INSTITUTO FEDERAL
Paraíba
Campus Campina Grande

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Raul Jefferson Andrade Silva

Permutação: Um enlace para determinantes

CAMPINA GRANDE - PB
2025

Raul Jefferson Andrade Silva

Permutação: Um enlace para determinantes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida

Catalogação na fonte:
Ficha catalográfica elaborada por Gustavo César Nogueira da Costa - CRB 15/479

S586p Silva, Raul Jefferson Andrade

Permutação: um enlace para determinantes / Raul Jefferson Andrade Silva. - Campina Grande, 2025.
48 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, 2025.
Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida.

1. Matemática - Permutação. 2. Álgebra linear - determinantes. 3. História da matemática. I. Almeida, Orlando Batista de II. Título.

CDU 521.64

Raul Jefferson Andrade Silva

Permutação: Um enlace para determinantes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), como requisito parcial para para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Orlando Batista de Almeida

Aprovado em: 18/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Orlando Batista de Almeida

Prof. Me. Orlando Batista de Almeida
Instituto Federal da Paraíba

Felipe Barbosa Cavalcante

Prof. Dr. Felipe Barbosa Cavalcante
Instituto Federal da Paraíba

Rodrigo Moura da Silva

Prof. Dr. Rodrigo Moura da Silva
Instituto Federal da Paraíba

Este trabalho dedico a Jesus, meu Salvador,
aquele que me sustentou durante todo o curso, me
resgatou, curou e perdoou quando estava perdido.
Quando o mundo não tinha mais cor ele foi minha
luz. A ele seja TODA GLÓRIA pelos séculos dos séculos,
amém.

AGRADECIMENTOS

A Jesus, pelo seu imenso amor, paciência e carinho para comigo;
A meu pai por seu amor e cuidado com a família, um exemplo de homem e de pai;
A minha mãe por sua preocupação e amor;
A meu Tio Eric e pastor, pelo seu apoio, amor, cuidado e conselhos;
Aos meus irmãos da igreja pelas orações;
A Ester Figuereido minha amiga e irmã em Cristo, pelo apoio durante o curso;
A Pedro Igor pela sua amizade e apoio durante o curso;
A Manoel pela amizade e ajuda no TCC;
A Luiz pela sua amizade e motivação durante o curso;
Aos amigos e colegas pelo apoio durante meu curso;
Agradeço aos motorista Lucas, Mateus, Tércio e Wesley, pela amizade, paciência, compreensão e todo o esforço nos seus trabalhos;
A CAPES pelo PIBID e o apoio finaceiro que ele me concedeu;
Ao Prof. Me. Weidson Luna, pois ele moldou a minha didática e me concedeu muitos ensinamentos;
Ao Prof. Dr. Havelange Soares, pois me concedeu muitos ensinamentos sobre o ensino e modo de conduzir uma sala de aula;
Ao Prof. Dr. Salomão Almeida pelo apoio e ensinamentos das aulas e da preparação para concurso;
Ao Prof. Dr. Cícero Pereira, por seu apoio no PIBID e por me conceder muitos ensinamentos e reflexões sobra a matemática e o ensino;
Ao Prof. Dr. Helder Pequeno pelos ensinamentos no PIDID e seu apoio;
Aos Profs. Drs. e Me. pelos ensinamentos que me moldaram como professor durante o curso;
Finalmente, ao meu orientador Prof. Me. Orlando Almeida pela sua pela orientação, paciência e cuidado durante todo curso, seu esforço e sabedoria. Muito obrigado professor pela honra de ser seu orientando.

"Se Cristo vos libertar,
verdadeiramente sereis
livres"(João 8:36)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo o aprofundamento na compreensão sobre determinantes, abortando-o a partir de seus aspectos fundamentais, históricos e aplicados. Determinantes sempre foi um tema associado a matrizes pelo ensino de matemática, no Brasil, no entanto pouco se conhece sobre o mesmo nos livros escolares e até nos cursos de graduação, sua história é desconhecida assim como sua definição, que não aparece em livros do ensino médio e também em alguns livros usados no ensino superior. Desta forma, despreza-se toda a construção histórica dos determinantes, subjugando-o a apenas um método de resolução e também contribuindo para a perspectiva de que os ramos da matemática são disjuntos. A pesquisa bibliográfica se iniciará com um resgate histórico, trazendo um pouco a mais de informações sobre diversos matemáticos que contribuíram na história dos determinantes, inclusive o matemático japonês, Seki Shisuke Kowa. Atualmente pouco material encontramos na nossa literatura, pois existe uma certa escassez sobre a matemática do Japão. Em seguida, revisaremos assuntos necessários para a compreensão do tema proposto, prosseguindo, aborda-se-á permutação, determinantes e sua ligação, inclusive serão vistos definições mais formais e precisas do que os livros convencionais enfocam sobre o tema, e por fim, veremos aplicações de determinantes.

Palavras-chave: Determinante; Permutação; História dos determinantes; Matemática Japonesa; Aplicações de determinantes.

ABSTRACT

The present work aims to deepen the understanding of determinants, addressing their fundamental, historical and applied aspects. Although determinants have traditionally been linked to matrices in mathematics education, their history and definition remain underexplored in textbooks and undergraduate courses. Consequently, there is a lack of a comprehensive historical view of determinants, reducing their construction to a single method of resolution and contributing to the perception of mathematics as dissociated branches. The bibliographic research starts with a historical rescue, presenting information about several mathematicians who contributed to the history of determinants, including the Japanese mathematician Seki Shisuke Kowa. There is currently a scarcity of material on Japanese mathematics in the local literature. Next, necessary concepts for understanding the proposed topic will be reviewed; then we proceed to analyze permutations, determinants, and their interrelations, with more formal definitions than those commonly found in textbooks, and finally we present applications of determinants.

Keywords: Determinant; Permutation; History of determinants; Japanese mathematics; Applications of determinants.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Função injetora 17
Figura 2 – Função sobrejetora 18
Figura 3 – Função bijetora 19
Figura 4 – Função composta 20
Figura 5 – Permutação 26
Figura 6 – Inversa de uma permutação 32

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IFPB	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

LISTA DE SÍMBOLOS

$D(f)$	Domínio da função f
$CD(f)$	Contradomínio da função f
$\mathbb{R}^*$	Conjunto real não nulos
$\neq$	Diferente
$\in$	Pertence
$\exists$	Existe
Σ	Somatório
γ	Gamma
Π	Produtório
e	Elemento neutro
$\forall$	Para todo
$V(S)$	Volume de um paralelogramo S
id	Identidade
$\emptyset$	Conjunto vazio
$\cup$	União de conjuntos
$\cap$	Disjunção de conjuntos
$\det A$	Determinante da matriz quadrada A
$(K, +, \cdot)$	Um corpo para a operação de $+$ e $\cdot$
S_n	Grupo simétrico de grau n
$(S_n, *)$	Grupo para operação $*$
$S(A)$	Conjunto de todas as funções bijetoras sobre A
$(S(A), \circ)$	Grupo para operação composição
$(S_n, \circ)$	Grupo de todas as funções bijetoras para composição de funções
$sgnf$	Sinal de uma permutação f

$\frac{dy}{dx}$	derivada ordinária da função y com relação a variável x
$\iint$	Integral dupla
$\frac{\partial f}{\partial x}$	Derivada parcial da função f
$\vec{f}(x, y, z)$	Campo vetorial f
∇	Operador nabla
$\operatorname{rot} \vec{f}$	Rotacional de f

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **14**
1.1 Contextualização histórica 14
1.2 Justificativa 15
1.3 Objetivos 16
1.3.1 Objetivo geral 16
1.3.2 Objetivos específicos 16
2 Conceitos necessários **17**
2.1 Função bijetora 17
2.1.1 Função injetora 17
2.1.2 Função sobrejetora 18
2.1.3 Função bijetora 18
2.2 Função composta 19
2.3 Grupo 20
2.4 Corpo 21
2.5 Espaço Vetorial 23
3 Permutação **25**
3.1 Definição de uma permutação 25
3.2 Notações de uma permutação 26
3.2.1 Notação matricial em S_n 26
3.2.2 Notação cíclica 28
3.3 Grupos de permutações 28
3.4 Operação de permutações usando a notação matricial 29
3.5 Ponto fixo de uma permutação 30
3.5.1 Regras da notação cíclica 30
3.6 Suporte de uma permutação 31
3.7 Ciclo de uma permutação 31
3.8 Inversão em uma permutação 32
3.9 Transposição de uma permutação 33
3.10 Permutações disjuntas 33
3.11 Permutação como produto de ciclos disjuntos 34
3.12 Polinômio canônico com n variáveis 34
3.13 permutação associada ao polinômio canônimo 35
3.14 Sinal de uma permutação por meio da permutação associada ao polinômio canônico 35
3.14.1 Permutação par 35
3.14.2 Permutação ímpar 36

3.15 Sinal de uma permutação . . . 36
3.16 Assinatura de uma permutação . . . 37
3.17 Propriedades do sinal de uma permutação . . . 37
4 Determinantes . . . 39
4.1 Definição de um determinante . . . 39
4.2 Determinantes de uma matriz quadrada de ordem arbitrária . . . 39
4.3 Propriedades de determinantes . . . 40
4.4 Uma visão geral de aplicações de determinantes . . . 41
4.5 Aplicações de determinantes . . . 42
4.5.1 Determinante com enfoque em aréa e volume . . . 42
4.5.2 Determinante de um operador linear . . . 43
4.5.3 Mudança de variável no cálculo de integral . . . 44
4.5.4 Rotacional de um Campo Vetorial . . . 44
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . 46
REFERÊNCIAS . . . 47
Bibliografia . . . 47

1 INTRODUÇÃO

Na vida estudantil, o aluno se depara com determinantes no segundo ano do ensino médio, juntamente com matrizes os mesmo são ensinados por um curto período de tempo e posteriormente esquecidos por serem assuntos que não abordados no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Na educação brasileira, determinantes são vistos no ensino médio e também em cursos de graduação, por meio de matrizes onde sua definição é vaga e sua história desconhecida. No entanto, nem sempre foi assim, seu maior avanço se deu por meio de Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), e a forma como ele mostrou não foi por meio de matrizes, mas através de permutações.

devido a separação dos assuntos matemáticos e também a falta de conhecimentos mais aprofundados, torna-se difícil e até curioso achar uma ligação entre os mesmos.

Para que o objetivo seja alcançado será necessário a revisão e o conhecimento de alguns conteúdos, os quais estarão presentes neste trabalho. Além disso, conheceremos um pouco da história dos determinantes.

O seguinte trabalho busca trazer ao leitor um conhecimento mais aprofundado sobre determinantes, e consequentemente sobre permutação, o qual será a base do trabalho e também será abordada de uma forma distinta do ensino médio e cursos de graduação.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Os surgimentos dos determinantes estão intrinsecamente ligados aos estudos de sistemas lineares e das matrizes. O estudo do mesmo não surgiu do acaso ou de um dia para o outro, mas foi construído através de séculos e com a contribuição de diversos matemáticos até chegarmos a forma como os conhecemos hoje. Como disse Isaac Newton (1643 - 1727), só foi possível chegar tão longe porque se subiu nas costas de gigantes.

As contribuições mais antigas são as inscrições em tabletas babilônicas (300 A.C.) e Jiuzhang suanchu (Chui-chang suan-shu) ou livro Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, no período denominado de Dinastia Han (206 a.C – 221 d.C) da China, onde de acordo Boyer (2012) o oitavo capítulo do livro possui solução de problemas sobre equações simultâneas, usando tanto números positivos como negativos. O mundo ocidental geralmente atribui a primeira ideia do método de determinantes ao matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), que ocorreu no século XVII, esse registro foi achado em cartas para o matemático francês Guillaume François Antoine, Marquês de l'Hôpital (1661 – 1704). Essa antecipação do próprio só foi publicada só em 1850, mais de meio século depois, conforme cita Boyer (2012). No entanto, os determinantes tiveram sua primeira aparição, na história, no oriente em 1683, com o matemático Seki Shisuke

Kowa (1642 - 1708). Um fato muito interessantes de Seki é que seu nascimento coincide com a data da morte de Galileu sobre acordo com Smith e Mikami(1914). Enquanto Leibniz simplimente afirmou que para as equações

$$10 + 11x + 12y = 0;\ 20 + 21x + 22y = 0\ e\ 30 + 31x + 32y = 0$$

tenham as mesmas raízes, a expressão

$$10.21.32 - 10.22.31 - 11.20.32 + 11.22.30 + 12.20.31 - 12.21.30$$

deve se anular. Por outro lado Seki Kowa trata com n equações. Segundo Smith e Mikami(1914),"a descoberta de Leibnitz foi feita em 1693 e não foi publicada até após sua morte, é evidente que Seki não foi apenas o descobridor, mas que ele tinha uma ideia muito mais ampla do que a de seu grande contemporâneo alemão". O matemático alemão Jacobi contribuiu para a teoria dos determinantes criando algoritmos e regras para a utilização. Outro contribuinte para a teoria dos determinantes foi o escocês Colin Mclaurin (1698 – 1746), em seu livro póstumo "um Tratado sobre Álgebra", publicado em 1748. No entanto, se resolvia equações simultânea (procurar) por determinante mais pelo meio da regra de Cramer, publicada por em 1729 por Gabriel Cramer (1704 – 1752), suspeita-se que seja devido a superioridade da notação de Cramer. O francês Pierre-Simon Laplace (1749-1827) também contribuiu quanto ao uso de menores complementares através de um método generalizado para encontrar o determinante de uma matriz em 1772. Os determinantes tiveram seu maior avanço em 1812 com Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), alguns historiadores consideram que os determinantes tenham começado nessa época, com um longo artigo sobre esse assunto. Atualmente, o estudo sobre determinantes começa a partir de matrizes quadradas e não se é dado sua definição, apenas se reduz determinante a um número associado a uma matriz. No entanto Cauchy, no seu artigo, introduz a definição de determinante por meio de permutação, apresentando de uma forma que hoje em dia não é visto no ensino médio. Determinante é um assunto visto exclusivamente no 2° ano do ensino médio e logo esquecido. O mesmo só é associado a matrizes, embora ele faça parte do currículo escolar não é apresentado conexões com outros assuntos e no exame nacional do ensino médio (ENEM), que é um dos focos principais de estudantes do ensino médio, ele não é requisitado tornando-se um assunto "sem vida".

1.2 JUSTIFICATIVA

Determinantes é um assunto que não é aprofundado nos livros de ensino médio assim como alguns que são usados em cursos de ensino superior, sem contar a definição permutação que não se é vista, nem em cursos de graduação. Por isso há uma necessidade de se conhecer de forma mais aprofundada e conectada com outras áreas, assim como suas aplicações.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

Apresentar a trajetória da história do surgimento de determinantes, mostrar sua importância em face da realidade com aplicações em várias áreas do conhecimento e apresentar o que é determinantes a partir de permutação.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Compreender o que é determinante
2. Conhecer a história do surgimento de determinante;
3. Saber calcular um determinante através de permutação;
4. Aplicar o conceito de determinante em problemas diversos;
5. Mostrar a importância de determinantes em várias áreas do conhecimento.

2 CONCEITOS NECESSÁRIOS

Antes de iniciar o desenvolvimento do nosso trabalho de conclusão de curso, faz-se necessário o conhecimento prévio de alguns objetos matemáticos, que servirão de arcabouço para o entendimento do tema central, que é a compreensão de determinante por meio de permutações.

2.1 FUNÇÃO BIJETORA

Entres os objetos matemáticos necessários para a construção desse arcabouço, destacamos as funções bijetoras, pois a definição da própria é essencial para compreensão de permutação. Nessa perspectiva torna-se necessário revisarmos o que são funções injetora e sobrejetora, uma vez que fazem parte da definição de bijetividade.

2.1.1 Função injetora

Definição 2.1.1. *Dizemos que $f : E \to F$ é uma função injetora, se dois elementos distintos e quaisquer pertencentes a E possuírem imagens distintas em F, ou seja, sendo $f : E \to F$ para quaisquer $x_1, x_2 \in E$, tais que $x_1 \neq x_2$, temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

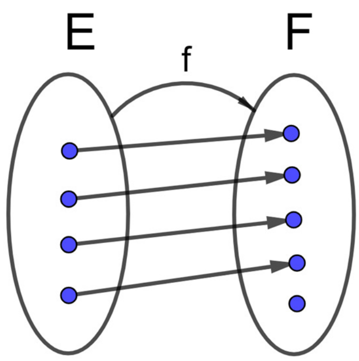

Figura 1 – Função injetora

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 2.1.1. *Seja a função*

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto 2x + 10$$

Vamos mostrar a injetividade. Sejam $x_1, x_2 \in D(f) = \mathbb{Z}$ tais que $x_1 \neq x_2$. Assim,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 + 10 \neq x_2 + 10 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

. Portanto f e injetora.

2.1.2 Função sobrejetora

Definição 2.1.2. *Dizemos que uma f é uma função sobrejetora, se a sua imagem for igual ao contradomínio, ou seja, sendo $f : E \to F$, temos que, para todo $y \in F$, existe $x \in E; f(x) = y$.*

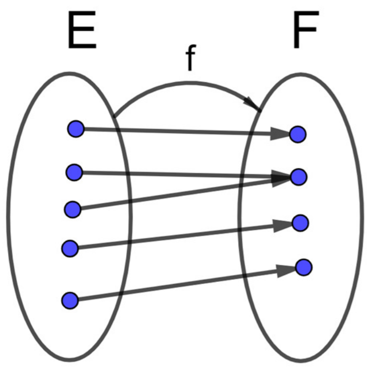

Figura 2 – Função sobrejetora

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 2.1.2. *Seja a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$*

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},$$
$$x \mapsto x + 10$$

Mostremos sua Sobrejetividade. Dado $y \in CD(f)$. Então, temos,

$$y = f(x) = x + 10 \Leftrightarrow y - 10 = x.$$

Logo, para $x = y - 10$, $f(x) = y$. Portanto, f é sobrejetora.

2.1.3 Função bijetora

Definição 2.1.3. *Uma função f é denominada bijetora, quando ela for injetora e sobrejetora simultaneamente.*

Exemplo 2.1.3. *Seja a função*

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Vamos mostra sua bijetividade, para isso é preciso mostrar que a função é injetora e sobrejetora:

1. *Injetividade;*

   Sejam $x_1, x_2 \in D(f) = \mathbb{R}^*$ tais que $x_1 \neq x_2$. Assim, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Portanto f e injetora.

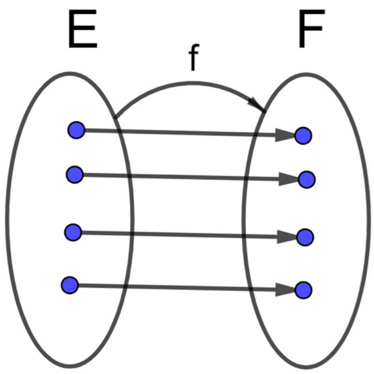

Figura 3 – Função bijetora

Fonte: Elaborado pelo autor.

2. *Sobrejetividade Sejam* $y \in CD(f)$*. Então, temos,*

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y^{-1} = x.$$

   Logo, para $x = y^{-1}$*,* $f(x) = y$*. Portanto,* f *é sobrejetora.*

3. *Bijetividade*

   Sendo a função injetora e sobrejetora simultaneamente, então ela é bijetora.

2.2 FUNÇÃO COMPOSTA

Definição 2.2.1. *Considere as funções* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$*. Definimos a função composta de* f *com* g*, denotada por* $g \circ f$*, como* $g \circ f : A \to C$*, tal que* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$*,* $\forall x \in A$*.*

Exemplo 2.2.1. *Sejam as funções* f *e* g*, definidas por* $f(x) = x^2 + 4x + 4$ *e* $g(x) = x + 1$*, calculemos as leis que definem* $(f \circ g)$ *e* $(g \circ f)$ *e* $(f \circ g)(1)$ *e* $(g \circ f)(1)$*.*

1. $(f \circ g)$

   $(f \circ g) = f(g(x)) = (x + 1)^2 + 4(x + 1) + 4 \Leftrightarrow f(g(x)) = x^2 + 6x + 9$

   $(f \circ g)(1) = 1^2 + 6 \cdot 1 + 9 = 16$

2. $(g \circ f)$

   $(g \circ f) = g(f(x)) = (x^2 + 4x + 4) + 1 \Leftrightarrow g(f(x)) = x^2 + 4x + 5$

   $(g \circ f)(1) = 1^2 + 4 \cdot 1 + 5 = 10$

> *Observação*
>
> *Note que* $(f \circ g) \neq (g \circ f)$*.*

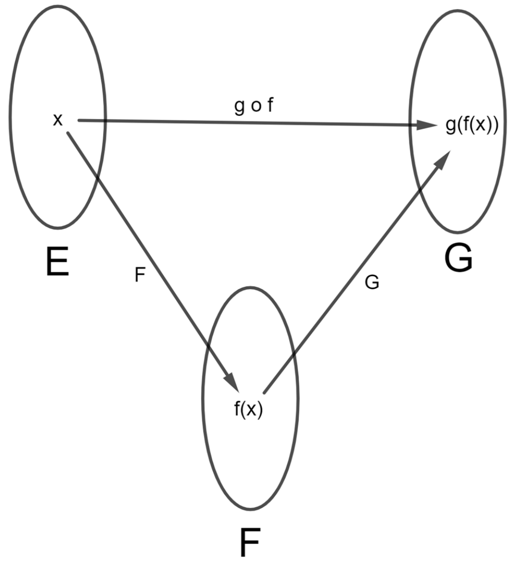

Figura 4 – Função composta

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3 GRUPO

Definição 2.3.1. *Um sistema matemático constituído de um conjunto $\mathbb{G}$, não vazio, e uma operação $*$ sobre G,Denotamos por $(S_n, *)$. Definimos por:*

$$f : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$$
$$(a, b) \mapsto *(a, b) = a * b,$$

tal que a lei de composição interna satisfaça os seguintes axiomas:

I) Associatividade

$a * (b * c) = (a * b) * c,\ \forall\ a, b, c \in \mathbb{G}$;

II) Existência do elemento neutro

$\exists\ e \in G; e * a = a * e,\ \forall\ a \in \mathbb{G}$;

III) Existência do elemento simétrico

$\forall\ a \in G, \exists\ b \in G, a * b = e.$

Observação

1. O elemento simétrico do elemento a é b e denotamos por $b = a^{-1}$.

Notation 2.3.1. *Caso o grupo $\mathbb{G}$ satisfaça o axioma de comutatividade denominamos, o mesmo, de grupo abeliano.*

Exemplo 2.3.1. *Mostremos que o conjunto $\mathbb{Z}$ é um grupo para a operação de adição.*

Seja $x, y, z \in \mathbb{Z}$, temos:

1. *Associatividade*
$$(x+y)+z = x+(y+z)$$

2. *Existência do elemento neutro*
$$x+0 = 0+x = x$$

3. *Existência do elemento simétrico*
$$x+(-x) = 0$$

4. *Associatividade*
$$x+y = y+x$$

Logo, o conjunto $\mathbb{Z}$ *é um grupo para a operação de adição.*

2.4 CORPO

Definição 2.4.1. *Seja um conjunto* $\mathbb{K}$ *não vazio, no qual esteja definido duas operações, a adição e a multiplicação:*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to &\quad \mathbb{K} \\ (x,y) \mapsto &\; x+y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to &\quad \mathbb{K} \\ (x,y) \mapsto &\; x\cdot y \end{aligned}$$

O conjunto $\mathbb{K}$ *é um corpo em relação a estas operações se, e somente se, satisfazer os seguintes axiomas:*

Para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$

1. $x+y = y+x$*;(Comutatividade)*

2. $x+(y+z) = (x+y)+z$*;(Associatividade)*

3. *Existe um elemento* $0 \in \mathbb{K}$*, chamado de elemento neutro da adição, tal que*
$$0+x = x+0 = x;$$

4. *Dado qualquer elemento* $y \in \mathbb{K}$*, existe um elemento em* $\mathbb{K}$*, denotado por* $-y$ *chamado de oposto de* y*, tal que*
$$y+(-y) = (-y)+y = 0;$$

5. $x\cdot y = y\cdot x$*;(Comutatividade)*

6. $x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z$; *(Associatividade)*

7. *Existe um elemento em* $1 \in \mathbb{K}$, *denotado de elemento neutro da multiplicação, tal que* $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;

8. *Dado qualquer elemento* $y \in \mathbb{K}$, *existe um elemento em* $\mathbb{K}$, *denotado por* y^{-1} *chamado de inverso de* y, *tal que* $y \cdot y^{-1} = y^{-1} \cdot y = 1$

9. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \;\; e \;\; (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Observação

Denotamos um corpo $\mathbb{K}$, por $(\mathbb{K}, +, \cdot)$

Exemplo 2.4.1. *Seja* $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\; p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$, *verifiquemos se é um corpo para operação* $+$:

sendo $x, y, z \in \mathbb{Q}$, *temos:*

1. *Vale a comutatividade da adição*

$$x + y = y + x$$

2. *Vale a associatividade da adição*

$$x + (y + z) = (y + x) + z$$

3. *Existe um elemento neutro*

$$x + 0 = 0 + x = x$$

4. *Existência do inverso aditivo*

$$x + (-x) = 0$$

5. *Existe um elemento neutro*

$$x + 0 = x$$

6. *Vale a comutatividade da multiplicação*

$$x \cdot y = y \cdot x$$

7. *Vale a associatividade da multiplicação*

$$x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z$$

8. *Existe um elemento neutro da multiplicação*

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

9. *Existência do inverso multiplicativo*

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 0$$

10. *Distributividade*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ e } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Logo, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *é um corpo.*

2.5 ESPAÇO VETORIAL

Definição 2.5.1. *Seja um conjunto* V *qualquer, não vazio, no qual esteja definido duas operações, a adição (vetorial) e a multiplicação por escalares.*

I) A adição é uma aplicação que associa a cada par de vetores u,$v \in \mathbb{V}$, *um outro vetor* $u + v \in \mathbb{V}$, *denominado de soma de* u *com* v, *que é representada por:*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \quad & \mathbb{V} \\ (u, v) \mapsto & +(u, v) = u + v \end{aligned}$$

II) A multiplicação por escalar é uma aplicação que associa cada escalar α *de um corpo* $\mathbb{K}$ *a um vetor* $u \in V$, *um outro vetor* $\alpha \cdot u \in \mathbb{V}$, *denominado de múltiplo escalar de* α *por* u, *que é representada por:*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \to \quad & \mathbb{V} \\ (\alpha, u) \mapsto & \cdot(\alpha, u) = \alpha \cdot u \end{aligned}$$

Sendo u, v *e* $w \in \mathbb{V}$ *e* α,$\beta \in \mathbb{K}$, *escalares quaisquer. Definimos o conjunto* $\mathbb{V}$ *como sendo espaço vetorial* $\mathbb{V}$, *relacionados à adição de vetores e à multiplicação por escalar, de acordo com as definições anteriores, se o mesmo satisfizer os axiomas:*

1. *Se* $u, v \in V$, *então* $u + v \in V$*;(Fechamento para adição)*

2. $u + v = v + u$*;* $\forall\ u, v \in V$ *(Comutatividade)*

3. $u + (v + w) = (u + v) + w$*(Associativa)*

4. *Existe um vetor* $0 \in V$, *tal que* $0 + u = u + 0 = u$, $\forall\ u \in V$ *(Existência do elemento neutro)*

5. *Dado qualquer* $u \in V$, *existe o vetor* $-u$, *tal que* $u+(-u) = (-u)+u = 0$*;(Existência do elemento simétrico)*

6. *Se* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $u \in \mathbb{V}$, *então* $au \in \mathbb{V}$*;(fechamento para a multiplicação de um vetor por escalar)*

7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$ *e* $\forall\ u, v \in \mathbb{V}$

8. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *e* $\forall\ u, \in \mathbb{V}$

9. $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u,\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *e* $\forall\ u \in \mathbb{V}$

10. $1u = u,\ \forall\ u \in \mathbb{V}$

Exemplo 2.5.1. *Seja* $\mathbb{R}$*, mostremos que é um espaço vetorial:*
sendo $x, y, z \in \mathbb{R}$ *e* $a, b \in \mathbb{R}$*, temos:*

1. *Vale o fechamento*
$$x + y \in \mathbb{R}$$

2. *Vale a comutatividade da adição*
$$x + y = y + x$$

3. *Vale a associatividade da adição*
$$x + (y + z) = (y + x) + z$$

4. *Existe um elemento neutro*
$$x + 0 = 0 + x = x$$

5. *Existe do inverso aditivo*
$$x + (-x) = 0$$

6. *Vale o fechamento*
$$a \cdot x \in \mathbb{K}$$

7. *Vale que:*
$$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y)$$

8. *Vale que:*
$$(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$$
.

9. *Vale que:*
$$(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$$
.

10. *Vale que:*
$$1 \cdot x = x$$
. *Logo* $\mathbb{R}$ *é um espaço vetorial.*

3 PERMUTAÇÃO

Agora, adentraremos na ideia de permutação, que veremos se tratar de uma função bijetora e outros conceitos que nós ajudarão na compreensão de determinantes.

3.1 DEFINIÇÃO DE UMA PERMUTAÇÃO

Definição 3.1.1. *Uma permutação é uma aplicação (função) bijetora, cujo domínio e o contradomínio são definidos sobre o mesmo conjunto.*

Considerando um conjunto A, não vazio, e a função bijetora f, temos:

$$\begin{aligned} f : A &\to A \\ n &\mapsto f(n) \end{aligned}$$

Representamos por $S(A)$ o conjunto de todas as funções bijetoras sobre A, e escrevemos;

$$S(A) = \{f : A \to A; f \text{ é } bijetora\}.$$

Consideremos o conjunto E particular do conjunto A, dada por:

$$E = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

com $n \geq 1$, o conjunto de todas as bijeções sobre E, ou seja, $S(E)$ é denominado de grupo simétrico de grau n e é representado por S_n. Note que:

$$\begin{aligned} f : E &\to E \\ n &\mapsto f(n) \end{aligned}$$

Observação

Note que:

1. *O domínio de f é o conjunto E, ou seja, $E = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, que corresponde a primeira linha, ou ainda, $D(f) = E$.*

2. *O conjunto imagem de f é um subconjunto de E, isto é, $Im(f) \subset E$ dada por $Im(f) = \{f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n)\}$*

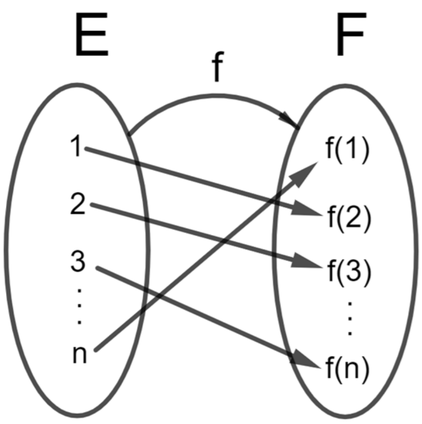

Figura 5 – Permutação

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2 NOTAÇÕES DE UMA PERMUTAÇÃO

3.2.1 Notação matricial em S_n

Sendo f uma permutação sobre E, temos que a sua representação matricial é dado por:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

e também pela forma estendida $f = (f_1\ f_2\ \dots\ f_n)$.

Definição 3.2.1. *A permutação f tem como domíno o conjunto E e como imagem o conjunto $\{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$.*

Exemplo 3.2.1. *Se $E = \{1\}$, temos:*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = S(1)$$

Assim,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *ou* $f_1(1)$.

Exemplo 3.2.2. *Se $E = \{1, 2\}$, temos:*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = S(2)$$

Assim,

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = id,$$

que é a função identidade e

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos também que f_1 e f_2 podem ser representados por

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \ e \ f_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Escrevendo apenas as suas imagens na forma de uma matriz linha

Exemplo 3.2.3. *Se $E = \{1, 2, 3\}$, temos:*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} = S(3)$$

Assim,
$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *que é a identidade,* $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Também podemos representar essa permutação por: $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id$, $f_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $f_6 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposição 3.2.1. *Considerando que o conjunto E é finito e tem n elementos, o número de permutações para o conjunto $S(E)$ é dado por $n!$.*

Demonstração. Para $n!$, temos que

$$1! = 1.$$

Suponhamos que é verdade para $n = k$, assim:

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Vamos mostrar que é verdade para o seu sucessor, ou seja, $n = k + 1$.

Como

$$(k+1)! = (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Daí, segue que:

$$(k+1)! = (k+1) \cdot k!$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

□

3.2.2 Notação cíclica

Podemos também representar uma permutação f na forma $f = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ com $n \in \mathbb{N}$, onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ sendo os mesmos distintos.

Exemplo 3.2.4. *Considere em S_5 a permutação*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$, $f(5) = 1$ e $f(4) = 4$, então f é um ciclo de comprimento 4, cujo suporte é $1, 2, 3, 5$. Então, escrevemos da seguinte forma:

$$f = \{1\ 2\ 3\ 5\}$$

Notation 3.2.2. *A notação ciclica não indica em qual grupo S_n ela pertence.*

Proposição 3.2.3. *O conjunto S(A) é um grupo para a operação de composição.*

Demonstração. Para essa demostração é necessário provar que o conjunto S(A) seja fechado para a operação de composição e que satisfaça os seguintes axiomas:

Seja $a, b, c \in S(A)$, temos que:

I) Associatividade

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

II) Existência do elemento neutro

$$a \circ e = a$$

III) Existência do simétrico

$$a \circ a^{-1} = e$$

□

3.3 GRUPOS DE PERMUTAÇÕES

O grupo das permutações ou grupo simétrico, denotado por $(S_n, \circ)$, é o grupo formado por todas as funções bijetoras de um conjunto $E = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ com n elementos sobre ele mesmo e munido da operação de composição de funções.

Notation 3.3.1. *Cada elemento S_n é denominado de permutação de n elementos.*

Proposição 3.3.2. *O par $(S_n, \circ)$ é um grupo.*

Demonstração. Dados $f, g, h \in S_n$, $\forall\ x \in E$, temos que:

1. $$[f \circ (g \circ h)](x) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = [(f \circ g) \circ h](x)$$

   Vale a associatividade para a composição de funções.

2. Como a função identidade $id : E \to E$ é uma bijeção temos que $id \in S_n$.

   Além disso,
   $$(id \circ f)(x) = id(f(x)) = f(x)$$
   e
   $$(f \circ id)(x) = f(id(x)) = f(x), \forall\ f \in S_n.$$

   Logo, id é o elemento neutro $(S_n, \circ)$, vale a existência do elemento neutro para composição de funções.

3. Dado $f \in S_n$ temos que f admite inversa $f^{-1} : E \to E$, que também será bijetora portanto, $f^{-1} \in S_n$ e $f \circ f^{-1} = id = f^{-1} \circ f$.

   Todo elemento de S_n com a operação de composição admite simétrico(inverso). Portanto, por $1, 2$ e 3 concluímos que $(S_n, \circ)$ é um grupo.

□

3.4 OPERAÇÃO DE PERMUTAÇÕES USANDO A NOTAÇÃO MATRICIAL

Considere o S_3 vamos considerar as permutações f e g definidas por $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$ e $g(1) = 3$, $g(2) = 2$ e $g(3) = 1$. Desta forma, $f \circ g$ é dada por:

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 3$$

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2) = 1$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(2) = 3$$

Assim,

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

utilizando na forma matricial obtemos:

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A composição de permutação é feita da direita para a esquerda, por trata-se de uma composição de funções.

Notation 3.4.1. *A composição de permutações não é comuntativa.*

Demonstração. Calculando a composição $g \circ f$ temos:

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 2$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 3$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 1$$

Assim,

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando a forma matricial obtemos:

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que $f \circ g \neq g \circ f$, portanto $(S_3, \circ)$ não é abeliano, se $n \geq 3$. □

3.5 PONTO FIXO DE UMA PERMUTAÇÃO

Definição 3.5.1. *Dada uma permutação $f \in S_n$. Dizemos que $K \in E$ é um ponto fixo de f, se $f(k) = k$. Note que, na notação matricial de f apresentará o número k abaixo dele mesmo:*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & k & \cdots & f(n) \end{pmatrix}.$$

3.5.1 Regras da notação cíclica

para a notação cíclica segue as seguintes regras:

1. Será utilizado matrizes com apenas um linha;

2. Será omitido o número fixo;

3. Será colocado a imagem de um número sempre a sua direita;

4. Quando um número aparece pela segunda vez devemos não escrevê-lo e então fecha o ciclo.

Exemplo 3.5.1. *Note os exemplos a seguir*

1.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

2.
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

3.
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4.
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

3.6 SUPORTE DE UMA PERMUTAÇÃO

Definição 3.6.1. *Dada uma permutação $f \in S_n$, definimos o suporte de f como sendo o conjunto definido por*

$$Supp(f) = \{k \in E; f(k) = k\}.$$

Exercício 3.6.1. *1. Seja $f \in S_5$ definida por*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

Qual seu suporte?

Solução:

$$Supp(f) = \{1, 2, 5\}.$$

2. *Qual o suporte da permutação na forma cíclica $f = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$?*

Solução:

Note que;

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Logo, o $Supp(f) = \{1, 2, 4, 5\}$, pois os demais elementos de E são fixos.

3.7 CICLO DE UMA PERMUTAÇÃO

Definição 3.7.1. *Uma permutações $f \in S_n$ é denominada um n-ciclo, quando para o $Supp(f) = \{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n\}$ de modo que $f(k_1) = k_2, f(k_2) = k_3, \cdots, f(k_{n-1}) = k_n$, $f(k_n) = k_1$, ou seja, $f = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_{n-1} & k_n \end{pmatrix}$.*

Exemplo 3.7.1. *1. A permutação $f = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$ é um 4-ciclo?*

temos que,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e o $Supp(f) = \{1, 2, 3, 4\}$

Não é um 4-ciclo, pois $f(3) = 1$. *Note que* f *é o "produto" dos 2-ciclo* $(1\ 3)$ *e* $(2\ 4)$.

2. *A permutação* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *é um ciclo?*

   Solução:

   Temos que,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} e$$

$$Supp(f) = \{1, 2, 3, 4\}$$

   Sim, pois $f(1) = 4, f(4) = 2, f(2) = 3$ *e* $f(3) = 1$ *fechando o ciclo.*

3.8 INVERSÃO EM UMA PERMUTAÇÃO

Definição 3.8.1. *Dada uma permutação* $f \in S_n$*, dizemos que inversão ocorre em* f*, quando existirem* $i, j \in E$ *tais que* $i < j$, $f(i) > f(j)$.

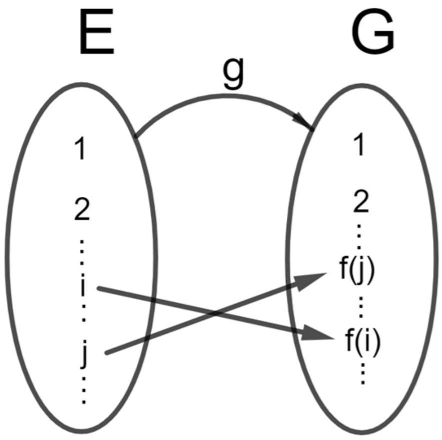

Figura 6 – Inversa de uma permutação

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 3.8.1. *segue que:*

1. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

3.9 TRANSPOSIÇÃO DE UMA PERMUTAÇÃO

Definição 3.9.1. *Um permutação 2-ciclos são denominadas transposição.*

Exercício 3.9.1. *A permutação* $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *e é uma transposição:*

Solução:

$f(1\ 2)$

3.10 PERMUTAÇÕES DISJUNTAS

Definição 3.10.1. *São todas as permuções f e g pertencentes ao S_n, dizemos que f e g são disjuntas se seus suportes forem disjuntas, isto é, $Supp(f) \cap Supp(g) = \emptyset$.*

Exercício 3.10.1. *As permutações $f = (1\ 3), g = (2\ 4) \in S_s$ são dijuntos, pois não existe um elemento em $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, que seja movido por ambas as permutações,* $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *e* $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Solução:

$Supp(f) = \{1\ 3\}$ e $Supp(g) = \{2\ 4\}$, logo $Supp(f) \cap Supp(g) = \emptyset$.

Proposição 3.10.2. *Se $f, g \in S_n$ são permutações disjuntas, então $f \circ g = g \circ f$.*

Demonstração. Devemos mostrar que, $(f \circ g)(k) = (g \circ f)(k), \forall k \in E = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Primeiro, para isso, vamos supor que $k \notin Supp(f) \cup Supp(g)$, então $f(x) = g(x) = k$. Assim,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(k) = k$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(k) = k$$

portanto,

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x), \forall\ k \in E$$

.

Agora, vamos supor que, $k \in Supp(f) \cup Supp(g)$.

Como $Supp(f) \cap Supp(g) = \emptyset$, podemos considerar sem perdade generalidade que $k \in Supp(f)$, logo $k \notin Supp(g)$.

Veja que, $(f \circ g)(k) = f(g(k)) = f(k)$.

Afirmação: $f(k) \notin Supp(g)$.

Caso contrário teríamos que $f(k) \in Supp(g)$ o que implica $f(k) \notin supp(f)$, portanto, $f(f(k)) = k$.

Assim, $f^{-1}(f(f(k))) = f^{-1}(f(k)) \to f(k) = k$. O que é uma contradição uma vez que k pertence ao $Supp(f)$ $\square$

3.11 PERMUTAÇÃO COMO PRODUTO DE CICLOS DISJUNTOS

Proposição 3.11.1. *Se f é uma permutação tal que $f \in S_n$, então f pode ser escrita como produto de ciclos disjuntos.*

Demonstração. Se $f = id_E$ temos que $id_E = (1)\dot{(}2)\dot{(}3).\because.\dot{(}n-1)\dot{(}n)$. Suponha que, seja $k_1 \in Supp(f)$.

Assim, temos que todos os inteiros $\{k_1, f(k_1), f(f(k_1)), \cdots\}$ estão no conjunto

$$E = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$$

e, portanto não podem ser todos distintos.

Logo, existem inteiros positivos $r > t$ tais que

$$f^r(k_1) = f^t(k_1).$$

Assim,

$$(f^{-1})^t f^r(k_1) = (f^{-1})^t f^t(k_1) \implies f^{r-t}(k_1) = k_1.$$

Portanto, o conjunto $m \in \mathbb{Z}_+; f^m(k_1) = k_1$ não é vazio. Segue do princípio da boa ordem, que existe um menor inteiro positivo m_1 tal que $f^{m_1}(k_1) = k_1$.

Agora, note que, $k_1, f(k_1), f^2(k_1), \cdots, f^{m_1-1}(k_1)$ são todos distintos. De fato, se entre os números $1, 2, 3, \cdots, m-1$ existirem n_1, n_2 tais que $f^{n_1}(k_1) = f^{n_2}(k_1)$ teríamos que

$$(f^{-1})^{n_2}(k_1) f^{n_1}(k_1) \to f^{|n_2-n_1|}(k_1) = k_1$$

onde $|n_2 - n_1| < m_1$. Contradição à minimalidade de m_1.

Assim, concluímos que f permuta os elementos $k_1, f(k_1), f^2(k_1), \cdots, f^{m-1}(k_1)$ em ciclo.

Se f fixa os demais elementos de E, então $f = (k_1\ f(k_1)\ f^2(k_1)\ \cdots\ f^{m-1}(k_1))$. Caso contrári, existe $k_2 \notin k_1, f(k_1), f^2(k_1), \cdots, f^{m-1}(k_1)$, que não é fixado por f. Repetindo os argumentos acima, obtemos um novo ciclo presente em f, $k_2, f(k_2), f^2(k_2), \cdots, f^{m-1}(k_2)$, que é disjunto do primeiro ciclo obtido.

Após finitas repetições dos argumentoa acima, contemplamos todos os elementos do $Supp(f)$ obtendo a decomposição desejada. □

3.12 POLINÔMIO CANÔNICO COM N VARIÁVEIS

Definição 3.12.1. *Seja $E = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$. Definimos o polinômio canônico com n variáveis ao polinômio dado por:*

$$P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i<j}^{n} (x_i - x_j)$$

Exemplo 3.12.1. *Segue que:*

1. $P_3(x_1, x_2, x_3) = \prod_{i<j}^{3}(x_i - x_j) = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdot (x_2 - x_3)$
2. $P_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{i<j}^{4}(x_i - x_j) =$

$$= (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdot (x_1 - x_4) \cdot (x_2 - x_3) \cdot (x_2 - x_4) \cdot (x_3 - x_4).$$

3.13 PERMUTAÇÃO ASSOCIADA AO POLINÔMIO CANÔNIMO

Definição 3.13.1. *Dada $f \in S_n$, definimos o polinômio canônico de variáveis como sendo*

$$f(P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = P_n(x_{f(1)}, x_{f(2)}, \cdots, x_{f(n)}).$$

Exemplo 3.13.1. *Como visto no 3.12.1, o polinômio canônico com 4 variáveis é dado por:*

$$P_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdot (x_1 - x_4) \cdot (x_2 - x_3) \cdot (x_2 - x_4) \cdot (x_3 - x_4).$$

Considere a permutação $f(1\ 3\ 4\ 2)$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio associado a permutação f é:

$$P_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdot (x_1 - x_4) \cdot (x_2 - x_3) \cdot (x_2 - x_4) \cdot (x_3 - x_4).$$

3.14 SINAL DE UMA PERMUTAÇÃO POR MEIO DA PERMUTAÇÃO ASSOCIADA AO POLINÔMIO CANÔNICO

Definição 3.14.1. *Seja $f \in S_n$. Definimos o sinal da permutação f como sendo o quociente*

$$sgn(f) = \frac{P_n}{f(P_n)}.$$

Notation 3.14.1. *O sinal de f $(sgn(f))$ será 1 ou -1.*

3.14.1 Permutação par

Definição 3.14.2. *Uma permutação $f \in S_n$ é dita par se o sinal for 1, ou seja, $sgn(f) = 1$.*

3.14.2 Permutação ímpar

Definição 3.14.3. *Uma permutação $f \in S_n$ é dita ímpar se o sinal for -1, ou seja, $sgn(f) = -1$.*

Exemplo 3.14.1. *A permutação $f \in S_4$ dada por $f = (1\ 3\ 4\ 2)$ é mpar´, pois:*

$$sgn(f) = \frac{n(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdot (x_1 - x_4) \cdot (x_2 - x_3) \cdot (x_2 - x_4) \cdot (x_3 - x_4}{(x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_4) \cdot (x_3 - x_2) \cdot (x_1 - x_4) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_4 - x_2}$$

$sgn(f) = -1$

3.15 SINAL DE UMA PERMUTAÇÃO

Definição 3.15.1. *Considere uma permutação qualquer f de S_n, sendo, $f = f_1 f_2 \ldots f_n$ ou*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$$

. Uma permutação f é dita par ou ímpar se existir um número par ou ímpar de inversões em f. Por inversões em f entendemos um par de inteiros (i,k) tais que $i > k$, mas com i precedendo k em f. Então definimos o sinal ou a paridade de f, e escrevemos $sgnf$, por

$$sgnf = \begin{cases} 1 & , \text{ se } f \text{ é } par \\ -1 & , \text{ se } f \text{ é } impar \end{cases}$$

Exercício 3.15.1. *Encontre o sinal de f= (3 5 1 4 2) em S_5.*
Para cada elemento k, contamos os elementos i tais que $i > k$, mas com i precedendo k em f.
Temos:
2 números (3 e 5) maiores do que e precedendo 1;
3 números (3, 5 e 4) maiores do que e precedendo 2;
1 números (5) maior do que e precedendo 4.
(Não existem números maiores do que e precedendo 3 e 5.) Como há um total de seis inversões, f é par sgn f=1.

Exemplo 3.15.1. *A permutação identidade $id = (1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$ é par, pois não há inversões em e.*

Exemplo 3.15.2. *Em S_2, a permutação (1 2) é par e (2 1) é ímpar. Em S_3, as permutações (1 2 3), (2 3 1), (3 1 2) são pares e as permutações (1 3 2), (2 1 3), (3 2 1) são ímpares.*

3.16 ASSINATURA DE UMA PERMUTAÇÃO

A decomposição de uma permutação não é única. Como $(ab) \circ (ba)$ é uma aplicação idêtica de $\mathbb{Z}_n$, que é o elemento neutro de S_n, então num produto de transposições podem-se inserir tantas expressões desse tipo quanto desejemos, sem afetar o resultado.

Embora seja possível diversas decomposições todas elas terão algo em comum, a paridade. Ou seja, se em uma delas o número de transposições é par, então o mesmo ocorrerá com as demais.

Definição 3.16.1. *A assinatura de uma permutação*

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

é o número real, aqui denotado por $sgnf$, e definido por:

$$sgnf = \prod \frac{a_i - a_j}{b_i - b_J}$$

em que o produto é estendido a todos os pares (i, j), não sendo eles dependetes das colunas, mas de uma função, de índice tais que $i > j$.

Exemplo 3.16.1. *A assinatura da permutação*

$$sgnf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

é:

$$Sgnf = \frac{2-1}{3-2} \cdot \frac{3-1}{1-2} \cdot \frac{3-2}{1-3} = (1)(-2)(-\frac{1}{2}) = 1$$

3.17 PROPRIEDADES DO SINAL DE UMA PERMUTAÇÃO

Proposição 3.17.1. *Sejam $f, g \in S_n$ Então:*

1) $Sgn(f \circ g) = Sgn(f) \cdot Sgn(g)$

2) $Sgn(f^{-1}) = Sgn(f)$

Demonstração 1. Segue da definição de sinal que, $\forall\ \gamma \in S_n$, temos que:

$$\gamma(P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = Sgn(\gamma) \cdot P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Portanto,

$$Sgn(f \circ g) \cdot P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f \circ g)(P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)) =$$

$$= f(g(P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n))) = f(Sgn(g) \cdot P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)) =$$

$$= Sgn(g) \cdot P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = Sgn(g) \cdot f(P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)) =$$

$$= Sgn(g) \cdot Sgn(f) \cdot P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

2. De fato, $Sgn(f) \cdot Sgn(f_1) \cdot P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$

$$(f \circ f^{-1})(P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = id(P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)) =$$

$$= (P_n(x_{id(1)}, x_{id(2)}, \cdots, x_{id(n)}) = P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Logo, $sgn(f) \cdot sgn(f^{-1}) = 1$. Portanto, $Sgn(f) = Sgn(f^{-1})$

$\square$

Exemplo 3.17.1. *Considere a transposição* $f = (1\ 2)$, $Sgn(f) = -1$.
E $g = (2\ 3)$, $Sgn(g) = -1$.
Então $f \circ g = (1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3)$, *que é uma 3-ciclo, paridade ímpar,*

$$Sgn(f \circ g) = -1 = (-1)(-1)$$

$f^{-1} = (1\ 2)$ *também,* $Sgn(f^{-1}) = -1 = Sgn(f)$.

4 DETERMINANTES

Seja $A = (a_{ij})_{nxn}$ uma matriz quadrada de ordem n sobre um corpo k. Normalmente, calcular o determinte da matriz A é aplicar o teorema de Laplace. Neste trabalho, a intenção é mostrar uma outra forma de fazer esse cálculo, a saber, através de permutação de um conjunto finito de termos.

4.1 DEFINIÇÃO DE UM DETERMINANTE

Definição 4.1.1. *Vamos considerar um produto de n elementos de A tal forma que cada produto terá seus fatores tomando apenas um elemento de cada e também uma de cada coluna.*

Esse produto pode ser escrito sob a forma

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$$

Em que os fatores pertencem a linhas sucessivas, sendo os primeiros de seus dois índices na ordem natural 1,2,...,n. Agora, como os fatores vêm de colunas diferentes, a sequência dos segundos de seus dois índices forma uma permutação $f = f_1\ f_2 \dots f_n$ de S_n. Assim, cada permutação $f \in S_n$. Determina um produto desse tipo como foi mencionado. Dessa forma, a matriz A fornece $n!$ Desses produtos.

4.2 DETERMINANTES DE UMA MATRIZ QUADRADA DE ORDEM ARBITRÁRIA

O determinante da matriz quadrada A de ordem n, ou seja, $A = (a_{ij})_{nxn}$ com $n \in \mathbb{N}^*$ e denotamos por $\det A$ ou $\mid A \mid$, é definido como a soma de todos os $n!$ Produtos descritos anteriormente, sendo cada um desses produtos é multiplicado pelo sinal de f $sgnf$, que assume o valor $+1$ e -1 a depender se a permutação f for par ou ímpar, respectativamente, da seguinte forma:

$$detA = \mid A \mid = \sum_f f(sgnf)a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$$

$$detA = \mid A \mid = \sum_{f\in S_n} f(sgnf)a_{1f(1)}a_{2f(2)}\dots a_{nf(n)}$$

Dizemos que a matriz quadrada A de ordem n tem um determinante de ordem n.

Exemplo 4.2.1. *Seja $A = (a_{ij}) = (a_{11})$, ou seja, um matriz quadrada de ordem 1 e Como $S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ só tem um elemento na permutação $f(1)$ ela é par e o $sgn(f) = 1$, então o $detA = a_{11}$ é o próprio elemento a_{11}.*

Exemplo 4.2.2. *Seja* $A = (a_{ij})_{2x2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$*,A é uma matriz quadrada de ordem 2 e Como* $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *a permutação* $f_1(1\ 2)$ *é par e o* $sgn(f) = +1$ *e a permutação* $f_2 = (2\ 1)$ *é impare o seu* $sgn(f) = -1$ *, então o* $detA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (+1) \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{12} \cdot a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Exemplo 4.2.3. *Seja* $A = (a_{ij})_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ *um matriz quadrada de ordem 3, e como*

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Veja que S_3 *tem* $3! = 6$ *permutações e, daí temos que: As permutações* $f_1(1\ 2\ 3)$*,* $f_3(3\ 1\ 2)$ *e* $f_5(2\ 3\ 1)$ *são pares, ou seja, seu* $sgn(f) = +1$*, e as permutaçõa* $f_2 = (2\ 1\ 3)$*,* $f_4 = (1\ 3\ 2)$ *e* $f_6 = (3\ 2\ 1)$ *são ímpares, ou seja,seu* $sgn(f) = -1$.

Então,

$$\det A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= (+1)a_{11}a_{22}a_{33} + (+1)a_{12}a_{23}a_{31} + (+1)a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)a_{11}a_{23}a_{32}$$

Assim

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

4.3 PROPRIEDADES DE DETERMINANTES

Tendo como referência Lipschutz([3]), temos as seguintes propriedades:

Teorema 4.3.1. *O determinante de uma matriz A coincide com o de sua transposta* A^t*, isto é,* $| A |=| A^t |$.

Teorema 4.3.2. *Seja A uma matriz quadrada.*

1) Se A tem uma fila de zeros, então $\det A = 0$*;*

2)Se A tem duas fila idênticas, então $\det A = 0$*;*

3) Se A é triangular, isto é, se A possui zeros acima ou abaixo da diagonal, então $| A |$ *é igual ao produto dos elementos diagonais. Assim, em particular,* $| I |= 1$*, sendo I a matriz identidade.*

Teorema 4.3.3. *O determinante de um produto de duas matrizes A e B é o produto de seus determinantes, isto é,*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Esse teorema afirma que o determinante é uma função multiplicativa.

Teorema 4.3.4. *Seja A uma matriz quadrada. São equivalentes as afirmações dadas:*

1) A é invertível, isto é, A possui inversa A^{-1};

2) $AX = 0$ possui apenas a solução nula;

3) O determinante de A é não nula, isto é, $\det(A) \neq 0$.

Lema 4.3.1. *Seja E uma matriz elementar. Então dada qualquer matriz A, $\mid EA \mid = \mid E \mid\mid A \mid$.*

Teorema 4.3.5. *Se A e B são matrizes semelhantes, então $\mid A \mid = \mid B \mid$.*

4.4 UMA VISÃO GERAL DE APLICAÇÕES DE DETERMINANTES

Os determinantes têm muitas aplicações importantes em diversas áreas da matemática e da ciência. Os determinantes são usados em pesquisa operacional para resolver problemas de otimização linear e não linear. Apresentaremos estão algumas das principais aplicações dos determinantes:

1. Com os mesmos podemos resolver sistemas de equações lineares da forma Ax = b, onde A é uma matriz de coeficientes, x é o vetor de incógnitas e b é o vetor de constantes. Se o determinante da matriz A for diferente de zero, o sistema tem uma solução única que pode ser encontrada usando a regra de Cramer.

2. Para calcular áreas e volumes de figuras geométricas. Por exemplo, o determinante de uma matriz 2x2 pode ser usado para calcular a área de um paralelogramo, enquanto o determinante de uma matriz 3x3 pode ser usado para calcular o volume de um paralelepípedo.

3. Analisar propriedades de matrizes, como a invertibilidade e a estabilidade. Uma matriz é invertível se e somente se seu determinante for diferente de zero. Além disso, o determinante pode ser usado para determinar a estabilidade de um sistema linear.

4. Na física e engenharia para resolver problemas que envolvem sistemas de equações lineares, como a análise de circuitos elétricos e a dinâmica de sistemas mecânicos.

Por exemplo, os determinantes podem ser usados para calcular a impedância de um circuito elétrico ou a estabilidade de um sistema mecânico.

5. A economia utiliza para analisar sistemas de equações lineares que modelam a economia, como a oferta e a demanda. Por exemplo, os determinantes podem ser usados para calcular a elasticidade da demanda ou a oferta de um bem.
6. Na computação gráfica para realizar transformações geométricas e calcular áreas e volumes de objetos 3D. Por exemplo, os determinantes podem ser usados para calcular a área de uma superfície ou o volume de um objeto 3D.

7. São usados em análises de dados para calcular a variância e a covariância de conjuntos de dados. Por exemplo, os determinantes podem ser usados para calcular a matriz de covariância de um conjunto de dados multivariados.

8. A criptografia usa para desenvolver algoritmos de criptografia e descriptografia. Por exemplo, os determinantes podem ser usados para calcular a inversa de uma matriz, que é usada em alguns algoritmos de criptografia.

9. Usados em modelagens matemáticas para resolver problemas que envolvem sistemas de equações lineares, como a modelagem de populações e a dinâmica de sistemas. Por exemplo, os determinantes podem ser usados para calcular a estabilidade de um sistema dinâmico.

10. Em pesquisas operacionais para resolver problemas de otimização linear e não linear. Por exemplo, os determinantes podem ser usados para calcular a solução ótima de um problema de programação linear.

Essas são apenas algumas das muitas aplicações dos determinantes. Eles são uma ferramenta fundamental em muitas áreas da matemática e da ciência.

4.5 APLICAÇÕES DE DETERMINANTES

4.5.1 Determinante com enfoque em aréa e volume

O conceito de determinante está relacionado com os conceitos de área e volume. Sejam $v_1, v_2, \cdots, u_n$ vetores de $\mathbb{R}^n$ e S o paralelepípedo (sólido) determinado por esses vetores, isto é

$$S = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n : 0 \leq a_i \leq 1, com\ i = 1, \cdots, n\}$$

Denotaremos $V(S)$ o volume de S. Então $V(S)$ valor absoluto de $det(A)$, onde A é a matriz de linha $u_1, u_2, \cdots, u_n$. Em geral, $V(S) = 0$ se, e só se, os vetores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ não formam um sistema de coordenadas para $\mathbb{R}^n$

Notation 4.5.1. *Caso $n = 2$, então teriamos uma aréa.*

Exemplo 4.5.1. *Sejam $u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,1), u_3 = (1,2,3)$. Encontre o volume $V(S)$ do paralelogramo de $\mathbb{R}^3$*
Calculando

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

4.5.2 Determinante de um operador linear

Um sistema linear também é possivel ser solucionado por meio de determinantes, segue que:

Exemplo 4.5.2. *Calculemos o seguinte sistema por determinante:*

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ -3x + 4y + 5z = -2 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

Calculemos o determinante D dos coeficiente.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 5 + 6 + 4 + 20 - 6 = 45$$

Como $D \neq 0$, o sistema terá solução única Para calcular. Assim, para calcular x, y e z, substituindo pelos coeficiêntes constantes. Então:

$$x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 90$$

$$y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 5 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -65$$

$$x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -20$$

Assim, é só dividir pelo número achado na matriz

$$x = \frac{90}{45}$$

$$y = \frac{-65}{45}$$

$$z = \frac{-20}{45}$$

4.5.3 Mudança de variável no cálculo de integral

Na integração de funções de uma variável, existe uma formula de mudança de variável usada para transformarr uma integral dada em outra mais simples.
Ao considerar duas funções contínuas, com derivadas parciais contínuas, temos

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \iint_{R'} f\Big(x(u,v),y(u,v)\Big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

onde $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ é o determinantes jacobiano, dado por:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

4.5.4 Rotacional de um Campo Vetorial

Definição 4.5.1. *Seja*

$$\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\,\vec{i} + f_2(x,y,z)\,\vec{j} + f_3(x,y,z)\,\vec{k}$$

um campo vetorial definido em um domínio D, com derivadas de 1^{a} ordem contínuas em D. Definimos o rotacional de $\vec{f}$, denotado por rot $\vec{f}$*, como*

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \nabla \times \vec{f}$$

, onde

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\tfrac{\partial f_3}{\partial y} - \tfrac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\tfrac{\partial f_1}{\partial z} - \tfrac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\tfrac{\partial f_2}{\partial x} - \tfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Exemplo 4.5.3. *Determinar* rot $\vec{f}$*, sendo*

$$\vec{f} = xzy^2\,\vec{i} + xyz\,\vec{j} + 3xy\,\vec{k}.$$

Temos:

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xzy^2 & xyz & 3xy \end{vmatrix}$$

$$= (3x - xy)\,\vec{i} + (xy^2 - 3y)\,\vec{j} + (yz - 2xzy)\,\vec{k}.$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final desse trabalho podemos afirmar que o nosso proposito foi alcançado, porque através da pesquisa bibliográfica, conseguimos mostrar a importância de determinantes trabalhando com um viés diferente do que é apresentado nos livros didáticos do ensino médio e também em livros do superiores atuais, abordando o mesmo de forma mais precisa e consistente através do objeto matemático permutação. Devido a importância dos determinantes, ao relacionar determinante e permutação, o calculo do determinante se torna mais simples para matrizes quadradas de pequena ordem, do que por meio dos métodos tradicionais. Vale salientar, que para matrizes de ordem superior a três, torna-se muito trabalhoso esse calculo, tendo em vista que, para uma matriz quadrada de ordem n, em que, no caso de utilizarmos a permutação teremos $n!$ permutações a serem calculadas e no caso de métodos tradicionais teríamos que resolver $n!$ determinantes, que se torna trabalhoso, exigindo assim, cálculos computacionais. A utilização da permutação para o cálculo de determinante não algo novo, porém, esquecido, pois seus maiores avanços se deu com a utilização de permutação, muito embora pareçam assuntos desconexos e sem relação. É comum em matemática, observarmos o estudo para um objeto matemático com abordagens diferentes, mas que representam o mesmo objeto em estudo. No caso do estudo de determinantes podemos cálcula-los através de permutação e também fazer cálculos utilizando métodos tradicionais como o teorema de Laplace. Apesar de ambos os cálculos servirem ao mesmo propósito existe uma falta de conhecimento do cálculo de determinantes usando o método das permutações. Isso é fato, basta analisarmos os livros didáticos do ensino médio e do ensino superior. As conexões entre a matemática são deveras interessante, mas infelizmente nem sempre nos serão mostradas de forma convencional, principalmente na eduação brasileira, que busca preparar seus alunos para o ENEM.

REFERÊNCIAS

1 Boyer, C. B., *História da Matemática*, tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

2 Eves, H., *Introdução à História da Matemática*; tradução: Hygino H. Domingues. - Capinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

3 Lipschutz, S., Lipson, M., *Algebra Linear*; tradução: Dr. Claus Ivo Dovering.- 4 Ed. - Porto Alegre, RS: Editora Bookman, 2011.

4 Anton, H., Rorres, Chris *Algebra Linear com Aplicações*; tradução: Dr. Claus Ivo Dovering. - 10 Ed. - Porto Alegre, RS: Editora Bookman, 2012.

5 Domingues, Hygino H.; Iezzi, Gelson; *Álgebra Moderna*;Volume único - 4 Ed. - Porto Alegre, RS: Editora Bookman, 2012.

6 Hygino, H. D.; Callioli, Carlos A.; Costa, Roberto C. F.; *Álgebra linear e aplicações*, - 6 ed.rev. - São Paulo: Atual, 1990.

7 Flemming, Diva Marília; Gonçalves, Mirian Buss; *Cálculo B*, - 2 ed. - São Paulo: Person Prentice, 2007.

8 Boldini, José Luiz; Costa, Sueli I. Rodrigues; Figueiredo, Vera Lúcia; Wetzler, Henry G.; *Álgebra linear*, - 3 ed. - São Paulo: Harbra, 1986.

9 Smith, D. E.; Mikami, Yoshio; *A History of Japonese Mathematics*; Chicago - EUA, 1914.

10 Silva, Joab dos Santos; *Algebra Linear*; - 1 Ed. reform. - São Paulo, SP: Atual, 2003.

11 IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 1: Conjuntos e Funções*. 9. ed. São Paulo: Saraiva Didáticos, 2019. ISBN

12 SOUSA, Fábio Barros de; SABINO, Elizabeth Rego; SABINO, Elizete Rego. Abordagem histórica e conceitual sobre os sistemas de equações lineares e sua relação com matrizes e determinantes. *Jornada de Estudos em Matemática*, Marabá, v. 3, n. 1, p. 1–20, 2017. Disponível em: <https://jem.unifesspa.edu.br/images/3JEM/ABORDAGEM-HISTRICA-E-CONCEITUAL-SOBRE-OS-SISTEMAS-DE-EQUAES-LINEARES-pdf>. Acesso em: 22 abr. 2025.

13 SÁ, Fernanda Lúcia. *Estudo dos Determinantes*. 2020. Disponível em: <https://dalicenca.uff.br/wp-content/uploads/sites/204/2020/05/Estudo_dos_Determinantes.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2025.

<https://youtu.be/MFx644sU860?si=4D6Jz7TasIzZT0ZM>

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA
Campus Campina Grande - Código INEP: 25137409
R. Tranqüilino Coelho Lemos, 671, Dinamérica, CEP 58432-300, Campina Grande (PB)
CNPJ: 10.783.898/0003-37 - Telefone: (83) 2102.6200

Documento Digitalizado Ostensivo (Público)

Entrega do TCC

Assunto:	Entrega do TCC
Assinado por:	Raul Jefferson
Tipo do Documento:	Tese
Situação:	Finalizado
Nível de Acesso:	Ostensivo (Público)
Tipo do Conferência:	Cópia Simples

Documento assinado eletronicamente por:

- **Raul Jefferson Andrade Silva**, **DISCENTE (202111230010) DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - CAMPINA GRANDE**, em 27/08/2025 12:37:34.

Este documento foi armazenado no SUAP em 27/08/2025. Para comprovar sua integridade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifpb.edu.br/verificar-documento-externo/ e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 1587626
Código de Autenticação: 59a64bfc64