKARJUNAIAH, S. M. Análise de erros de um método de elementos finitos de galerkin fraco para problemas hiperbólicos dependentes do tempo. *Numerical Methods for Partial Equations*, v. 41, n. 4, 2025. Citado na página [11](#).

ALVES, C. d. C. *O método de Equação Integral com Quadratura Gaussiana para otimizar os parâmetros do gráfico de controle multivariado de Somas Acumuladas*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, 2009. Citado na página [47](#).

ASANO, C. H.; COLLI, E. *Cálculo Numérico — Fundamentos e Aplicações*. São Paulo: Departamento de Matemática Aplicada – IME-USP, 2009. <http://www.ime.usp.br/~asano/publica.html>. Acesso em: 04 agosto 2025. Citado na página [77](#).

BARROSO, L. C. et al. *Cálculo Numérico*. 2. ed. [S.l.]: Harbra Ltda, 1987. Citado 2 vezes nas páginas [47](#) e [50](#).

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 10. ed. [S.l.]: LCT, 2015. Citado na página [22](#).

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. ISBN 9788521208239. Citado 4 vezes nas páginas [18](#), [20](#), [21](#) e [43](#).

CAMPOS FILHO, F. F. *Algoritmos numéricos*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007. Citado 11 vezes nas páginas [11](#), [41](#), [46](#), [47](#), [48](#), [54](#), [60](#), [61](#), [69](#), [70](#) e [71](#).

CHAPRA, S. C.; RAYMOND, P. C. *Métodos numéricos para engenharia*. 7. ed. Porto Alegre: AMGH, 2016. Citado 3 vezes nas páginas [11](#), [41](#) e [46](#).

Clubes de Matemática da OBMEP. *b_Legendre*. 2025. http://clubes.obmep.org.br/blog/b_legendre/. Acesso em: 9 abr.2025. Citado 2 vezes nas páginas [17](#) e [18](#).

DEMIDOVICH, P. B.; MARON, I. A. *Computational Mathematics*. 3. ed. MoskoW: MIR Publisher, 1981. Citado na página [54](#).

EVES, H. *Introdução a Historia da Matemática*. 5. ed. [S.l.]: Editora UNICAMP, 2004. Citado 3 vezes nas páginas [11](#), [41](#) e [45](#).

JUNIOR, D. S. P. *Introdução ao Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO e EDP*. [S.l.]: SBMAC, 2012. v. 23. https://www.sbmac.org.br/wp-content/uploads/2022/08/livro_23.pdf. Acesso em 05 de agosto de 2025. Citado na página [11](#).

LIMA, W. J.; LOBATO, F. Resolução numérica de equações diferenciais parciais fracionárias usando o método pseudo-espectral de legendre e o método de adams. *Scientia Plena*, v. 20, n. 10, 2024. Citado na página [11](#).

MACHADO, K. D. U. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Ponta Grossa,PR: Editoda Toda Palavra, 2019. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas [22](#), [28](#), [29](#) e [32](#).

- MELCHIORS, A.; SOARES, M. Historia do cálculo diferencial e integral. *Maiêutica*, 2019. Citado na página [41](#).
- NOBREGA, B. S. Análise numérica para solução de integrais não elementares. *Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Tecnológicas*, 2012. Citado na página [41](#).
- PEREIRA, T. d. S. *Teoria Inflacionária em Universos Anisotrópicos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo - Instituto de Física, 2008. Citado na página [11](#).
- PRESS, W. et al. *Numerical Recipes*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992. Citado na página [61](#).
- PRODANOV, C. C. *Metodologia do trabalho científico : métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico*. [S.l.]: Editora Feevale, 2013. Acesso em: 07 junho 2025. Citado na página [12](#).
- ROQUE, T. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012. Citado na página [34](#).
- SILVA, M. A. R. R. *Andrein-Marie Legendre e sua obras em Teoria dos Números*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte - PPGED, 2010. Citado 4 vezes nas páginas [14](#), [15](#), [16](#) e [17](#).
- STEWART, J. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas [41](#) e [44](#).
- _____. _____. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2. ISBN 978-85-221-1463-4. Citado na página [81](#).
- VIANNA, M. d. A. l. e. G. *O município de Campina Grande 1840 - 1905 : estrutura de distribuição de terras, economia e sociedade*. [S.l.]: EDUFPG, 2013. ISBN 978-85-8001-101-2. Citado na página [80](#).

Anexos

**ANEXO A – CÓDIGO EM MATLAB PARA INTEGRAÇÃO POR
GAUSS-LEGENDRE DE $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$ E $\int_0^\pi \cos(x^2) dx$**

```

1
2 xi = [-0.5773502691, 0.577350291];
3 wi = [1,1];
4
5 f = @(x) exp(-x.^2);
6 a = 0;
7 b = 1;
8
9 integral_aproximada = 0;
10 for i = 1:2
11     x_mapeado = ((b - a)/2) * xi(i) + ((b + a)/2);
12     integral_aproximada = integral_aproximada + wi(i) * f(
13         x_mapeado);
14 end
15 integral_aproximada = ((b - a)/2) * integral_aproximada;
16 fprintf('\nValor aproximado da integral:\n')
17
18 syms x
19 f = exp(-x^2);
20 f4 = diff(f, 4);
21 vals = double(subs(f4, x, linspace(0,1,1000)));
22 M = max(abs(vals));
23 a = 0; b = 1; n = 2;
24
25 coef = ((b - a)^(2*n + 1)) * factorial(n)^4 / ( (2*n + 1) * (
26     factorial(2*n))^3 );
27 erro_estimado = coef * M;
28
29 fprintf('Erro estimado da integral)
30
31 Valor aproximado da integral: 0.7465946837
32 Erro estimado da integral: 2.7777777778e-03
33
34 Para $n=3$, temos que:
35
36 xi = [-0.7745966692, 0, 0.7745966692];
37 wi = [0.5555555556, 0.8888888889, 0.5555555556];

```

```

36
37 f = @(x) exp(-x.^2);
38 a = 0;
39 b = 1;
40
41 integral_aproximada = 0;
42 for i = 1:3
43     x_mapeado = ((b - a)/2) * xi(i) + ((b + a)/2);
44     integral_aproximada = integral_aproximada + wi(i) * f(
45         x_mapeado);
46 end
47 integral_aproximada = ((b - a)/2) * integral_aproximada;
48 fprintf('\nValor aproximado da integral:\n')
49 Valor aproximado da integral: 0.7468145842
50
51 >> syms x
52 f = exp(-x^2);
53 f6 = diff(f, 6);
54 vals = double(subs(f6, x, linspace(0,1,1000)));
55 M = max(abs(vals));
56 >> a = 0; b = 1; n = 3;
57
58 coef = ((b - a)^(2*n + 1)) * factorial(n)^4 / ( (2*n + 1) * (
59     factorial(2*n))^3 );
60 erro_estimado = coef * M;
61 fprintf('Erro estimado da integral:
62 Erro estimado da integral: 5.9523809524e-05
63
64 >> f = @(x) log(1 + x.^2) ./ (1 + x.^2);
65 a = 0; b = 1;
66
67 T = [-1/sqrt(3), 1/sqrt(3)];
68 A = [1, 1];
69
70 soma = 0;
71 for i = 1:2
72     x_i = ((b - a)/2) * T(i) + (a + b)/2;
73     soma = soma + A(i) * f(x_i);
74 end
75

```

```
76 I_aprox = ((b - a)/2) * soma;
77 fprintf('Integral aproximada (n=2): %.8f\n', I_aprox);
78 Integral aproximada (n=2): 0.17000555
79 >>
80
81 Para $n=3$
82
83 >> f = @(x) log(1 + x.^2) ./ (1 + x.^2);
84 a = 0; b = 1;
85
86 T = [-sqrt(3/5), 0, sqrt(3/5)];
87 A = [5/9, 8/9, 5/9];
88
89 soma = 0;
90 for i = 1:3
91     x_i = ((b - a)/2) * T(i) + (a + b)/2;
92     soma = soma + A(i) * f(x_i);
93 end
94
95 I_aprox = ((b - a)/2) * soma;
96 fprintf('Integral aproximada (n=3): %.8f\n', I_aprox);
97 Integral aproximada (n=3): 0.17305383
98 >>
99
100
101 >> syms x
102 f = log(1 + x^2)/(1 + x^2);
103 f4 = diff(f, x, 4); % quarta derivada
104 f4_abs = abs(f4);
105
106 f4_max = double(max(subs(f4_abs, x, linspace(0,1,1000))));
107
108 % Calcular o erro
109 a = 0; b = 1; n = 2;
110 erro = ((b - a)^(2*n + 1)) / ((2*n + 1) * factorial(2*n)) * (
111     f4_max / (2^(2*n)));
112 fprintf('Erro estimado para n=2: %.8e\n', erro);
113 Erro estimado para n=2: 1.87500000e-02
114 >>
115
116
```

```
117 >> f6 = diff(f, x, 6); % sexta derivada
118 f6_abs = abs(f6);
119 f6_max = double(max(subs(f6_abs, x, linspace(0,1,1000))));
120
121 n = 3;
122 erro = ((b - a)^(2*n + 1)) / ((2*n + 1) * factorial(2*n)) * (
    f6_max / (2^(2*n)));
123
124 fprintf('Erro estimado para n=3: %.8e\n', erro);
125 Erro estimado para n=3: 4.09226190e-03
126 >>
127
128
129 f = @(x) cos(x.^2);
130 a = 0; b = pi;
131
132 T = [-1/sqrt(3), 1/sqrt(3)];
133 A = [1, 1];
134
135 soma = 0;
136 for i = 1:2
137     x_i = ((b - a)/2) * T(i) + (a + b)/2;
138     soma = soma + A(i) * f(x_i);
139 end
140
141 I_aprox = ((b - a)/2) * soma;
142 fprintf('Integral aproximada (n=2): %.8f\n', I_aprox);
143
144
145 f = @(x) cos(x.^2);
146 a = 0; b = pi;
147
148 T = [-sqrt(3/5), 0, sqrt(3/5)];
149 A = [5/9, 8/9, 5/9];
150
151 soma = 0;
152 for i = 1:3
153     x_i = ((b - a)/2) * T(i) + (a + b)/2;
154     soma = soma + A(i) * f(x_i);
155 end
156
157 I_aprox = ((b - a)/2) * soma;
```

```

158 fprintf('Integral aproximada (n=3): %.8f\n', I_aprox);
159 Integral aproximada (n=2): 2.97516408
160 Integral aproximada (n=3): -0.15204033
161 >>
162
163
164 >> syms x
165 f = cos(x.^2);
166 f4 = diff(f, x, 4); % quarta derivada
167 f4_abs = abs(f4);
168
169 f4_max = double(max(subs(f4_abs, x, linspace(0,1,1000))));
170
171 % Calcular o erro
172 a = 0; b = pi; n = 2;
173 erro = ((b - a)^(2*n + 1)) / ((2*n + 1) * factorial(2*n)) * (
174     f4_max / (2^(2*n)));
175 fprintf('Erro estimado para n=2: %.8e\n', erro);
176
177
178 f6 = diff(f, x, 6); % sexta derivada
179 f6_abs = abs(f6);
180 f6_max = double(max(subs(f6_abs, x, linspace(0,1,1000))));
181
182 n = 3;
183 erro = ((b - a)^(2*n + 1)) / ((2*n + 1) * factorial(2*n)) * (
184     f6_max / (2^(2*n)));
185 fprintf('Erro estimado para n=3: %.8e\n', erro);
186 Erro estimado para n=2: 6.78213202e+00
187 Erro estimado para n=3: 2.96044264e+00
188 >>

```

Listing A.1 – Quadratura de Gauss com 2 e 3 pontos e erro de integração para 2 e 3 pontos

**ANEXO B – CÓDIGO EM MATLAB PARA INTEGRAÇÃO POR
GAUSS-LEGENDRE DE $\int_0^{1,8} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$**

```

1
2 >> f = @(x) exp(-x.^2 / 2);
3 a = 0; b = 1.8;
4
5 T = [-1/sqrt(3), 1/sqrt(3)];
6 A = [1, 1];
7
8 soma = 0;
9 for i = 1:2
10     x_i = ((b - a)/2) * T(i) + (a + b)/2;
11     soma = soma + A(i) * f(x_i);
12 end
13
14 I_aprox = ((b - a)/2) * soma;
15 fprintf('Integral aproximada (n=2): %.8f\n', I_aprox);
16
17
18 f = @(x) exp(-x.^2 / 2);
19 a = 0; b = 1.8;
20
21 T = [-sqrt(3/5), 0, sqrt(3/5)];
22 A = [5/9, 8/9, 5/9];
23
24 soma = 0;
25 for i = 1:3
26     x_i = ((b - a)/2) * T(i) + (a + b)/2;
27     soma = soma + A(i) * f(x_i);
28 end
29
30 I_aprox = ((b - a)/2) * soma;
31 fprintf('Integral aproximada (n=3): %.8f\n', I_aprox);
32
33
34 syms x
35 f = @(x) exp(-x.^2 / 2);
36 f4 = diff(f, x, 4); % quarta derivada
37 f4_abs = abs(f4);

```

```
38
39 f4_max = double(max(subs(f4_abs, x, linspace(0,1,1000))));
40
41 % Calcular o erro
42 a = 0; b = 1.8; n = 2;
43 erro = ((b - a)^(2*n + 1)) / ((2*n + 1) * factorial(2*n)) * (
      f4_max / (2^(2*n)));
44
45 fprintf('Erro estimado para n=2: %.8e\n', erro);
46
47 f6 = diff(f, x, 6); % sexta derivada
48 f6_abs = abs(f6);
49 f6_max = double(max(subs(f6_abs, x, linspace(0,1,1000))));
50
51 n = 3;
52 erro = ((b - a)^(2*n + 1)) / ((2*n + 1) * factorial(2*n)) * (
      f6_max / (2^(2*n)));
53
54 fprintf('Erro estimado para n=3: %.8e\n', erro);
55
56 Integral aproximada (n=2): 1.16575494
57 Integral aproximada (n=3): 1.16305458
58 Erro estimado para n=2: 2.95245000e-02
59 Erro estimado para n=3: 2.84700536e-03
```

Listing B.1 – Quadratura de Gauss com 2 e 3 pontos e erro de integração para 2 e 3 pontos

ANEXO C – IMPLEMENTAÇÃO NO PYTHON PELA QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE DA APLICAÇÃO 3

```

1
2 import numpy as np
3 from scipy.interpolate import splrep, splev, splder
4 from numpy.polynomial.legendre import leggauss
5
6 # -----
7 # 1) Dados do contorno do a ude
8 # -----
9 # Coordenadas (x, y) que representam o contorno fechado do a ude
10 # Esses pontos foram medidos pelo Google Earth
11 x = np.array([0, 1, 26, 78, 104, 130, 156, 182, 208, 234, 260,
12              286, 312, 338, 364, 390, 416, 442, 468, 494, 520, 546, 572,
13              598, 624, 650, 676, 702, 728, 754, 780, 806, 832, 858, 910])
14 y = np.array([0, 64, 157, 207, 230, 250, 245, 237, 223, 202, 186,
15              171, 155, 149, 139, 150, 167, 176, 184, 194, 194, 208, 219,
16              230, 221, 221, 217, 232, 233, 182, 193, 150, 149, 78, 25])
17
18 # Garante que o n mero de coordenadas em x e y seja igual
19 assert len(x) == len(y), "x e y devem ter o mesmo n mero de
20 pontos"
21
22 # Cria um par metro 't' uniformemente distribu do no intervalo
23 [0, 1]
24 # Esse par metro serve como base para ajustar as splines
25 t = np.linspace(0, 1, len(x))
26
27 # -----
28 # 2) Ajuste das curvas param tricas via Spline C bica
29 # -----
30 # Ajusta fun es spline para x(t) e y(t) separadamente
31 # splrep retorna uma tupla (t, c, k) com n s , coeficientes e
32 grau
33 tck_x = splrep(t, x, s=0)
34 tck_y = splrep(t, y, s=0)
35
36 # Calcula as derivadas das splines para x'(t) e y'(t)
37 tck_dx = splder(tck_x)

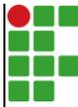
```

```

31 tck_dy = splder(tck_y)
32
33 # -----
34 # 3) Função integrando da fórmula de Green para área
35 # -----
36 # Pelo Teorema de Green, a área pode ser obtida como:
37 #   área = 1/2 ∫ (x dy - y dx)
38 # Aqui implementamos o integrando: x(t)*y'(t) - y(t)*x'(t)
39 def integrando(t_val):
40     xt = splev(t_val, tck_x) # x(t)
41     yt = splev(t_val, tck_y) # y(t)
42     dx = splev(t_val, tck_dx) # x'(t)
43     dy = splev(t_val, tck_dy) # y'(t)
44     return xt * dy - yt * dx
45
46 # -----
47 # 4) Integração numérica via Quadratura de Gauss-Legendre
48 # -----
49 n = 5 # Número de pontos da quadratura
50 xi, wi = leggauss(n) # xi = pontos em [-1, 1], wi = pesos
    correspondentes
51
52 # Converte os pontos e pesos para o intervalo [0, 1]
53 ti = 0.5 * xi + 0.5
54 wi_transf = 0.5 * wi
55
56 # Avalia o integrando nos pontos transformados
57 fi = integrando(ti)
58
59 # Aplica a fórmula da quadratura e a constante 1/2 do Teorema de
    Green
60 # abs() garante que a área seja positiva (mesmo se o contorno
    for percorrido no sentido horário)
61 area = abs(0.5 * np.sum(wi_transf * fi))
62
63 # -----
64 # 5) Resultado
65 # -----
66 print(f"Área aproximada do polígono (n = {n}): {area:.6f}")

```

Listing C.1 – Interpolação spline paramétrica em Python

	INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
	Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
	R. Tranquílino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
	CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega de TCC

Assunto:	Entrega de TCC
Assinado por:	Adrielly Oliveira
Tipo do Documento:	Tese
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- Adrielly Valeska Gonçalves de Oliveira, DISCENTE (202111230027) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE, em 22/08/2025 16:50:48.

Este documento foi armazenado no SUAP em 22/08/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1583510

Código de Autenticação: 6628496c15

