INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA

CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Daniele Leandro da Silva

TRANSFORMAÇÕES LINEARES E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE – PB

2025

Daniele Leandro da Silva

TRANSFORMAÇÕES LINEARES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida.

CAMPINA GRANDE – PB

2025

Catalogação na fonte:
Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

S586t Silva, Daniele Leandro da.

Transformações lineares e aplicações / Daniele Leandro da Silva. - Campina Grande, 2025.
34 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2025.
Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida.

1. Álgebra linear. 2. Transformações lineares. 3. Aplicações matemáticas. 4. Computação gráfica. I. Almeida, Orlando Batista de II. Título.

CDU 521.64

TRANSFORMAÇÕES LINEARES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida.

Aprovado em: 22 / 08 / 2025

BANCA EXAMINADORA

Orlando Batista de Almeida

Prof. Me. Orlando Batista de Almeida - IFPB.
(Orientador)

Cicero da Silva Pereira

Prof. Me. Cicero da Silva Pereira - IFPB.
(Membro da Banca)

Prof. Dr. Luis Havelange Soares - IFPB.
(Membro da Banca)

“*Dedico esse trabalho aos meus pais Paulo Leandro da Silva e Maria da Soledade Lourenço da Silva.*”.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus que me guia e me fortalece para que eu alcance os meus objetivos;
Aos meus pais Paulo Leandro da Silva e Maria da Soledade Lourenço da Silva que são minhas fontes de determinação, inspiração e que sempre me apoiaram e aos meus irmãos por todo o incentivo;
Ao casal Stephen Eugene Bell e Elizabeth Bell Rodrigues, minha gratidão;
Ao meu orientador Orlando Batista de Almeida, pela disponibilidade, paciência e compromisso durante toda essa missão;
Aos professores do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal da Paraíba – IFPB Campus Campina Grande, por todos os ensinamentos ao longo do curso;
Aos meus colegas Givanilda Lira, Silvano Silva, Paulo Araújo e Jamily Eloisa, meu muito obrigada;
À banca examinadora, por dedicar seu tempo para analisar o trabalho, pelas contribuições e sugestões para o aprimoramento do mesmo;
À Instituição de ensino IFPB, pelo oferecimento do curso;
À CAPES, por todas as bolsas que recebi no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID);
A todos colaboradores terceirizados do IFPB, Campus – Campina Grande;
Ao nosso querido Aécio Brito pela sua colaboração e atenção com todos nós, que fazemos o curso de matemática;
Ao professor Vinícius Costa pela sua disponibilidade em se disponibilizar a colaborar com seus ensinamentos para minha formação;
A todos que contribuíram de forma direta e indireta para a realização desse trabalho de conclusão de curso.

"*A beleza da matemática só é mostrada àqueles que têm paciência e dedicação*".

(Maryam Mirzakhani)

RESUMO

O presente trabalho trata de uma pesquisa bibliográfica, que versa sobre o objeto matemático transformação Linear, que é uma parte integrante da álgebra linear devido a sua importância nas mais diversas áreas por se tratar de um dos conceitos principais na Álgebra Linear por suas múltiplas aplicações, não apenas na área de exatas, mas também nas diversas áreas do conhecimento. Este trabalho tem como norte desenvolver esse tema transformação linear nos seus aspectos mais introdutivo, como: definições, exemplos, teorema e demonstração, fazer também um breve histórico sobre a álgebra linear e mostrar através de citações de aplicações da importância da Álgebra Linear e suas aplicações nas áreas de computação gráfica, física e engenharia. Para alcançarmos nossos objetivos, iniciaremos com o estudo de espaços vetoriais e suas propriedades para chegarmos então nas transformações lineares e suas aplicações.

Palavras-chave: Espaços Vetoriais, Transformações Lineares, Álgebra linear, Teorema e Demonstração.

ABSTRACT

This paper is a bibliographical study of the mathematical object linear transformation, an integral part of linear algebra due to its importance in a wide range of fields. It is one of the core concepts in linear algebra due to its multiple applications, not only in the exact sciences but also in various fields of knowledge. This paper aims to develop the topic of linear transformation in its most introductory aspects, such as definitions, examples, theorems, and proofs. It also provides a brief history of linear algebra and demonstrates, through citations of applications, the importance of linear algebra and its applications in computer graphics, physics, and engineering. To achieve our objectives, we will begin with the study of vector spaces and their properties, then move on to linear transformations and their applications.

Keywords: Vector Spaces, Linear Transformations, Linear Algebra, Theorem and Proof.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IFPB	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
LD	Linearmente Dependente
LI	Linearmente Independente

LISTA DE SÍMBOLOS

$\neq$	Diferente
$+$	Adição
$\times$	Multiplicação
$\mapsto$	Associa
$\rightarrow$	Implica que
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{K}$	Corpo K
$\subset$	Está Contido
$\mid$	Tal que
μ	Mi
$\vec{v}$	Vetor v
α	Alfa
β	Beta
$\emptyset$	Conjunto Vazio
$\exists$	Existe
$\in$	Pertence
$\vec{0}$	Vetor Nulo

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Inicialmente serão apresentados os aspectos iniciais relacionados a este trabalho, abordando, na sequência, os seguintes tópicos: a *contextualização*; a *justificativa*, os *objetivos*; a *metodologia*; o *público alvo* ao qual está direcionado o tema central do nosso trabalho; os *conhecimentos prévios* para o desenvolvimento desta proposta e a *estruturação* dos tópicos subsequentes.

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO

As transformações lineares são conceitos fundamentais na Álgebra Linear, desempenhando um papel crucial na resolução de problemas e na modelagem em várias áreas da ciência, tecnologia e matemática. Pois a partir delas, é possível manipular e analisar estruturas lineares precisamente para compreender as relações que ocorrem entre os espaços vetoriais. Daí, vemos que elas são de suma importância no estudo da Álgebra, Estruturas Algébricas, Álgebra Linear, Cálculo, Equações Diferenciais e muitos outros pelo fato de possibilitar a simplificação de sistemas complexos de maneira eficiente. Elas têm se tornado cada vez mais essenciais pelo fato de ser possível fazer a conexão entre a teoria e a prática em muitas disciplinas, permitindo não apenas a modelagem, mas também a resolução e análise de uma vasta gama de problemas tanto teóricos quanto práticos.

1.2. JUSTIFICATIVA

O conteúdo transformações lineares é ministrado na disciplina de Álgebra Linear no 4º período do curso de Licenciatura em Matemática. Porém, elas são um conceito matemático muito abstrato a suas aulas ficam limitadas apenas na teoria, dificultando a compreensão de suas aplicações práticas. Com isso, os alunos não conseguem perceber toda a beleza que há nas transformações lineares. Contudo, elas são essenciais para entender e manipular estruturas lineares em matemática e em várias áreas. Sua compreensão é necessária para que se possa desenvolver soluções em tais áreas. A escolha deste tema se deve à importância das transformações lineares em modelar e resolver problemas em diversas disciplinas. E explorar suas aplicações permite compreender melhor como essa ferramenta é utilizada para resolver problemas que favoreça a sua aplicação.

1.3.OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem por objetivo investigar e analisar os fundamentos das transformações lineares e mostrar a importância em diversas áreas do conhecimento.

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analisar aspectos históricos da Álgebra Linear;
- Compreender os conceitos das transformações lineares;
- Saber calcular a imagem e o núcleo de uma transformação linear;
- Aplicar o Teorema do Núcleo e da Imagem;
- Mostrar as aplicações das transformações lineares em várias áreas.

1.4. METODOLOGIA

A metodologia utilizada neste trabalho sobre transformações lineares e desenvolvida através deum pesquisa bibliográfica e envolve uma abordagem teórica e aplicada, a fim de explorar as definições, teoremas e propriedades das transformações lineares, bem como analisar as aplicações em diferentes áreas do conhecimento. Será realizada uma revisão da literatura, fornecendo uma base sólida para o desenvolvimento do trabalho. A pesquisa foi conduzida com base em uma revisão bibliográfica de livros e artigos científicos. Os resultados alcançados corroboram com a ideia de que as transformações lineares são importantes para nossa vida. Além de mostrar uma vasta aplicabilidade em situações reais.

1.5. PÚBLICO-ALVO

O trabalho é voltado para alunos do curso de licenciatura em matemática, para professores de matemática e pessoas que se interessem pelo assunto.

1.6. CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Consideramos que é necessário que os leitores tenham o conhecimento de matemática básica, funções, matrizes, sistemas lineares, espaços vetoriais, bem como: seu domínio, sua imagem, base para o espaço vetorial, dimensão do espaço vetorial e as propriedades que envolvem todos esses temas.

1.6.1. Espaço vetorial

Definição 1.6.1. Dizemos que um conjunto, não vazio, **V** é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, quando é satisfeita as operações de adição e multiplicação, definidas da seguinte forma:

1. **Adição**

   Definida da seguinte maneira:

$$+ : V \times V \to V$$
$$(u , v) \mapsto u + v$$

2. **Multiplicação**

   Definida da seguinte maneira:

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$
$$(\alpha , u) \mapsto \alpha \cdot u,$$

e as seguintes condições são satisfeitas para as duas operações:

1. Adição:

I. Comutatividade: Para todos u, v $\in V$ temos que,

$$u + v = v + u.$$

II. Associatividade: Para todos u, v e w $\in V$ temos que,

$$u + (v + w) = (u + v) + w.$$

III. Existência do elemento neutro: Existe $0 \in V$, denominado vetor nulo de V, ou vetor zero, tal que $0 + u = u + 0 = u$, com qualquer u em V.

IV. Existência do oposto: Dado qualquer $u \in V$, existe (–u), também pertencente a V, denominado negativo de u, tal que

$$u + (-u) = (-u) + u = 0.$$

2. **Multiplicação:**

I. Associatividade da multiplicação por escalar: Para todo $a, b \in \mathbb{K}$ e u ∈ V, temos que,

$$a(b\text{u}) = (ab)\text{u}.$$

II. Distributiva de um escalar em relação à soma de vetores: Para todo $a \in \mathbb{K}$; u , v ∈ V, temos que,

$$a(\text{u} + \text{v}) = a\text{u} + a\text{v}.$$

III. Distributiva da soma de escalares em relação à um vetor: Para todo $a, b \in \mathbb{K}$ e u ∈ V, temos que,

$$(a+b)\text{u} = a\text{u} + b\text{v}.$$

IV. Existência do elemento neutro: ∃ 1 ∈ $\mathbb{K}$ tal que para todo u ∈ V temos que,

$$1\text{u} = \text{u}.$$

Exemplo 1.6.1. O conjunto V = $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real.

Solução:

Sejam $u = (x_1,\ y_1)$ e $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha v &= \alpha(x_2, y_2) \\ &= (\alpha x_2, \alpha y_2) \end{aligned}$$

1.6.2. Subespaço Vetorial

Definição 1.6.2. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e W um subconjunto não vazio de V. Dizemos que W é um subespaço vetorial de V, se forem satisfeitas as seguintes condições:

i) $0 \in$ W, onde 0 é o vetor nulo;

ii) $\forall$ u,v $\in$ W, u + v $\in$ W;

iii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ e u $\in$ W, αu $\in$ W.

Exemplo 1.6.2. Sejam V = $\mathbb{R}^2$ e W = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = 3x\}$. Verificar se W é um subespaço vetorial de V.

Solução: Note que, W = $\{(x, 3x)\ /\ x \in \mathbb{R}\}$

I) $0 \in$ W, pois o vetor nulo $(0, 0) \in$ W.

De fato,

$\vec{0}$ = $(0, 0) = (0, 3.0) \in$ W.

II) $\forall\ \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in$ W

Sejam $\overrightarrow{w_1} = (x_1, y_1), \overrightarrow{w_2} = (x_2, y_2) \in$ W, logo;

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2, 3(x_1 + 3x_2)) \\ &= (t, 3t) \in \text{W},\end{aligned}$$

Pois, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $t = x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$ e $3t = 3(x_1 + x_2) \in \mathbb{R}$.

III) Sejam $\vec{v} = (x, y) \in$ W, logo; $y = 3x$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned}k.\vec{v} &= k.(x, y) = \\ &= (k.x, k.y) \\ &= \left(kx, k.(3x)\right) \\ &= (kx, 3(kx)\end{aligned}$$

Daí,

$$k\,\vec{v} = k\,(p, 3p) \in \text{W},$$

Pois, $p = kx \in \mathbb{R}$ e $3p = 3.(kx) \in \mathbb{R}$.

Portanto, por I), II) e III) o conjunto W é um subespaço vetorial de V=$\mathbb{R}^2$.

1.6.3. Combinação Linear

Definição 1.6.3. Seja V um espaço vetorial sobre ℝ. Dizemos que um vetor u ∈ V é uma combinação linear dos vetores u_1, ..., u_2 ∈ V, se existirem escalares α_1, ..., α_n ∈ ℝ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

Exemplo 1.6.3. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, escreva o vetor $u = (4, 0, 5)$ como combinação linear dos vetores $u_1 = (1, 3, 2)$ e $u_2 = (1, -1, -1)$.

Solução: Devemos determinar **v** tal que:

$$\boldsymbol{v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2}$$

$$(4, 0, 5) = \alpha_1(1, 3, 2) + \alpha_2(1, -1, 1)$$

$$(4, 0, 5) = (\alpha_1, 3\alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, -\alpha_2, \alpha_2)$$

$$(4, 0, 5) = (\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 - \alpha_2, 2\,\alpha_1 + \alpha_2)$$

Assim,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 4 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 5 \end{cases}$$

A partir da primeira equação, obtemos:

$$\alpha_1 = 4 - \alpha_2$$

$$3.(4 - \alpha_2) - \alpha_2 = 0$$

$$12 - 3\alpha_2 - \alpha_2 = 0$$

$$12 - 4\alpha_2 = 0$$

$$12 = 4\alpha_2$$

$$\frac{12}{4} = \alpha_2$$

$$\alpha_2 = 3$$

Substituindo α_2 na segunda equação:

$$3\alpha_1 - 3 = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{3}$$

$$\alpha_1 = 1$$

Substituindo os valores de $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 3$, na equação $2\alpha_1 + \alpha_2 = 5$, obtemos:

$2\alpha_1 + \alpha_2 = 2.1 + 3 = 5$, verificando assim essa equação. Portanto, $\boldsymbol{v = 1u_1 + 3u_2}$**.**

1.6.4. Subespaço Vetorial Gerado

Definição 1.6.4. Seja V um espaço vetorial e A = $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset$ V com A $\neq \emptyset$. O conjunto S de todos os vetores de V que são combinações lineares de A é um subespaço vetorial de V. Então, se

$$\mu = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n$$

e

$$v = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \cdots + b_n w_n$$

são dois quaisquer vetores de S, podemos escrever que:

I) $\mu + v = (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n) + (b_1 w_1 + b_2 w_2 + \cdots + b_n w_n)$

$\mu + v = (\alpha_1 w_1 + b_1 w_1) + (\alpha_2 w_2 + b_2 w_2) + \cdots + (\alpha_n w_n + b_n w_n)$

$\mu + v = (\alpha_1 + b_1) w_1 + (\alpha_2 + b_2) w_2 + \cdots + (\alpha_n + b_n)\, w_n$

II) $\alpha\mu = \alpha(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n)$

$\alpha\mu = \alpha(a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n)$

$\alpha\mu = (\alpha a_1) w_1 + (\alpha a_2) w_2 + \cdots + (\alpha a_n) w_n,$

ou seja**,**

$$\boldsymbol{\mu + v \in S} \textbf{ e } \boldsymbol{\alpha\mu \in S}$$

por serem combinações lineares de $w_1, w_2, \dots, w_n$.

Logo, S é um subespaço vetorial de V.

Assim,

- O subespaço S, se diz gerado pelos vetores de $w_1, w_2, \dots, w_n$ ou gerado pelo conjunto A e representamos por S = [$w_1, w_2, \dots, w_n$] ou S = G(A).
- Os vetores de $w_1, w_2, \dots, w_n$ são chamados de geradores do subespaço S e A é o conjunto gerador de S.

- Todo conjunto A ⊂ V gera um subespaço vetorial de V, podendo ocorrer que G(A) = V, caso em que A é o conjunto gerador de V.

Exemplo 1.6.4. Analise se o conjunto B = $\{w_1 = (2,4),\ w_2 = (6,10)\}$ gera $\mathbb{R}^2$.
Solução:
A condição necessária para o conjunto B gerar o $\mathbb{R}^2$ é que qualquer vetor μ seja combinação linear de w_1 e w_2, ou seja, é preciso existir números reais b_1 e b_2, tais que:

$$\boldsymbol{\mu = b_1 w_1 + b_2 w_2.}$$

Assim, considerando $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$(x, y) = b_1(2,4) + b_2(6,10)$$

$$(x, y) = (2b_1, 4b_1) + (6b_2, 10b_2)$$

$$(x, y) = (2b_1 + 6b_2, 4b_1 + 10b_2)$$

Daí, segue que:

$$\begin{cases} 2b_1 + 6b_2 = x \\ 4b_1 + 10b_2 = y \end{cases}$$

Resolvendo o sistema em função de x e y, obtemos:

$$2b_1 + 6b_2 = x$$

$$2b_1 = x - 6b_2$$

$$b_1 = \frac{1}{2}x - 3b_2$$

Substituindo b_1 na segunda equação:

$$4b_1 + 10b_2 = y$$

$$4.\left(\frac{1}{2}x - 3b_2\right) + 10b_2 = y$$

$$2x - 12b_2 + 10b_2 = y$$

$$2x - 2b_2 = y$$

$$-2x + 2b_2 = -y$$

$$2b_2 = 2x - y$$

$$b_2 = x - \tfrac{1}{2}y.$$

Agora, calculando b_1, obtemos:

$$b_1 = \frac{1}{2}x - 3b_2$$

$$b_1 = \frac{1}{2}x - 3\left(x - \frac{1}{2}y\right)$$

$$b_1 = \frac{1}{2}x - 3x + \frac{3}{2}y$$

$$b_1 = \frac{-5}{2}x + \frac{3}{2}y$$

Portanto:

$$\boldsymbol{\mu = \left(\frac{-5}{2}x + \frac{3}{2}y\right) w_1 + \left(x - \frac{1}{2}y\right) w_2.}$$

1.6.5. Espaços Vetoriais Finitamente Gerados

Definição1.6.5. Um espaço vetorial V é finitamente gerado, se existe um conjunto finito A ⊂ V, tal que V = G(A).

Exemplo: V = $\mathbb{R}^2$

Solução:

Consideremos $v_1 = (1{,}0)$ e $v_2 = (0{,}1)$ e o conjunto A= $\{v_1, v_2\}$. Sendo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Temos que:

$$(x, y) = x.(1{,}0) + y.(0{,}1).$$

Portanto, $\mathbb{R}^2$ é um espaço finitamente gerado.

1.6.6. Dependência e Independência Linear

Seja V um espaço vetorial sobre o conjunto dos números reais($\mathbb{R}$).

Definição 1.6.6. O conjunto A = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ⊂ V é dito linearmente dependente (LD) se existirem vetores distintos $u_1, u_2, \ldots, u_n \in$ A e escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tal que,

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = 0.$$

Exemplo 1.6.6. Sendo $u_1 = (4, 1, 3), u_2 = (1, 0, 2)$ e $u_3 = (11, 2, 12)$, então o conjunto de vetores A= $\{u_1, u_2, u_3\}$ é linearmente dependente pois, $2u_1 + u_2 - u_3 = 0$.

De fato:

$$2(4, 1, 3) + 3(1, 0, 2) - (11, 2, 12) = 0.$$

Definição 1.6.6. O conjunto F = $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset$ V é dito linearmente independente (LI) se existirem vetores distintos $u_1, u_2, \dots, u_n \in$ F e escalares $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tal que, $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0$, apenas quando tivermos $\boldsymbol{a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0}$.

Exemplo 1.6.6. Considerando os vetores e = $(1, 0, 0)$, f = $(0, 1, 0)$ e g $(0, 0, 1)$ em $\mathbb{R}^3$.

Em termos de suas componentes, a equação vetorial

$$a_1\text{e} + a_2\text{f} + a_3\text{g} = 0$$

é dada por:

$$a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

ou ainda, por

$$(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0).$$

Implicando que $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ e $a_3 = 0$ de modo que o conjunto L = {e, f, g} é dito linearmente independente.

1.6.7. Base de um Espaço Vetorial

Definição 1.6.7. O conjunto F = $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vetores de V será uma base de V se:

i. F é LI;
ii. F gera V.

Exemplo 1.6.7. O conjunto $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$.

De fato, pois β gera o $\mathbb{R}^2$ e também é LI.

Exemplo 1.6.8. Mostre que o conjunto F = $\{2, 1 - x, 1 + x^2\}$ é base de P_2, que é o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a 2.

Solução:

Considere $P_2(x) = \alpha.(2) + \beta.(1 - x) + \gamma.(1 + x^2)$.

Assim,

$$\alpha.(2) + \beta.(1 - x) + \gamma.(1 + x^2) = 0x^2 + 0x + 0$$

$$2\alpha + \beta - \beta x + \gamma + \gamma x^2 = 0x^2 + 0x + 0$$

$$x^2.(\gamma) + x.(-\beta) + (2\alpha + \beta + \gamma) = 0x^2 + 0x + 0$$

Temos que:

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ -\beta = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$2\alpha + 0 + 0 = 0$$

$$2\alpha = 0$$

$$\alpha = 0$$

Portanto, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Então, o conjunto F é uma base e gera P_2.

1.6.8.Dimensão de um Espaço Vetorial

Definição1.6.8. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Se V possui uma base com n vetores, então V tem dimensão n e denota-se por $dim\, V = n$.

Exemplo 1.6.8. Se V= $\{0_v\}$, a dimensão de V = 0.

Exemplo 1.6.8. Se V = $\mathbb{R}^2$ tem dimensão de V = 2. Pois, o conjunto $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de V = $\mathbb{R}^2$, denominada de base canônica.

Exemplo 1.6.8. Se V= $\mathbb{R}^3$ tem dimensão de V = 3. Pois, o conjunto

$$\beta = \{ (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

É uma base de V= $\mathbb{R}^3$, denominada de base canônica.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS DA ÁLGEBRA LINEAR

Neste tópico será apresentado os aspectos históricos de Álgebra Linear, apresentando de forma resumida os motivos pelo qual a Álgebra Linear passou a ser pesquisada ao passar dos anos, bem como quais foram os principais responsáveis por seus avanços. A Álgebra Linear surgiu ao longo do tempo com a contribuição de muitos cientistas e matemáticos. Um marco importante de sua história foi o desenvolvimento do método dos mínimos quadrados que trouxe a aplicabilidade das ideias da álgebra linear em problemas práticos e científicos elaborado por Carl Friedrich Gauss no final do século XVIII. Porém, não podemos deixar de citar as contribuições do matemático francês Augustin-Louis Cauchy que fez a introdução da noção de determinante e também desenvolveu a teoria dos determinantes; do alemão Hermann Grassmann, que foi o responsável por desenvolver a teoria dos espaços vetoriais e introduzir o conceito de dependência linear e além disso, Giuseppe Peano que estruturalizou a álgebra linear e fez a introdução da independência linear. Por volta de 200 a.C., os chineses começaram a estudar sistemas de equações lineares e representavam coeficientes com barras de bambu e resolviam sistemas de equações. Além disso, eles foram responsáveis por desenvolverem o método de resolução através da eliminação que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Já no século XVII, os dois matemáticos Seki Kowa e Gottfrid Wilhelm Leibnz desenvolveram algo fundamental para a álgebra linear: a teoria dos determinantes e mais a frente; no século XIX, a teoria dos espaços vetoriais foi desenvolvida pelos matemáticos Giuseppe Peano e Hermann Grasmann. A álgebra linear se desenvolveu a partir do estudo de sistemas de equações lineares e determinantes, se tornando não apenas uma ferramenta fundamental da área de matemática, mas também de outras ciências. E para se chegar na Álgebra Linear que conhecemos hoje a sua forma mais clara e definida só foi adquirida a partir do século XIX. Atualmente, a álgebra linear é um instrumento essencial em muitas áreas como ciência, tecnologia, medicina, economia e engenharia com aplicações que vão desde a resolução de sistemas de equações lineares até a análise de dados e a modelagem de sistemas complexos. A álgebra linear tem sido cada vez mais reconhecida nos dias atuais pelo fato de ser versátil em suas aplicações, contribuindo progressivamente no aprimoramento tecnológico e científico.(Livro: Matemática, uma Breve História).

3. TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Nesse momento será abordado definições, exemplos, proposições e teoremas relacionados ao assunto das transformações lineares, como destacando-se o núcleo, a imagem de uma transformação linear e as transformações injetivas, sobrejetivas e bijetivas.

3.1. Transformações Lineares

Definição 3.1. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação T: V → W, é chamada transformação linear de V em W se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

- $\mathrm{T}\,(u + v) = T(u) + T(v),\ \forall\ u\,,\ v\ \in V$
- $\mathrm{T}\,(\alpha\, u) = \alpha\, T(u),\ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall\ u\ \in V.$

Quando V = W, a transformação linear T: V → W é chamada também de operador linear.

Exemplo 3.1.1. Determine a transformação linear de T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, determinada por
$\mathrm{T}(-1, 1) = (3, 2, 1)$ e $\mathrm{T}(0, 1) = (1, 1, 0)$.
Solução:
Podemos observar que $\beta = \{\mathrm{e}_1 = (-1,1), \mathrm{e}_1 = (0, 1)\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^2$ e
$v_1 = (3, 2, 1)$ e $v_2 = (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Seja $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer, então

$$w = (x, y) = x\mathrm{e}_1 + y\mathrm{e}_2$$

$$\mathrm{T}(w) = x\mathrm{T}(\mathrm{e}_1) + y\mathrm{T}(e_2)$$

$$\mathrm{T}(x, y) = x(3, 2, 1) + y(1, 1, 0)$$

$$\mathrm{T}(x, y) = (3x, 2x, x) + (y, y, 0),$$

Portanto, a transformação linear desejada é definida por

$$\mathrm{T}(x, y) = (3x + y, 2x + y, x).$$

3.2. Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Definição 3.2. 1. Seja T : V → W uma transformação linear. O núcleo de T, escrito ker (T), é o conjunto de todos os vetores que são transformados no vetor nulo, pela transformação T e que é definido por

$$\text{Ker}(T) = \{ \mathbf{v} \in V \mid T(v) = \mathbf{0} \}.$$

Exemplo 3.2.1. Seja F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por F(x, y) = (0, x + y, 0).Determine o núcleo de F.

Solução: Considere **v =** (x, y) ∈ Ker (F), temos que

$$(0, x + y, 0) = (0, 0, 0)$$

$$x = -y$$

Logo,

$$\text{Ker}(F) = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 3.3.1. Seja T : V → W uma transformação linear. A imagem de T é o conjunto dos vetores de w ∈ W, denotada por T(v) = w e definida por

$$\text{Im}(T) = \{ \mathbf{w} \in W \mid T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}.$$

Exemplo 3.3.1. Considerando a seguinte transformação linear T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (2x + y + z\ ,\ y + x)$. Determinar a imagem da transformação T.

Solução:

Temos que:

$$(2x + y + z, y + x) = x(2, 1) + y(1, 1) + z(1, 0)$$

Desta forma, a imagem de T é dada por Im (T) = $[(2, 1), (1,1), (1, 0)]$, ou seja, o conjunto gerado por $\beta = \{(2, 1), (1,1), (1, 0)\}$.

Proposição 1. Seja F: U → V uma transformação linear. Então:

I. Ker (F) é um subespaço vetorial de U;

II. A transformação linear F é injetora se, e somente se, Ker (T) = $\{0\}$.

Demonstração:

Prova de I

Veja que, F(0) $= F(0+0) = F(0) + F(0) = 0 + 0 = 0$, assim o vetor nulo pertence ao Ker(F), isto é, $F \neq \phi$. Como F(0) $= 0$, então 0 $\in$ Ker(F). Temos que se $u_1, u_2 \in$ Ker (T). então, F(u_1) = F(u_2) = 0 . Assim, F($u_1 + u_2$) = F(u_1) + F(u_2) = $0 + 0 = 0$. Portanto, $u_1 + u_2 \in$ Ker(F). Considerando agora, se $u \in$ Ker (T) temos que F(u) $= 0$ e sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, logo, F(αu) $= \alpha\, F(u) = \alpha.0 = 0$, então $\alpha u \in$ Ker(F). Portanto, Ker (F) é um subespaço vetorial de U.

Prova de II

Suponhamos que F é injetora. Se $u \in$ Ker(F), então, F(u) =0. Mas F(0) $= 0$, conforme a preposição apresentada acima. Logo F(u) = F(0). Usando a hipótese de F ser injetora, nesta última relação, concluímos que u = 0. Então, se F é injetora, o núcleo de F se resume ao vetor nulo de U. Reciprocamente suponhamos ker (t) = $\{0\}$. Dados $u_1, u_2 \in$ U, então

$$\mathrm{F}(u_1) = \mathrm{F}(u_2) \Rightarrow \mathrm{F}(u_1) - \mathrm{F}(u_2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{F}(u_1 - u_2) = 0 \;\Rightarrow u_1 - u_2 \in \mathrm{Ker(T)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \;\Rightarrow u_1 = u_2.$$

Portanto, F é injetora.

3.4. Teorema do Núcleo e da Imagem

Definição 3.4.1.

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Dada uma transformação linear F : U → V, então $dim\, U \;=\; dim\, ker(\,F) \;+\; dim\, Im(F)$.

Demonstração:

Sendo B_1= $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de Ker(F). Essa base pode ser estendida a uma base B_1= $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ de U conforme o teorema do completamento. Será mostrado que $B = \{F(v_1), \ldots, F(v_s)\}$ é uma base de Im(F).

Dado v ∈ Im(F), existe u ∈ U tal que F(u) = v. Mas u é combinação linear de B_2: u = $\alpha_1 u_1 +\; \ldots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s$, com os α_i e os β_j em $\mathbb{R}$, já que B_2 é base de U.

Logo

$$\mathrm{v} = \mathrm{F}(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s) =$$
$$\alpha_1 F(u_1) + \cdots + \alpha_r F(u_r) + \; \beta_1 F(v_1) + \cdots + \; \beta_s F(v_s) =$$
$$= \beta_1 F(v_1) + \cdots + \; \beta_s F(v_s)$$

Pois como $u_1, \dots, u_r \in$ Ker(F), então suas imagens, por F, são nulas. Então [B] = Im(F).
Suponhamos $\beta_1 F(v_1) + \cdots + \beta_s F(v_s) = o$ com $\beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{R}$. Então
$F(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s) = o$, do que resulta que $\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s$ pertence a Ker(F).
Logo existem $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ de maneira que:

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r$$

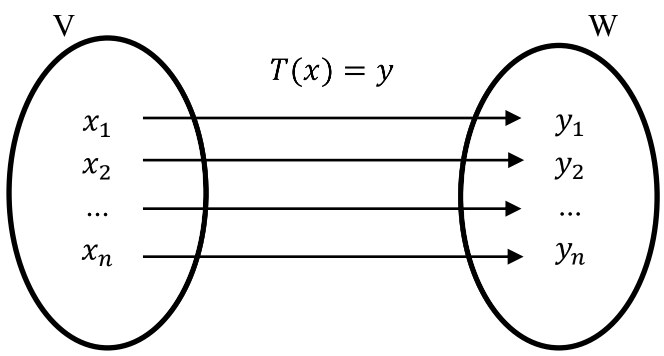
Então,

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + (-\beta_1) v_1 + \cdots + (-\beta_s) v_s = 0.$$

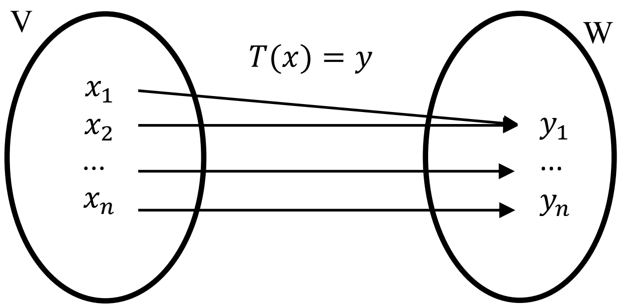
Como o conjunto B_2 é LI, podemos concluir que todos os escalares da última igualdade são nulos. Particularmente $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_s = 0$. Com isso, B é LI.
Para finalizar a demonstração, é necessário observar que, como $dim\, Ker(F) = r$, $dim\, Im(F)$ = s e sendo $dim\, U = r + s$, então $dim\, U = dim\, Ker(F) + dim\, Im(F)$.

3.5. Transformação Injetora

Definição 3.5. Se T : V → W for uma transformação linear de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, dizemos que T é uma transformação injetora se T transformar vetores distintos de V em vetores distintos de W.



Transformação linear injetora
Fonte: Autoria própria (2025).

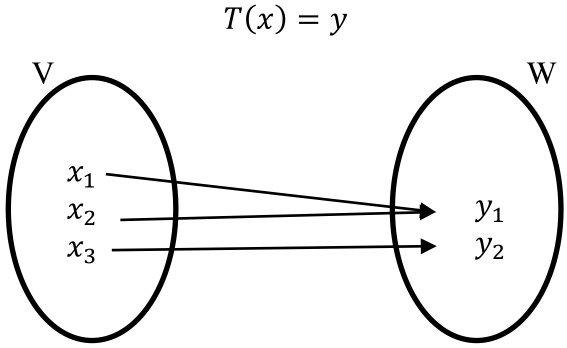


Transformação linear não injetora

Fonte: Autoria própria (2025).

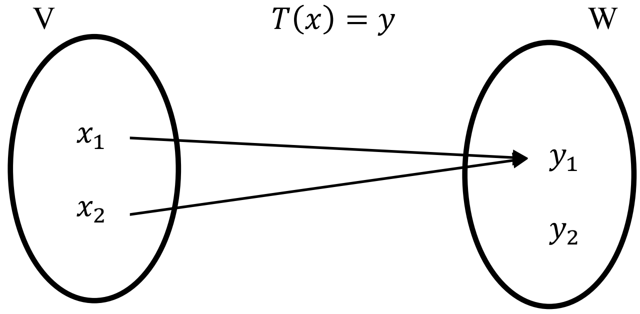
3.6. Transformação Sobrejetora

Definição 3.6. Se T : V → W for uma transformação linear de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, dizemos que T é uma transformação sobrejetora ou, simplesmente, sobre **W**, se qualquer vetor em W for a imagem de pelo menos um vetor em V.



Transformação linear sobrejetora

Fonte: Autoria própria (2025).

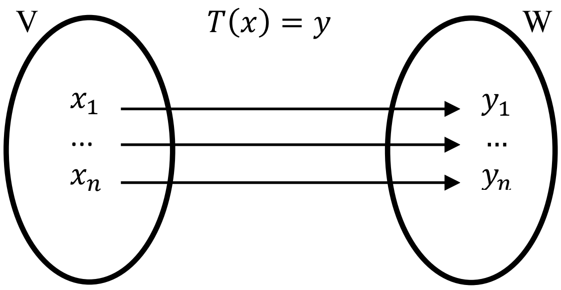


Transformação linear não sobrejetora

Fonte: Autoria própria (2025).

3.7. Transformação Bijetora

Definição 3.7. Se uma transformação linear T : V → W for injetora e sobrejetora, dizemos que T é um isomorfismo e que os espaços vetoriais V e W são isomorfos.



Transformação linear bijetiva

Fonte: Autoria própria (2025).

3.8. Matriz de uma Transformação Linear

Definição 3.8. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente, sobre ℝ. Consideremos uma transformação linear F : U → V. Dadas as bases B = $\{u_1\ ,\ u_2\ , \dots , u_n\}$ de U e C = $\{v_1$, ..., $v_m\}$ de V, então cada um dos vetores F(u_1), ..., F(u_n) está em V e consequentemente é combinação linear dos elementos da base C:

$$\begin{aligned}
F(u_1) &= \alpha_{11}\, v_1 + \ \alpha_{21}\, v_2\ + \cdots + \ \alpha_{m1}\, v_m \\
F(u_2) &= \alpha_{12}\, v_1 + \ \alpha_{22}\, v_2\ + \cdots + \ \alpha_{m2}\, v_m \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F(u_n) &= \alpha_{1n}\, v_1 + \ \alpha_{2n}\, v_2\ + \dots + \ \alpha_{mn}\, v_m
\end{aligned}$$

ou simplesmente,

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i \quad (j = 1,2, \dots , n)$$

Onde os α_{ij} estão univocamente determinados.

Definição 3.8.1. A matriz m × n sobre $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij}) = \text{A},$$

que se obtém das considerações anteriores é chamada matriz de F em relação às bases B e C. Para indicar essa matriz A, usaremos a notação A = $(F)_{B,C}$.

Exemplo 3.8.1. Qual a matriz de F: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por F(x, y, z) = (x + 2y, x − z), em relação às bases B = $\{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$ e C = $\{v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1)\}$?

Solução:

Escrevendo as imagens dos elementos da base B, pela transformação linear F, como combinações lineares dos elementos da base C, temos:

$$\text{F}(1,1,0) = (3,1) = \alpha_{11}(1,0) + \alpha_{21}(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{11} = 3 \\ \alpha_{21} = 1 \end{cases}$$

$$\text{F}(0,1,0) = (2,1) = \alpha_{12}(1,0) + \alpha_{22}(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{12} = 2 \\ \alpha_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\text{F}(0,0,1) = (0,-1) = \alpha_{13}(1,0) + \alpha_{23}(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{13} = 0 \\ \alpha_{23} = -1 \end{cases}$$

Então,

$$(F)_{B,C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. APLICAÇÕES DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Neste Tópico será apresentado sob que forma algumas das aplicações das transformações lineares fazem parte do nosso cotidiano, por meio de exemplos que evidenciam seu impacto em nossa vida diária. As transformações lineares são utilizadas em várias áreas porque possuem propriedades que as tornam úteis e eficientes em muitas aplicações. Veremos a seguir, alguns motivos pelos quais as transformações são tão importantes em várias ciências: **Modelagem de sistemas**: As transformações lineares nos permitem modelar sistemas complexos, como sistemas biológicos, físicos e econômicos de maneira simplificada e com precisão. **Análise de dados**: As transformações lineares são utilizadas em análise de dados para identificar padrões e tendências em conjunto de dados complexos. **Previsão e simulação**: As transformações lineares permitem prever e simular o comportamento de sistemas multifacetados, o que é fundamental em muitas áreas da ciência e engenharia. **Otimização**: As transformações lineares são usadas em problemas de otimização para encontrar soluções ótimas para sistemas de difícil entendimento. Aplicação da transformação linear na **computação gráfica.** A transformação linear é uma técnica fundamental na computação gráfica, permitindo a manipulação e transformação de objetos gráficos. Ela é aplicada na computação gráfica das seguintes maneiras: **Translação**: Usada para mover objetos de uma posição para outra, mantendo seu tamanho e forma. **Rotação**: Utilizada para girar objetos em torno dos eixos, podendo também criar efeitos de animação. **Escala**: Aumenta ou diminui o tamanho de objetos, criando efeitos de zoom**. Projeção**: Cria imagens e animações realistas, projetando objetos 3D em 2D. Aplicação da transformação linear na **Física**. As transformações lineares podem ser aplicadas na física na: **Mecânica clássica**: Usada para descrever o movimento de objetos. **Eletromagnetismo**: Utilizada para detalhar a relação entre campos magnéticos e elétricos nos diferentes referenciais. **Relatividade especial**: Usada para detalhar a relação que há entre espaço e tempo em diferentes referenciais estáticos. **Física quântica**: Utilizada para descrever a evolução de sistemas quânticos, além da relação entre estados quânticos. Aplicação da transformação linear na **engenharia.** Na **e**ngenharia **elétrica**: Projeta sistemas de controle e estuda circuitos elétricos. Na engenharia **mecânica**: Analisa sistemas mecânicos além de projetar sistemas de controle. Na engenharia **civil**: Investiga a estabilidade e a resistência de estruturas. Na engenharia de **controle**: Projeta sistemas de controle que mantêm a estabilidade e performance de sistemas detalhados. Aplicação da transformação linear na **medicina.** Podemos observar a aplicação da transformação linear na medicina em: **Imagem médica**: Processa imagens médicas e melhora a detecção de doenças, como câncer e doenças cardíacas. Diagnóstico de doenças: Analisa sinais biológicos e diagnosticar doenças como epilepsia. Modelagem de sistemas biológicos: Modela a dinâmica de população de células e ajuda a compreender a progressão de doenças.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final desse trabalho de manografia posso afirmar que os objetivos foram todos alcançados, porque através da pesquisa bibliográfica consegui abordar o estudo das transformações lineares e suas aplicações como planejado. Ao decorrer do trabalho, foi explorado conceitos fundamentais das transformações lineares como definição, representação matricial e aplicações práticas. No curso do trabalho ficou evidenciado a importância das transformações lineares na modelagem e na resolução de problemas em várias áreas do conhecimento e durante o desenvolvimento do trabalho, pudemos observar como se deu o desenvolvimento da Álgebra Linear que conhecemos atualmente, bem como quem foram os principais personagens responsáveis pela sua construção e consolidação. Vimos também que, a partir das transformações lineares é possível chegar a simplificação de sistemas complexos de forma produtiva, e além disso; fazer a conexão entre a teoria e a prática por causa da sua vasta aplicabilidade nas mais diferentes áreas. Esperamos que a pesquisa possa contribuir e ajudar alunos do curso de licenciatura em matemática, professores de matemática e pessoas que se interessem pelo tema para o aprofundamento no mesmo. Como sugestão para pesquisas futuras, sugerimos explorar mais a fundo aplicações específicas contempladas no trabalho com maior profundidade, bem como em outras áreas que não foram não contempladas neste trabalho de conclusão de curso.

REFERÊNCIAS

[1] HOWARD, Anton; RORRES, Chris.; ***Álgebra Linear com Aplicações***, Ed. Bookman, Porto Alegre - RS, 10ª Edição, 2012, **[A]**.

[2] LEON, Steven J.; ***Álgebra Linear com Aplicações***, Ed. LTC, Rio de Janeiro - RJ, 8ª Edição, 2011, **[B]**.

[3] CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F.; ***Álgebra Linear e Aplicações***, Ed. Atual, São Paulo - SP, 6ª Edição, 1990, **[C]**.

[4] SOUSA, José Willams A.; ***Teorema do Núcleo e da Imagem e Aplicações***, Campina Grande - PB, 2017, **[D]**.

[5] BOLDRINI, José L.; COSTA, Sueli I.; FIGUEIREDO, Vera L.; WETZLER, Henry G.; ***Álgebra Linear***, Ed. Harper & Row do Brasil, São Paulo - SP, 3ª Edição, 1980, **[E]**.

[6] LIMA, Elon L.; ***Álgebra Linear***, Ed. Impa, Rio de Janeiro - RJ, 1ª Edição, 2014, **[F]**.

[7] SCHWARTZ, Eduardo; ***Transformações Lineares no Processamento de Imagens e na Criptografia***, São João Del-Rei - MG, 2016, **[G]**.

[8] CONTADOR, Paulo R. C.; ***Matemática, uma Breve História***, Ed. Livraria de Física, São Paulo - SP, 5ª Edição, 2012, **[H]**.

[9] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C.; ***História da Matemática***, Ed. Blucher, São Paulo - SP, 3ª Edição, 2012, **[I]**.

PÁGINAS ELETRÔNICAS

[10] https://youtu.be/bjVUalU8VJY?si=54H0n-4DeLVkuQPo, acesso em 01/05/2025, **[J]**.

[11] https://youtu.be/jxSgzLEHOko?si=nJDMxs6vcRNVLmaj, acesso em 28/06/2025, **[K]**.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Restrito

Entrega de TCC

Assunto:	Entrega de TCC
Assinado por:	Daniele Silva
Tipo do Documento:	Anexo
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Restrito
Hipótese Legal:	Informação Pessoal (Art. 31 da Lei no 12.527/2011)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Daniele Leandro da Silva**, **ALUNO (201811230012) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 26/08/2025 18:30:29.

Este documento foi armazenado no SUAP em 26/08/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1586828
Código de Autenticação: 8180ac7442